Notas del Curso:

Integrales Singulares y sus aplicaciones

Liliana Forzani
Wilfredo Urbina

Prefacio

Eugene (Gene) Fabes fue nuestro inolvidable maestro. Hombre generoso y sabio, matemático profundo, inquieto y original, Gene nos motivo y nos condujo en esa hermosa aventura del pensamiento que es la Matemática.
En 1996, en Cortona, hermoso pueblo de la Toscana, como preludio de sus 60 años, se celebraron los 20 años de relaciones de Gene con Italia. A raíz de un curso de verano que él había dado allí mismo, en el año 1976, se desarrolló un intenso intercambio de investigadores, postdoctorantes y estudiantes de doctorado de varias universidades italianas con la Universidad de Minnesota, o mejor dicho con Gene Fabes. A esa celebración tuvimos la suerte de poder asistir junto con una inmensa cantidad de sus amigos y admiradores y pudimos compartir la alegría de celebrar 20 años de esa frutífera relación. En medio de ese entusiasmo pensamos que algo similar se podía repetir con Latinoamérica, region en la cual Gene también poseía una legion de amigos y admiradores, por lo que le propusimos que dictara un curso en la X Escuela Venezolana de Matemáticas en Mérida en septiembre de 1997, proposición que, por supuesto, aceptó inmediatamente con su provervial entusiasmo.
Lamentablemete en mayo de 1997 Gene moría en Minneapolis, víctima de un paro cardíaco, por lo cual no sólo nos quedamos desamparados su hijos académicos, sino que se perdió la oportunidad de aprovechar su sabiduríia y su empuje para dar un fuerte impulso a los estudios de Análisis Armónico y Ecuaciones Diferenciales Parciales en Venezuela y en el resto de la América Latina.
Luego de varios años que nos costo superar el luto y el desamparo en que nos dejo Gene, hemos decidido recopilar y traducir al español las notas que él iba a dictar, basadas en los cursos de posgrado dados en la Universidad de Minnesota, y dictar así, finalmente, su curso en Mérida, como un homenaje a él y su inmenso legado.
El objetivo del curso es el estudio de la Teoría clásica de las Integrales Singulares, desarrollada inicialmente por Alberto Calderón y Antoni Zygmund en la década de los 50, y hoy en día una de las ramas más importantes del Análisis Armónico, con diversas aplicaciones a varios campos y en especial a las Ecuaciones Diferenciales Parciales. La forma en que Gene expone la teoría se basa esencialmente en el enfoque ya clásico de Ronald R. Coifman e Ives Meyer, junto con el desarrollo posterior del famoso teorema $T(1)$ de Guy David y J. L. Journè.
Queremos agradecer profundamente a los organizadores de la XIV Escuela Venezolana de Matemáticas por la oportunidad para dictar el curso y esperamos que, a pesar de la ausencia de Gene, sirva para promover los estudios de Análisis Armónico y de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Liliana Forzani
Wilfredo Urbina

Índice General

CAPITULO 1

La necesidad de la teoría L^2.

A lo largo de estas notas la constante C representará una constante genérica que puede ser diferente cada vez que aparece. $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue de un conjunto. El promedio de una función f sobre un conjunto se denotará por $\displaystyle \fint_A f = \frac{1}{|A|}\int_A f$.

Operadores de convolución y no convolución. Algunos ejemplos

1. Integral de Cauchy sobre $\mathcal{R}$

(Integrales Singulares con núcleos de convolución).
Dado un punto $z = x + it$ con $x \in \mathcal{R}$ y $t \in \mathcal{R}^+$, y una función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ en $L^p(\mathcal{R}^n)$ con $1 \le p < \infty$ definimos

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}} \frac{f(y)}{z-y}\, dy$$

Podemos probar que F es absoutamente convergente y define una función analítica. En efecto verifica,

$$\frac{1}{|z-y|} \le \begin{cases} \frac{1}{t} \\ \\ \frac{1}{|x-y|} \end{cases}$$

Entonces $\frac{1}{|z-y|} \in L^{p'}(\mathcal{R})$ para p' dual de p, y por lo tanto la integral que define F es absolutamente convergente.

Notemos que

$$\begin{aligned} F(z) &= F(x+it) \\ &= \frac{-i}{2\pi}\int_{\mathcal{R}} f(y)\frac{(x-y)-it}{(x-y)^2+t^2}\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{R}} \frac{t}{(x-y)^2+t^2} f(y)\, dy - \frac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{R}} \frac{x-y}{(x-y)^2+t^2} f(y)\, dy \end{aligned}$$

Entonces

$$\Re F(z) = \int_{\mathcal{R}} f(y) k_1(x,y) dy,$$

$$\Im F(z) = \int_{\mathcal{R}} f(y) k_2(x,y) dy$$

con

$$k_1(x,y) = \frac{t}{(x-y)^2 + t^2}$$
$$k_2(x,y) = \frac{x-y}{(x-y)^2 + t^2},$$

es decir, $k_1(x,y) = k_1(x-y)$ y $k_2(x,y) = k_2(x-y)$. El problema a trabajar aquí (recordemos que para $t > 0$ esta es una buena función) es estudiar $\lim_{t \to 0} F(x+it)$. Es decir, estudiar el comportamiento de F en la frontera.

Así como el teorema de diferenciación de Lebesgue para funciones en $L^2(\mathcal{R}^n)$ lleva a estudiar el operador maximal de Hardy-Littlewood, este problema nos lleva a estudiar el operador maximal definido por

$$F^*(x) = \sup_{t>0} |F(x+it)|.$$

No es difícil probar (estudiando separadamente la parte real y la parte imaginaria) que

$$F^*(x) \leq cMf(x) + C \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy \right| \tag{1.1}$$

donde

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$$

es el operador maximal de Hardy-Littlewood, y el segundo término es el operador maximal de las truncaciones de la Transformada de Hilbert, (un tipo particular de Integral Singular) que es un operador acotado en L^p para $1 < p < \infty$ y es de tipo débil $(1,1)$ (por supuesto, esto es también cierto para la maximal de Hardy-Littlewood).

EJERCICIO 1.1. *Probar que la desigualdad (1.1) es cierta.*

DEFINICIÓN:

(1) Un operador T se dice que está acotado de $L^p(\mathcal{R}^n)$ en $L^p(\mathcal{R}^n)$ si existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ $\forall f \in L^p$.

(2) Un operador T se dice de tipo débil (p,p) si existe una constante $C>0$ tal que

$$|\{x\in\mathcal{R}^n : |Tf(x)|>\lambda\}|\le \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathcal{R}^n}|f|^p,\ \ \forall\lambda>0,\forall f\in L^p(\mathcal{R}^n)$$

EJERCICIO 1.2. *Probar que si un operado es acotado de $L^p(\mathcal{R}^n)$ en $L^p(\mathcal{R}^n)$ entonces es de tipo débil (p,p). (Esto justifica el nombre de tipo débil).*

Unas palabras sobre cada uno de ellos.

Operador maximal de Hardy-Littlewood

En el Capítulo 2 se probará que

(1) Acotación en $L^\infty(\mathcal{R}^n)$. $\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B |f|\le\|f\|_{L^\infty}$, por lo tanto, trivalemente

$$\|Mf\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^\infty}$$

(2) Acotación en $L^1(\mathcal{R}^n)$.

$$|\{x\in\mathcal{R}^n : Mf(x)>\lambda\}|\le\frac{C}{\lambda}\int_{\mathcal{R}^n}|f|.$$

(3) Acotación en $L^p(\mathcal{R}^n), 1<p<\infty$, se usa una técnica llamada interpolación.

Operador maximal de las truncaciones de la Transformada de Hilbert

Hay una teoría general. Primero se debe estudiar la acotación uniforme de los operadores truncados y luego con esta teoría general obtenemos la acotación de los operadores maximales asociados. La acotación en $L^\infty(\mathcal{R}^n)$ no es cierta (ya veremos cual es su sustituto). Para la acotación débil, además de dos estimaciones fundamentales, necesitamos la acotación en $L^2(\mathcal{R}^n)$. Esta acotación en $L^2(\mathcal{R}^n)$ también la necesitamos para la interpolación para obtener las acotaciones en $L^p(\mathcal{R}^n)$. En este caso el operador truncado es una convolución,

$$k_\varepsilon f(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{1}{x-y}f(y)dy=(k_\varepsilon * f)(x)$$

con

$$k_\varepsilon(x-y)=\frac{1}{x-y}\chi_{|x-y|>\varepsilon}$$

o bien

$$k_\varepsilon(x)=\frac{1}{x}\chi_{|x|>\varepsilon},$$

y debido a que

$$\widehat{k_\varepsilon * f}=\widehat{k_\varepsilon}.\widehat{f}$$

(donde $\hat{k}$ indica la Transformada de Fourier de k); no es difícil probar que $\|\widehat{k_\varepsilon}\|_{L^\infty}\le c$ en este caso tenemos entonces

$$\|k_\varepsilon * f\|_{L^2} = \|\widehat{k_\varepsilon * f}\|_{L^2} = \|\widehat{k_\varepsilon}.\widehat{f}\|_{L^2} \leq c\|\widehat{f}\|_{L^2} = c\|f\|_{L^2}$$

Luego aquí no tenemos muchos problemas. ¿ Qué sucede si queremos sustituir $\mathcal{R}$ como frontera por (el gráfico de) una función φ Lipschitz? Ya veremos que el núcleo deja de ser de convolución.

2. Integral de Cauchy sobre curvas Lipschitz

(Integrales singulares con núcleos que no son de convolución)

Tenemos ahora entonces como frontera una función Lipschitz con derivada acotada. Sea $\varphi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ una función de clase Lip 1,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x - y| \text{ con } \|\varphi'\|_{L^\infty} \leq M.$$

Definimos una función F en la región *superior* del gráfico de φ, $\gamma = graf(\varphi) = \{y + i\varphi(y) : y \in \mathcal{R}\}$, y consideramos $z = x + i(t + \varphi(x))$ con $t > 0$ y definimos la integral de Cauchy sobre la curva Lipschitz φ como

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{z - \xi}d\xi$$

con $\xi = y + i\varphi(y)$, $d\xi = (1 + i\varphi'(y))dy$ y $z = x + i(t + \varphi(x))$.

Así

$$F(z) = F(x + i(t + \varphi(x))) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{R}} \frac{f(y + i\varphi(y))(1 + i\varphi'(y))}{(x - y) + i(t + \varphi(x) - \varphi(y))}dy.$$

Como antes queremos estudiar qué sucede cuando t converge a 0 (si $t > 0$ y $f \in L^p$ esta integral es absolutamente convergente). Como en el caso anterior, si llamamos

$$\tilde{f}(y) = f(y + i\varphi(y))(1 + i\varphi'(y)) \;\; (f \in L^p \Rightarrow \tilde{f} \in L^p)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} F^*(x) &= \sup_{t>0}|F(x + i(t + \varphi(x)))| \\ &\leq CM\tilde{f}(x) + \sup_{\varepsilon>0}|\int_{|x-y|>\varepsilon} \tilde{f}(y)\frac{x - y}{(x - y)^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2}dy| \\ &+ \sup_{\varepsilon>0}|\int_{|x-y|>\varepsilon} \tilde{f}(y)\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{(x - y)^2 + (\varphi(x) - \varphi(y))^2}dy| \end{aligned}$$

Observaciones: vemos aquí que los núcleos

$$k_1(x,y) = \frac{x-y}{(x-y)^2 + (\varphi(x)-\varphi(y))^2},$$
$$k_2(x,y) = \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{(x-y)^2 + (\varphi(x)-\varphi(y))^2}$$

ya no son de convolución y ya no podemos usar la Transformada de Fourier para estudiarlos fácilmente. Aquí es donde aparece lo que se dió en llamar el teorema $T(1)$ que da condiciones necesarias y suficientes para que un operador de este tipo sea acotado en L^2. Las primeras pruebas (ante que apareciera el teorema $T(1)$) de que la integral de Cauchy era acotada en L^2 era tediosa.
Estudiemos un poco mejor estos núcleos. Hay dos propiedades de estos núcleos (sin truncar) que comparten con la *Transformada de Hilbert* y que nos ayudará en el estudio de la teoría L^2.

(i) $|k_i(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|}$ (trivial)
(ii) $|\nabla_x k_i(x,y)| + |\nabla_y k_i(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^2}$

(Observar aquí que sólo estudiamos en (2) uno de los sumandos ya que $k_i(x,y) = -k_i(y,x)$ y por lo tanto las derivadas se comportan igual)

$$\partial_x k_2(x,y) = \frac{\varphi'(x)}{(x-y)^2 + (\varphi(x)-\varphi(y))^2} - \frac{[\varphi(x)-\varphi(y)]2(x-y)}{[(x-y)^2 + (\varphi(x)-\varphi(y))^2]^2}$$

Entonces,

$$|\partial_x k_2(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^2} + \frac{C}{|x-y|^2}$$

Hay una teoría general que muestra:

tipo débil $(1,1)$ + *acotación en* $L^2 \to$ *acotación en* $L^p, 1 < p \leq 2$,

acotación en $L^p, 1 < p \leq 2$ + *dualidad* $\to$ *acotación en* $L^p, 2 < p < \infty$.

Por lo tanto la acotación en L^2 es de fundamental importancia. El teorema $T(1)$ dá condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un operador está acotado en $L^2(\mathcal{R}^n)$.
El objetivo del curso es el estudio de la Teoría de Integrales Singulares, desarrollada inicialmente por Alberto Calderón y Antony Zygmund en la década de los 50, que hoy se conoce como la Teoría de Integrales Singulares de Calderón-Zygmund. Para la formulación de dicha teoría fue necesario el desarrollo de los llamados métodos reales del Análisis Armónico que permitieron la formulación de la teoría en $\mathcal{R}^n$, más allá de caso periódico donde se usaba de manera crucial los métodos complejos. Por ello será necesario en las primeras secciones del Capítulo 2 estudiar el Lema de descomposición de Calderón-Zygmund, el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz y la función Maximal de Hardy-littlewood ya citadas en el Prefacio. Estudiaremos posteriormente las Integrales

Singulares de núcleo variable, en el enfoque ya clásico de Ronald R. Coifman e Ives Meyer, que son el resultado de un largo e intenso desarrollo de la teoría, a partir de la Transformada de Hilbet. No haremos ninguna referencia a dicho desarrollo y en todo caso referimos al libro de Stein [**7**] y al de J. Duandikoetxea [**1**]. Estudiaremos la teoría básica para acotación de operadores integrales singulares en los espacios $L^p(\mathcal{R}^n)$. Probaremos, en un contexto bastante general, que la acotación en el espacio $L^2(\mathcal{R}^n)$ de estos operadores implica la acotación de los mismos en los espacios $L^p(\mathcal{R}^n)$ para todo $1 \leq p < \infty$. Posteriomente se hace necesario, para poder abordar el famoso teorema $T(1)$ de Guy David y J. L. Journè, el estudio de los espacios BMO y de las medidas de Carleson, cosa que haremos en el Capítulo 3. Será en el Capítulo 4 donde finalmente estudiaremos en detalle el teorema $T(1)$. La prueba original se debe a David-Journè [**4**] donde usan la Tería de acotación en L^2 de M. Cotlar. Aquí daremos una demostración debida a Fabes, Mitrea y Mitrea ([**5**]). Finalmente en el Capítulo 5 daremos una aplicación debida a Calderón sobre acotación de la Integral de Cauchy sobre curvas Lipschitz con constante Lipschitz pequeña. Posteriormente daremos ideas de como extender este Teorema de Calderón al caso de curvas Lipschitz generales. Hemos querido hacer estas notas, en lo posible, autocontenidas sin embargo dado lo extenso y profundo del material ello se hace dificultoso en extremo por lo que más de una vez tendremos que apelar a algunas de las referencias que se citan al final.

