“INTEGRALES SINGULARES Y TEORÍA DE PESOS: UN MARIDAJE DE LO MÁS FRUCTÍFERO’

Carlos Pérez

Universidad del Pais Vasco y BCAM

Universidad Carlos III de Madrid

Leganés, 31-Enero-2018

- Los resultados principales se obtuvieron en colaboración con

- Los resultados principales se obtuvieron en colaboración con

Tuomas Hytönen

- Los resultados principales se obtuvieron en colaboración con

Tuomas Hytönen

- Los resultados principales se obtuvieron en colaboración con

Tuomas Hytönen

Daewon Chung & Cristina Pereyra

- Los resultados principales se obtuvieron en colaboración con

Tuomas Hytönen

Daewon Chung & Cristina Pereyra

- y otros resultados con

- Los resultados principales se obtuvieron en colaboración con

Tuomas Hytönen

Daewon Chung & Cristina Pereyra

- y otros resultados con

Teresa Luque & Ezequiel Rela

- Los resultados principales se obtuvieron en colaboración con

Tuomas Hytönen

Daewon Chung & Cristina Pereyra

- y otros resultados con

Teresa Luque & Ezequiel Rela

- relacionados con trabajos previos en colaboración con

- Los resultados principales se obtuvieron en colaboración con

Tuomas Hytönen

Daewon Chung & Cristina Pereyra

- y otros resultados con

Teresa Luque & Ezequiel Rela

- relacionados con trabajos previos en colaboración con

D. Cruz-Uribe, A. Lerner, J.M. Martell, S. Ombrosi, S. Treil, A. Volberg

Plan de la charla

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.
- Otros espacios: BMO y el fenómeno de la automejora.

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.
- Otros espacios: BMO y el fenómeno de la automejora.
- Conmutadores.

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.
- Otros espacios: BMO y el fenómeno de la automejora.
- Conmutadores.

2) El operador maximal

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.
- Otros espacios: BMO y el fenómeno de la automejora.
- Conmutadores.

2) El operador maximal

- Revisión de la teoria A_p clásica.

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.
- Otros espacios: BMO y el fenómeno de la automejora.
- Conmutadores.

2) El operador maximal

- Revisión de la teoria A_p clásica.
- Resultados nuevos: del teorema A_2 al teorema A_p (extrapolación).

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.
- Otros espacios: BMO y el fenómeno de la automejora.
- Conmutadores.

2) El operador maximal

- Revisión de la teoria A_p clásica.
- Resultados nuevos: del teorema A_2 al teorema A_p (extrapolación).
- Mejorando el teorema A_2, a los resultados mixtos $A_2 - A_\infty$.

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.
- Otros espacios: BMO y el fenómeno de la automejora.
- Conmutadores.

2) El operador maximal

- Revisión de la teoria A_p clásica.
- Resultados nuevos: del teorema A_2 al teorema A_p (extrapolación).
- Mejorando el teorema A_2, a los resultados mixtos $A_2 - A_\infty$.

3) Otros operadores Integrales Singulares

Plan de la charla

1) Las Integrales Singulares.

- Motivación. El mundo L^p
- Los operadores de Calderón-Zygmund.
- Otros espacios: BMO y el fenómeno de la automejora.
- Conmutadores.

2) El operador maximal

- Revisión de la teoria A_p clásica.
- Resultados nuevos: del teorema A_2 al teorema A_p (extrapolación).
- Mejorando el teorema A_2, a los resultados mixtos $A_2 - A_\infty$.

3) Otros operadores Integrales Singulares

- Conmutadores con funciones de BMO.

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

$$f \in L^1[0,1]$$

Series de Fourier: núcleos "buenos" y núcleos "malos"

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales:

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales: $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales: $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} = D_N * f(x)$

Series de Fourier: núcleos "buenos" y núcleos "malos"

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales: $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = D_N * f(x)$

$$D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$$

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales: $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad = D_N * f(x)$

$D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ el núcleo de **Dirichlet**

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales: $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = D_N * f(x)$

$D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ el núcleo de **Dirichlet** que es un **núcleo malo**

Series de Fourier: núcleos "buenos" y núcleos "malos"

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales: $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad = D_N * f(x)$

$D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ el núcleo de **Dirichlet** que es un **núcleo malo**

$$S_N f(x) \approx H f(x)$$

donde

Series de Fourier: núcleos “buenos” y núcleos “malos”

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales: $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} = D_N * f(x)$

$D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ el núcleo de **Dirichlet** que es un **núcleo malo**

$$S_N f(x) \approx H f(x)$$

donde

$$\boxed{Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy}$$

Series de Fourier: núcleos "buenos" y núcleos "malos"

$$f \in L^1[0,1]$$

Le asociamos su serie de Fourier

$$f \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Sumas parciales: $S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad = D_N * f(x)$

$D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ el núcleo de **Dirichlet** que es un **núcleo malo**

$$S_N f(x) \approx H f(x)$$

donde

$$\boxed{Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy}$$

La transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = n \star f(x)$$

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = n \star f(x)$$

$$\text{donde} \quad n(x) = \frac{1}{x}$$

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\,dy = n \star f(x)$$

$$\text{donde} \quad n(x) = \frac{1}{x}$$

que es un **núcleo malo**

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = n \star f(x)$$

$$\text{donde} \quad n(x) = \frac{1}{x}$$

que es un **núcleo malo**

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = n \star f(x)$$

$$\text{donde} \quad n(x) = \frac{1}{x}$$

que es un **núcleo malo**

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

i.e.

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = n \star f(x)$$

$$\text{donde} \quad n(x) = \frac{1}{x}$$

que es un **núcleo malo**

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

i.e.

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

La transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\,dy = n \star f(x)$$

$$\text{donde} \quad n(x) = \frac{1}{x}$$

que es un **núcleo malo**

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

i.e.

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

- la cancelación

El mundo L^p

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es

$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es

$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es

$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

y se estudia la convergencia L^p:

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es

$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

y se estudia la convergencia L^p: $\qquad \|\sigma_N f - f\|_{L^p} \to 0$

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es
$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

y se estudia la convergencia L^p: $\quad \|\sigma_N f - f\|_{L^p} \to 0$

$\sigma_N f(x) = F_N * f(x)$

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es
$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

y se estudia la convergencia L^p: $\quad \|\sigma_N f - f\|_{L^p} \to 0$

$\sigma_N f(x) = F_N * f(x)$ $\qquad F_N$ es el **núcleo de Fejer**

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es $$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

y se estudia la convergencia L^p: $\|\sigma_N f - f\|_{L^p} \to 0$

$\sigma_N f(x) = F_N * f(x)$ F_N es el **núcleo de Fejer**

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right)^2$$

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es $\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

y se estudia la convergencia L^p: $\|\sigma_N f - f\|_{L^p} \to 0$

$\sigma_N f(x) = F_N * f(x)$ F_N es el **núcleo de Fejer**

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right)^2$$

es un **núcleo bueno,**

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es
$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

y se estudia la convergencia L^p: $\quad \|\sigma_N f - f\|_{L^p} \to 0$

$\sigma_N f(x) = F_N * f(x)$ $\qquad$ F_N es el **núcleo de Fejer**

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right)^2$$

es un **núcleo bueno,** $\qquad$ es una ”aproximación de la identidad”.

El mundo L^p

$$S_N f \to f \qquad \text{in } L^p$$

esto es
$$\|S_N f - f\|_{L^p} \to 0$$

Una variante: **Las sumas de Cesaro**

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_N f$$

y se estudia la convergencia L^p: $\|\sigma_N f - f\|_{L^p} \to 0$

$\sigma_N f(x) = F_N * f(x)$ F_N es el **núcleo de Fejer**

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)} \right)^2$$

es un **núcleo bueno,** es una ”aproximación de la identidad”.

Intimamente relacionado con la **función maximal de Hardy-Littlewood**.

