Problemas abiertos en análisis armónico clásico

Joaquim Bruna, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

Esquema de la charla

- Representación de Fourier.
- Bases ortonormales de exponenciales.
- Frames y bases de Riesz de exponenciales.
- Frames y bases de Riesz de átomos de Gabor.
- Generadores por traslaciones

Representación de Fourier

Para $\xi \in \mathbf{R}^d$, $e_\xi(x) = e^{2\pi i \xi x} = \cos 2\pi\xi x + i \sin 2\pi\xi x$, onda elemental de multifrecuencia ξ, con $\xi x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_d x_d$.

Dada $f(x)$ en $\mathbf{R}^d$,

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e_\xi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx$$

$$f = \int_{\mathbf{R}^d} \langle f, e_\xi \rangle e_\xi \, d\xi, f(x) = \int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\, d\xi.$$

Pitágoras-Parseval: $\int |f|^2\, dx = \|f\|^2 = \int |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi$.

Los $e_\xi, \xi \in \mathbf{R}^d$ funcionan *como si* fueran una base ortonormal: toda función f és superposición (suma infinita, integal) de senos y cosenos en todas las multifrecuencias ξ.

Representación de Fourier de funciones periòdicas

Si nos interesan solamente las funciones 1-periódicas, utilizamos solamente los senos y cosenos que son 1-periódicos, es decir, $\xi \in \mathbf{Z}^d$

Fourier: la expresión general de una función 1-periódica es

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} a_n e^{2\pi i n x},$$

superposición de senos y cosenos de frecuencias enteras.

Bases ortonormales de exponenciales

Funciones 1-periódicas= funciones definidas en $[0,1]^d$.

Enunciado de Fourier: las exponenciales $e_n, n \in \mathbf{Z}^d$ és una base hilbertiana de $L^2([0,1]^d)$: son ortonormales dos a dos,

$$\int_{[0,1]^d} e^{2\pi i(n-m)x}\,dx = \delta(n-m)$$

$$f = \sum_n \hat{f}(n)e^{2\pi inx}, \int_{[0,1]^d} |f(x)|^2\,dx = \sum_n |\hat{f}(n)|^2.$$

Notación: $\Lambda \subset \mathbf{R}^d$ es un conjunto discreto de multifrecuencias $\rightarrow \mathcal{E}(\Lambda) = \{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$

PROBLEMA 1: $U \subset \mathbf{R}^d$; cuando existe una base ortonormal $\mathcal{E}(\Lambda)$ en $L^2(U)$?

Conjetura de Fuglede

Fuglede: cuando U tesela $\mathbf{R}^d$ por traslaciones, es decir, existe $\Gamma \subset \mathbf{R}^d$, $\mathbf{R}^d = \dot{\cup}_{\gamma \in \Gamma}(U + \gamma)$

- Cierto si Λ o Γ es un reticulo
- Cierto si U es convexo
- Falso en las dos direcciones si $n \geq 3$ (Tao, Kolountzakis)
- Abierto si $d = 1, 2$
- $L^2(U)$ no admite bases ortonormales de exponenciales si ∂U tiene un punto con curvatura positiva.

B bola unidad de $\mathbf{R}^d$, $d > 1$ no admite bases ortonormales de exponenciales.

Se conoce: $\mathcal{E}(\Lambda)$ ortonormal en $L^2(B) \Rightarrow \Lambda$ finito.

PROBLEMA 2: $\mathcal{E}(\Lambda)$ ortonormal en $L^2(B) \Rightarrow$ cardinal de $\Lambda \leq C(d)$??

Frames

H un espacio euclideo de dimensión finita o infinita (Hilbert, $H = L^2(U)$). Un frame para H es una colección $(\phi_i)_{i\in I}$ de vectores unitarios (funciones) tales que

$$A\sum_i |\langle v, \phi_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2 \leq B\sum_i |\langle v, \phi_i\rangle|^2, v \in H.$$

Si $A = B$ se llama rígido. En dimensión finita, equivale a ser un sistema de generadores: $\langle v, \phi_i\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$.

En dimensión infinita es algo mas: los coeficientes $\langle v, \phi_i\rangle$ determinan v de modo estable.

Todo frame tiene asociado un frame dual (ψ_i) tal que

$$v = \sum_i \langle v, \phi_i\rangle\psi_i = \sum_i \langle v, \psi_i\rangle\phi_i.$$

$\sum_i \langle v, \psi_i\rangle\phi_i$ minimiza $\sum_i |c_i|^2$ entre todas las expresiones $v = \sum_i c_i\phi_i$.