CAPITULO 2

Operadores Integrales Singulares

1. Introducción

En este Capítulo desarrollaremosa algunos de los llamados métodos reales del Análisis Armónico que permitieron la formulación de la teoría de Integrales Singulares en $\mathcal{R}^n$. Por ello estudiaremos primeramente el Lema de descomposición de Calderón-Zygmund, el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz y la función Maximal de Hardy-littlewood ya citadas en el Prefacio. Posteriormente estudiaremos las Integrales Singulares de núcleo variable, en el enfoque ya clásico de Ronald R. Coifman e Ives Meyer, que son el resultado de un largo e intenso desarrollo de la teoría, a partir de la Transformada de Hilbet. No haremos ninguna referencia a dicho desarrollo y en todo caso referimos al libro de Stein [**7**] y al de J. Duandikoetxea [**1**]. Definiremos luego precisamente que entendemos por Integral Singular. Estudiaremos la teoría básica para acotación de operadores integrales singulares en los espacios $L^p(\mathcal{R}^n)$. Probaremos, en un contexto bastante general, que la acotación en el espacio $L^2(\mathcal{R}^n)$ de estos operadores implica la acotación de los mismos en los espacios $L^p(\mathcal{R}^n)$ para todo $1 \leq p < \infty$.

2. Lema de descomposición de Calderón-Zygmund

Dscompondremos al espacio $\mathcal{R}^n$ de manera diádica. Diremos que $[0,1)^n$ es el cubo unidad abierto por la derecha de $\mathcal{R}^n$, $\mathcal{Q}^0$ es la familia de cubos de $\mathcal{R}^n$ congruentes con $[0,1)^n$ con vértices en el retículo $\mathbb{Z}^n$. Dilatando esta familia de cubos por un factor $2^{-k}, k \in \mathbb{Z}$, obtenemos la familia $\mathcal{Q}^k$, es decir la familia $\mathcal{Q}^k$ es la familia de cubos abiertos por la derecha con vértices en el retículo $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Llamaremos **cubos diádicos** a todos los cubos de la familia $\cup_k \mathcal{Q}^k$. Las siguientes propiedades son evidentes por construcción,

i) Todo $x \in \mathcal{R}^n$ está en un único cubo en cada familia $\mathcal{Q}^k$.
ii) Dos cubos diádicos cualesquiera o son disjuntos o uno de ellos está totalmente contenido en el otro.
iii) Un cubo diádico de la familia $\mathcal{Q}^k$ está contenido en un único cubo diádico de cada familia $\mathcal{Q}^j, j < k$ y contiene 2^n cubos diádicos de la familia $\mathcal{Q}^{k+1}$.

Usando este tipo de descomposición de $\mathcal{R}^n$, tenemos el famoso **lema de descomposición de Calderón Zygmund**, TEOREMA 2.1. **Descomposición de Calderón - Zygmund**. *Sea $f \in L^1(\mathcal{R}^n)$ no negativa y sea λ una constante positiva. Entonces existe una descomposición de $\mathcal{R}^n$ tal que:*

i) $\mathcal{R}^n = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega = \emptyset$.

ii) $f(x) \leq \lambda$ *c.s. en* F.

iii) Ω *es union de cubos con interiores es disjuntos,* $\Omega = \cup_k Q_k$, *tal que*

$$|\Omega| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} f(x)dx. \tag{2.1}$$

iv) Cada Q_k verifica

$$\lambda < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x)dx \leq 2^n \lambda. \tag{2.2}$$

Además, si definimos

$$g(x) = f(x)\chi_F(x) + \sum_k \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x)dx \right) \chi_{Q_k}(x) \tag{2.3}$$

y

$$b(x) = \sum_k (f(x) - \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x)dx)\chi_{Q_k}(x), \tag{2.4}$$

entonces $f(x) = g(x) + b(x)$. Las funciones **buena** *g y* **mala** *b de la llamada* **descomposición de Calderón-Zygmund** *de f a nivel λ tienen las siguientes propiedades:*

v) $|g(x)| \leq 2^n \lambda$ *c.s.*

vi) $||g||_p^p \leq (2\lambda)^{n(p-1)} ||f||_1, 1 \leq p < \infty$,

vii) $\displaystyle\int_{Q_k} b(x)dx = 0$,

viii) $\displaystyle\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |b(x)|dx \leq \frac{2}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x)dx$,

ix) $||b||_1 \leq 2||f||_1$.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.1: Descomponemos $\mathcal{R}^n$ en un reticulado de cubos Q iguales cuyo interiores son disjuntos y cuyo diámetro común es suficientemente grande tal que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)dx \leq \lambda,$$

para cada cubo Q del reticulado. (Esto es posible ya que $\int_{\mathcal{R}^n} f(y)dy < \infty$).
Sea Q un cubo fijo del reticulado, lo dividimos en 2^n cubos congruentes bisectando cada lado del cubo Q. Sea Q' uno de esos cubos entonces tenemos dos casos:

Caso #1: $\displaystyle\frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} f(x)dx > \lambda$.

En este caso uno no subdivide al cubo Q' sino que lo seleccionamos como uno de los cubos Q_k . Tenemos entonces para él ya que como Q' proviene de la subdivisión de Q,

$$|Q| = 2^n |Q'|,$$

y por tanto

$$\lambda < \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f(x)dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_{Q} f(x)dx \leq 2^n\lambda.$$

Caso #2: $\displaystyle\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f(x)dx \leq \lambda.$

En este caso subdividimos a Q' en 2^n cubos congruentes bisectando cada lado del cubo Q' y repetimos éste proceso hasta que eventualmente ocurra el Caso #1 (si es que ocurre).

Consideramos $\Omega = \cup_k Q_k$; la unión de los cubos Q_k obtenidos en el Caso #1 donde hemos empezado el proceso en cada cubo Q de nuestro reticulado inicial. Tenemos entonces que

$$f(x) \leq \lambda,$$

c.s. en $F = \Omega^c$; ya que por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue (véase Stein [**7**] 1.8)

$$f(x) = \lim_{Q} \frac{1}{|Q|}\int_{Q} f(x)dx,$$

donde el límite es tomado sobre todo los cubos Q que contienen a x y cuyos diamétros tienden a cero, y cada uno de los cubos de la descomposición que contiene a $x \in F$ es un cubo para el cual la segunda alternativa se cumple.

Así pues, están probados i) ii) y iv) directamente por la construcción. Usando (2.2) tenemos,

$$|\Omega| \leq \sum_k |Q_k| < \sum_k \frac{1}{\lambda}\int_{Q_k} f(x)dx \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathcal{R}^n} f(x)dx,$$

con lo que obtenemos iii).

Verifiquemos las propiedades de la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel λ.

Es claro, por la definición, que $|g(x)| \leq 2^n\lambda$ para $x \in \Omega$, así tenemos que probar que esta estimación es cierta c.s. en F. Pero esto es una inmediata consecuencia de i) ya que $f(x) = g(x)$ si $x \in F$ con lo que obtenemos iv) y de allí v) es inmediato, ya que por definición

$$\int |g(x)|dx \leq \int f(x)dx.$$

Las condiciones vi)-viii) son inmediatas y se dejan como ejercicio.

La descomposición de Calderón - Zygmund está referida, a la medida de Lebesgue. Un problema es obtener versiones análogas para otras medidas μ. Si la medida μ es doblante (es decir, existe una constante C tal que para cualquier cubo $Q, \mu(2Q) \leq C\mu(Q)$), es fácil ver que existe una descomposición de Calderón-Zygmund para μ. Muy recientemente ha habido avances importantes de versiones de descomposición de Calderón - Zygmund para la llamadas medidas r-dimensionales ($0 < r \leq n$), que no son necesariamente doblantes.

3. Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz

Estudiaremos ahora un tema de gran importancia en Análisis como lo es la Interpolación de Operadores. Sea T un operador lineal definido de un espacio vectorial $\mathcal{A}$ a otro espacio $\mathcal{B}$, supongamos que $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ dos subespacios de Banach $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}_1$ dos subespacios de Banach de $\mathcal{B}$, tal que T restringido a $\mathcal{A}_i$ manda este espacio continuamente en $\mathcal{B}_i\, i = 0, 1$. Cuando este es el caso, usualmente se puede probar que hay infinitos pares de espacios de Banach (A, B) *intermedios* con $A \subset \mathcal{A}$ y $B \subset \mathcal{B}$, tal que T restringida a A, es un operador acotado en B. Teoremas generales de este tipo se llaman **Teoremas de Interpolación** para operadores lineales. Un teorema básico de interpolación referente a espacios $L^p(\mathcal{R}^n)$, es el teorema de interpolación de Riesz-Thorin, que, por los objetivos de estas notas, no estudiaremos dado que no será utilizado en lo que sigue. El resultado que vamos a estudiar en detalle es el teorema de interpolación de Marcinkiewicz en el cual las hipótesis son más débiles que en el caso del teorema de Riesz-Thorin.
Consideremos $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, una noción básica para el teorema de interpolación Marcinkiewicz es la siguiente,

DEFINICIÓN: Sea $f : X \to \mathbb{C}$ es una función medible finita casi siempre definimos la **función de distribución** de f como

$$m(f, \lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}), \tag{2.5}$$

para todo $\lambda > 0$.
Como μ es positiva, tenemos que $m(f, \lambda)$ es una función de λ a valores reales (ó valores reales extendidos) definida en el intervalo $[0, \infty]$. Claramente, $m(f, \lambda)$ es no creciente y continua a la derecha, además es fácil de verificar que $m(f, \lambda)$ satisface

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $f : X \to \mathbb{C}$ es una función medible, se sigue*

i) Desigualdad de Tchebychev

$$m(f, \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{x \in X : |f(x)| > \lambda} |f(y)|^p dy, \tag{2.6}$$

para todo $\lambda > 0$.

ii) Si $1 \leq p < \infty$

$$||f||_p^p = \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(f, \lambda) d\lambda, \tag{2.7}$$

y si $p = \infty$

$$||f||_\infty = \inf\{\lambda : m(f, \lambda) = 0\}. \tag{2.8}$$

iii) $m(f + g, \lambda) \leq m(f, \lambda/2) + m(g, \lambda/2)$.

La representación (2.7) es la base de la interpolación de Marcinkiewicz y se obtiene de manera directa usando el Teorema de Fubini.

EJERCICIO 2.1. *Probar la Proposición 2.1.*

Usando la función de distribución $m(f,\lambda)$, podemos introducir los espacios L^p de tipo débil o **clases de Marcinkiewicz**, $L^{p,\infty}$

DEFINICIÓN: Para $1 \leq p < \infty$ denotados por $L^{p,\infty}$ el espacio de todas las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ tales que

$$||f||_{p,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda[m(f,\lambda)]^{1/p} < \infty. \tag{2.9}$$

Para el caso $p = \infty$ ponemos $L^\infty = L^{\infty,\infty}$.
Obsérvese que si $1 \leq p < \infty$, $|| \cdot ||_{p,\infty}$ no es una norma . De hecho, se tiene

PROPOSICIÓN 2.2. *Si* $1 \leq p < \infty$

i) $L^p \subset L^{p,\infty}$
ii) $||f + g||_{p,\infty} \leq 2(||f||_{p,\infty} + ||g||_{p,\infty})$

EJERCICIO 2.2. *Probar la Proposición 2.2. Ayuda: Para i) use la desigualdad de Tchebychev, y para ii) use (2.1) y la desigualdad de Young,* $(a+b)^{1/p} \leq a^{1/p} + b^{1/p}$*. para* $a, b \in \mathcal{R}$*.*

De la Proposición 2.2 podemos deducir que $L^{p,\infty}$ es un espacio vectorial cuasinormado pero no normado. Sin embargo, se puede probar que para $1 < p < \infty$, $||.||_{p,\infty}$ es equivalente a una norma y que con dicha norma $L^{p,\infty}$ es un espacio de Banach. Se puede probar también que $L^{1,\infty}$ es un espacio completo pero no normado.
Los espacios $L^{p,\infty}$ son un caso especial de los **espacios de Lorentz** $L(p,q)$,que son espacios que unifican y generalizan los espacios L^p y los $L^{p,\infty}$. Un concepto que entra en la definición de la norma en los espacios de Lorentz es el concepto de **reordenamiento decreciente**,

DEFINICIÓN: Sea $f : X \to \mathbb{C}$ es una función medible, definimos f^* su reordenamiento decreciente como

$$f^*(t) = inf\{\lambda : m(f,\lambda) \leq t\}. \tag{2.10}$$

La función f^* esta definida en $(0,\infty)$, es no-negativa, no creciente y continua a la derecha. Además tenemos

PROPOSICIÓN 2.3. f^* *verifica*

i) $m(f^*,\lambda) = m(f,\lambda)$, $\lambda \geq 0$, *es decir que* f^* *tiene la misma distribución que* f *,*
ii) Para todo $t > 0$ $m(f, f^*(t)) \leq t$.

La función f^* puede ser utilizada para la demostración del Teorema de Marcinkiewicz.