El operador de Laplace

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $\qquad n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $\qquad n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

La pregunta es: si $f \in X$

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $\qquad n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

La pregunta es: si $f \in X$ encontrar el espacio Y tal que

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $\quad n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

La pregunta es: si $f \in X$ encontrar el espacio Y tal que $u \in Y$

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $\qquad n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

La pregunta es: si $f \in X$ encontrar el espacio Y tal que $u \in Y$

- Y suele ser un espacio de Sobolev

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

La pregunta es: si $f \in X$ encontrar el espacio Y tal que $u \in Y$

- Y suele ser un espacio de Sobolev

Punto clave,

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $\qquad n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

La pregunta es: si $f \in X$ encontrar el espacio Y tal que $u \in Y$

- Y suele ser un espacio de Sobolev

Punto clave, analizar las **segundas derivadas** de u:

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

La pregunta es: si $f \in X$ encontrar el espacio Y tal que $u \in Y$

- Y suele ser un espacio de Sobolev

Punto clave, analizar las **segundas derivadas** de u:

$$\boxed{f \in X \quad \text{implica} \quad D^2 u \in X}$$

El operador de Laplace

Consideramos la **ecuación de Poisson** en $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = f$$

La solución viene dada por el **potencial de Newton**

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy = n \star f(x)$$

con $n(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

La pregunta es: si $f \in X$ encontrar el espacio Y tal que $u \in Y$

- Y suele ser un espacio de Sobolev

Punto clave, analizar las **segundas derivadas** de u:

$$\boxed{f \in X \quad \text{implica} \quad D^2 u \in X}$$

Ejemplo principal $X = L^p(\mathbb{R}^n)$

Motivación: Las transformadas de Riesz

Podemos calcular

Motivación: Las transformadas de Riesz

Podemos calcular

$$\partial^2_{i,j} u(x) = c \int_{\mathbb{R}^n} k_{i,j}(x-y) f(y)\, dy$$

Motivación: Las transformadas de Riesz

Podemos calcular

$$\partial^2_{i,j}u(x) = c\int_{\mathbb{R}^n} k_{i,j}(x-y)f(y)\,dy$$

$$k_{i,j}(x) = c\,\frac{x_i}{|x|}\,\frac{x_j}{|x|}\frac{1}{|x|^n}$$

Motivación: Las transformadas de Riesz

Podemos calcular

$$\partial^2_{i,j}u(x) = c\int_{\mathbb{R}^n} k_{i,j}(x-y)f(y)\,dy$$

$$k_{i,j}(x) = c\,\frac{x_i}{|x|}\,\frac{x_j}{|x|}\frac{1}{|x|^n}$$

$k_{i,j}$ es otra vez un núcleo que **NO** es localmente integrable.

Motivación: Las transformadas de Riesz

Podemos calcular

$$\partial^2_{i,j} u(x) = c \int_{\mathbb{R}^n} k_{i,j}(x-y) f(y)\, dy$$

$$k_{i,j}(x) = c\, \frac{x_i}{|x|}\, \frac{x_j}{|x|} \frac{1}{|x|^n}$$

$k_{i,j}$ es otra vez un núcleo que **NO** es localmente integrable.

Estos operadores son esencialmente las **TRANSFORMADAS DE RIESZ:**

Motivación: Las transformadas de Riesz

Podemos calcular

$$\partial^2_{i,j} u(x) = c \int_{\mathbb{R}^n} k_{i,j}(x-y) f(y)\, dy$$

$$k_{i,j}(x) = c\, \frac{x_i}{|x|}\, \frac{x_j}{|x|} \frac{1}{|x|^n}$$

$k_{i,j}$ es otra vez un núcleo que **NO** es localmente integrable.

Estos operadores son esencialmente las **TRANSFORMADAS DE RIESZ:**

$$\boxed{R_j f(x) = c_n \,\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \qquad j = 1, \cdots, n}$$

Motivación: Las transformadas de Riesz

Podemos calcular

$$\partial^2_{i,j} u(x) = c \int_{\mathbb{R}^n} k_{i,j}(x-y) f(y)\, dy$$

$$k_{i,j}(x) = c \, \frac{x_i}{|x|} \, \frac{x_j}{|x|} \frac{1}{|x|^n}$$

$k_{i,j}$ es otra vez un núcleo que **NO** es localmente integrable.

Estos operadores son esencialmente las **TRANSFORMADAS DE RIESZ:**

$$\boxed{R_j f(x) = c_n \,\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \qquad j = 1, \cdots, n}$$

- El caso $n = 1$ corresponde con la transformada de Hilbert.

Integrales singulares de convolución.

Integrales singulares de convolución.

$$\boxed{D^2u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy}$$

Integrales singulares de convolución.

$$\boxed{D^2u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy}$$

donde K es un núcleo ”singular” en $\mathbb{R}^n$.

Integrales singulares de convolución.

$$\boxed{D^2u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy}$$

donde K es un núcleo ”singular” en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

Integrales singulares de convolución.

$$\boxed{D^2u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy}$$

donde K es un núcleo "singular" en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

• (A) **Propiedad de cancelación:** $\boxed{\int_{a<|x|<b} k(x)\,dx = 0}$

lo cual implica:

Integrales singulares de convolución.

$$\boxed{D^2u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy}$$

donde K es un núcleo ”singular” en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

• (A) **Propiedad de cancelación:** $\boxed{\int_{a<|x|<b} k(x)\,dx = 0}$

lo cual implica:

$$\boxed{\widehat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

esto es:

Integrales singulares de convolución.

$$\boxed{D^2u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy}$$

donde K es un núcleo "singular" en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

• (A) **Propiedad de cancelación:** $\boxed{\int_{a<|x|<b} k(x)\,dx = 0}$

lo cual implica:

$$\boxed{\widehat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

esto es: $\boxed{T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)}$

Integrales singulares de convolución.

$$\boxed{D^2u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy}$$

donde K es un núcleo ”singular” en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

• (A) **Propiedad de cancelación:** $\boxed{\int_{a<|x|<b} k(x)\,dx = 0}$

lo cual implica:

$$\boxed{\widehat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

esto es: $\boxed{T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)}$

• (B) **Tamaño critico:** $\boxed{|K(x)| \leq \dfrac{C}{|x|^n}}$

Integrales singulares de convolución.

$$\boxed{D^2u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy}$$

donde K es un núcleo ”singular” en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

• (A) **Propiedad de cancelación:** $\boxed{\int_{a<|x|<b} k(x)\,dx = 0}$

lo cual implica:

$$\boxed{\widehat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

esto es: $\boxed{T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)}$

• (B) **Tamaño critico:** $\boxed{|K(x)| \le \frac{C}{|x|^n}}$

• (C) **Regularidad:** $\boxed{|\nabla K(x)| \le \frac{C}{|x|^{n+1}}}$

Ejemplos

Ejemplos

Las Transformadas de Riesz:

$$\boxed{R_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \qquad j = 1, \ldots, n.}$$

Ejemplos

Las Transformadas de Riesz:

$$\boxed{R_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\, f(y)\, dy \qquad j = 1, \ldots, n.}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

Ejemplos

Las Transformadas de Riesz:

$$\boxed{R_jf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \qquad j = 1, \ldots, n.}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)$$

Ejemplos

Las Transformadas de Riesz:

$$\boxed{R_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \qquad j = 1, \ldots, n.}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi) \qquad \widehat{Hf}(\xi) = -\mathrm{sign}(\xi)\widehat{f}(\xi) \qquad (n=1)$$

Ejemplos

Las Transformadas de Riesz:

$$\boxed{R_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \qquad j = 1, \ldots, n.}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi) \qquad\qquad \widehat{Hf}(\xi) = -\mathrm{sign}(\xi)\widehat{f}(\xi) \qquad (n=1)$$

