Cálculo I – Examen Final

(segunda convocatoria)

Grado de Ingeniería Mecánica – Departamento de Matemáticas

26 de Junio de 2009 – Soluciones

Problema 1 (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

1.1.-

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x - \displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt}{x^3} = &= \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{3\,x^2} && \text{[L'Hopital]}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2xe^{x^2}}{6\,x} && \text{[L'Hopital]}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-e^{x^2}}{3} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

1.2.- $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad [e^x - 1 \approx x \ (x\to 0)]$

Problema 2 (2 puntos) Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n\sqrt[3]{n}}$

2.1.- Hallar el intervalo de convergencia absoluta de la serie.

$x_0 = 1, \quad a_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt[3]{n}}, \quad L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n\sqrt[3]{n}}} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{3n}} = \dfrac{1}{2},$

$R = \dfrac{1}{L} = 2,$

la series es **absolutamente convergente** en el intervalo $[x_0 - R, x_0 + R] = [-1, 3]$.

2.2.- Analizar la convergencia de la serie anterior cuando $x = -1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-1)^n}{2^n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ la serie de los módulos es una serie de tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p = \dfrac{1}{3} \leq 1$, por tanto es divergente.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

- $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} < 0$, ya que $\sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{n}$. Por tanto la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

Por el criterio de Leibnitz, la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ es **condicionalmente convergente**.

Problema 3 (1 punto) Calcular aproximadamente el valor de $24^{\frac{3}{2}}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3. Estimar la magnitud del error cometido en la aproximación.

Del enunciado del problema se deduce que $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ y $x_0 = 25$

$$\begin{array}{rclrclrcl}
f(x) &=& x^{\frac{3}{2}} & f(25) &=& 125 & a_0 &=& 125 \\
f'(x) &=& \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}} & f'(25) &=& \frac{15}{2} & a_1 &=& \frac{15}{2} \\
f''(x) &=& \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} & f''(25) &=& \frac{3}{20} & a_2 &=& \frac{3}{40} \\
f'''(x) &=& -\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} & f'''(25) &=& -\frac{3}{2000} & a_3 &=& -\frac{1}{4000}
\end{array}$$

El polinomio de Taylor de grado 3 es

$$P_3(x^{\frac{3}{2}}, x, 25) = 125 + \frac{15}{2}(x-25) + \frac{3}{40}(x-25)^2 - \frac{1}{4000}(x-25)^3,$$

por tanto

$$\begin{aligned}
24^{\frac{3}{2}} &\approx P_3(x^{\frac{3}{2}}, 24, 25) = 125 - \frac{15}{2} + \frac{3}{40} + \frac{1}{4000} \\
&= \frac{500000 - 30000 + 300 + 1}{4000} = \frac{470301}{4000} \\
&= \boxed{117{,}57525}.
\end{aligned}$$

Fórmula para calcular el error:

$$R_{3,25}(x) = \frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}(x-25)^4 = \frac{3\,(x-25)^4}{128\,\sqrt{\zeta^5}} \qquad \zeta \in]24, 25[.$$

Estimación del error:

$$E = |R_{3,25}(24)| = \left|\frac{3}{128\,(\sqrt{\zeta})^5}\right| < \frac{3}{128\,(\sqrt{16})^5} = \frac{3}{2^{17}}.$$

Problema 4 (2 puntos) Dada la función $g(x) = e^{-x^2}(x^2+1)$:

4.1.- Hallar el dominio de definición.

$$Dom\,[g(x)] = \mathbb{R}.$$

4.2.- Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

$$g'(x) = -2e^{-x^2}x^3 \qquad\qquad x^3 = 0 \;\Rightarrow\; \{\; x_1 \;=\; 0$$

$]-\infty, 0[$	0	$]0, \infty[$
$+$	0	$-$
Creciente	Pto. Máx	Decreciente
	$g(x_1) = 1$	

4.3.- Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

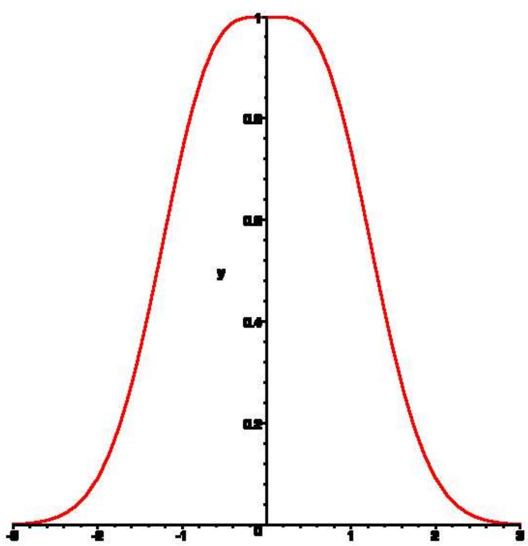
$g''(x) = 2x^2(2x^2-3)e^{-x^2}$.

$]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}[$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$]-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0[$	0	$]0, \sqrt{\frac{3}{2}}[$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$]\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty[$
$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
Cónvexa	‖‖‖	Cóncava	‖‖‖	Cóncava	‖‖‖	Cónvexa
$\cup$	‖‖‖	$\cap$	‖‖‖	$\cap$	‖‖‖	$\cup$
‖‖‖	$g(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	‖‖‖	‖‖‖	‖‖‖	$g(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	‖‖‖

4.4.- Hallar las asíntotas.

Asíntota Horizontal $(x \to \infty)$	$y = 0$
Asíntota Horizontal $(x \to -\infty)$	$y = 0$

4.5.- Construir el gráfico de $g(x)$.



Problema 5 (2 puntos) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

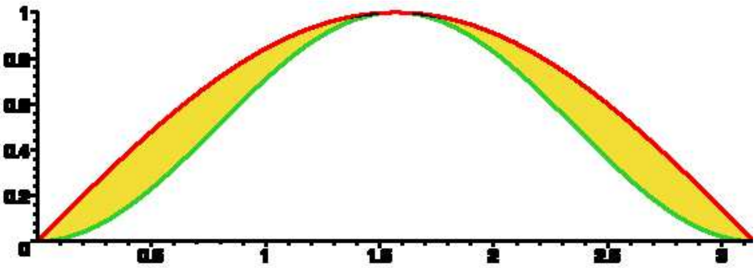
5.1.-

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-6x+5}{x^3-5x^2+8x-4}dx &= \int \left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)dx\\ &= \ln|x-1|+\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+C\\ &= \ln|x^2-3x+2|-\frac{1}{x-2}+C.\end{aligned}$$

5.2.- $\int \sqrt{x}\,\ln\left(\sqrt{x}\right)\,dx = x^{\frac{3}{2}}\,\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)-\frac{1}{3}\int\sqrt{x}dx = x^{\frac{3}{2}}\left(\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)-\frac{2}{9}\right)+C.$

$$\begin{aligned} u &= \ln\left(\sqrt{x}\right) & dv &= \sqrt{x}\,dx\\ du &= \frac{1}{2x}dx & v &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Problema 6 (1 punto) Calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=\operatorname{sen} x$ y $g(x)=\operatorname{sen}^2 x$ cuando $0\le x\le\pi$.



Región $\quad R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le\pi \;\wedge\; \operatorname{sen}^2 x\le y\le \operatorname{sen} x\}.$

Área

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^\pi \left(\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x\right)dx = \int_0^\pi\left(\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx\\ &= \left(\cos x-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)\ u^2.\end{aligned}$$