DEFINICIÓN: Sea $M(X)$ el espacio de las funciones medibles definidas en X tomando valores complejos. Un operador lineal o sublineal $T : L^p(X) \to M(X)$; con $1 \leq p < \infty$ se dice que es de tipo débil (p, q), con constante $A_{p,q}$, si

$$|\{x : Tf > \lambda\}| \leq (A_{p,q} \frac{||f||p}{\lambda})^q \tag{2.11}$$

para todo $f \in L^p(X)$ y $\lambda > 0$, o equivalentemente

$$||Tf||_{p,\infty} \leq A_{p,q}||f||_p. \tag{2.12}$$

En el caso $q = \infty$, por definición tipo débil (p, ∞) coincide con tipo (p, ∞). Es decir un operador de tipo débil (p, q) es un operador acotado de $L^p(X)$ en $L^{p,\infty}$.
En nuestro caso, sólo consideramos el caso $X = \mathcal{R}^n$. Estamos listos para enunciar y probar la versión diagonal del Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz:

TEOREMA 2.2. **Marcinkiewicz** *Sea $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ y $T : L^{p_1}(\mathcal{R}^n) + L^{p_2}(\mathcal{R}^n) \to M(\mathcal{R}^n)$ es un operador sublineal (es decir, $|T(f + g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$). Si T es de tipo débil (p_1, p_1) y de tipo débil (p_2, p_2), entonces T es de tipo (fuerte) (p, p) para todo $p \in (p_1, p_2)$.*

El enunciado de este resultado fue enviado por J. Marcinkiewicz, siendo prisionero de guerra de los nazis, a A. Zygmund en una carta personal en 1939 y fue publicado ese mismo año. Posteriormente, en 1956, Zygmund generalizó este resultado para el caso no diagonal, dando importantes aplicaciones. De manera independiente el profesor Mischa Cotlar dió también una prueba de él. Finalmente, este teorema puede ser generalizado para espacios de Lorentz.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.2: Demostremos el teorema sólo para el caso $p_1 = 1$ y $p_2 = r > 1$, que es la forma usual en que lo vamos a aplicar, el caso general queda como ejercicio.
Consideremos primero el caso $r = \infty$. Cambiando el operador T por $||T||^{-1}T$ podemos asumir que

$$||Tf||_\infty \leq ||f||_\infty.$$

Dado $f \in L^1(\mathcal{R}^n) \cap L^r(\mathcal{R}^n)$, para cada $\lambda \in \mathcal{R}^+$ definimos

$$f_1^\lambda(x) \;=\; f(x), \text{ if } |f(x)| \geq \lambda/2 \quad 0, \quad \text{if } |f(x)| < \lambda/2$$

y $f_2^\lambda(x) = f(x) - f_1^\lambda(x)$. Por lo tanto

$$|Tf(x)| \leq |Tf_1^\lambda(x)| + \lambda/2,$$

y

$$\{x \in \mathcal{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x \in \mathcal{R}^n : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\}.$$

Como T es de tipo débil $(1,1)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathcal{R}^n : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\}| &\leq c\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\int_{\mathcal{R}^n}|f_1^\lambda(x)|dx \\
&= 2c\lambda^{-1}\int\limits_{|f|\geq/9\lambda/2}|f(x)|dx.
\end{aligned}$$

Combiando ii) de la Proposición 2.1 con esta estimación y cambiando el orden de integración tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}^n}|Tf(x)|^p dx &= p\int\limits_0^\infty \lambda^{p-1}|\{x \in \mathcal{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}|d\lambda \\
&\leq p\int\limits_0^\infty \lambda^{p-1}(2c\lambda^{-1}\int\limits_{|f|>\lambda/2}|f(x)|dx)\, d\lambda \\
&= 2cp\int\limits_0^\infty \lambda^{p-2}(\int\limits_{|f|>\lambda/2}|f(x)|dx)\, d\lambda \\
&= 2cp\int_{\mathcal{R}^n}(\int\limits_0^{2|f(x)|}\lambda^{p-2}d\lambda)\, |f(x)|dx \\
&= 2cp\int_{\mathcal{R}^n}\frac{|2f(x)|^{p-1}}{p-1}|f(x)|dx \\
&= \frac{2^p c_p}{p-1}||f||_p^p,
\end{aligned}$$

lo que nos de el resultado en el caso $r=\infty$.
En el caso $r<\infty$ tenemos

$$\begin{aligned}
m(\lambda, Tf) &= |\{x \in \mathcal{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \\
&\leq m(\lambda/2, Tf_1^\lambda) + m(\lambda/2, Tf_2^\lambda) \\
&\leq c_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\int_{\mathcal{R}^n}|f_1^\lambda(x)|dx + c_r^r\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-r}\int_{\mathcal{R}^n}|f_2^\lambda(x)| \\
&= 2c_1\lambda^{-1}\int\limits_{|f|>\lambda/2}|f(x)|dx + (2c_r)^r\lambda^{-r}\int\limits_{|f|<\lambda/2}|f(x)|^r x.
\end{aligned}$$

En la prueba del caso $r=\infty$ hemos usado que

$$\int\limits_0^\infty \lambda^{p-2}(\int\limits_{|f|>\lambda/2}|f(x)|dx)d\lambda = \frac{2^{p-1}}{p-1}||f||_p^p.$$

Un argumento similar prueba que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \lambda^{p-1-r}\Big(\int_{|f|<\lambda/2} |f(x)|^r dx\Big)d\lambda &= 2^{p-r}\int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^r\Big(\int_0^\infty |f(x)|\lambda^{p-1-r}d\lambda\Big)dx \\ &= \frac{2^{p-r}}{r-p}||f||_p^p.\end{aligned}$$

Combinando la parte (ii) de la Proposición 2.1 con esta desigualdad obtenemos

$$||Tf||_p \leq c_p||f||_p,$$

con $c_p = 2\sqrt{p}\left(\frac{c_1}{p-1} + \frac{c_r^r}{r-p}\right)^{1/p}$.

4. Función Maximal de Hardy-Littlewood

DEFINICIÓN: Dado $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{R}^n)$, definimos Mf la **función maximal de Hardy - Littlewood** de f como

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{|B(x,r)|} |f(u)|du && (2.13)\\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{|B(0,r)|} |f(x-u)|du, && (2.14)\end{aligned}$$

donde $B(x,r)$ es la bola de centro $x \in \mathcal{R}^n$ y radio $r > 0$.
La función maximal de Hardy - Littlewood Mf mide los promedios de $|f|$ alrededor de x. Se tienen las siguientes propiedades

PROPOSICIÓN 2.4. *Mf verifica las siguientes propiedades,*

i) *Mf es continua inferiormente y por tanto Borel medible.*
ii) $0 \leq Mf(x) \leq \infty$.
iii) $M(f_1 + f_2)(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$,
iv) $M(cf)(x) = |c|Mf(x)$.
v) *Para cualquier función f diferente de cero en un conjunto de medida positiva, existe una constante positiva C tal que*

$$Mf(x) \geq \frac{C}{|x|^n}.$$

EJERCICIO 2.3. *Probar la Proposición 2.4.*

Por lo tanto Mf no es nunca integrable a menos que $f = 0$ *c.s.* Si limitamos nuestras consideraciones a cualquier subconjunto acotado en $\mathcal{R}^n$, entonces la integrabilidad de Mf se cumple sólo si se exigen condiciones más estrictas que la integrabilidad de f (véase por ejemplo [**1**] Teorema 2.23). Para hallar una manera de estimar el *tamaño* de Mf tenemos el siguiente resultado

TEOREMA 2.3. *Existe una constante C, que depende sólo de la dimensión, tal que para cualquier $f \in L^1(\mathcal{R}^n)$ tenemos*

$$|\{x \in \mathcal{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}||f||_1. \qquad (2.15)$$

para todo $\lambda > 0$.

Así pues, la función Maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil (1,1). Esta estimación es la mejor posible (respecto al orden de magnitud) para la función de distribución de Mf si $f \in L^1(\mathcal{R}^n)$.

Prueba del Teorema 2.3: Vamos a usar el lema de Calderón-Zygmund para dar la prueba. Como $Mf = M(|f|)$, podemos suponer que f es a valores reales no negativos. Sea $\lambda > 0$ y consideremos la descomposición de Calderón-Zygmund de f a nivel $\frac{1}{2^{3n+1}+2^n}\lambda$, $f = g + b$. Como la función maximal es sublineal, tenemos que

$$Mf(x) \leq Mg(x) + Mb(x), \tag{2.16}$$

para todo $x \in \mathcal{R}^n$. Basta probar que

$$Mf(x) \leq \lambda, \tag{2.17}$$

para $x \notin \Omega^*$, ya que en este caso

$$\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \lambda\} \subset \Omega^*$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\lambda|\{x \in \mathcal{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| &\leq \lambda \sum_k |2Q_k| = 2^n \lambda \sum_k |Q_k| \\
&\leq 2\lambda \frac{2^{3n+1} + 2^n}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} f(y)dy \\
&= 2[2^{3n+1} + 2^n] \int_{\mathcal{R}^n} f(y)dy.
\end{aligned}$$

Luego basta probar (2.17). Sea Q un cubo en $\mathcal{R}^n$, con centro en $x \in (\Omega^*)^c$. Probemos primero que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y)|dy \leq \frac{2^{3n+1}}{2^{3n+1} + 2^n}\lambda. \tag{2.18}$$

Como $b = 0$ en Ω^c, tenemos

$$\int_Q |b(y)|dy = \sum_k \int_{Q \cap Q_k} |b(y)|dy,$$

donde la suma se extiende para todo a las k para los cuales $Q \cap Q_k \neq \emptyset$. Dividimos los Q_k es dos familias mutuamente exclusivas,

i) $|Q \cap Q_k| \geq |Q_k|/2^n$.
i) $|Q \cap Q_k| \leq |Q_k|/2^n$.

En el primer caso, usando las propiedades iv) y viii) de la descomposición de Calderón-Zygmund, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{|Q\cap Q_k|}{|Q\cap Q_k|}\int_{Q\cap Q_k}|b(y)|dy &\leq 2^n\frac{|Q\cap Q_k|}{|Q_k|}\int_{Q_k}|b(y)|dy\\
&\leq 2^{n+1}\frac{|Q\cap Q_k|}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(y)|dy\\
&\leq \frac{2^{2n+1}}{2^{3n+1}+2^n}\lambda|Q\cap Q_k|.
\end{aligned}$$

En el segundo caso, dado que $x\notin\Omega^*$ y en particular $x\notin 2Q_k$ para todo k tenemos, $|2Q\cap Q_k|\geq|Q_k|/2^n$ y por tanto usando las propiedades iv) y viii) de la descomposición de Calderón-Zygmund se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{Q\cap Q_k}|b(y)|dy &\leq \frac{|2Q\cap Q_k|}{|2Q\cap Q_k|}\int_{2Q\cap Q_k}|b(y)|dy\\
&\leq 2^n\frac{|2Q\cap Q_k|}{|Q_k|}\int_{Q_k}|b(y)|dy\\
&\leq 2^{2n+1}\frac{|Q\cap Q_k|}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(y)|dy\\
&\leq \frac{2^{3n+1}}{2^{3n+1}+2^n}\lambda|Q\cap Q_k|.
\end{aligned}$$

Luego, uniendo ambas estimaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q|b(y)|dy &= \frac{1}{|Q|}\sum_k\int_{Q\cap Q_k}|b(y)|dy\\
&\leq \frac{2^{3n+1}}{2^{3n+1}+2^n}\lambda\sum_k\frac{|Q\cap Q_k|}{|Q|}\\
&\leq \frac{2^{3n+1}}{2^{3n+1}+2^n}\lambda.
\end{aligned}$$

Finalmente, probemos que si Q es un cubo centrado en x, tenemos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|g(y)|dy\leq\frac{2^n}{2^{3n+1}+2^n}\lambda. \tag{2.19}$$

Por la definición de la parte buena g en la descomposición de Calderón-Zygmund, tenemos

$$\int_Q|g(y)|dy=\sum_k\int_{Q\cap Q_k}|f(y)|dy+\int_{Q\cap\Omega^c}|f(y)|dy=A_1+A_2$$

donde la suma se extiende para todo a las k para los cuales $Q\cap Q_k\neq\emptyset$. De nuevo por la propiedad iv) de la descomposición de Calderón-Zygmund, obtenemos

$$A_1\leq\frac{2^n}{2^{3n+1}+2^n}\lambda\sum_k|Q\cap Q_k|.$$

Para estimar A_2, de nuevo tenemos que utilizar la geometría de la situación. Para ello basta considerar la integral sobre l conjunto abierto $Q \cap (\cup_k \overline{Q_k})^c \subset Q$. Este conjnto se puede escribir entonces como una union disjunta y numerable de cubos abiertos C_k. Cada uno de los C_k tal que $\overline{C_k}$ no contiene la frontera de Q (hay un número finito de ellos) es a su vez union disjunta c.s. de cubos diádicos, denotados como $C_{k,l}$, que fueron subdivididos en la descomposición de Calderón-Zygmund. Luego

$$\frac{1}{|C_{k,l}|}\int_{C_{k,l}} |f(y)|dy < \frac{1}{2^{3n+1}+2^n}\lambda,$$

para todo j, l.
Por otra parte, si $\overline{C_k}$ contiene la frontera de Q, sea l tal que $\frac{1}{2^{l+1}} \leq |C_k| < \frac{1}{2^l}$, entonces $C_k \subset \cup_{l=1}^{2^n} C_{k,l}$, donde los $C_{k,l}$ son cubos diádicos disjuntos con medida menor que $\frac{1}{2^{l+1}}$ que no fueron divididos en el proceso de descomposición de Calderón-Zygmund. Luego tenemos,

$$\int_{C_k} f(y)dy \leq \sum_{l=1}^{2^n}\int_{C_{k,l}} f(y)dy \leq \frac{1}{2^{3n+1}+2^n}\lambda \sum_{l=1}^{2^n}|C_{k,l}| < \frac{2^n}{2^{3n+1}+2^n}\lambda|C_k|.$$

Así pues obtenemos,

$$A_2 \leq \frac{2^n}{2^{3n+1}+2^n}\lambda|Q\cap(\cup_k Q_k)^c|.$$

Entonces

$$\int_Q |g(y)|dy \leq \frac{2^n}{2^{3n+1}+2^n}\lambda\sum_k |Q\cap Q_k| + |Q\cap(\cup_k Q_k)^c| \leq \frac{2^n}{2^{3n+1}+2^n}\lambda|Q|.$$

Como Q es un cubo arbitrario, se sigue que

$$Mg(x) \leq \frac{2^n}{2^{3n+1}+2^n}\lambda,$$

para todo $x \in$. Finalmente de (2.16), con las estimaciones anteriores tenemos

$$Mf(x) \leq Mg(x) + Mb(x) \leq \frac{2^{3n+1}}{2^{3n+1}+2^n}\lambda + \frac{2^n}{2^{3n+1}+2^n}\lambda = \lambda,$$

para $x \notin \Omega^*$, que es (2.17), lo que queríamos probar.
En la prueba de este resultado se pueden usar otros lemas de cubrimiento como el de Vitali o el de Besicovitch, que en verdad dan pruebas más sencillas. Sin embargo como el lema de descomposición de Calderón-Zygmund es el único que hemos estudiado en forma detalla, dado que será fundamental en el estudio de las Interales Singulares, optamos por dar prueba anterior de forma de hacer las notas autocontenidas.
El comportamiento de la función Maximal en los otros espacios $L^p(\mathcal{R}^n), 1 < p \leq \infty$, resulta ser mucho mejor de la obtenida para el caso $p = 1$, ya que, como lo establece el siguiente Teorema, Mf es fuerte (p,p) en ese caso. Más precisamente,

Teorema 2.4. *Sea $1 < p \leq \infty$ y $f \in L^p(\mathcal{R}^n)$. Entonces $Mf \in L^p(\mathcal{R}^n)$ y*

$$||Mf||_p \leq A_p||f||_p \tag{2.20}$$

donde A_p depende sólo de p y la dimensión n.

Prueba del Teorema 2.4: El caso $p = \infty$ es inmediato ya que por la definición de Mf es claro que

$$|Mf(x)| \leq ||f||_\infty,$$

para todo x y asi Mf es acotada si f lo es y claramente

$$||Mf||_\infty \leq ||f||_\infty.$$

Usamos entonces el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz entre los casos $p = 1$ y el caso $p = \infty$ discutido anteriormente para obtener entonces (2.20). Por otra parte, obsérvese que $A_p = O(\frac{1}{p-1})$, si $p \to 1$. Además en un trabajo relativamente reciente Stein y Stromberg probaron que, en verdad, A_p sólo depende de p y no depende de la dimensión.

La función Maximal de Hardy-Littlewood juega un importante papel en diversas partes del Análisis referidas en especial a la teoria de operadores y diferenciación. Como corolarios de los resultados anteriores se puede obtener, por ejemplo, el Teorema de Diferenciación de Lebesgue (véase [**7**] ó [**8**]).
Por otra parte, se puede definir también una función Maximal tomando cubos n-dimensionales M_Qf,

$$M_Qf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{Q(x,r)} \int_{Q(x,r)} |f(u)|du, \tag{2.21}$$

donde $Q(x,r)$ es un cubo con centro en x y $2r$ la longitud de su lado.
Si $n = 1, Mf$ y M_Qf coinciden. Para $n > 1$ es fácil ver, por la invariancia por traslación de la medida de Lebesgue, que M_Qf es equivalente a Mf, es decir, existen constantes c_n y C_n (que dependen sólo de la dimensión n) tal que

$$c_nM_Qf \leq Mf \leq C_nM_Qf. \tag{2.22}$$

Ejercicio 2.4. *Probar que*

$$c_nM_Qf \leq Mf \leq C_nM_Qf, \tag{2.23}$$

donde Mf es la Maximal de Hardy-Littlewood y M_Q la maximal definida por la ecuación (2.21).