- **La transformada de Ahlfors-Beurling:**

Ejemplos

Las Transformadas de Riesz:

$$\boxed{R_jf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\,dy \qquad j = 1, \ldots, n.}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi) \qquad\qquad \widehat{Hf}(\xi) = -\mathrm{sign}(\xi)\widehat{f}(\xi) \qquad (n=1)$$

- **La transformada de Ahlfors-Beurling:**

$$\boxed{Bf(z) = \frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\,d\omega}$$

Ejemplos

Las Transformadas de Riesz:

$$\boxed{R_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \qquad j = 1, \ldots, n.}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi) \qquad\qquad \widehat{Hf}(\xi) = -\mathrm{sign}(\xi)\widehat{f}(\xi) \qquad (n=1)$$

• **La transformada de Ahlfors-Beurling:**

$$\boxed{Bf(z) = \frac{1}{\pi}\text{p.v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\, d\omega}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

Ejemplos

Las Transformadas de Riesz:

$$\boxed{R_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\,dy \qquad j = 1, \ldots, n.}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi) \qquad \widehat{Hf}(\xi) = -\text{sign}(\xi)\widehat{f}(\xi) \qquad (n=1)$$

- **La transformada de Ahlfors-Beurling:**

$$\boxed{Bf(z) = \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2}\,d\omega}$$

y desde el punto de vista de Fourier:

$$\widehat{Bf}(\xi) = -\frac{\bar{\xi}}{\xi}\widehat{f}(\xi)$$

El caso no convolución

Uno de los ejemplos principales viene dado por los
operadores Pseudodiferenciales

El caso no convolución

Uno de los ejemplos principales viene dado por los operadores Pseudodiferenciales

$$\boxed{Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi}$$

El caso no convolución

Uno de los ejemplos principales viene dado por los operadores Pseudodiferenciales

$$\boxed{Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi}$$

donde $$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

El caso no convolución

Uno de los ejemplos principales viene dado por los operadores Pseudodiferenciales

$$\boxed{Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi}$$

donde $$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

Todos estos ejemplos son casos especiales de lo que se conoce como

El caso no convolución

Uno de los ejemplos principales viene dado por los operadores Pseudodiferenciales

$$\boxed{Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi}$$

donde $$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

Todos estos ejemplos son casos especiales de lo que se conoce como

Operadores de Calderón-Zygmund:

El caso no convolución

Uno de los ejemplos principales viene dado por los
operadores Pseudodiferenciales

$$\boxed{Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi}$$

donde $$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

Todos estos ejemplos son casos especiales de lo que se conoce como

Operadores de Calderón-Zygmund:

$$\boxed{Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\,f(y)\,dy}$$

El caso no convolución

Uno de los ejemplos principales viene dado por los
operadores Pseudodiferenciales

$$\boxed{Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,d\xi}$$

donde $$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

Todos estos ejemplos son casos especiales de lo que se conoce como

Operadores de Calderón-Zygmund:

$$\boxed{Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\,f(y)\,dy}$$

• Muchas aplicaciones en: EDP (regularidad eliptica, dominios no suaves); teoria de operadores; anáiisis complejo, teoria de la señal etc

Más ejemplos

Más ejemplos

El conumtador de Calderón:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{a(x) - a(y)}{x - y} \frac{f(y)}{x - y} \, dy$$

Más ejemplos

El conumtador de Calderón:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{a(x)-a(y)}{x-y}\frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

donde a is una función **Lipschitz**.

Más ejemplos

El conumtador de Calderón:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{a(x) - a(y)}{x - y} \frac{f(y)}{x - y} \, dy$$

donde a is una función **Lipschitz**.

Relacionado con **la transformada de Cauchy:**

$$\mathcal{C}f(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{z - \xi} \, d(\xi)$$

Más ejemplos

El conumtador de Calderón:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{a(x) - a(y)}{x - y} \frac{f(y)}{x - y}\, dy$$

donde a is una función **Lipschitz**.

Relacionado con **la transformada de Cauchy:**

$$\mathcal{C}f(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{z - \xi}\, d(\xi)$$

donde Γ es una curva de **Lipschitz**.

Más ejemplos

El conumtador de Calderón:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{a(x)-a(y)}{x-y} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

donde a is una función **Lipschitz.**

Relacionado con **la transformada de Cauchy:**

$$\mathcal{C}f(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{z-\xi}\, d(\xi)$$

donde Γ es una curva de **Lipschitz.**

Dificultad: **no hay teoria L^2 Inmediata porque no son de convolución**

Más ejemplos

El conumtador de Calderón:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{a(x) - a(y)}{x-y} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

donde a is una función **Lipschitz.**

Relacionado con **la transformada de Cauchy:**

$$\mathcal{C}f(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{z-\xi}\, d(\xi)$$

donde Γ es una curva de **Lipschitz.**

Dificultad: **no hay teoria L^2 Inmediata porque no son de convolución**

Teorema $T1$ de David-Journé

La escuela de Chicago: A. P. Calderón y A. Zygmund

Thm Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y como consecuencia

La escuela de Chicago: A. P. Calderón y A. Zygmund

Thm Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y como consecuencia

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 < p < \infty$$

La escuela de Chicago: A. P. Calderón y A. Zygmund

Thm Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y como consecuencia

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 < p < \infty$$

Aplicación a $\Delta u = f$

La escuela de Chicago: A. P. Calderón y A. Zygmund

Thm Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y como consecuencia

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 < p < \infty$$

Aplicación a $\Delta u = f$

si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$

La escuela de Chicago: A. P. Calderón y A. Zygmund

Thm Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y como consecuencia

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 < p < \infty$$

Aplicación a $\Delta u = f$

si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$ entonces $D^2 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$

La escuela de Chicago: A. P. Calderón y A. Zygmund

Thm Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y como consecuencia

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 < p < \infty$$

Aplicación a $\Delta u = f$

si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$ entonces $D^2u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i.e. $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$

La escuela de Chicago: A. P. Calderón y A. Zygmund

Thm Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y como consecuencia

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 < p < \infty$$

Aplicación a $\Delta u = f$

si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$ entonces $D^2 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i.e. $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$

De forma similar, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

La escuela de Chicago: A. P. Calderón y A. Zygmund

Thm Sea T un operador de Calderón-Zygmund, entonces:

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

y como consecuencia

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \qquad 1 < p < \infty$$

Aplicación a $\Delta u = f$

si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$ entonces $D^2 u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i.e. $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$

De forma similar, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $D^2 u \in L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

• **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^{∞} ?**

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

- **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^∞ ?**
- Ejemplo: $H(\chi_{(0,1)})(x) = c \log |x|$

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

- **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^∞ ?**

- Ejemplo: $H(\chi_{(0,1)})(x) = c \log |x|$

Este espacio está ligado al concepto de oscilación:

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

- **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^∞ ?**

- Ejemplo: $H(\chi_{(0,1)})(x) = c \log |x|$

Este espacio está ligado al concepto de oscilación:

Definición

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|\, dy < \infty$$

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

• **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^∞ ?**

• Ejemplo: $H(\chi_{(0,1)})(x) = c \log|x|$

Este espacio está ligado al concepto de oscilación:

Definición

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|\,dy < \infty$$

• Famoso por el **teorema de John-Nirenberg**

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

- **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^∞ ?**

- Ejemplo: $H(\chi_{(0,1)})(x) = c\,\log|x|$

Este espacio está ligado al concepto de oscilación:

Definición

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|\,dy < \infty$$

- Famoso por el **teorema de John-Nirenberg**

Ejemplos:

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

- **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^∞ ?**

- Ejemplo: $H(\chi_{(0,1)})(x) = c \log |x|$

Este espacio está ligado al concepto de oscilación:

Definición

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|\, dy < \infty$$

- Famoso por el **teorema de John-Nirenberg**

Ejemplos: 1) $\log |x| \in B.M.O.$

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

- **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^∞ ?**

- Ejemplo: $H(\chi_{(0,1)})(x) = c \log |x|$

Este espacio está ligado al concepto de oscilación:

Definición

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| \, dy < \infty$$

- Famoso por el **teorema de John-Nirenberg**

Ejemplos: 1) $\log |x| \in B.M.O.$ 2) $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$

El espacio $B.M.O.$ de John-Nirenberg

• **¿ Cómo se comportan estos operadores en L^∞ ?**

• Ejemplo: $H(\chi_{(0,1)})(x) = c \log |x|$

Este espacio está ligado al concepto de oscilación:

Definición

$$\|f\|_{BMO} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|\, dy < \infty$$

• Famoso por el **teorema de John-Nirenberg**

Ejemplos: 1) $\log |x| \in B.M.O.$ 2) $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$

Teorema Si T es un operador de Calderón-Zygmund:

$$T : L^\infty_c(\mathbb{R}^n) \to B.M.O.(\mathbb{R}^n)$$

Conmutadores y BMO

Conmutadores y BMO

Si b es una función y T es lineal consideramos

$$[b, T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

Conmutadores y BMO

Si b es una función y T es lineal consideramos

$$[b,T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

Si T tiene núcleo K:

Conmutadores y BMO

Si b es una función y T es lineal consideramos

$$[b,T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

Si T tiene núcleo K:

$$\boxed{[b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x)-b(y))K(x-y)\,f(y)\,dy,}$$

Conmutadores y BMO

Si b es una función y T es lineal consideramos

$$[b,T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

Si T tiene núcleo K:

$$\boxed{[b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x)-b(y))K(x-y)\,f(y)\,dy,}$$

que en el caso de la transformada de Hilbert:

Conmutadores y BMO

Si b es una función y T es lineal consideramos

$$[b,T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

Si T tiene núcleo K:

$$\boxed{[b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x)-b(y))K(x-y)\,f(y)\,dy,}$$

que en el caso de la transformada de Hilbert:

$$[b,H]f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{b(x)-b(y)}{x-y}\,f(y)\,dy$$

Conmutadores y BMO

Si b es una función y T es lineal consideramos

$$[b,T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

Si T tiene núcleo K:

$$\boxed{[b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x)-b(y))K(x-y)\,f(y)\,dy,}$$

que en el caso de la transformada de Hilbert:

$$[b,H]f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{b(x)-b(y)}{x-y}\,f(y)\,dy$$

(Coifman-Rochberg-Weiss (1976))

$$[b,H] : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad b \in BMO(\mathbb{R})$$

Conmutadores y BMO

Si b es una función y T es lineal consideramos

$$[b,T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

Si T tiene núcleo K:

$$\boxed{[b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x)-b(y))K(x-y)\,f(y)\,dy,}$$

que en el caso de la transformada de Hilbert:

$$[b,H]f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{b(x)-b(y)}{x-y}\,f(y)\,dy$$

(Coifman-Rochberg-Weiss (1976))

$$[b,H] : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad b \in BMO(\mathbb{R})$$

Si T es un un operador de Calderón-Zygmund y si $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$:

$$\|[b,T]\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|b\|_{B.M.O.}$$

Otras versiones

Otras versiones

- Si iteramos m veces el conmutador:

Otras versiones

- Si iteramos m veces el conmutador:

$$\overbrace{[b, \cdot\cdot, [b, T]]}^{(m\, veces)} = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K(x-y) f(y)\, dy.$$

Otras versiones

- Si iteramos m veces el conmutador:

$$\overbrace{[b, \cdot\cdot, [b, T]]}^{(m\,veces)} = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K(x-y) f(y)\, dy.$$

Son operadores más **singulares**

Otras versiones

• Si iteramos m veces el conmutador:

$$\overbrace{[b, \cdot\cdot, [b, T]]}^{(m\,veces)} = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K(x-y) f(y)\, dy.$$

Son operadores más **singulares**

• De forma más general si: $\vec{b} = (b_1, \cdot\cdot, b_m)$,

Otras versiones

• Si iteramos m veces el conmutador:

$$\overbrace{[b, \cdot\cdot, [b, T]]}^{(m\, veces)} = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^m K(x-y) f(y)\, dy.$$

Son operadores más **singulares**

• De forma más general si: $\vec{b} = (b_1, \cdot\cdot, b_m)$,

$$T_{\vec{b}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b_1(x) - b_1(y)) \cdots (b_m(x) - b_m(y)) K(x-y) f(y) dy.$$

El operador maximal de Hardy–Littlewood

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$$

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \;\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\,dy \ \approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clásicos:

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \;\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy$$

Resultados clásicos:

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$$

y

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \ \approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clásicos:

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$$

y

$$M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \;\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clásicos:

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$$

y

$$M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

• Operador central por muchas razones:

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \;\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clásicos:

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$$

y

$$M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

• Operador central por muchas razones:

• 1) **Teorema de diferenciacion de Lebesgue.**

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \;\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clásicos:

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$$

y

$$M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

• Operador central por muchas razones:

• 1) **Teorema de diferenciacion de Lebesgue.**

• 2) Se usa para **caracterizar los espacios de Sobolev spaces** $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$**:**

El operador maximal de Hardy–Littlewood

Está definido por la expresión

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \;\approx \sup_{r>o} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|\,dy$$

Resultados clásicos:

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p \leq \infty$$

y

$$M : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

• Operador central por muchas razones:

• 1) **Teorema de diferenciacion de Lebesgue.**

• 2) Se usa para **caracterizar los espacios de Sobolev spaces** $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$**:**

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|(M(|\nabla f|)(x) + M(|\nabla f|)(x))$$

Teoria de pesos

Teoria de pesos

C. Fefferman & E.M. Stein (1971)

Teoria de pesos

C. Fefferman & E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

Teoria de pesos

C. Fefferman & E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

- Define la clase A_1 de pesos

Teoria de pesos

C. Fefferman & E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

- Define la clase A_1 de pesos $\quad M(w)(x) \leq C\, w(x)$

Teoria de pesos

C. Fefferman & E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

- Define la clase A_1 de pesos $\quad M(w)(x) \leq C\, w(x)$
- Una de las consecuencias más importantes:

Teoria de pesos

C. Fefferman & E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

• Define la clase A_1 de pesos $\quad M(w)(x) \leq C\, w(x)$

• Una de las consecuencias más importantes:

Extensión vectorial del teorema L^p maximal:

Teoria de pesos

C. Fefferman & E.M. Stein (1971)

Teorema

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(w)} \leq c_n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx \qquad w \geq 0.$$

• Define la clase A_1 de pesos $\quad M(w)(x) \leq C\, w(x)$

• Una de las consecuencias más importantes:

Extensión vectorial del teorema L^p maximal:

Teorema Si $1 < p, q < \infty$,

$$\left\| \Big(\sum_j (Mf_j)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \Big(\sum_j |f_j|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

La condicion A_p de Muckenhoupt

La condicion A_p de Muckenhoupt

Teorema (B. Muckenhoupt (1971)

Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$M : L^p(w) \longrightarrow L^p(w)$$

si y sólo si

La condicion A_p de Muckenhoupt

Teorema (B. Muckenhoupt (1971))

Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$M : L^p(w) \longrightarrow L^p(w)$$

si y sólo si

w satisface la condición A_p:

$$\boxed{[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} < \infty}$$

La condicion A_p de Muckenhoupt

Teorema (B. Muckenhoupt (1971))
Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$M : L^p(w) \longrightarrow L^p(w)$$

si y sólo si
w satisface la condición A_p:

$$\boxed{[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\, dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}\, dx\right)^{p-1} < \infty}$$

El caso $p = 2$ es especialmente útil:

$$\boxed{[w]_{A_2} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\, dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1}\, dx\right)}$$

La condicion A_p de Muckenhoupt

Teorema (B. Muckenhoupt (1971))
Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$M : L^p(w) \longrightarrow L^p(w)$$

si y sólo si
w satisface la condición A_p:

$$\boxed{[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} < \infty}$$

El caso $p = 2$ es especialmente útil:

$$\boxed{[w]_{A_2} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1}\,dx\right)}$$