Bases de Riesz

No redundancia=independencia lineal

$$\sum_i c_i \phi_i = 0, \sum_i |c_i|^2 < +\infty \Rightarrow c_i = 0,$$

que por dualidad es equivalente a

Sistema libre: $\forall (c_i), \sum_i |c_i|^2 < +\infty, \exists v \in H, \langle v, \phi_i \rangle = c_i$.

Definición: Base de Riesz $\equiv$ frame+libre $\equiv$ todo v tiene una única expresión $v = \sum_i c_i \phi_i$, con $\|v\|^2 \approx \sum_i |c_i|^2$.

Las bases de Riesz son tambien los frames minimales y los sistemas libres maximales.

Es un concepto distinto del de Bases de Schauder.

Bases de Riesz son tan utiles como las ortonormales en las aplicaciones, por la estabilidad.

Bases de Riesz de exponenciales

PROBLEMA 3: cuando admite $L^2(U)$ una base de Riesz de exponenciales $\mathcal{E}(\Lambda)$??

PROBLEMA 4:B la bola unidad en $\mathbf{R}^d$. Existe alguna base de Riesz de exponenciales en $L^2(B)$??

Reescalando el enunciado de Fourier, si $d = 1$, para todo intervalo I, $L^2(I)$ admite una base ortonormal de exponenciales.

PROBLEMA 5, problema multibanda: si $U = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N$, admite $L^2(U)$ una base de exponenciales??

Espacios de Paley-Wiener

$f \longrightarrow \hat{f} = F$ isometria $L^2(\mathbf{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbf{R}^d)$

U acotado $PW(U) = \{F \in L^2(\mathbf{R}^d) :$ soporte $\hat{F} \subset -U\}$

se denominan de **banda limitada** a U:

$$F \in PW(U) \Leftrightarrow F(x) = \int_U f(y) e^{-2\pi iyx}\, dy, f \in L^2(U).$$

U convexo $\rightarrow$ descripción de $PW(U)$ (teoremas de Paley-Wiener)

$PW(U) = \{F :$ entera en $\mathbf{C}^d : F \in L^2(\mathbf{R}^d), |F(z)| = O(e^{\rho_U(\Im z)})\}$,

$\rho_U(x) = \sup_{y \in U} \langle x, y \rangle$

Sucesiones de muestreo e interpolación

$L^2(U) \longleftrightarrow PW(U)$

$f \longleftrightarrow F = \hat{f}, F(\lambda) = \langle f, e_\lambda \rangle, \|f\| = \|F\|$

$\|f\|^2 \approx \sum_\lambda |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 \longleftrightarrow \|F\|^2 \approx \sum_\lambda |F(\lambda)|^2$
$\mathcal{E}(\Lambda)$ frame de $L^2(U) \longleftrightarrow \Lambda$ sucesión de muestreo para $PW(U)$

$\forall (c_\lambda), \sum_\lambda |c_\lambda|^2 < +\infty$ existe

$f \in L^2(U)$ tal que $\langle f, e_\lambda \rangle = c_\lambda \longleftrightarrow F \in PW(U), F(\lambda) = c_\lambda$
$\mathcal{E}(\Lambda)$ libre $\longleftrightarrow \Lambda$ sucesión de interpolación para $PW(U)$.

$\mathcal{E}(\Lambda)$ base de Riesz para $L^2(U) \longleftrightarrow \Lambda$ sucesión de muestreo e interpolación para $PW(U)$

El teorema de Shannon-Whitaker

En esta correspondencia, el teorema de Fourier, según el cual $e_n, n \in \mathbf{Z}^d$ es una base ortonormal de $L^2([0,1])$ se reenuncia:

Teorema de Shanon: si F es una función de banda limitada a $[-T, T]$,

$$F(x) = \sum_n F\left(\frac{n}{2T}\right) \frac{\sin \pi(n - 2Tx)}{\pi(n - 2Tx)}$$

que dice que $\Lambda = \frac{1}{2T}\mathbf{Z}^d$ es una sucesión simultaneamente de muestreo y de interpolación para $PW(-T, T)$.

En el problema multibanda?