Usando dicha equivalencia se puede probar entonces que M_Qf es débil $(1,1)$ y fuerte $(p,p),\ p > 1$.

Además, se puede definir también funciones Maximales usando bolas ó cubos contienen al punto x pero en los que x no es necesariamente el centro, que son las **funciones maximales no centradas**, denotadas como $\hat{M}f$ y $\hat{M}_Qf$ respectivamente, las cuales se definen de la siguiente manera

$$\hat{M}f(x) = \sup_{B(y,r), x\in B(y,r)} \frac{1}{B(y,r)} \int_{B(y,r)} |f(u)|du, \tag{2.24}$$

$$\hat{M}_Q f(x) = \sup_{Q(y,r), x \in Q(y,r)} \frac{1}{Q(y,r)} \int_{Q(y,r)} |f(u)| du. \tag{2.25}$$

Es fácil ver que ellas resultan ser también equivalentes a Mf y $M_Q f$.

EJERCICIO 2.5. *Probar que*

$$Mf \leq \hat{M} f \leq 2^d M_f$$

y

$$M_Q f \leq \hat{M}_Q f \leq 2^d M_Q f.$$

Una generalización natural de $M_Q f$ es definir funciones maximales sobre rectángulos d-dimensionales centrados en x con lados paralelos a los ejes coordenados que se suele llamar **función maximal fuerte** $M_R f$ y se define como

$$M_R f(x) = \frac{1}{|R|} \int_R |f(u)| du. \tag{2.26}$$

Sin embargo $M_R f$ tal y como está definida no tiene, propiedades *buenas*. Se puede probar fácilmente, usando **funciones maximales direccionales**, es decir, funciones maximales que actúan en la dirección de los ejes coordenados,

$$M i f(x) = \sup_{r_i > 0} \frac{1}{2ri} \int_{-r_i}^{r_i} |f(x_1, \cdots, x_i - t, \cdots, x_d)| dt, \tag{2.27}$$

para $i = 1 \cdots, n$, que $M_R f$ en $L^p(\mathcal{R}^n), 1 < p$. Sin embargo, $M_R f$ no es continua débil $(1,1)$. En efecto, lejos del origen, para cualquier f no idénticamente nula

$$M_R f(x) > \frac{1}{|x_1 \cdots x_d|}$$

y por tanto

$$|\{x : M_R f(x) > \lambda\}| = \infty.$$

B. Jessen, J. Marcinkiewicz y A. Zygmund obtuvieron la siguiente desigualdad débil para la función maximal fuerte $M_R f$

$$|\{x : M_R f(x) > \lambda\}| \leq \int |f(x)|(1 + log + |f(x)|)^{n-1} dx.$$

Tenemos también que si modificamos la función Maximal fuerte considerando todos los rectángulos d- dimensionales (no sólo los de lados paralelos a los ejes coordenados) la resultante función Maximal no está acotada en ningún $L^p(\mathcal{R}^n), 1 < p < \infty$. Como referencia para el estudio de la función Maximal y problemas relacionados referimos a la interesante monografía de J. Duoandicoetxea [**1**].

5. Integrales Singulares de Calderón-Zygmund.

Definiremos ahora que entendemos por operador integral singular. Sea $k(x, y)$ una función $k : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$. Suponemos que el operador definido como

$$Kf(x) = \int_{\mathcal{R}^n} k(x, y)f(y)dy. \tag{2.28}$$

está bien definido para funciones $f \in L^p(\mathcal{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.
Además suponemos que k y K satisfacen las siguientes propiedades

i) $|k(x, y)| \leq \dfrac{C}{|x - y|^n}$

ii) (*propiedad de suavidad*) $|\nabla_x k(x, y)| + |\nabla_y k(x, y)| \leq \dfrac{C}{|x - y|^{n+1}}$

iii) (*condición fuerte*) $\|K\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C$,

donde $||K||_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}$ denota la norma del operador K cuando actúa desde el espacio L^p al espacio L^p. Además diremos que $K \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$ si es operador K es tipo fuerte (p, p). Cuando el operador es tipo débil $(1, 1)$ escribiremos $K \in \mathcal{L}(L^1, L^1_w)$.
Bajo estas condiciones podemos demostrar (A. Calderón, A. Zygmund, Acta Mathematica, 1952) el siguiente teorema

Teorema 2.5. *Sea K un operador definido en (2.28) donde k y K satisfacen (i), (ii) y (iii). Entonces, para $1 < p < +\infty$ se tiene $K \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$, es decir*

$$\|K\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C. \tag{2.29}$$

y $K \in \mathcal{L}(L^1, L^1_w)$; esto es

$$|\{x : |Kf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \tag{2.30}$$

Para probar este teorema necesitamos utilizar dos herramientas muy poderosas del Análisis Armónico que fueron introducidas en secciones anteriores, el Teorema de Descomposición de Calderón-Zygmund y el Teorema de Interpolación de Marckinkiewicz. (Teoremas 2.1 y Teorema 2.2).

Prueba de Teorema 2.5 Comenzamos con la prueba de (2.30) usando la descomposición de Calderón-Zygmund. Sea $f \geq 0$, $f \in L^1$ y $\lambda > 0$. Utilizando el Teorema 2.1, existe una sucesión de cubos $\{Q_i\}_{j\in N}$ con interior disjunto que verifican las propiedades (2.2). Además podemos escribir f como suma de dos funciones, $f = g + b$, donde g y b satisfacen

$$\int g(x)^2 dx \leq C\lambda \|f\|_1 , \tag{2.31}$$

$$\int |b(x)| dx \leq C \|f\|_1 . \tag{2.32}$$

Usando (2.31) y (2.32), el operador K está bien definido sobre tales funciones y además $Kf = Kg + Kh$.
Entonces,

$$\begin{aligned} |\{x : |Kf(x)| > \lambda\}| &\leq \left|\left\{x : |Kg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x : |Kb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Comencemos acotando I_1. Usando la desigualdad de Tchebychev, la hipótesis (iii) y (2.31) tenemos que

$$I_1 \leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathcal{R}^n} |Kg(x)|^2 \, dx \leq \frac{C}{\lambda^2} \int_{\mathcal{R}^n} g(x)^2 dx \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \tag{2.33}$$

Acotemos ahora I_2. Sea y_j y r_j el centro y radio del cubo Q_j respectivamente. Para $\beta > 1$, denotemos βQ_j el cubo de centro y_j y radio β veces r_j. Claramente $|\beta Q_j| \leq C \, |Q_j|$, con $C = C(n, \beta)$. Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \left|\left\{x : |Kb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cap (\cup_j \beta Q_j)\right| + \left|\left\{x : |Kb(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cap (\cup_j \beta Q_j)^C\right| \\ &\leq |\cup_j \beta Q_j| + \frac{C}{\lambda} \int_{\left(\bigcup_j \beta Q_j\right)^C} |Kb(x)| \, dx, \end{aligned}$$

Para el primer término usamos la propiedad de duplicación de la medida de Lebesgue ($|B(x, 2r)| \approx |B(x, r)|$) y (2.2) para obtener

$$\left|\bigcup_j \beta Q_j\right| \leq C \sum_j |Q_j| \leq \frac{C}{\lambda} \sum_j \int_{Q_j} f \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \tag{2.34}$$

Para el segundo término estimamos primero $|Kb(x)|$. b es cero en $\left(\bigcup_j Q_j\right)^C$ y $\int_{Q_j} h dx = 0$; entonces por el teorema del valor medio y (ii) obtenemos que

$$\begin{aligned} |Kb(x)| &= \left|\int_{\mathcal{R}^n} k(x, y) h(y) dy\right| \\ &= \left|\sum_{j \in N} \int_{Q_j} k(x, y) h(y) dy\right| \\ &= \left|\sum_{j \in N} \int_{Q_j} [k(x, y) - k(x, y_j)] \, h(y) dy\right| \\ &\leq \sum_{j \in N} \int_{Q_j} |\nabla_y k(x, \xi)| \, |y - y_j| \, |h(y)| \, dy \\ &\leq \sum_{j \in N} \int_{Q_j} \frac{|y - y_j|}{|x - \xi|^{n+1}} \, |h(y)| \, dy, \end{aligned}$$

donde ξ está en el segmento que une los puntos y y y_j. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{C}{\lambda}\int_{(\cup_j\beta Q_j)^C}|Kb(x)|\,dx &\leq \frac{C}{\lambda}\int_{(\cup_j\beta Q_j)^C}\sum_{j\in N}\int_{Q_j}\frac{|y-y_j|}{|x-\xi|^{n+1}}|h(y)|\,dydx\\ &= \frac{C}{\lambda}\sum_{j\in N}\int_{Q_j}|h(y)|\int_{(\cup_j\beta Q_j)^C}\frac{|y-y_j|}{|x-\xi|^{n+1}}dxdy. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ya que para $y\in Q_j$ se tiene que

$$\int_{(\cup_j\beta Q_j)^C}\frac{|y-y_j|}{|x-\xi|^{n+1}}dx\leq C, \tag{2.36}$$

tenemos como consecuencia de (2.34), (2.35), (2.36) y de (2.32), que

$$I_2\leq\left|\bigcup_j\beta Q_j\right|+\frac{C}{\lambda}\sum_{j\in N}\int_{Q_j}|h(y)|\,dy\leq\frac{C}{\lambda}\left\|f\right\|_1.$$

Ejercicio 2.6. *Probar fórmula (2.36), es decir, si $y\in Q_j$, y_j es el centro de Q_j y ξ es cualquier punto en el segmento con puntos finales y y y_j entonces*

$$\int_{(\cup_j\beta Q_j)^C}\frac{|y-y_j|}{|x-\xi|^{n+1}}dx\leq C,$$

Finalmente, probaremos (2.29). Sabemos que $K\in\mathcal{L}(L^1,L^1_w)\cap\mathcal{L}(L^2,L^2_w)$; entonces por el teorema de intepolación de Marcinkiewicz $K\in\mathcal{L}(L^p,L^p)$, para todo $1<p<2$.
Para $2<p<\infty$ usamos dualidad: Para $g\in L^{p'}$ con p' tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ definimos el operador K^* como

$$K^*g(x)=\int_{\mathcal{R}^n}k(y,x)g(y)dy \tag{2.37}$$

El operador K^* es el operador dual del operador K. En efecto, para $f\in L^p$ y $g\in L^{p'}$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, tenemos que

$$\int_{\mathcal{R}^n}Kf(x)g(x)dx=\int_{\mathcal{R}^n}f(y)\int_{\mathcal{R}^n}k\left(x,y\right)g(x)dxdy=\int_{\mathcal{R}^n}f(y)K^*g(y)dy,$$

El operador K^*, con núcleo $k^*(x,y)=k(x,y)$ satisface (i), (ii) y (iii). Entonces para $2<p<\infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ tenemos que el operador K^* es acotado en $L^{p'}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\left\|Kf\right\|_p &= \sup_{\|g\|_{p'}=1}\int_{\mathcal{R}^n}Kf(x)g(x)dx=\sup_{\|g\|_{p'}=1}\int_{\mathcal{R}^n}f(x)K^*g(x)dx\leq\\ &\leq \sup_{\|g\|_{p'}=1}\left\|f\right\|_p\left\|Kg\right\|_{p'}\\ &\leq C\left\|f\right\|_p,\end{aligned}$$

con lo que finalizamos la prueba del teorema.

6. El operador $K_{\varepsilon,R}^{\varphi}$: definición y propiedades

Sea $0 < \varepsilon < R$ y $\varphi \in C^{\infty}([0,+\infty))$ una función con valores entre 0 y 1 tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq 1 \\ 0 & \text{para } x \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.38}$$

Definimos, a partir de K con núcleo k satisfaciendo las condiciones (i) y (ii), un nuevo operador $K_{\varepsilon,R}^{\varphi}$ de la siguiente manera

$$K_{\varepsilon,R}^{\varphi} f(x) = \int_{\mathcal{R}^n} \varphi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) k(x,y) \left(1 - \varphi\left(\frac{|x-y|}{R}\right)\right) f(y)dy. \tag{2.39}$$

Ejercicio 2.7. *El operador $K_{\varepsilon,R}^{\varphi}$ definido con la fórmula (2.39) está bien definido para funciones $f \in L^p(R^n)$, $1 \leq p < \infty$.*

Denotaremos por $k_{\varepsilon,R}^{\varphi}(x,y)$ al núcleo de este nuevo operador. Notemos que dicho núcleo es para $|x-y| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|x-y| > R$ el integrando es cero.
Escencialmente estamos estudiando al operador

$$\int_{\varepsilon < |x-y| < R} k(x,y) f(y) dy,$$

con la ventaja de que $K_{\varepsilon,R}^{\varphi}$ tiene un núcleo suave.

Ejercicio 2.8. *Condiciones (i) y (ii) sobre el núcleo $k(x,y)$ implican que la mismas condiciones se tiene sobre el núcleo $k_{\varepsilon,R}^{\varphi}(x,y)$ con constantes independientes de ϵ y R.*

El siguiente resultado es una inmediata consecuencia de Teorema 2.5 y del Ejercicio 2.8:

Proposición 2.5. *Supongamos que el núcleo $k(x,y)$ satisface las condiciones (i), (ii). Supongamos además que el operador $K_{\epsilon,R}^{\varphi}$ satisface la propiedad*

(iii) $' \left\| K_{\epsilon,R}^{\varphi} \right\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C.$

entonces

$$\left\| K_{\varepsilon,R}^{\varphi} \right\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \tag{2.40}$$

$$\left| \left\{ x : \left| K_{\varepsilon,R}^{\varphi} f(x) \right| > \lambda \right\} \right| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \tag{2.41}$$

7. El operador $K_{\varepsilon}^{\varphi}$: definiciones y propiedades

Sea $\varphi \in C^{\infty}$ una función como en la sección anterior. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos un nuevo operador del sigueitne modo

$$K_{\varepsilon}^{\varphi} f(x) = \int_{\mathcal{R}^n} \varphi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) k(x,y) f(y) dy, \tag{2.42}$$

donde k satisface las propiedades (i) y (ii).
Veremos que el operador $K_{\varepsilon}^{\varphi}$ está bien definido para cada $f \in L^p(\mathcal{R}^n)$, con $1 \leq p < \infty$.

PROPOSICIÓN 2.6. *La integral en (2.42) converge absolutamente para cada $f \in L^p(\mathcal{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$; más aún*

$$K_\varepsilon^\varphi f(x) = \lim_{R \to +\infty} K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x), \tag{2.43}$$

uniformemente.

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 2.6: La prueba de la convergencia absoluta es inmediata. En efecto por (i)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^n} \left| \varphi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) k(x,y) f(y) \right| dy &\leq C \int_{|x-y|>\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{|x-y|^n} |f(y)|\, dy \leq \\ &\leq C \|f\|_p^p \left\| \left(|x-y|^{-n} \chi_{\{|x-y|>\frac{\varepsilon}{2}\}} \right) \right\|_{p'}^{p'} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

donde $p', 1 < p' \leq \infty$, es el exponente conjugado de p.
Análogamente, para probar (2.43) tomemos $\varepsilon < R$,

$$\begin{aligned} \left| K_\varepsilon^\varphi f(x) - K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x) \right| &\leq C \|f\|_p^p \left\| \left(|x-y|^{-n} \chi_{\{|x-y|>R/2\}} \right) \right\|_{p'}^{p'} = \\ &= C \|f\|_p^p \int_{|x-y|>R/2} \frac{1}{|x-y|^{np'}} dy \\ &\leq C R^{-n(p'-1)} ||f||_p^p \end{aligned} \tag{2.44}$$

que para $R \to \infty$ tiende a cero uniformemente en x.