Siempre se tiene $\qquad [w]_{A_p} \geq 1$

El teorema de Buckley

El teorema de Buckley

Version óptima del teorema de Muckenhoupt

El teorema de Buckley

Version óptima del teorema de Muckenhoupt

Teorema (S. Buckley $\approx$ 1990)

El teorema de Buckley

Version óptima del teorema de Muckenhoupt

Teorema (S. Buckley $\approx$ 1990)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \le c_n\, p'\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}}$$

El teorema de Buckley

Version óptima del teorema de Muckenhoupt

Teorema (S. Buckley $\approx$ 1990)
Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n\, p'\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}}$$

Además, el exponente es óptimo: $\frac{1}{p-1}$ no puede ser sustituido por $\frac{1}{p-1} - \epsilon$

El teorema de Buckley

Version óptima del teorema de Muckenhoupt

Teorema (S. Buckley $\approx$ 1990)
Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_n\, p'\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}}$$

Además, el exponente es óptimo: $\frac{1}{p-1}$ no puede ser sustituido por $\frac{1}{p-1} - \epsilon$

- Análisis armónico cuantitativo

Pesos y ecuaciones elipticas degeneradas

Pesos y ecuaciones elipticas degeneradas

Se considear el operador diferencial

$$Lu = div(A(x).\nabla u)$$

donde A satisface la condición eliptica degenerada:

Pesos y ecuaciones elipticas degeneradas

Se considear el operador diferencial

$$Lu = div(A(x).\nabla u)$$

donde A satisface la condición eliptica degenerada:

$$\frac{1}{c}\,|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi.\xi \leq c|\xi|^2 w(x)$$

Pesos y ecuaciones elipticas degeneradas

Se considear el operador diferencial

$$Lu = div(A(x).\nabla u)$$

donde A satisface la condición eliptica degenerada:

$$\frac{1}{c}\,|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi.\xi \leq c|\xi|^2 w(x)$$

donde w es un peso con algún tipo de singularidad. Contexto de Fabes-Kenig-Serapioni.

Pesos y ecuaciones elipticas degeneradas

Se considear el operador diferencial

$$Lu = div(A(x).\nabla u)$$

donde A satisface la condición eliptica degenerada:

$$\frac{1}{c}\,|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi.\xi \leq c|\xi|^2 w(x)$$

donde w es un peso con algún tipo de singularidad. Contexto de Fabes-Kenig-Serapioni.

• Objetivo: regularidad de las soluciones.

Pesos y ecuaciones elipticas degeneradas

Se considear el operador diferencial

$$Lu = div(A(x).\nabla u)$$

donde A satisface la condición eliptica degenerada:

$$\frac{1}{c}|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi.\xi \leq c|\xi|^2 w(x)$$

donde w es un peso con algún tipo de singularidad. Contexto de Fabes-Kenig-Serapioni.

• Objetivo: regularidad de las soluciones.

$$Lu = 0$$

Pesos y ecuaciones elipticas degeneradas

Se considear el operador diferencial

$$Lu = div(A(x).\nabla u)$$

donde A satisface la condición eliptica degenerada:

$$\frac{1}{c}|\xi|^2 w(x) \leq A(x)\xi.\xi \leq c|\xi|^2 w(x)$$

donde w es un peso con algún tipo de singularidad. Contexto de Fabes-Kenig-Serapioni.

• Objetivo: regularidad de las soluciones.

$$Lu = 0$$

La teoria clásica se debe a: DiGiorgi, Nash, Moser (décadas de los 50 y 60.)

Desigualdades de Poincaré-Sobolev “degeneradas”

Desigualdades de Poincaré-Sobolev “degeneradas”

Hay dos puntos claves en el **método ”iterativo” de Moser:**

Desigualdades de Poincaré-Sobolev “degeneradas”

Hay dos puntos claves en el **método ”iterativo” de Moser:**

La desigualdad de Poincaré:

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f-f_Q|^2 w\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\,\ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^2 w\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Desigualdades de Poincaré-Sobolev “degeneradas”

Hay dos puntos claves en el **método ”iterativo” de Moser:**

La desigualdad de Poincaré:

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f-f_Q|^2 w\right)^{\frac{1}{2}} \le C\,\ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^2 w\right)^{\frac{1}{2}}.$$

y las de Poincaré-Sobolev: existe $\varepsilon > 0$

Desigualdades de Poincaré-Sobolev “degeneradas”

Hay dos puntos claves en el **método ”iterativo” de Moser:**

La desigualdad de Poincaré:

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f-f_Q|^2 w\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\,\ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^2 w\right)^{\frac{1}{2}}.$$

y las de Poincaré-Sobolev: existe $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f-f_Q|^{2+\varepsilon} w\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \leq C\,\ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^2 w\right)^{1/2}$$

Desigualdades de Poincaré-Sobolev “degeneradas”

Hay dos puntos claves en el **método ”iterativo” de Moser:**

La desigualdad de Poincaré:

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f-f_Q|^2 w\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\,\ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^2 w\right)^{\frac{1}{2}}.$$

y las de Poincaré-Sobolev: existe $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f-f_Q|^{2+\varepsilon} w\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \leq C\,\ell(Q)\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q |\nabla f|^2 w\right)^{1/2}$$

• **que son ciertas si** $w \in A_2$

Las condición A_∞

Las condición A_∞

- Las clases A_p son crecientes:

Las condición A_∞

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

Las condición A_∞

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural pues definir:

Las condición A_∞

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural pues definir: $A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$

Las condición A_∞

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural pues definir: $A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$

- satisfacen la propiedad que se conoce como:

Las condición A_∞

• Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

• Es natural pues definir: $A_\infty = \cup_{p \geq 1} A_p$

• satisfacen la propiedad que se conoce como:

desigualdad de Hölder al revés: existen $r, c > 1$

Las condición A_∞

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural pues definir: $A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$

- satisfacen la propiedad que se conoce como:

desigualdad de Hölder al revés: existen $r, c > 1$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q w\,dx$$

Las condición A_∞

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \le p \le q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural pues definir: $A_\infty = \cup_{p\ge 1} A_p$

- satisfacen la propiedad que se conoce como:

desigualdad de Hölder al revés: existen $r, c > 1$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \frac{c}{|Q|}\int_Q w\,dx$$

- w satisface la condición de Fujii-Wilson

Las condición A_∞

- Las clases A_p son crecientes:

$$1 \leq p \leq q < \infty \quad \Rightarrow \quad A_p \subset A_q$$

- Es natural pues definir: $A_\infty = \cup_{p\geq 1} A_p$

- satisfacen la propiedad que se conoce como:

desigualdad de Hölder al revés: existen $r, c > 1$

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{c}{|Q|}\int_Q w\,dx$$

- w satisface la condición de Fujii-Wilson

$$\boxed{[w]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)}\int_Q M(w\chi_Q)\,dx}$$

La RHI optimal

La RHI optimal

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $w \in A_\infty$. Entonces, si $\delta = \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$, con τ_n apropiado

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w$$

La RHI optimal

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $w \in A_\infty$. Entonces, si $\delta = \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$, con τ_n apropiado

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w$$

- el resultado es esencialmente el mejor posible: $[w]_{A_\infty}$

La RHI optimal

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $w \in A_\infty$. Entonces, si $\delta = \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$, con τ_n apropiado

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w$$

• el resultado es esencialmente el mejor posible: $[w]_{A_\infty}$

Corolario (la propiedad de la apertura óptima)

Si $w \in A_p$ entonces

La RHI optimal

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $w \in A_\infty$. Entonces, si $\delta = \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$, con τ_n apropiado

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1+\delta} \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{2}{|Q|} \int_Q w$$

• el resultado es esencialmente el mejor posible: $[w]_{A_\infty}$

Corolario (la propiedad de la apertura óptima)

Si $w \in A_p$ entonces

$$w \in A_{p-\epsilon}$$

La RHI optimal

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $w \in A_\infty$. Entonces, si $\delta = \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$, con τ_n apropiado

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w$$

- el resultado es esencialmente el mejor posible: $[w]_{A_\infty}$

Corolario (la propiedad de la apertura óptima)

Si $w \in A_p$ entonces

$$w \in A_{p-\epsilon}$$

donde

$$\epsilon \approx \frac{p-1}{[w^{1-p'}]_{A_\infty}}$$

La RHI optimal

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $w \in A_\infty$. Entonces, si $\delta = \frac{1}{\tau_n [w]_{A_\infty}}$, con τ_n apropiado

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \frac{2}{|Q|}\int_Q w$$

- el resultado es esencialmente el mejor posible: $[w]_{A_\infty}$

Corolario (la propiedad de la apertura óptima)

Si $w \in A_p$ entonces

$$w \in A_{p-\epsilon}$$

donde

$$\epsilon \approx \frac{p-1}{[w^{1-p'}]_{A_\infty}}$$

con

$$[w]_{A_{p-\varepsilon}} \approx [w]_{A_p}$$

Primer resultado reciente: mejora del teorema de Buckley.

