CÁLCULO I – EXAMEN FINAL

(primera convocatoria)

Grado de Ingeniería Mecánica – Departamento de Matemáticas

20 de Enero de 2009 – Soluciones

Problema 1 (2 puntos) Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{\sqrt{u_n}+1}{2}, \\ u_0 &= 0 \quad . \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

Solucion

a) La sucesion es monotona creciente. La prueba se realiza por induccion. Sea n=0, tenemos que $u_0 < u_1$. Supongamos la propiedad cierta para $n = k$. Por hipotesis de induccion tenemos que $u_{k-1} < u_k$, aplicando raiz cuadrada en ambos mienbros de la desigualdad, sumando uno y dividiendo entre dos tendremos que $u_k < u_{k+1}$, luego la propiedad es valida para $n = k+1$. Por tanto la sucesion es monotona creciente.

b) Hallemos los puntos l tales que $l = \dfrac{\sqrt{l}+1}{2}$. Esta expresion es equivalente a $4l^2 - 4l + 1 = 0$ o $(4l-1)(l-1) = 0$ lo cual nos da, $l = \dfrac{1}{4}, \quad l = 1$. Probemos que $u_n < \dfrac{1}{4}$. Aplicando el principio de induccion tenemos que $u_0 < \dfrac{1}{4}$. Supongamos la propiedad cierta para $n = k$. Por hipotesis de induccion tenemos que $u_{k-1} < \dfrac{1}{4}$, aplicando raiz cuadrada en ambos mienbros de la desigualdad, sumando uno y dividiendo entre dos tendremos que $u_k < \dfrac{1}{4}$, luego la propiedad es valida para $n = k+1$. Por tanto la sucesion es acotada superiormente.

c) De a) y b) tenemos que la sucesion es monotona creciente y acotada superiormente, por el teorema de Wiertrass tenemos que la sucesion es convergente y su limite es $\dfrac{1}{4}$

Problema 2 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{e^t - 1}{t} dt$:

2.1.- Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n \quad \Rightarrow \quad \frac{e^t-1}{t} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n - 1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, t^n.$$

$$\begin{aligned} f(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{e^t-1}{t} dt &= \int_0^{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{\frac{x}{2}} t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\, n\,(n!)}\,. \end{aligned}$$

2.2.- Hallar el dominio de convergencia absoluta de la serie obtenida en el apartado anterior.

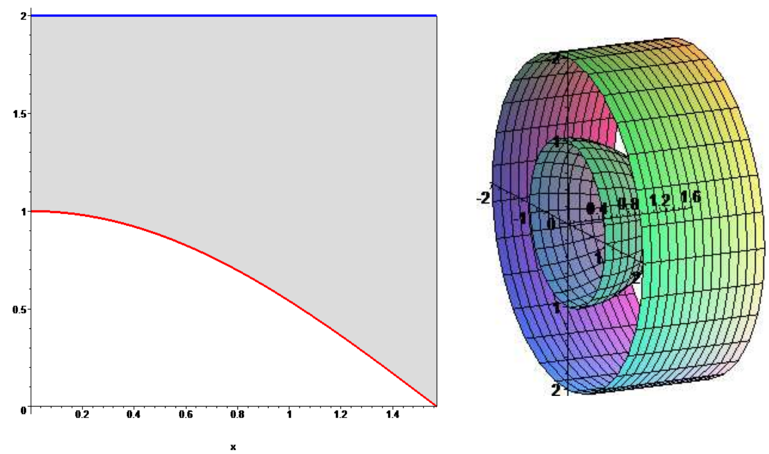
$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\, n+1\,(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{2^n\, n\,(n!)}\right|} = \left|\frac{2^n\, n\,(n!)}{2^{n+1}\, n+1\,(n+1)!}\right| |x| = \left|\frac{n}{2\,(n+1)^2}\right| |x| < 1$$

$$|x| < \frac{2\,(n+1)^2}{n} \qquad \therefore \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,(n+1)^2}{n} = \infty$$

La serie es absolutamente convergente en todo $\mathbb{R}$.

Problema 3 (1 punto) Calcula el volumen generado al girar alrededor del eje X la superficie encerrada por las curvas $y = \cos x$ e $y = 2$ con $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

En la siguiente figura aparece el gráfico de la región (figura de la izquierda) a rotar, comprendida entre $\cos x$ e $y = 2$ (región sombreada). A la derecha aparece la rotación de ambas fronteras de la región, el sólido (S) cuyo volumen debemos calcular es el comprendido entre ellas.



$$
\begin{aligned}
V(S) &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \cos^2(x)\right) dx \; = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = \frac{7\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{7\pi^2}{4}
\end{aligned}
$$

Problema 4 (3 puntos) Dada la función $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-4}$:

4.1.- Hallar el dominio de definición.

$$Dom\,[g(x)] = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

4.2.- Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

$$g'(x) = \frac{x^2-8x+4}{(x-4)^2}. \qquad x^2-8x+4=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 &= 4-2\sqrt{3} \\ x_2 &= 4+2\sqrt{3} \end{cases}$$

$]-\infty, 4-2\sqrt{3}[$	$4-2\sqrt{3}$	$]4-2\sqrt{3}, 4[$	4	$]4, 4+2\sqrt{3}[$	$4+2\sqrt{3}$	$]4+2\sqrt{3}, \infty[$
$+$	0	$-$	∞	$-$	0	$+$
Creciente	Pto. Máx	Decreciente	|||||	Decreciente	Pto. Mín.	Creciente
	$g(x_1) = 4(2-\sqrt{3})$		|||||		$g(x_2) = 4(2+\sqrt{3})$	

4.3.- Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

$$g''(x) = \frac{24}{(x-4)^3}.$$

$]-\infty, 4[$	4	$]4, \infty[$
$-$	∞	$+$
Cóncava	|||||	Convexa
$\cap$	|||||	$\cup$

4.4.- Hallar las asíntotas.

Asíntota Vertical	$x = 4$		
Asíntota Oblicua ($x \to \infty$)	$y = x+4$	$m_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x} = 1$	$b_1 = \lim\limits_{x\to\infty} 4\dfrac{x-1}{x-4} = 4$
Asíntota Oblicua ($x \to -\infty$)	$y = x+4$	$m_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x} = 1$	$b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} 4\dfrac{x-1}{x-4} = 4$

4.5.- Construir el gráfico de $g(x)$.