PROPOSICIÓN 2.7. *Supongamos que las condiciones* (i), (ii) *y* $(iii)'$ *son válidas. Entonces*

$$\left\| K_\varepsilon^\varphi \right\|_{\mathcal{L}(L^p, L^p)} \leq C \tag{2.45}$$

$$\left| \left\{ x : \left| K_\varepsilon^\varphi f(x) \right| > \lambda \right\} \right| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \tag{2.46}$$

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 2.7: La prueba de (2.45) es una consecuencia inmediata de (2.43) y de la Proposición 2.5. Veamos (2.46). Dado $\lambda > 0$ podemos elegir R tal que $CR^{-n(p'-1)}||f||_p^p \leq \dfrac{\lambda}{2}$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x : \left| K_\varepsilon^\varphi f(x) \right| > \lambda \right\} \right| &= \left| \left\{ x : \left| K_\varepsilon^\varphi f(x) - K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x) + K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x) \right| > \lambda \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ x : \left| K_\varepsilon^\varphi f(x) - K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x) \right| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x : \left| K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x) \right| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ x : \left| K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x) \right| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|, \end{aligned}$$

ya que por la elección de R y el argumento dado en (2.44) el conjunto $\left\{ x : \left| K_\varepsilon^\varphi f(x) - K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x) \right| > \frac{\lambda}{2} \right\}$ es vacío. De la Proposición 2.5 tenemos que

$$\left| \left\{ x : \left| K_\varepsilon^\varphi f(x) \right| > \lambda \right\} \right| \leq \left| \left\{ x : \left| K_{\varepsilon,R}^\varphi f(x) \right| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 ,$$

que es lo que queríamos probar.

8. El operador K_ε: definición y propiedades

Definimos ahora un operador K_ε del siguiente modo

$$K_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y) f(y) dy. \tag{2.47}$$

donde k satisface las propiedades (i) y (ii).

Ejercicio 2.9. *El operador $K_\varepsilon f$ definido por la fórmula (2.47) y con k satisfacioendo las propiedades (i) y (ii) está bien definido para $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$.*

Probaremos ahora que para este operador son ciertas las mismas propiedades de acotación que para los otros operadores.

Proposición 2.8. *Supongamos que las condiciones (i), (ii) e $(iii)'$ se satisfacen. Entonces*

$$\begin{aligned} \|K_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} &\leq C \\ |\{x : |K_\varepsilon f(x)| > \lambda\}| &\leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \end{aligned}$$

Prueba de la Proposición 2.8: Ya que $\varphi \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|K_\varepsilon^\varphi f(x) - K_\varepsilon f(x)\right| &= \left| \int_{\mathcal{R}^n} \varphi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) k(x,y) f(y) dy - \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y) f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\frac{\varepsilon}{2}<|x-y|<\varepsilon} \left[\varphi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) - 1\right] k(x,y) f(y) dy \right| \\ &\leq C \int_{\frac{\varepsilon}{2}<|x-y|<\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^n} |f(y)|\, dy \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^n} \int_{|x-y|<\varepsilon} |f(y)|\, dy \\ &\leq CMf(x)\,, \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde Mf es la función maximal de Hardy-Littlewood.

Usando la desigualdad triangular y (2.48) tenemos que

$$|K_\varepsilon f(x)| \leq \left|K_\varepsilon^\varphi f(x)\right| + \left|K_\varepsilon^\varphi f(x) - K_\varepsilon f(x)\right| \leq \left|K_\varepsilon^\varphi f(x)\right| + Mf(x)\,.$$

Ya que el operador maximal $M \in \mathcal{L}(L^p, L^p) \cap \mathcal{L}(L^1, L^1_w)$ utilizando Proposición 2.7 la proposición queda demostrada la Proposición.

9. El operador K^*: definición y propiedades

Demostraremos ahora la convergencia puntual del operador K_ε para $\varepsilon \to 0$. Para esto introducimos un nuevo operador K^* (llamado Operador Integral Singular Maximal) que para cada $f \in L^p$ se define por la fórmula

$$K^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y) f(y) dy = \sup_{\varepsilon>0} K_\varepsilon f(x). \tag{2.49}$$

Para la demostración de la convergencia puntual mostraremos primero que el operador K^*, bajo las hipótesis pedidas, es acotado. En efecto probaremos

TEOREMA 2.6. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis* (i), (ii) *e* $(iii)'$. *Entonces para todo* $1 < p < \infty$, *tenemos que*

$$\|K^*\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \tag{2.50}$$

$$|\{x : |K^* f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \tag{2.51}$$

Probaremos este teorema de manera gradual. Probaremos primero el siguiente teorema

TEOREMA 2.7. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis* (i), (ii) *e* $(iii)'$. *Supongamos además que para* $f \in L^p$ *el* $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon f \equiv Kf$ *existe en* L^p. *Entonces*

$$\|K^* f\|_p \leq C \|f\|_p . \tag{2.52}$$

Para probar este resultado necesitamos el siguiente Teorema

TEOREMA 2.8. **Desigualdad de Cotlar**. *Sea* K^* *definido por la fórmula (2.49 verifica para* $1 < p_0 < \infty$ *y para cada* $\varepsilon > 0$,

$$|K_\varepsilon f| \leq C\left[M(|Kf|) + \left(M(|f|^{p_0})^{\frac{1}{p_0}}\right) + M(|f|)\right], \tag{2.53}$$

donde C *es una constante que no depende de* ε *y* M *es la función Maximal de Hardy-Littlewood.*

PRUEBA DEL TEOREMA 2.7:
Por la desigualdad de Cotlar (2.53) para cada $1 < p < \infty$ elegimos $p_0 \in (1, p)$ obtenemos la acotación en L^p del operador K^*. En efecto, utilizando la definición de K^* tenemos de (2.53)

$$|K^* f| \leq C\left[M(|Kf|) + \left(M(|f|^{p_0})^{\frac{1}{p_0}}\right) + M(|f|)\right].$$

ya que la Maximal de Hardy-Littlewood está acotada en L^q para $1 < q < \infty$ obetenemos utilizando $q = \dfrac{p}{p_0} > 1$ que

$$\begin{aligned}
\|K^* f\|_p &\leq C\left(\|M(|Kf|)\|_p + \left\|M(|f|^{p_0})^{\frac{1}{p_0}}\right\|_p + \|M(|f|)\|_p\right)\\
&\leq C\left(\|Kf\|_p + \left(\int |M(|f|^{p_0})(x)|^{\frac{p}{p_0}}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + C\|f\|_p\right)\\
&\leq C\left(C\|f\|_p + \|M(|f|^{p_0})\|_{\frac{p}{p_0}}^{\frac{1}{p_0}} + C\|f\|_p\right)\\
&\leq C\|f\|_p + C\|f^{p_0}\|_{\frac{p}{p_0}}^{\frac{1}{p_0}}\\
&\leq C\|f\|_p ,
\end{aligned}$$

que concluye la demostración del Teorema.

EJERCICIO 2.10. *La acotación (2.53) no es suficiente para probar la acotación débil* $(1,1)$ *del operador* K^**.*

Probaremos ahora Teorema 2.8.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.8 Para probar (2.53) es suficiente probar

$$\left| K_\varepsilon f(x) - \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} Kf(z)dz \right| \leq C\left[\left(M\left(|f|^{p_0}(x)\right)^{\frac{1}{p_0}} \right) + M\left(|f|(x)\right) \right]. \tag{2.54}$$

Probemos (2.54). Sumando y restando $\fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} K\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))}\right)(z)dz$ al miembro izquierdo de (2.54) tenemos que si llamamos
$I = \left| K_\varepsilon f(x) - \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} K\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))^c}\right)(z)dz \right|$ y $II = \left| \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} K\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))}\right)(z)dz \right|$ entonces

$$\left| K_\varepsilon f(x) - \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} Kf(z)dz \right| \leq I + II. \tag{2.55}$$

Acotaremos primero II. Notemos que para cada $f \in L^p$ y para cada p_0, con $1 < p_0 < p$, tenemos que $f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))} \in L^{p_0}$ de esta manera podemos aplicar que el operador K es acotado en L^{p_0}. Sea $p_0^{'}$ el exponente conjugado de p_0, entonces

$$\begin{aligned}
II &\leq \frac{1}{\left|B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)\right|} \int_{\mathcal{R}^n} \chi_{\left(B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)\right)}(z) \left|K\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))}\right)(z)\right| dz \text{ (por Hölder)} \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^n} \left(\int_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} dz \right)^{\frac{1}{p_0^{'}}} \left(\int_{\mathcal{R}^n} \left|K\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))}\right)(z)\right|^{p_0} dz \right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{n}{p_0}}} \left(\int_{\mathcal{R}^n} \left|\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))}\right)(z)\right|^{p_0} dz \right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= \frac{C}{\varepsilon^{\frac{n}{p_0}}} \left|B_\varepsilon(x)\right|^{\frac{1}{p_0}} \left(\fint_{B_\varepsilon(x)} |f(z)|^{p_0} dz \right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&\leq C\left(M\left(|f|^{p_0}\right)(x)\right)^{\frac{1}{p_0}}.
\end{aligned}$$

Acotemos ahora I. Denotamos l.i.m. al límite en norma $L^p(\mathcal{R}^n)$. Por hipótesis para $f \in L^p$ el $\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon f \equiv Kf$ existe en L^p, entonces

$$I = \left| \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} K_\varepsilon f(x)dz - \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} \text{l.i.m.}_{\delta\to 0} \int_{|z-y|>\delta, |y-x|>\varepsilon} k(z,y)f(y)dydz \right|. \tag{2.56}$$

Sea $\delta < \frac{3}{4}\varepsilon$, y $z \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)$. La desigualdad $|y-x| > \varepsilon$ implica $|z-y| > |y-x| - |x-z| > \delta$. Utilizando esto en (2.56) tenemos que

$$\begin{aligned}
I &= \left| \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} K_\varepsilon f(z)dz - \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} \int_{|y-x|>\varepsilon} k(z,y)f(y)dydz \right| \\
&\leq \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} \int_{|y-x|>\varepsilon} |k(x,y) - k(z,y)| \, |f(y)| \, dydz \\
&\leq \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} \int_{|y-x|>\varepsilon} |\nabla_x k(\xi,y)| \, |x-z| \, |f(y)| \, dydz \\
&\leq C\varepsilon \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{1}{|\xi-y|^{n+1}} |f(y)| \, dydz, \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

aplicando el Teorema del Valor Medio (ξ es un punto del segmento entre x y z). Por ello si $|x-z| < \dfrac{\varepsilon}{4} < \dfrac{|x-y|}{4}$, tenemos

$$|\xi - y| \geq |x-y| - |\xi - x| \geq |x-y| - \frac{\varepsilon}{4} > \frac{3\,|x-y|}{4}.$$

Utilizando esta acotación de $|\xi - y|$ en (2.57), obtenemos

$$\begin{aligned}
I &\leq C\varepsilon \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} dz \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+1}} dy \\
&= C\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j\varepsilon<|y-x|<2^{j+1}\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+1}} dy \\
&\leq C\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j\varepsilon} \frac{1}{(2^j\varepsilon)^n} \int_{|y-x|<2^{j+1}\varepsilon} |f(y)| \, dy \\
&\leq C \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \right) M\left(|f|\right)(x) \\
&= CM\left(|f|\right)(x),
\end{aligned}$$

que junto con (2.55) prueba (2.54).

PRUEBA DEL TEOREMA 2.6.
Prueba del tipo fuerte (p,p)*:* Sea $f \in L^p$. Usando la Proposición 2.8 tenemos que $\|K_\varepsilon f\|_p \leq C\|f\|_p$. Entonces existe una sucesión $\{K_{\mu_j}\}_j$ tal que $K_{\mu_j} f \to g$ débilmente en L^p, para $j \to +\infty$. Además $\|g\|_p \leq C\|f\|_p$. En efecto, si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'}$

$$\begin{aligned}
\|g\|_p &= \sup_{\|h\|_{p'=1}} \left| \int g(x)b(x)dx \right| \\
&= \sup_{\|h\|_{p'=1}} \left| \lim_j \int K_{\mu_j} f(x)b(x)dx \right| \\
&\leq \sup_{\|h\|_{p'=1}} C\|f\|_p \|h\|_{p'=1} \\
&\leq C\|f\|_p,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\|K_{\mu_j}\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C$.
Fijemos ahora $\varepsilon > 0$ y x; existe una subsucesión $\left\{K_{\widetilde{\mu_j}}\right\}_j \subset \{K_{\mu_j}\}$ tal que $K_{\widetilde{\mu_j}}\left(f \cdot \chi_{B_\varepsilon(x)}\right) \to l$ débilmente in L^p para $j \to +\infty$; entonces $K_{\widetilde{\mu_j}}\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))^C}\right) \to g - l$ débilmente in L^p. Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| K_\varepsilon f(x) - \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} g(z)dz \right| &\leq \left| K_\varepsilon f(x) - \lim_j \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} K_{\widetilde{\mu_j}}\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))^c}\right)(z)dz \right| + \\
&\quad + \left| \lim_j \fint_{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)} K_{\widetilde{\mu_j}}\left(f \cdot \chi_{(B_\varepsilon(x))}\right)(z)dz \right|.
\end{aligned}$$

Notemos que esta última expresión es similar a (2.55); razonando como en la demostración del Teorema 2.7

$$|K_\varepsilon f| \leq C\left[M(|g|) + \left(M(|f|^{p_0})^{\frac{1}{p_0}}\right) + M(|f|)\right].$$

Hemos probado que $\|g\|_p \leq C\|f\|_p$ y dado que M es un operador acotado de $\mathcal{L}(L^p, L^p)$, la tesis es inmediata.