Primer resultado reciente: mejora del teorema de Buckley.

Recordemos el teorema de Buckley: $\|M\|_{L^p(w)} \leq c_p\,[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$

Primer resultado reciente: mejora del teorema de Buckley.

Recordemos el teorema de Buckley: $\|M\|_{L^p(w)} \leq c_p\,[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$. Si $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p} \left([w]_{A_p}[\sigma]_{A_\infty}\right)^{1/p}}$$

Primer resultado reciente: mejora del teorema de Buckley.

Recordemos el teorema de Buckley: $\|M\|_{L^p(w)} \leq c_p\,[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$. Si $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p}\left([w]_{A_p}[\sigma]_{A_\infty}\right)^{1/p}}$$

• Otro tipo de resultados dentro del Análisis cuantitativo.

Primer resultado reciente: mejora del teorema de Buckley.

Recordemos el teorema de Buckley: $\|M\|_{L^p(w)} \leq c_p\,[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$. Si $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p}\left([w]_{A_p}[\sigma]_{A_\infty}\right)^{1/p}}$$

- Otro tipo de resultados dentro del Análisis cuantitativo.
- Este resultado permite recuperar el teorema de Buckley.

Primer resultado reciente: mejora del teorema de Buckley.

Recordemos el teorema de Buckley: $\|M\|_{L^p(w)} \leq c_p \, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$

Teorema (T. Hytönen y C. P.)

Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$. Si $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$, entonces

$$\boxed{\|M\|_{L^p(w)} \leq c_{n,p} \left([w]_{A_p}[\sigma]_{A_\infty}\right)^{1/p}}$$

• Otro tipo de resultados dentro del Análisis cuantitativo.

• Este resultado permite recuperar el teorema de Buckley.

• Este resultado constituye un ejemplo modelo para abordar operadores más dificiles.

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

Este resultado fue mejorado muy notablemente:

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \iff w \in A_p$$

Este resultado fue mejorado muy notablemente:

Teorema R. Coifman y C. Fefferman ($\approx$ 1974)
Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Sean $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$.
Entonces existe una constante c tal que

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

Este resultado fue mejorado muy notablemente:

Teorema R. Coifman y C. Fefferman ($\approx$ 1974)
Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Sean $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$.
Entonces existe una constante c tal que

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c\,\|Mf\|_{L^p(w)}$$

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

Este resultado fue mejorado muy notablemente:

Teorema R. Coifman y C. Fefferman ($\approx$ 1974)
Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Sean $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$.
Entonces existe una constante c tal que

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c\,\|Mf\|_{L^p(w)}$$

la prueba se basa en la técnica de las buenas "λ"

El teorema de Hunt-Muckenhoupt-Wheeden (1973)

Teorema Sea $1 < p < \infty$, entonces

$$H : L^p(w) \to L^p(w) \quad \Longleftrightarrow \quad w \in A_p$$

Este resultado fue mejorado muy notablemente:

Teorema R. Coifman y C. Fefferman ($\approx$ 1974)
Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Sean $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$.
Entonces existe una constante c tal que

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq c \, \|Mf\|_{L^p(w)}$$

la prueba se basa en la técnica de las buenas "λ"

Corolario
Sea $1 < p < \infty$ y sea $w \in A_p$. Entonces,

$$T : L^p(w) \to L^p(w)$$

Nuevo milenio: La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Nuevo milenio: La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema (**S. Petermichl & A. Volberg $\approx$ 2003**)

Sea B la transformada de Ahlfors-Beurling

$$\|B\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}$$

Nuevo milenio: La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema (S. Petermichl & A. Volberg $\approx$ 2003)
Sea B la transformada de Ahlfors-Beurling

$$\|B\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}$$

Este resultado permitió resolver una conjetura propuesta por Astala-Iwaniec-Saksman sobre la regularidad de las soluciones de la ecuación de Beltrami.

Nuevo milenio: La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema (**S. Petermichl & A. Volberg** $\approx$ **2003**)
Sea B la transformada de Ahlfors-Beurling

$$\|B\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}$$

Este resultado permitió resolver una conjetura propuesta por Astala-Iwaniec-Saksman sobre la regularidad de las soluciones de la ecuación de Beltrami.

Teorema (**S. Petermichl** $\approx$ **2005**)
Sea H la transformada de Hilbert

$$\|H\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}$$

Nuevo milenio: La teoria A_2 para las Integrales Singulares

Teorema (S. Petermichl & A. Volberg $\approx$ 2003)
Sea B la transformada de Ahlfors-Beurling

$$\|B\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}$$

Este resultado permitió resolver una conjetura propuesta por Astala-Iwaniec-Saksman sobre la regularidad de las soluciones de la ecuación de Beltrami.

Teorema (S. Petermichl $\approx$ 2005)
Sea H la transformada de Hilbert

$$\|H\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}$$

Similarmente para las transformadas de Riesz.

El teorema A_2

El teorema A_2

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

El teorema A_2

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

Teorema (T. Hytönen, 2011)

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \le c_T \, [w]_{A_2}}$$

El teorema A_2

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

Teorema (T. Hytönen, 2011)

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T\,[w]_{A_2}}$$

• Trabajos previos con D. Cruz-Uribe y J. M. Martell (asumiendo un poco de regularidad en el núcleo).

El teorema A_2

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

Teorema (T. Hytönen, 2011)

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T \, [w]_{A_2}}$$

• Trabajos previos con D. Cruz-Uribe y J. M. Martell (asumiendo un poco de regularidad en el núcleo).

• Treil-Volberg

El teorema A_2

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

Teorema (T. Hytönen, 2011)

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T\,[w]_{A_2}}$$

• Trabajos previos con D. Cruz-Uribe y J. M. Martell (asumiendo un poco de regularidad en el núcleo).

• Treil-Volberg

• ¿Por qué $L^2(w)$?

El contexto L^p : El teorema óptimo de extrapolación.

El contexto L^p : El teorema óptimo de extrapolación.

Corolario

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,T}\, [w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \qquad 1 < p < \infty$$

y el exponente es óptimo.

El contexto L^p: El teorema óptimo de extrapolación.

Corolario

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,T}\,[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \qquad 1<p<\infty$$

y el exponente es óptimo.

- Comparar con: $$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_p\,[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}, \qquad 1<p<\infty$$

El contexto L^p: El teorema óptimo de extrapolación.

Corolario

$$\|T\|_{L^p(w)} \le c_{p,T}\,[w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \qquad 1<p<\infty$$

y el exponente es óptimo.

• Comparar con: $$\|M\|_{L^p(w)} \le c_p\,[w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}, \qquad 1<p<\infty$$

Teorema Sea T un operador tal que para un exponente $1<p_0<\infty$ y un $\alpha>0$

$$\boxed{\|T\|_{L^{p_0}(w)} \le c\,[w]_{A_{p_0}}^{\alpha}}$$

El contexto L^p : El teorema óptimo de extrapolación.

