Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas

Cálculo I – Examen Final

Grado de Ingeniería Mecánica

Grupos: 11–12–13–14–15–16–17

Curso 2009/2010 - Junio de 2010

Soluciones

Problema 1 (1 punto) Hallar los siguientes limites

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)-\ln n}{\ln(n+1)-\ln n}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+2}{5x^2+20}\right)^{\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$

R/:

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)-\ln n}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}=2$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+2}{5x^2+20}\right)^{\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+2}{5x^2+20}\right)^{1+\sqrt{x}}=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$

Problema 2 (2 puntos) Calcula el volumen generado al girar alrededor del eje X el área encerrada por las curvas $y=1-x^2$, $y=|x|$ cuando $x\in[-1,1]$.

R/: Veamos el gráfico de la región limitada por la curvas y el sólido resultante de la rotación

Punto de intercepción $|x|=1-x^2 \Leftrightarrow x=1-x^2 \quad x\geq 0 \qquad -x=1-x^2 \quad x<0$. Ambas ecuaciones dan como solución $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Usando la simetría de cuerpo basta calcular el volumen de revolución en el intervalo $x\in[0,1]$ y multiplicar por 2

$$\begin{aligned}
V(S) &= \pi\left(\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (1-x^2)^2 - x^2 dx\right) + \pi\left(\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 x^2 - (1-x^2)^2 dx\right) \\
&= \pi\left(\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (1-2x^2+x^4) - x^2 dx\right) + \pi\left(\int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1 x^2 - (1-2x^2+x^4) dx\right) \\
&= \pi\left(\left(x - x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + (x^3 - x - \frac{x^4}{4})\Bigg|_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^1\right) = \pi\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)
\end{aligned}$$

Volumen $\boxed{\frac{6\pi}{5}\ u^2.}$

Problema 3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$:

3.1.- Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.
R/:

$$\begin{aligned}
e^{-t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{2n} \\
f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\, x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Entonces $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\, x^{2n+1}.}$

3.2.- Hallar el dominio de convergencia absoluta de la serie obtenida en el apartado anterior.
R/:

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)}|}{|\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}|} = \left|\frac{2n+1}{(n+1)(2n+3)}\right||x| < 1$$

$$|x| < \frac{(n+1)(2n+3)}{2n+1} \quad \therefore \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+3)}{2n+1} = \infty$$

La serie es absolutamente convergente en $\mathbb{R}$.

3.2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - f(x)}{x - \operatorname{sen}(x)}$.

R/: Infinitésimos equivalentes:

$$\begin{aligned} x - \operatorname{sen}(x) &\approx \frac{x^3}{6} \\ x - f(x) &\approx \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{x\to 0} \frac{x - f(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}} = 2.$

Problema 4 (2 puntos) Dada la función $g(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$:

4.1.- (0,2 puntos) Hallar el dominio de definición.
R/: El dominio de definición de $g(x)$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.2.- (0,5 puntos) Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.
R/: $g'(x) = \frac{(1-x)}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\implies \frac{(1-x)}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ x = 1 & \end{aligned}$$

Puntos críticos: $x = 0$ y $x = 1$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, \infty)$
Signo de $g'(x)$	-	No def.	$+$	0	-
Monot. y Extr.	Decrec.	///	Crec.	Pto. Mín.	Dec
$g(x)$				$1/e$	

Extremos: un mínimo en $(1, 1/e)$.

4.3.- (0,5 puntos) Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.
R/: $g''(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^5} e^{-\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\implies \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^5} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \\ \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^5} = 0 &\implies 2x^2 - 4x + 1 = 0 \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} & \end{aligned}$$

Puntos críticos de $g'(x)$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ y $x_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

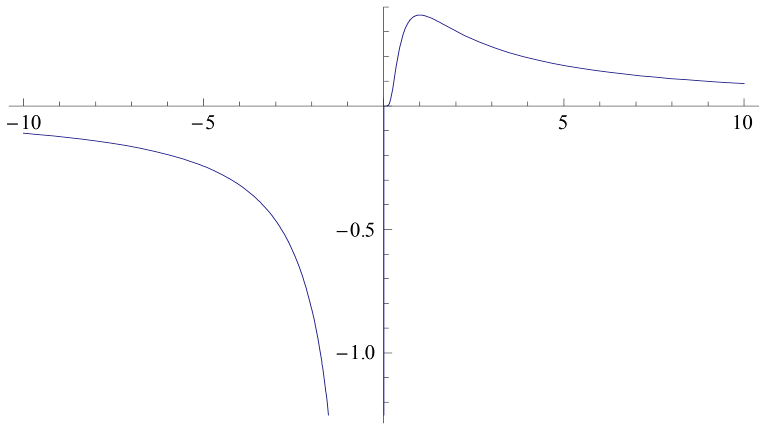
	$(-\infty,0)$	0	$(0,x_2)$	x_2	(x_2,x_3)	x_3	(x_3,∞)
Signo de $g''(x)$	-	No def.	$+$	0	-	0	$+$
Curvat. e Inflex.	Cóncava	Pto. Infl.	Convexa		Cóncava	Pto. Infl.	Convexa
$g(x)$	$\bigcap$	0	$\bigcup$	y_1	$\bigcap$	y_3	$\bigcup$

donde $y_1 = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} e^{\frac{2}{\sqrt{2}-2}}$ e $y_3 = \dfrac{2}{(2+\sqrt{2})} e^{-\frac{2}{(2+\sqrt{2})}}$.

4.4.- (0,3 puntos) Hallar las asíntotas.

Asíntota Vertical	$x=0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -\infty$
Asíntota Horizontal ($x\to\pm\infty$)	$y=0$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = 0$	

4.5.- (0,5 puntos) Construir el gráfico de $g(x)$.



Problema 5 (1 punto) Hallar aproximadamente $\sqrt{2\sqrt{2}}$ usando un polinomio de Taylor de grado 3. Estimar el error cometido

R/: Consideremos la función $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$, notemos que $f(2) = \sqrt{2\sqrt{2}}$. El valor más cercano para el cual conocemos $f(x)$ junto con sus derivadas sin cometer ningún error es $x = 1$, luego desarrollando la función en un entorno de $x = 1$ tenemos que $f(x) = f(1) + f^{'}(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + e$. Calculemos

$$f^{'}(1) = \frac{3}{4}$$
$$f^{(2)}(1) = -\frac{3}{16}$$
$$f^{(3)}(1) = \frac{15}{64}$$

lo cual nos da $f(2) \approx 1 + \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{2!16} + \dfrac{15}{3!64} = \dfrac{217}{128}$

Usando la fórmula del error tenemos que

$e = \dfrac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!}, \quad \varepsilon(1,2)$

podemos estimarlo por $|e| \leq \dfrac{135}{4!256} = \dfrac{25}{2048}$

Problema 6 (2 puntos) Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$

R/:

1. Haciendo el cambio de variables $x = t^2$ tenemos $dx = 2tdt$ luego,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt = 2te^t - 2e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

2. Completando cuadrados tenemos $x^2 + x + 3 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 3 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}$, luego

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C.\end{aligned}$$