Prueba del tipo débil $(1,1)$*:* Sea $f \geq 0$ y $\lambda > 0$. De la descomposición de Calderón-Zygmund (Teorema 2.1) si descomponemos f en un nivel λ tenemos que $f = g + b$. Por lo tanto $K_\varepsilon f = K_\varepsilon g + K_\varepsilon b$ y

$$\sup_{\varepsilon>0} |K_\varepsilon f| \leq \sup_{\varepsilon>0} |K_\varepsilon g| + \sup_{\varepsilon>0} |K_\varepsilon b|,$$

en consecuencia $K^*f \leq K^*g + K^*b$ y

$$\begin{aligned} |\{x : |K^*f(x)| > \lambda\}| &\leq \left|\left\{x : |K^*g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x : |K^*b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Acotar I_1 es sencillo. Hemos probado el Teorema 2.6 que $K^* \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$ para $1 < p < +\infty$. Utilizando además (2.31) se tiene

$$I_1 \leq \frac{C}{\lambda^2} \int_{\mathcal{R}^n} g(x)^2 dx \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 . \tag{2.59}$$

Acotemos I_2. Usaremos la misma estrategia que la usada en el Teorema 2.5. En efecto, ya que vale (2.34), obtenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \left|\left\{x : |K^*b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cap \left(\bigcup_j \beta Q_j\right)\right| + \left|\left\{x : |K^*b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cap \left(\bigcup_j \beta Q_j\right)^C\right| \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 + \left|\left\{x : |K^*b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cap (\cup_j \beta Q_j)^C\right|. \end{aligned}$$

Para terminar con la demostración del teorema necesitamos probar que el segundo miembro de la desigualdad anterior está acotado por $\dfrac{C}{\lambda} \|f\|_1$. Para ello acotaremos a $|K_\varepsilon b(x)|$ para $x \in (\cup_j \beta Q_j)^C$

$$K_\varepsilon b(x) = K_\varepsilon\left(\sum_j b\chi_{Q_j}\right)(x) = \sum_j \int_{Q_j} k(x,y)\chi_{\{|x-y|>\varepsilon\}}(y)b(y)dy. \tag{2.60}$$

Dividiremos el conjunto de los índices en la serie de arriba en dos conjuntos de índices. Uno de los conjuntos estará formado por los j tales que $\text{dist}(x, Q_j) \leq \varepsilon$. El otro por los j tales que $\text{dist}(x, Q_j) > \varepsilon$.
Resumiendo $N_1 = \{j \in N : \text{dist}(x, Q_j) \leq \varepsilon\}$ y $N_2 = N \setminus N_1$.
Sea $j \in N_1$; existe $\overline{y} \in Q_j$ tal que $|x - \overline{y}| \leq \varepsilon$. Además para $y \in Q_j$ (recordando que $r_j \equiv$diam(Q_j)) se tiene $|y - \overline{y}| \leq C'r_j$. De esto, y ya que $x \notin \cup_j \beta Q_j$, es posible encontrar una constante C' tal que $C'r_j \leq C\varepsilon$. Luego, para cualquier $y \in Q_j$ tenemos

$$|y - x| \leq |y - \overline{y}| + |\overline{y} - x| \leq \varepsilon + C'r_j \leq C\varepsilon. \tag{2.61}$$

Así de (i) y (2.61) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in N_1}\left|\int_{Q_j} k(x,y)\chi_{\{|x-y|>\varepsilon\}}(y)h(y)dy\right| &\leq \sum_{j\in N_1}\frac{C}{\varepsilon^n}\int_{Q_j}|h(y)|\,dy\\
&\leq \sum_{j\in N_1}\frac{C}{\varepsilon^n}\int_{Q_j\cap\{|x-y|\leq C\varepsilon\}}|h(y)|\,dy\\
&= \sum_{j\in N_1}\frac{C}{\varepsilon^n}\int_{\{|x-y|\leq C\varepsilon\}}\chi_{Q_j}(y)\,|h(y)|\,dy\\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^n}\int_{\{|x-y|\leq C\varepsilon\}}|h(y)|\,dy\\
&\leq CM\left(|h|\right)(x)\,. \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

Sea $j\in N_2$. Por definición para cada $y\in Q_j$ se tiene $|x-y|>\varepsilon$. Ya que $\int_{Q_j} b(y)dy=0$, se tiene, utilizando el Teorema del Valor Medio, que para algún ξ_j en el segmento de extremos y e y_j

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in N_2}\left|\int_{Q_j} k(x,y)\chi_{\{|x-y|>\varepsilon\}}(y)h(y)dy\right| &= \sum_{j\in N_2}\left|\int_{Q_j}\left[k(x,y)-k(x,y_j)\right]b(y)dy\right|\\
&\leq \sum_{j\in N_2}\int_{Q_j}|k(x,y)-k(x,y_j)|\,|b(y)|\,dy\\
&\leq C\sum_{j\in N_2}\int_{Q_j}\frac{|y-y_j|}{|x-\xi_j|^{n+1}}\,|b(y)|\,dy,\\
&\leq C\sum_{j\in N_2} r_j\int_{Q_j}|b(y)|\,\frac{1}{|x-\xi_j|^{n+1}}dy \qquad (2.63)\\
&\leq C\sum_{j\in N_2} r_j\int_{Q_j}|b(y)|\,\frac{1}{|x-y_j|^{n+1}}dy; \qquad (2.64)
\end{aligned}$$

donde hemos usado en la última desigualdad que $|x-\xi_j|>C|x-y_j|$. Esto es cierto eligiendo β suficientemente grande. De (2.60), (2.62) y (2.64) tenemos que

$$|K_\varepsilon b(x)|\leq CM\left(|b|\right)(x)+\sum_{j\in N_2} r_j\int_{Q_j}|b(y)|\,\frac{1}{|x-y_j|^{n+1}}dy. \qquad (2.65)$$

La última estimación vale para K^*. Volviendo a nuestras estimaciones tenemos

$$\begin{aligned}\left|\left\{x : |K^*b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cap \left(\bigcup_j \beta Q_j\right)^C\right| \quad &\leq \quad \left|\left\{x : |M\left(|b|\right)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &+ \quad \left|\left\{\sum_{j\in N_2} r_j \int_{Q_j} |b(y)| \frac{1}{|x-y_j|^{n+1}} dy\right\} \cap \left(\bigcup_j \beta Q_j\right)^C\right|.\end{aligned}$$

El primer miembro es inmediato acotarlo ya que sabemos que $M \in \mathcal{L}(L^1, L^1_w)$, obtenemos así

$$\left|\left\{x : |M\left(|b|\right)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{C}{\lambda}\|b\|_1 \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1 . \tag{2.66}$$

Veamos el segundo término.

$$\begin{aligned}&\left|\left\{x : \sum_{j\in N_2} r_j \int_{Q_j} |b(y)| \frac{1}{|x-y_j|^{n+1}} dy > \frac{\lambda}{2}\right\} \cap \left(\bigcup_j \beta Q_j\right)^C\right| \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_{j\in N_2} r_j \int_{\left(\bigcup_j \beta Q_j\right)^C} \int_{Q_j} |b(y)| \frac{1}{|x-y_j|^{n+1}} dydx. \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_{j\in N_2} r_j \int_{Q_j} |b(y)| \int_{|x-y_j|\geq Cr_j} \frac{1}{|x-y_j|^{n+1}} dxdy \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \sum_{j\in N_2} r_j \int_{Q_j} |b(y)| \int_{Cr_j}^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n+1}} drdy \leq \\ &\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathcal{R}^n} |b(y)|\, dy \\ &\leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1 . \end{aligned} \tag{2.67}$$

Usando (2.66) y (2.67), tenemos que

$$\left|\left\{x : |K^*b(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cap \left(\bigcup_j \beta Q_j\right)^C\right| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1 .$$

Obtenemos así que

$$I_2 \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1 ,$$

con lo que concluye la demostración.

EJERCICIO 2.11. *Probar que si un operador sublineal está acotado de $L^p(\mathcal{R}^n)$ en $L^p(\mathcal{R}^n)$ entonces está débilmente acotado, es decir*

$$||Kf||_p \leq ||f||_p \ \ \textit{implica} \ \ |\{x \in \mathcal{R}^n : \ \ |Kf| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p}||f||_p$$

Recordemos que cuando comenzamos a estudiar la acotación del operador maximal K^* nuestro objetivo era estudiar la convergencia puntual del operador $K_\epsilon f$. Esto haremos a continuación.

LEMA 2.9. *Sea*

$$A = \left\{ g \in L^p : \lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon g(x) \text{ existe en casi todo punto} \right\} \subseteq L^p(\mathcal{R}^n),$$

con $1 \leq p < \infty$. *Supongamos que*

$$\|K^*\|_{\mathcal{L}(L^p, L^p)} \leq C$$

y que

$$|\{x : |K^* f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 .$$

Entonces A es cerrado.

PRUEBA DEL LEMA 2.9: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de A convergente en norma L^p a la función f. Para verificar que $f \in A$ es suficiente probar que

(2.68)

$$|A_\delta| = \left| \left\{ x : \limsup_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon f(x) - \liminf_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon f(x) > \delta \right\} \right| = 0 \qquad \text{para todo } \delta > 0.$$

Para cada n tenemos

$$\begin{aligned} |A_\delta| \leq & \left| \left\{ x : \limsup_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon f_n(x) - \liminf_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon f_n(x) > \frac{\delta}{3} \right\} \right| \\ + & \left| \left\{ x : \limsup_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon \left(f_n - f\right)(x) > \frac{\delta}{3} \right\} \right| + \left| \left\{ x : \liminf_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon \left(f_n - f\right)(x) > \frac{\delta}{3} \right\} \right| . \end{aligned}$$

El primer término es vacío por la hipótesis de f_n. Notemos que por la definición de K^* tenemos que

$$|K_\varepsilon g(x)| \leq \sup_{\varepsilon > 0} |K_\varepsilon g(x)| = K^* g(x)$$

y entonces

$$\left| \limsup_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon g(x) \right| \leq K^* g(x).$$

Así usando que K^* es acotado en L^p y por lo tanto es débilmente acotado, tenemos que

$$\left| \left\{ x : \limsup_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon \left(f_n - f\right)(x) > \frac{\delta}{3} \right\} \right| \leq \frac{C}{\delta^p} ||f_n - f||_p.$$

De forma análoga vale que

$$\left| \left\{ x : \liminf_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon \left(f_n - f\right)(x) > \frac{\delta}{3} \right\} \right| \leq \frac{C}{\delta^p} ||f_n - f||_p. \tag{2.69}$$

Así obtenemos que

$$|A_\delta| \leq \frac{C}{\delta^p} \|f_n - f\|_p .$$

Ya que $\delta > 0$ es arbitrario, para $n \to \infty$ tenemos (2.68) y por lo tanto el Lema.

CAPITULO 3

Espacio BMO y la medida de Carleson

1. Hacia el Teorema T(1)

En el Capítulo 2 hemos visto que las condiciones

$$\begin{aligned} &(i) && |k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}, \\ &(ii) && |\nabla_x k(x,y)| + |\nabla_y k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n+1}}, \\ &(iii)' && \left\| K^{\varphi}_{\varepsilon,R} \right\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C. \end{aligned}$$

son suficientes para obtener que los operadores $K^{\varphi}_{\varepsilon,R}$, K_{ε} y K^* pertenecen a $\mathcal{L}(L^p, L^p)$, si $1 < p < \infty$, y a $\mathcal{L}(L^1, L^1_w)$, si $p = 1$.
Las condiciones (i) y (ii) son sobre el núcleo $k(x,y)$ son condiciones estándares que verifican los núcleo integrales singulares. El problema es verificar la condición $(iii)'$. En general no es fácil y el problema es encontrar condiciones necesarias y suficientes que sean fáciles de chequear para obtener $(iii)'$: esto es escencialmente el Teorema $T(1)$.
En el caso de la maximal de Hardy-Littlewood tenemos que la función maximal pertenece a $\mathcal{L}(L^\infty, L^\infty) \cap \mathcal{L}(L^1, L^1_w)$, y por el teorema de interpolación de Marcinkiewicz tenemos que pertenece a $\mathcal{L}(L^p, L^p)$. En particular pertenece a $\mathcal{L}(L^2, L^2)$. Para los núcleos con las condiciones (i) y (ii) las propiedades de acotación en L^∞ no son ciertas en general. Pero podemos sustituir la acotación en L^∞ por la acotación en el espacio BMO (Funciones de Oscilación Acotada). A continuación estudiaremos estos espacios.

2. El espacio BMO

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{R}^n)$. Introducimos la *función maximal sharp* de f como

$$f^{\#}(x) = \sup_{B=B(x)} \fint_B |f(z) - \fint_B f(y)dy|dz$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas $B(x)$ con centro x. Si $f^{\#} \in L^\infty(\mathcal{R}^n)$ decimos que f es una función de BMO *(Bounded Mean Oscillation)*. Se puede ver fácilmente que $\left\| f^{\#} \right\|_\infty$ no es una morma, sólo una seminorma. En efecto $\left\| f^{\#} \right\|_\infty = 0$ sí y sólo sí f es una constante en casi todo punto. Haciendo el cociente obtenemos que $\left(BMO, \|f\|_{BMO} = \left\|f^{\#}\right\|_{\infty}\right)$ es un espacio de Banach. Así tenemos la siguiente definición

DEFINICIÓN 1. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathcal{R}^n)$. Entonces $f \in BMO$ sí y sólo sí $\left\|f^{\#}\right\|_{\infty} < \infty$.

EJERCICIO 3.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathcal{R}^n)$. Si existe una constante C tal que para cualquier bola B existe una contante c_B verificando*

$$\fint_B |f(y) - c_B|\, dy \leq C,$$

entonces $f \in BMO$.

PROPOSICIÓN 3.1. *$L^\infty(\mathcal{R}^n) \subset BMO(\mathcal{R}^n)$ y $\|f\|_{BMO} \leq 2\|f\|_\infty$.*

La demostración es inmediata. Lo interesante es probar que la inclución es estricta.

EJERCICIO 3.2. *$BMO(\mathcal{R}^n) \subsetneq L^\infty(\mathcal{R}^n)$. En particular* $\log|x| \in BMO$, *pero* $\log|x| \notin L^\infty(\mathcal{R}^n)$.

3. Condiciones necesarias para obtener $(iii)'$.

Daremos a continuación dos condiciones necesarias para que un operador singular que verifica las condiciones (i) y (ii) verifiquen la acotación en L^2; es decir $(iii)'$.

Probaremos primero que si el operador satisface (i), (ii) y $(iii)'$ entonces $K^\varphi_{\varepsilon,R} \in \mathcal{L}(L^\infty, BMO)$.

TEOREMA 3.1. *Supongamos que tenemos (i), (ii) y $(iii)'$ entonces*

$$\left\|K^\varphi_{\varepsilon,R} f\right\|_{BMO} \leq C\|f\|_\infty, \tag{3.1}$$

con C independiente de ε y R. En particular $K^\varphi_{\varepsilon,R}(1) \in BMO$.

Se puede ver que lo mismo es cierto para $K^{\varphi,*}_{\varepsilon,R}$, el operador adjunto de $K^\varphi_{\varepsilon,R}$.