Corolario

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,T}\, [w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \qquad 1 < p < \infty$$

y el exponente es óptimo.

• Comparar con: $$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_p\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}, \qquad 1 < p < \infty$$

Teorema Sea T un operador tal que para un exponente $1 < p_0 < \infty$ y un $\alpha > 0$

$$\boxed{\|T\|_{L^{p_0}(w)} \leq c\, [w]_{A_{p_0}}^{\alpha}}$$

entonces para cada $1 < p < \infty$

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, [w]_{A_p}^{\alpha \max\{1,\frac{p_0-1}{p-1}\}}}$$

El contexto L^p : El teorema óptimo de extrapolación.

Corolario

$$\|T\|_{L^p(w)} \leq c_{p,T}\, [w]_{A_p}^{\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \qquad 1<p<\infty$$

y el exponente es óptimo.

• Comparar con: $$\|M\|_{L^p(w)} \leq c_p\, [w]_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}, \qquad 1<p<\infty$$

Teorema Sea T un operador tal que para un exponente $1<p_0<\infty$ y un $\alpha>0$

$$\boxed{\|T\|_{L^{p_0}(w)} \leq c\, [w]_{A_{p_0}}^{\alpha}}$$

entonces para cada $1<p<\infty$

$$\boxed{\|T\|_{L^p(w)} \leq c\, [w]_{A_p}^{\alpha \max\{1,\frac{p_0-1}{p-1}\}}}$$

• Este es el **teorema de Extrapolación de Rubio de Francia** pero con control en las constantes.

Nuevos resultados

Nuevos resultados

Recordemos la definición de la constante A_∞ que estamos usando

$$[\sigma]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q M(\sigma\chi_Q)\,dx$$

Nuevos resultados

Recordemos la definición de la constante A_∞ que estamos usando

$$[\sigma]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q M(\sigma\chi_Q)\,dx$$

Teorema (T. Hytönen & C.P.) Sea $w \in A_2$ & $\sigma = w^{-1}$, entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T\ [w]_{A_2}^{1/2} \Big([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\Big)^{1/2}}$$

Nuevos resultados

Recordemos la definición de la constante A_∞ que estamos usando

$$[\sigma]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q M(\sigma\chi_Q)\, dx$$

Teorema (T. Hytönen & C.P.) Sea $w \in A_2$ & $\sigma = w^{-1}$, entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \le c_T\, [w]_{A_2}^{1/2}\Big([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\Big)^{1/2}}$$

- Una consecuencia interesante: la llamada **“conjetura A_2 al revés”:**

Nuevos resultados

Recordemos la definición de la constante A_∞ que estamos usando

$$[\sigma]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q M(\sigma\chi_Q)\, dx$$

Teorema **(T. Hytönen & C.P.)** Sea $w \in A_2$ & $\sigma = w^{-1}$, entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \le c_T\, [w]_{A_2}^{1/2}\big([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\big)^{1/2}}$$

- Una consecuencia interesante: la llamada **“conjetura A_2 al revés”:**

$$[w]_{A_2} \le c_{n,T}\, \|T\|_{L^2(w)}$$

Nuevos resultados

Recordemos la definición de la constante A_∞ que estamos usando

$$[\sigma]_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{\sigma(Q)} \int_Q M(\sigma\chi_Q)\, dx$$

Teorema **(T. Hytönen & C.P.)** Sea $w \in A_2$ & $\sigma = w^{-1}$, entonces

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c_T\ [w]_{A_2}^{1/2}\Big([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\Big)^{1/2}}$$

- Una consecuencia interesante: la llamada **“conjetura A_2 al revés”:**

$$[w]_{A_2} \leq c_{n,T}\, \|T\|_{L^2(w)}$$

es **FALSA**.

Repasamos de los conmutadores

Reordemos los conmutadores $[b, T]$

Repasamos de los conmutadores

Reordemos los conmutadores $[b, T]$

$$[b, T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

donde T es un operador de Calderón-Zygmund o cuaquier operador lineal y sea b una a función.

Repasamos de los conmutadores

Reordemos los conmutadores $[b, T]$

$$[b, T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

donde T es un operador de Calderón-Zygmund o cuaquier operador lineal y sea b una a función.

En el caso de la transformada de Hilbert hay un ejemplo expilcito:

Repasamos de los conmutadores

Reordemos los conmutadores $[b, T]$

$$[b, T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

donde T es un operador de Calderón-Zygmund o cuaquier operador lineal y sea b una a función.

En el caso de la transformada de Hilbert hay un ejemplo expilcito:

$$[b, H]f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{b(x) - b(y)}{x - y}\, f(y)\, dy$$

Repasamos de los conmutadores

Reordemos los conmutadores $[b, T]$

$$[b, T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

donde T es un operador de Calderón-Zygmund o cuaquier operador lineal y sea b una a función.

En el caso de la transformada de Hilbert hay un ejemplo expilcito:

$$[b, H]f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{b(x) - b(y)}{x - y}\, f(y)\, dy$$

o de forma más general:

Repasamos de los conmutadores

Reordemos los conmutadores $[b, T]$

$$[b, T]f = b\,T(f) - T(bf)$$

donde T es un operador de Calderón-Zygmund o cuaquier operador lineal y sea b una a función.

En el caso de la transformada de Hilbert hay un ejemplo expilcito:

$$[b, H]f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{b(x) - b(y)}{x - y}\, f(y)\, dy$$

o de forma más general:

$$H_b^k f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(b(x) - b(y))^k}{x - y}\, f(y)\, dy$$

El teorema clásico de Coifman-Rochberg-Weiss

El teorema clásico de Coifman-Rochberg-Weiss

la primera pregunta es si estos conmutadores están acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ o en $L^p(\mathbb{R}^n)$

El teorema clásico de Coifman-Rochberg-Weiss

la primera pregunta es si estos conmutadores están acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ o en $L^p(\mathbb{R}^n)$

Teorema Coifman-Rochberg-Weiss (1976)

Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$[b, H] : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad b \in BMO(\mathbb{R})$$

El teorema clásico de Coifman-Rochberg-Weiss

la primera pregunta es si estos conmutadores están acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ o en $L^p(\mathbb{R}^n)$

Teorema Coifman-Rochberg-Weiss (1976)
Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$[b, H] : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad b \in BMO(\mathbb{R})$$

Mas generalmente, probaron que si T es un operador de Calderón-Zygmund

El teorema clásico de Coifman-Rochberg-Weiss

la primera pregunta es si estos conmutadores están acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ o en $L^p(\mathbb{R}^n)$

Teorema Coifman-Rochberg-Weiss (1976)
Sea $1 < p < \infty$. Entonces

$$[b, H] : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad b \in BMO(\mathbb{R})$$

Mas generalmente, probaron que si T es un operador de Calderón-Zygmund

$$b \in BMO \quad \Longrightarrow \quad [b, T] : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

Nuevos resultados: estimaciones cuadráticas.

Teorema D. Chung, C. Pereyra, & C.P.

Sea T un operador **lineal** acotado en $L^2(w)$ tal que para algun $\alpha > 0$

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\alpha} \qquad w \in A_2}$$

Nuevos resultados: estimaciones cuadráticas.

Teorema **D. Chung, C. Pereyra, & C.P.**

Sea T un operador **lineal** acotado en $L^2(w)$ tal que para algun $\alpha > 0$

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\alpha} \qquad w \in A_2}$$

entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1+\alpha}\|b\|_{BMO} \qquad w \in A_2,\, b \in BMO}$$

Nuevos resultados: estimaciones cuadráticas.