Las densidades de Beurling

Λ muestreo $\sim$ Λ suficientemente denso
Λ intepolación $\sim$ Λ suficientemente separado

B=bola unidad, de volumen 1

$$n^+(r) = \max_x \operatorname{card}(\Lambda \cap (x + rB)), n^-(r) = \min_x \operatorname{card}(\Lambda \cap (x + rB))$$

$$D^+(\Lambda) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{n^+(r)}{r^n}, D^-(\Lambda) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{n^-(r)}{r^n},$$

Beurling-Landau:
$[\mathcal{E}(\Lambda)$ frame $L^2(U) \equiv \Lambda$ muestreo $PW(U)] \Rightarrow D^-(\Lambda) \geq |U|$

$[\mathcal{E}(\Lambda)$ libre $L^2(U) \equiv \Lambda$ interpolación $PW(U)] \Rightarrow D^+(\Lambda) \leq |U|$

$[\mathcal{E}(\Lambda)$ base de Riesz $L^2(U) \equiv \Lambda$ muestreo e interpolación $PW(U)] \Rightarrow D(\Lambda) = |U|$

Bases de Riesz para intervalos

$d = 1, U = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \Lambda = (\lambda_n)$

Existe una caracterización de cuando $\mathcal{E}(\Lambda)$ es una base de Riesz en términos de *BMO* y pesos A_2

Teorema de Kadec: $\Lambda = \{\lambda_n = n + \varepsilon_n, |\varepsilon_n| \leq r < \frac{1}{4}\}$ OK

Beurling:
$D^-(\Lambda) > 1 \Rightarrow \Lambda$ muestreo $PW(U)$
$D^+(\Lambda) < 1 \Rightarrow \Lambda$ interpolación $PW(U)$

El Problema de la bola

PROBLEMA 4:B la bola unidad en $\mathbf{R}^d$. Existe alguna base de Riesz de exponenciales en $L^2(B)$??

$$PW(B) = \{F : \text{entera en} \mathbf{C}^d, F \in L^2(\mathbf{R}^d), |F(z)| = O(e^{|\Im z|})\}$$

admite una sucesión de muestreo e interpolación?

Los polígonos convexos y simétricos si.

La versión $L^p, p \neq 2$ es falsa

$$PW_p(B) = \{F : \text{entera en} \mathbf{C}^d, F \in L^p(\mathbf{R}^d), |F(z)| = O(e^{|\Im z|})\}$$

muestreo: $\|F\|_p^p \simeq \sum_{\lambda \in \Lambda} |F(\lambda)|^p, F \in PW_p(B)$
interpolación:$\forall (c_\lambda), \sum_\lambda |c_\lambda|^p < +\infty, \exists F \in PW_p(B), F(\lambda) = c_\lambda$

No existen sucesiones Λ que sean simultaneamente de muestreo e interpolación para $PW_p(B), p \neq 2$ (Ortega-Cerdà)

El problema multibanda

$d = 1, U = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N$

Admite $L^2(U)$ una base de Riesz $\mathcal{E}(\Lambda)$??

- No existe descripción de $PW(U)$
- OK si $N = 2$
- OK si las longitudes de I_i son conmesurables
- OK si admitimos frecuencias λ complejas

Lo que es cierto en intervalos

$D^-(\Lambda) > |U| \Rightarrow \Lambda$ muestreo $PW(U) \Rightarrow D^-(\Lambda) \geq |U|$
$D^+(\Lambda) < |U| \Rightarrow \Lambda$ interpolación $PW(U) \Rightarrow D^+(\Lambda) \leq |U|$

no puede ser cierto:

Olevskii: $|U| > D^-(\Lambda) \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists S \subset U, \Lambda$ no es de muestreo para $PW(S)$
Landau:$\forall D, \varepsilon \exists \Lambda, \|\Lambda - d\mathbf{Z}^d\| < \varepsilon$ y $\mathcal{E}(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(U)$, para U cualquier unión finita de intervalos $|U| = \frac{1}{D}$.

PROBLEMA 6: $U = \cup_{i=1}^{+\infty} I_i, |U| = \sum |I_i| < +\infty$, U no acotado.
Existe algun frame $\mathcal{E}(\Lambda)$ para $L^2(U)$??

Frames y bases de Riesz de átomos de Gabor

g ventana, $\|g\| = 1$, $g_{\xi,\lambda}(t) = g(t - \xi)e^{2\pi i\lambda t}$, átomos de Gabor

$$f = \int_{\xi}\int_{\lambda} \langle f, g_{\xi,\lambda}\rangle g_{\xi,\lambda}\, d\xi\, d\lambda$$

$$\|f\|^2 = \int_{\xi}\int_{\lambda} |\langle f, g_{\xi,\lambda}\rangle|^2\, d\xi\, d\lambda$$

$$\Sigma \subset \mathbf{R}^2 \text{ discreto}, \ \ G(\Sigma) = \{g_{\xi,\lambda}, (\xi,\lambda) \in \Sigma\}$$

PROBLEMA 7: cuando es $G(\Sigma)$ un frame o una base de Riesz de $L^2(\mathbf{R})$??