PRUEBA DEL TEOREMA 3.1: Sea $f \in L^\infty$ y sea B una bola. Escribamos la función f como suma de dos funciones $f = f\cdot\chi_{2B} + f\cdot\chi_{(2B)^C}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\fint_B \left|K^\varphi_{\varepsilon,R} f(y) - \fint_B K^\varphi_{\varepsilon,R} f(z)dz\right| dy &\leq \fint_B \left|K^\varphi_{\varepsilon,R}(f\cdot\chi_{2B})(y) - \fint_B K^\varphi_{\varepsilon,R}(f\cdot\chi_{2B})(z)dz\right| dy \\
&+ \fint_B \left|K^\varphi_{\varepsilon,R}\left(f\cdot\chi_{(2B)^C}\right)(y) - \fint_B K^\varphi_{\varepsilon,R}\left(f\cdot\chi_{(2B)^C}\right)(z)dz\right| \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Usando la Proposición 2.5 y la desigualdad de Cauchy-Schwartz, tenemos

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq 2 \fint_B \left|K^{\varphi}_{\varepsilon,R}\left(f \cdot \chi_{2B}\right)(y)\right| dy && (3.2)\\
&\leq 2 \int_{\mathcal{R}^n} \frac{\chi_B(y)}{|B|} \left|K^{\varphi}_{\varepsilon,R}\left(f \cdot \chi_{2B}\right)(y)\right| dy \leq \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{|B|}} \left(\int_{\mathcal{R}^n} \left|K^{\varphi}_{\varepsilon,R}\left(f \cdot \chi_{2B}\right)(y)\right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{|B|}} \left\|K^{\varphi}_{\varepsilon,R}\left(f \cdot \chi_{2B}\right)\right\|_2 \\
&\leq \frac{2C}{\sqrt{|B|}} \left(\int_{2B} |f(y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|f\|_{\infty} . && (3.3)
\end{aligned}
$$

Vemos ahora I_2. Consideremos primero la expresión que está dentro del valor absoluto para un $y \in B$:

$$
\begin{aligned}
&\left| K^{\varphi}_{\varepsilon,R}\left(f \cdot \chi_{(2B)^C}\right)(y) - \fint_B K^{\varphi}_{\varepsilon,R}\left(f \cdot \chi_{(2B)^C}\right)(z) dz \right| \\
&= \left| \int_{(2B)^C} k^{\varphi}_{\varepsilon,R}(y,w) f(w) dw - \fint_B \int_{(2B)^C} k^{\varphi}_{\varepsilon,R}(z,w) f(w) dw dz \right| \\
&= \left| \fint_B \int_{(2B)^C} \left[k^{\varphi}_{\varepsilon,R}(y,w) - k^{\varphi}_{\varepsilon,R}(z,w) \right] f(w) dw dz \right| . && (3.4)
\end{aligned}
$$

Utilizando el Teorema del valor medio y la acotación del gradiente (ii), utilizando (3.4) tenemos que

$$
I_2 \leq \fint_B \fint_B \int_{(2B)^C} \frac{|y-z|}{|\xi - w|^{n+1}} |f(w)| \, dw dz dy, \tag{3.5}
$$

donde ξ es un punto en el segmento con extremos y y z.
Sea r_B el radio de B; tomando $y \in B$, $z \in B$, (por lo tanto $\xi \in B$) y $w \notin 2B$ tendremos $|\xi - w| \geq C_1 r_B$ y

$$
|y - w| \leq |y - \xi| + |\xi - w| \leq 2r_B + |\xi - w| \leq 2C_1^{-1} |\xi - w| + |\xi - w| = C |\xi - w| .
$$

Utilizando esto en (3.5) sigue

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \fint_B \int_{|y-w|\geq C_2 r_B} \frac{C r_B}{|y-w|^{n+1}} |f(w)|\, dwdy \\ &\leq C \|f\|_\infty \fint_B \int_{|y-w|\geq C_2 r_B} \frac{r_B}{|y-w|^{n+1}} dwdy \\ &\leq C \|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Esta desigualdad en conjunto con (3.3) dá la tesis.

EJERCICIO 3.3. *Probar que el Teorema 3.1 es también válido para el operador adjunto de $K^{\varphi}_{\varepsilon,R}$; es decir para el operador $K^{\varphi,*}_{\varepsilon,R}$.*

Veremos ahora una propiedad que es de fundamental importancia.

DEFINICIÓN (WCP). Consideremos un conjunto cualquiera $C_c^\infty(\mathcal{R}^n)$ acotado por la norma L^2. Decimos que $K^{\varphi}_{\varepsilon,R}$ satisface la propiedad de cancelación débil si para todo φ, $\psi \in B$ tenemos

$$\left| \int K^{\varphi}_{\varepsilon,R} \left(\varphi^{t,w}\right)(x) \psi^{t,w}(x)\, dx \right| \leq C_B t^n, \tag{3.6}$$

donde $\varphi^{t,w}(x) \equiv \varphi\left(\frac{x-w}{t}\right)$.

EJERCICIO 3.4. *Si para el operador K valen las condiciones (i) y (ii) y además el núcleo es antisimétrico (es decir $k(x,y) = -k(y,x)$), entonces K satisface la (WCP).*

EJERCICIO 3.5. *Supongamos que valen (i) y $(iii)'$. Entonces $K^{\varphi}_{\varepsilon,R}$ satisface la (WCP).*

En síntesis, el Teorema 3.1 y el Ejercicio 3.5 aseguran que si el operador satisface (i), (ii) y $(iii)'$ entonces $K^{\varphi}_{\varepsilon,R} \in \mathcal{L}(L^\infty, BMO)$ y además satisface la propiedad (WCP). El Teorema T(1) afirma el recíproco, es decir si el operador satisface (i), (ii), (WCP), $K^{\varphi}_{\varepsilon,R} \in \mathcal{L}(L^\infty, BMO)$, $K^{*,\varphi}_{\varepsilon,R} \in \mathcal{L}(L^\infty, BMO)$ entonces el operador verifica $(iii)'$. En consecuencia la importancia del Teorema T(1) radica en que las condiciones suficientes que se piden para que el operador verifique $(iii)'$ no son solamente fáciles de verificar, sino que además, bajo las condiciones (i) y (ii) son necesarias.

4. El Lema de John Nirenberg

Enunciaremos ahora (sin prueba) un Teorema que caracteriza a las funciones de BMO.

TEOREMA 3.2. *(**Desigualdad de John-Nirenberg**), ([**6**]). $f \in BMO$ sí y sólo sí existe una constante positiva C_1 y C_2 tal que para cualquier bola B se* *tiene*

$$\left|\left\{x \in B : \left|f(x) - \fint_B f(y)dy\right| > \lambda\right\}\right| \leq C_1 \exp\left(-\frac{C_2\lambda}{\|f\|_{BMO}}\right)|B|.$$

COROLARIO 3.3. *Sea $f \in BMO$. Entonces para cualquier $p > 1$ se tiene $f \in {L^p}_{loc}(\mathcal{R}^n)$ y además*

$$\fint_B \left|f(x) - \fint_B f(y)dy\right|^p dx \leq C\,\|f\|_{BMO}\,.$$

PRUEBA DE 3.3 PARA EL CASO P=2. Usando la desigualdad de John-Nirenberg tenemos

$$\begin{aligned}\int_B \left|f(x) - \fint_B f(y)dy\right|^p dx &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left|\left\{x \in B : \left|f(x) - \fint_B f(y)dy\right| > \lambda\right\}\right| d\lambda \\ &\leq |B|\,C_1 p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\exp\left(-\frac{C_2\lambda}{\|f\|_{BMO}}\right)d\lambda.\end{aligned}$$

Sea ahora $p = 2$ tenemos

$$\int_B \left|f(x) - \fint_B f(y)dy\right|^2 dx \leq |B|\,C_1 2\left[-\frac{\|f\|_{BMO}}{C_2}\exp\left(-\frac{C_2\lambda}{\|f\|_{BMO}}\right)\right]_0^\infty,$$

de lo cual sigue la tesis para el caso $p = 2$.

EJERCICIO 3.6. *Probar el Corolario 3.3 para cualquier p.*

5. Medida de Carleson y BMO

El ánimo principal de esta sección es demostrar una desigualdad que será de utilidad en lo que sigue:

$$\int_{\mathcal{R}_+^{n+1}} |\phi_t * f|^2\,|\psi_t * \beta|^2\,dx\frac{dt}{t} \leq C\|\beta\|_{BMO}\int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^2\,dx, \tag{3.7}$$

donde $\mathcal{R}_+^{n+1}$ es el semiespacio de $\mathcal{R}^{n+1}$ donde la última coordenada es positiva, f y β son funciones de BMO, ψ_t y ϕ_t satisfacioendo las propiedades

$$\phi, \psi \in L^1(\mathcal{R}^n) : \int_{\mathcal{R}^n} \phi = 1, \quad \int_{\mathcal{R}^n} \psi = 0; \tag{3.8}$$

$$\phi, \psi \text{ no negativa y radialmente decreciente;} \tag{3.9}$$

$$\phi_t \equiv \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{x}{t}\right); \psi_t \equiv \frac{1}{t^n}\psi\left(\frac{x}{t}\right). \tag{3.10}$$

Una ϕ_t con tales propiedades se denomina una aproximación de la identidad. Un ejemplo es el núcleo de Poisson definido mediante la fórmula

$$P_t f(x) \equiv (\phi_t * f)(x) = \int_{\mathcal{R}^n} \frac{t}{\left(t^2 + |x-y|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} f(y)dy. \tag{3.11}$$

Estrictamente ligada a la desigualdad (3.7) está otra desigualdad asociada al llamado *Problema de Carleson*, el cual consiste en probar que existe una medida positiva de Borel μ sobre $\mathcal{R}_+^{n+1}$ tal que

$$\int_{\mathcal{R}_+^{n+1}} |P_t f(x)|^2 \, d\mu(x,t) \leq C \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^2 \, dx. \tag{3.12}$$

Nuestro objetivo es probar que dicha desigualdad es cierta cuando la medida es una Medida de Carleson que estudiaremos a continuación. Antes de definirlas introduciremos alguna notación.
Dado una bola $B \subseteq \mathcal{R}^n$ de centro x_0 y radio r, llamaremos *tienda de* B el conjunto

$$T(B) \equiv \left\{(x,t) \in \mathcal{R}_+^{n+1} : |x - x_0| \leq r - t\right\};$$

y para un conjunto abierto cualquiera $\Omega \subseteq \mathcal{R}^n$ ponemos

$$T(\Omega) \equiv \left\{(x,t) \in \mathcal{R}_+^{n+1} : dist\left(x, \Omega^C\right) \geq t\right\}.$$

Definición. Una medida μ *definida sobre* $\mathcal{R}^{n+1}$ *se dice que es una medida de Carleson si es positiva, de Borel y existe una constante C positiva tal que para cualquier bola* $B \subseteq \mathcal{R}^n$

$$\frac{1}{|B|} \int_{T(B)} d\mu(x,t) \leq C.$$

Proposición 3.2. *Cualquier medida solución del Problema de Carleson es una medida de Carleson.*

Prueba de la Proposición 3.2. Indicamos con $2B$ la bola con el mismo centro que B y radio doble; aplicando la desigualdad (3.12) a la función $f \equiv \chi_{2B}$ resulta

$$\begin{aligned} C\,|2B| &= \int_{\mathcal{R}^n} |\chi_{2B}(x)|^2 \, dx \\ &\geq \int_{\mathcal{R}_+^{n+1}} |P_t \chi_{2B}(x)|^2 \, d\mu(x,t) \\ &\geq \int_{T(B)} |P_t \chi_{2B}(x)|^2 \, d\mu(x,t). \end{aligned}$$

Es suficiente probar que

$$|P_t \chi_{2B}|^2 \geq C_1 > 0. \tag{3.13}$$

En efecto esto implicaría

$$C_2\,|B| \geq C_1 \mu(T(B)) \Rightarrow \mu(T(B)) \leq C\,|B| \quad \text{para todo } B \text{ bola.}$$

Probemos (3.13). Sea $x \in B$, esto implica que $B_{\frac{r}{2}}(x) \subseteq 2B$, donde $B_{\frac{r}{2}}(x)$ es la bola de centro x y radio $\frac{r}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} P_t\chi_{2B}(x) &\geq \int_{B_{\frac{r}{2}(x)}} \frac{t}{(t^2 + |x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy \\ &= \frac{1}{t^n} \int_{B_{\frac{r}{2}(0)}} \frac{1}{[1 + \left(\frac{|y|}{t}\right)^2]^{\frac{n+1}{2}}} dy \\ &= \int_{B_{\frac{r}{2t}(0)}} \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}} du \\ &\geq C_1, \end{aligned}$$

ya que suponemos que $t \leq r$.

Teorema 3.4. *Sea μ una medida de Carleson y $F(x,t) \in C^0(\mathcal{R}_+^{n+1})$, entonces* $\forall p \in]0, +\infty[$ vale la desiguadad:

$$\int_{\mathcal{R}_+^{n+1}} |F(x,t)|^p \, d\mu(x,t) \leq C \int_{\mathcal{R}^n} |F^*(x)|^p \, dx,$$

donde $F * (x) = \sup_{|y-x|<Ct} F(y,t)$.

Observación. A partir de esta Proposición; del hecho que en el caso del núcleo de Poisson definido en (3.11), su operador maximal

$$P^* f(x) = \sup_{|x-y|<Ct} P_t f(x)$$

es un operador acotado en L^2, si probamos que $|\psi_t * \beta|^2 \, dx \frac{dt}{t}$ es una medida de Carleson habremos probado también (3.7).

Ejercicio 3.7. *Probar que el operador Maximal no tangencial definido por*

$$P^* f(x) = \sup_{|x-y|<Ct} P_t f(y)$$

donde $P_t f(y)$ esta definido por (3.11) es un operador acotado en L^p, para $1 < p < +\infty$.

Prueba del Teorema 3.4. Es suficiente probar las desigualdades:

$$A = \{x : F^*(x) > \lambda\} \Rightarrow \{(x,t) : |F(x,t)| > \lambda\} \subseteq T(A); \tag{3.14}$$

Ahora bien,

$$\mu \text{ medida de Carleson, } \ \Omega \subseteq \mathcal{R}^n \text{ abierto } \Rightarrow \mu(T(\Omega)) \leq C|\Omega|. \tag{3.15}$$

Asumiendo estas dos desigualdades habremos probado la tesis. En efecto

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}^{n+1}_{+}} |F(x,t)|^p \, d\mu &= p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}\mu\left(\{|F(x,t)| > \lambda\}\right) d\lambda \\ &\leq p\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}\mu\left(T\left(\{F^*(x) > \lambda\}\right)\right) d\lambda \\ &\leq Cp\int_0^{+\infty} \lambda^{p-1}\left|\{F^*(x) > \lambda\}\right| d\lambda \\ &= C\int_{\mathcal{R}^n} |F^*(x)|^p \, dx,\end{aligned}$$

done hemos usado la desigualdad (3.14) para la primera mayorización y la desigualdad (3.15) para la segunda.
Para la demostración de la (3.14) es suficiente probar que $|F(x,t)| > \lambda \Rightarrow B_t(x) \subseteq A$: de aquí sigue en efecto $(x,t) \in T(A)$.
Eligiendo una constante apropiada C para la función maximal no tangencial (por ejemplo C=$\sqrt{2}$) y un $y \in B_t(x)$ cualquiera, resulta:

$$F^*(y) = \sup_{|z-y|<Ct} |F(z,s)| \geq |F(x,t)| > \lambda,$$

de aquí $y \in A$ y por lo tanto $B_t(x) \subseteq A$.
Para demostrar la (3.15) necesitamos el siguiente resultado

Lema 3.5. **Lema de Whitney** *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathcal{R}^n$, existe una sucesión $(B_j)_{j\in\mathcal{N}}$ de bolas con interior disjunto con la propiedad:*

$$\Omega = \bigcup_{j\in\mathcal{N}} B_j\,; \qquad diam(B_j) \geq C dist(B_j, \Omega^C).$$

Ejercicio 3.8. *Probar el Lema de Whitney (Lema 3.5).*

Es suficiente probar la inclución $T(\Omega) \subseteq \bigcup_j T(\tilde{B}_j)$, donde $\tilde{B}_j$ es una apropiada dilatación de B_j. En efecto de aquí sigue que

$$\mu\left(T(\Omega)\right) \leq \sum_j \mu\left(T(\tilde{B}_j)\right) \leq C\sum_j |B_j| = C\,|\Omega|\,.$$

Sea $(x,t) \in T(\Omega)$ entonces $x \in \Omega$ y $dist\left(x, \Omega^C\right) \geq t$. Bueremos probar que si $x \in B_j$ entonces $(x,t) \in T(\tilde{B}_j)$. Para probar esto debemos probar que $|x - x_j| \leq \tilde{r}_j - t$, donde x_j es el centro de B_j y $\tilde{r}_j = C' r_j$.
En efecto tenemos

$$t \leq dist(x,\Omega^C) \leq dist(B_j,\Omega^C) + \sqrt{n}r_j \leq C diam(B_j) + \sqrt{n}r_j = (2C + \sqrt{n})r_j;$$

tomando C' tal que $2C + \sqrt{n} \leq C' - \sqrt{n}$, resulta

$$|x - x_j| \leq \sqrt{n}r_j < Cr_j - t.$$

El teorema queda así completamente probado.