Teorema **D. Chung, C. Pereyra, & C.P.**

Sea T un operador **lineal** acotado en $L^2(w)$ tal que para algun $\alpha > 0$

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\alpha} \qquad w \in A_2}$$

entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1+\alpha}\|b\|_{BMO} \qquad w \in A_2,\, b \in BMO}$$

La prueba se basa en el método de conjugación de la teoria de operadores

Nuevos resultados: estimaciones cuadráticas.

Teorema **D. Chung, C. Pereyra, & C.P.**

Sea T un operador **lineal** acotado en $L^2(w)$ tal que para algun $\alpha > 0$

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\alpha} \qquad w \in A_2}$$

entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1+\alpha}\|b\|_{BMO} \qquad w \in A_2,\, b \in BMO}$$

La prueba se basa en el método de conjugación de la teoria de operadores

En particular, se deduce lo siguiente

Nuevos resultados: estimaciones cuadráticas.

Teorema D. Chung, C. Pereyra, & C.P.

Sea T un operador **lineal** acotado en $L^2(w)$ tal que para algun $\alpha > 0$

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\alpha} \qquad w \in A_2}$$

entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1+\alpha}\|b\|_{BMO} \qquad w \in A_2,\, b \in BMO}$$

La prueba se basa en el método de conjugación de la teoria de operadores

En particular, se deduce lo siguiente

Corolario Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $w \in A_2$

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{2}\|b\|_{BMO}}$$

Nuevos resultados: estimaciones cuadráticas.

Teorema **D. Chung, C. Pereyra, & C.P.**

Sea T un operador **lineal** acotado en $L^2(w)$ tal que para algun $\alpha > 0$

$$\boxed{\|T\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\alpha} \qquad w \in A_2}$$

entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{1+\alpha}\|b\|_{BMO} \qquad w \in A_2,\, b \in BMO}$$

La prueba se basa en el método de conjugación de la teoria de operadores

En particular, se deduce lo siguiente

Corolario Si T es un operador de Calderón-Zygmund y $w \in A_2$

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{2}\|b\|_{BMO}}$$

y el exponente es **óptimo**.

Aplicando el teorema de extrapolación

Aplicando el teorema de extrapolación

Por el teorema de extrapolación con control en las constantes

Aplicando el teorema de extrapolación

Por el teorema de extrapolación con control en las constantes

Corolario Si T es un operador de Calderón-Zygmund y si $1 < p < \infty$

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^p(w)} \leq c\,[w]_{A_p}^{2\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}\|b\|_{BMO}}$$

Aplicando el teorema de extrapolación

Por el teorema de extrapolación con control en las constantes

Corolario Si T es un operador de Calderón-Zygmund y si $1 < p < \infty$

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^p(w)} \leq c\,[w]_{A_p}^{2\max\{1,\frac{1}{p-1}\}}\|b\|_{BMO}}$$

y además el exponente es **óptimo**.

Aplicando el teorema de extrapolación

Por el teorema de extrapolación con control en las constantes

Corolario Si T es un operador de Calderón-Zygmund y si $1 < p < \infty$

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^p(w)} \leq c\,[w]_{A_p}^{2\max\{1,\frac{1}{p-1}\}} \|b\|_{BMO}}$$

y además el exponente es **óptimo**.

• Hay resultados mixtos $A_2 - A_\infty$.

$A_2 - A_\infty$ results

$A_2 - A_\infty$ results

Teorema (C.P. & T. Hytönen)

Sea $b \in BMO$. Supongamos $w \in A_2$ y denotemos $\sigma = w^{-1}$. Entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\Big([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\Big)^{\frac{3}{2}}\|b\|_{BMO}}$$

$A_2 - A_\infty$ results

Teorema (C.P. & T. Hytönen)

Sea $b \in BMO$. Supongamos $w \in A_2$ y denotemos $\sigma = w^{-1}$. Entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\left([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\right)^{\frac{3}{2}}\|b\|_{BMO}}$$

- Podemos recuperar los resultados anteriores:

$A_2 - A_\infty$ results

Teorema (C.P. & T. Hytönen)

Sea $b \in BMO$. Supongamos $w \in A_2$ y denotemos $\sigma = w^{-1}$. Entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \le c\,[w]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\Big([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\Big)^{\frac{3}{2}}\,\|b\|_{BMO}}$$

- Podemos recuperar los resultados anteriores:

$$\|[b,T]\|_{L^2(w)} \le c\,[w]_{A_2}^{2}\|b\|_{BMO}$$

$A_2 - A_\infty$ results

Teorema (C.P. & T. Hytönen)
Sea $b \in BMO$. Supongamos $w \in A_2$ y denotemos $\sigma = w^{-1}$. Entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\frac{1}{2}} \left([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\right)^{\frac{3}{2}} \|b\|_{BMO}}$$

- Podemos recuperar los resultados anteriores:

$$\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^2 \|b\|_{BMO}$$

- Para conmutadores de orden superior tenemos

$A_2 - A_\infty$ **results**

Teorema (**C.P. & T. Hytönen**)

Sea $b \in BMO$. Supongamos $w \in A_2$ y denotemos $\sigma = w^{-1}$. Entonces

$$\boxed{\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\left([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\right)^{\frac{3}{2}}\|b\|_{BMO}}$$

- Podemos recuperar los resultados anteriores:

$$\|[b,T]\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^2\|b\|_{BMO}$$

- Para conmutadores de orden superior tenemos

$$\|T_b^k\|_{L^2(w)} \leq c\,[w]_{A_2}^{\frac{1}{2}}\left([w]_{A_\infty} + [\sigma]_{A_\infty}\right)^{k+\frac{1}{2}}\|b\|_{BMO}^k$$

El método “sparse”

El método “sparse”

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ es una familia ”sparse” definimos una especie de ”integral singular diádica” asociada a $\mathcal{S}$:

$$T^{\mathcal{S}} f := \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f \, dx \cdot \chi_Q$$

El método “sparse”

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ es una familia ”sparse” definimos una especie de ”integral singular diádica” asociada a $\mathcal{S}$:

$$T^{\mathcal{S}} f := \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f \, dx \cdot \chi_Q$$

La idea clave: “transplantar” el case continuo al caso discreto.

El método “sparse”

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ es una familia ”sparse” definimos una especie de ”integral singular diádica” asociada a $\mathcal{S}$:

$$T^{\mathcal{S}} f := \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f\, dx \cdot \chi_Q$$

La idea clave: “transplantar” el case continuo al caso discreto.

Teorema

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

El método “sparse”

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ es una familia ”sparse” definimos una especie de ”integral singular diádica” asociada a $\mathcal{S}$:

$$T^{\mathcal{S}} f := \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f \, dx \cdot \chi_Q$$

La idea clave: “transplantar” el case continuo al caso discreto.

Teorema

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

Entonces

$$|Tf(x)| \leq c_T T^{\mathcal{S}}(|f|)(x)$$

El método “sparse”

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ es una familia ”sparse” definimos una especie de ”integral singular diádica” asociada a $\mathcal{S}$:

$$T^{\mathcal{S}} f := \sum_{Q\in\mathcal{S}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f\,dx \cdot \chi_Q$$

La idea clave: “transplantar” el case continuo al caso discreto.

Teorema

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

Entonces

$$|Tf(x)| \leq c_T T^{\mathcal{S}}(|f|)(x)$$

Esto produce una nueva prueba mucho has sencilla del teorema A_2 y abre muchos problemas.

El método “sparse”

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ es una familia ”sparse” definimos una especie de ”integral singular diádica” asociada a $\mathcal{S}$:

$$T^{\mathcal{S}} f := \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f \, dx \cdot \chi_Q$$

La idea clave: “transplantar” el case continuo al caso discreto.

Teorema

Sea T un operador de Calderón-Zygmund.

Entonces

$$|Tf(x)| \leq c_T T^{\mathcal{S}}(|f|)(x)$$

Esto produce una nueva prueba mucho has sencilla del teorema A_2 y abre muchos problemas.

- Lerner y Nazarov y J. Conde y G. Rey

MUCHAS GRACIAS