PROBLEMA 8: Σ finito $\Rightarrow$ $G(\Sigma)$ linealmente independiente??

$$\sum c_{\xi,\lambda} g(t - \xi)e^{2\pi\lambda t} = 0 \Rightarrow c_{\xi,\lambda} = 0??$$

No pueden existir frames de $L^2(\mathbf{R})$ formados solamente por trasladadas $g(t - \xi)$.

PROBLEMA 9: existen bases de Schauder de trasladadas?

Que podemos hacer con trasladadas?

$\tau_\lambda f(t) = f(t-\lambda), f \in L^p(\mathbf{R})$

Teorema de Wiener: $f \in L^1(\mathbf{R}), \{\tau_\lambda f, \lambda \in \mathbf{R}\}$ genera topologicamente $L^1(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) \neq 0, \forall \xi$

Teorema de Beurling: $f \in L^2(\mathbf{R}), \{\tau_\lambda f, \lambda \in \mathbf{R}\}$ genera topologicamente $L^2(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) \neq 0, q.p.t. \, \xi$

Permite describir los subespacios de L^2, L^1 invariantes por traslaciones.

PROBLEMA 10: que ocurre para $1 < p < 2$?

Generadores discretos de $L^p(\mathbf{R})$

f generador discreto de L^p si existe $\Lambda \subset \mathbf{R}$ discreto tal que $\{\tau_\lambda f, \lambda \in \Lambda\}$ genera L^p.

Λ espectral para L^p si existe $f \in L^p(\mathbf{R})$ tal que $\{\tau_\lambda f, \lambda \in \Lambda\}$ genera L^p.

Descripciones??

El radio espectral

Relación con densidad de exponenciales:

Λ espectral para $L^1(\mathbf{R}) \Rightarrow \mathcal{E}(\Lambda)$ genera $L^2(I)$ para todo I

Densidad de Buerling-Malliavin. Radio espectral

$$R(\Lambda) = \sup\{r > 0 : \mathcal{E}(\Lambda) \text{ genera } L^2(-\frac{r}{2}, +\frac{r}{2})\}$$

$$|I| < R(\Lambda) \Rightarrow \mathcal{E}(\Lambda) \text{ genera } L^2(I)$$

$$|I| > R(\Lambda) \Rightarrow \mathcal{E}(\Lambda) \text{ no genera } L^2(I)$$

La densidad de Beurling-Malliavin

Reformulación en términos de análisis complejo

$$\mathcal{E}(\Lambda) \text{ no genera } \Leftrightarrow \exists f \neq 0, \int f(t)e^{-2\pi i\lambda t}\, dt = 0, \lambda \in \Lambda$$

En términos de $F(z) = \int_I f(t)e^{-2\pi izt}\, dt$,

$$\mathcal{E}(\Lambda) \text{no genera} \Leftrightarrow \exists F \in PW(I), F(\lambda) = 0, \lambda \in \Lambda.$$

Densidad de Beurling-Malliavin $D_{BM}(\Lambda)$: definida en términos geométricos, cercana a

$$\overline{D}(\Lambda) = \limsup_r \frac{cardinal(\Lambda \cap (-r, r))}{2r}$$

Teorema de Beurling-Malliavin: $R(\Lambda) = D_{BM}(\Lambda)$

Conjuntos espectrales y generadores discretos para $L^1(\mathbf{R})$

Teorema (J.B-Olevskii-Ulanovskii): Λ espectral para $L^1(\mathbf{R}) \Leftrightarrow D_{BM}(\Lambda) = +\infty$.

$\{\tau_\lambda f, \lambda \in \Lambda\}$ genera $L^1(\mathbf{R}) \Leftrightarrow$

$$g \in L^\infty(\mathbf{R}), g \star \check{f}(\lambda) = \int g(t) f(t-\lambda)\, dt = 0, \lambda \in \Lambda \Rightarrow g = 0$$

$$\Leftrightarrow \Lambda \text{ conjunto de unicidad para } L^\infty(\mathbf{R}) \star \check{f}$$

f generador discreto de $L^1(\mathbf{R}) \Leftrightarrow$ la clase de funciones continuas $L^\infty(\mathbf{R}) \star \check{f}$ admite conjuntos de unicidad discretos

Teorema (J.B-Gerard Ascensi): f generador discreto de $L^1(\mathbf{R}) \Rightarrow \hat{f}(\xi) \neq 0, \forall \xi$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |\hat{f}(\xi)|}{1+\xi^2}\, d\xi = -\infty.$$

Recíproco cierto si $|\hat{f}|$ es par y decreciente.