Tomemos en el Teorema 3.4 el caso $F(x,t) = \phi_t * f$, donde ϕ_t es una aproximacin de la identidad cualquiera tenemos así el resultado.

COROLARIO 3.6. *Si μ es una medida de Carleson, $f \in BMO$ y $p > 1$ vale la desigualdad*

$$\int_{\mathcal{R}^{n+1}_+} |\phi_t * f|^p \, d\mu\,(x,t) \le C \int |f|^p \, dx.$$

PRUEBA DEL COROLARIO 3.6. Es suficiente demostrar la desigualdad

$$\phi^*(x) \le C \cdot Mf(x),$$

donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood y ϕ^* es la función maximal no tangencial de $\phi_t * f$; es decir, $\phi^* \equiv \sup_{|y-x| \le C_0 t} |\phi_t * f|$. En efecto, por las propiedades de M que hemos estudiado en el Capítulo 1 vale la desigualdad $\int |Mf(x)|^p dx \le C \int |f(x)|^p \, dx \ \ \forall p > 1$ y esto junto con el Teorema 3.4 obtenemos la prueba del Corolario 3.6. Con esto se completa la prueba del Corolario.

EJERCICIO 3.9. *Probar que si ϕ es una aproximación de la identidad entonces*

$$\phi^*(x) \le C \cdot Mf(x),$$

donde M es la funcin maximal de Hardy-Littlewood y ϕ^* es la funcin maximal no tangencial de $\phi_t * f$; es decir, $\phi^* \equiv \sup_{|y-x| \le C_0 t} |\phi_t * f|$.

Para demostrar la desigualdad (3.7) resta probar que si $\beta \in BMO$ entonces la medida $|\psi_t * \beta|^2 \, dx \frac{dt}{t}$ es de Carleson. Tal afirmación es parte del enunciado de un Teorema de Fefferman que ahora enunciaremos.

TEOREMA 3.7. **Teorema de Fefferman**. *Si $\beta \in BMO$, $q_t(x) = \frac{1}{t^n}\psi(\frac{x}{t})$ donde $\psi \in \mathcal{S}$ y $\int_{\mathcal{R}^n} \psi = 0$ entonces para cualquier bola $B \subset \mathcal{R}^n$ vale la desigualdad*

$$\frac{1}{|B|} \int_{T(B)} |\beta * q_t|^2 dx \frac{dt}{t} \le ||\beta||^2_{BMO}.$$

Esto demuestra que $\mu = |\beta * q_t| dx \dfrac{dt}{t}$ es una medida de Carleson.

Para la demostración haremos uso de un lema que asegura la acotación en L^2 de la función de Littlewood-Paley-Stein:

$$S_\psi f(x) \equiv \left(\int_0^{+\infty} |q_t * f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.16}$$

donde ψ e q_t tienen las mismas propiedades que los del Teorema de Fefferman, véase [].

LEMA 3.8. S_ψ *definida por la ecuación (3.16) es una isometría de L^2 en sí mismo, es decir,*

$$||S_\psi f||_{L^2} = ||f||_{L^2}.$$

PRUEBA DEL TEOREMA 3.7.
Dividiremos f en la suma de tres funciones. Denotando $\tilde{B}_r \equiv 2B_r$:

$$f = (f - \fint_{\tilde{B}_r} f)\chi_{\tilde{B}_r} + (f - \fint_{\tilde{B}_r} f)\chi_{\tilde{B}_r^c} + \fint_{\tilde{B}_r} f \equiv f_1 + f_2 + f_3.$$

Ya que ψ tiene integral cero resulta que

$$q_t * f = q_t * f_1 + q_t * f_2.$$

Llamamos $\mu_i \equiv |q_t * f_i| dx \frac{dt}{t}$, para $i = 1, 2$, y demostramos la tesis separadamente para las dos medidas ya que $\mu(T(B_r)) \leq \mu_1(T(B_r)) + \mu_2(T(B_r))$.
Para μ_1 utilizamos el Lema 3.8 y la definición de f_1 para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{T(B)} |q_t * f_1|^2 dx \frac{dt}{t} &\leq \int_{\mathcal{R}^{n+1}_+} |q_t * f_1|^2 dx \frac{dt}{t} = \int_{\mathcal{R}^n} \left(\int_{\mathcal{R}+} |q_t * f_1|^2 \frac{dt}{t} \right) dx \\
&= ||S_\psi f_1||_2^2 \\
&= ||f_1||_2^2 \\
&= \int_{\tilde{B}_r} |f - \fint_{\tilde{B}_r} f|^2 dx \\
&\leq C ||f||^2_{BMO} |\tilde{B}_r|
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la desigualdad de John-Nirenberg para en la acotación final. Es decir, tenemos para μ_1 la desigualdad

$$\mu_1(T(B_r)) \leq ||f||^2_{BMO} |B_r|.$$

Trabajemos ahora con μ_2. Recordando que $\psi \in \mathcal{S}$ y que $|\psi(x)| \leq \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}}$ tenemos para todo $(x, t) \in T(B_r)$

$$\begin{aligned}
|q_t * f_2|(x) &= \int_{\tilde{B}_r^c} (f(y) - \fint_{\tilde{B}_r} f) \cdot \frac{1}{t^n} \psi \left(\frac{x - y}{t} \right) dy \\
&\leq C \int_{\tilde{B}_r^c} |f(y) - \fint_{\tilde{B}_r} f| \frac{t}{(t + |x - y|)^{n+1}} dy.
\end{aligned}$$

Sea x_0 el centro de B_r: entonces, ya que $(x, t) \in T(B)$ para una constante apropiada C, se tiene la desigualdad $|x - y| \geq C|x_0 - y|$; por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}
|q_t * f_2|(x) &\leq Ct \int_{\tilde{B}_r^c} |f(y) - \fint_{B_r} f| \cdot \frac{1}{|x_0 - y|^{n+1}} dy \\
&= C \sum_{k \geq 1} \int_{B_{2^{k+1}r} - B_{2^k r}} |f(y) - \fint_{B_r} f| \cdot \frac{1}{|x_0 - y|^{n+1}} dy \\
&\leq C \sum_{k \geq 1} \frac{t}{(2^k r)^{n+1}} \int_{B_{2^{k+1}r}} |f(y) - \fint_{B_r} f| dy \\
&= C \frac{t}{r} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \fint_{B_{2^{k+1}r}} |f(y) - \fint_{B_r} f| dy.
\end{aligned}$$

Supongamos que probamos la desigualdad

$$\fint_{B_{2^{k+1}r}} |f(y) - \fint_{B_r} f|dy \leq C(k+1)||f||_{BMO}. \tag{3.17}$$

Entonces, dado que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}}$ es convergente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{T(B_r)} |q_t * f_2|^2 dx \frac{dt}{t} &\leq C||f||_{BMO} \int_{T(B_r)} \left(\frac{t}{r}\right)^2 dx \frac{dt}{t} \\
&\leq C||f||_{BMO} \frac{1}{r^2} \int_{B_r} \int_0^r t dt dx \\
&= C||f||^2_{BMO} |B_r|,
\end{aligned}$$

de donde sigue el teorema.
Para probar (3.17) es necesario probar primero que

$$\fint_{B_{2r}} \left(f - \fint_{B_r} f dx \right) dy \leq C||f||_{BMO}, \quad \text{para todo } \ B_r \subset \mathcal{R}^n. \tag{3.18}$$

Para probar (3.18) llamemos f_B el promedio de f sobre la bola B, así tenemos

$$\begin{aligned}
\fint_{2B} |f(y) - f_B| dy &\leq \fint_{2B} |f(y) - f_{2B}| dy + \fint_{2B} |f_{2B} - f_B| dy \\
&\leq ||f||_{BMO} + |f_{2B} - f_B| \\
&\leq ||f||_{BMO} + \fint_{B} |f(y) - f_{2B}| dy \\
&\leq ||f||_{BMO} + \frac{1}{|B|} \int_{2B} |f(y) - f_{2B}| dy \\
&= ||f||_{BMO} + \frac{C}{|2B|} \int_{2B} |f(y) - f_{2B}| dy \\
&\leq C||f||_{BMO}.
\end{aligned}$$

Probemos ahora (3.17).

$$\begin{aligned}
\fint_{B_{2^{k+1}r}} |f(y) - \fint_{B_r} f|dy \leq & \fint_{B_{2^{k+1}r}} |f(y) - \fint_{B_{2^k r}} f|dy + \\
& + \fint_{B_{2^k r}} |f(y) - \fint_{B_{2^{k-1}r}} f|dy + \cdots + \fint_{B_{2r}} |f(y) - \fint_{B_r} f|dy.
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora la desigualdad (3.18) en cada promedio obtenemos

$$\fint_{B_{2^{k+1}r}} \left| f - \fint_{B_r} f \right| (y)dy \leq C(k+1)||f||_{BMO}$$

Así la demostración del teroema está completa.

Prueba del Lema 3.8. Recordando que para la Transformada de Fourier de q_t, $\hat{q}_t(x) \equiv \psi(tx)$ tenemos que

$$\begin{aligned} ||S_\psi f||_2^2 &= \int_{\mathcal{R}^n} \int_0^{+\infty} |q_t * f|^2(x) \frac{dt}{t} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{R}^n} \left(|q_t * f|^2\right)\hat{} \, (x) dx \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{R}^n} |\hat{q}_t|^2(x) |\hat{f}|^2(x) dx \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{R}^n} |\hat{\psi}(tx)|^2 |\hat{f}(x)|^2 dx \frac{dt}{t} \\ &= \int_{\mathcal{R}^n} |f(x)|^2 \left(\int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(tx)|^2 \frac{dt}{t} \right) dx \end{aligned}$$

Renormalizando ψ podemos ver que la integral de adentro es igual a 1, obteniendo así la tesis. Para tal propósito observemos que por las propiedades de la Transformada de Fourier se tiene que si $\psi \in \mathcal{S}$ entonces $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$, y si ψ radial también $\Rightarrow \hat{\psi}$ es radial y en este caso $\hat{\psi}(tx) = \hat{\psi}(t|x|)$. Haciendo la sustitución $t|x| = h$ y recordando que $\hat{\psi}(0) = \int_{\mathcal{R}^n} \psi(x)dx = 0$, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(tx)|^2 \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \left| \hat{\psi}(h \frac{x}{|x|}) \right|^2 \frac{dh}{h} = C. \tag{3.19}$$

El lema queda así demostrado.

CAPITULO 4

El Teorema T(1)

Tenemos ahora todos los instrumentos para anunciar y demostrar el principal resultado de la teoría. Una caracterización para que un operdor de Calderón-Zygnmund sea continuo de L^2 en sí mismo.
Trabajaremos con $K^{\varphi}_{\varepsilon,R}$ es el operador truncado del Capítulo 2. Las funciones φ y ψ presentes en la propiedad (WCP) son funciones $C^{0,1}_c$, que indica el espacio de las funciones Lipschitz de soporte compacto en $\mathcal{R}^n$ y 1 es la función constante unitaria sobre $\mathcal{R}^n$.

Teorema 4.1. **Teorema T(1) de David-Journè.** *Supongamos que el núcleo $k : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ y el operador asociado $K^{\varphi}_{\varepsilon,R}$ satisfacen las hipótesis*

(i) $|k(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^n} \qquad \forall x \neq y$

(ii) $|\nabla_x k(x,y)| + |\nabla_y k(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{n+1}} \qquad \forall x \neq y$

(iii) (WCP) $\sup_{\varphi,\psi \in C^{0,1}_c} \left| \int_{\mathcal{R}^n} K^{\varphi}_{\varepsilon,R} \left(\varphi^{t,\omega}\right)(x) \psi^{t,\omega}(x) dx \right| \le C t^n,$

(iv) $||K^{\varphi}_{\varepsilon,R}(1)||_{BMO} + ||K^{\varphi *}_{\varepsilon,R}(1)||_{BMO} \le A \qquad \forall \varepsilon, R > 0 \,.$

Entonces

$$||K^{\varphi}_{\varepsilon,R}||_{\mathcal{L}(L^2(B_R),L^2(B_R))} \le C, \tag{4.1}$$

con C independiente de ε y de R .

Observación. En particular, haciendo tender R a infinito en (4.1), obtenemos una desigualdad que dá la hipótesis (iii)$'$ utilizada ampliamente el Capítulo 1 que da una condición suficiente para la acotación en L^p del operador K.

$$||K^{\varphi}_{\varepsilon}||_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \le C \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

El teorema afirma que un operador de Calderón-Zygmund acotado sobre las funciones constantes que satisface la condición de cancelación débil (WCP) es un operador acotado de L^2 en sí mismo. Esto permite extender con continuidad L^2 ciertos operadores integrales singulares desde un espacio de funciones test. Hemos motivado la elaboración de esta teoría sobre la integral de Cauchy sobre curvas de Lipschitz. Estudiaremos con más detalle en el próximo Capítulo dicha aplicación.

En lo que sigue, para no tener demasiada notación, escribimos $K_{\varepsilon,R}$ en lugar de $K^{\varphi}_{\varepsilon,R}$.
La prueba original del Teorema 4.1 que utiliza la Teoría L^2 de Cotlar (Lema de Cotlar). Daremos aquí una prueba debida a Fabes, Mitrea y Mitrea ([**5**]).

Demostración del Teorema 4.1. Haremos ciertas reducciones
Paso 1: Es suficiente probar que para un núcleo como el de la hipótesis se tiene

$$||K_{\varepsilon,1}||_{\mathcal{L}(L^2(B_1),L^2(B_1))} \leq C, \tag{4.2}$$

con C dependiente sólo de las constantes en (i), (ii), (iii) y (iv).
En efecto, sea $x' \in B_1$ y $x = Rx'$ el operador $K_{\varepsilon,R}$ aplicado a f en Rx' puede ser escrito como

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon,R}f(Rx') &= \int_{\mathcal{R}^n} \varphi\left(\frac{|Rx'-y|}{\varepsilon}\right)\left(1-\varphi\left(\frac{|Rx'-y|}{R}\right)\right) k(Rx',y)f(y)dy \\ &= \int_{\mathcal{R}^n} \varphi\left(\frac{|x'-y'|}{\varepsilon/R}\right)\big(1-\varphi(|x'-y'|)\big)\,\tilde{k}(x',y')f(Ry')dy' \end{aligned}$$

donde $\tilde{k}(x,y) = R^n k(Rx',Ry')$. Si definimos $\tilde{K}$ como el correspondiente operador tenemos

$$K_{\varepsilon,R}f(Rx') = \tilde{K}_{\frac{\varepsilon}{R},1}\tilde{f}(x')$$

donde $\tilde{f}(y') = f(Ry')$. Es fácil ver que $\tilde{k}$ y $\tilde{K}$ satisfacen las mismas hipótesis (i), (ii), (iii) y (iv) con la misma constates. Ahora supongamos que (4.2) es cierto. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |K_{\varepsilon,R}f|^2(x)dx &= \int_{B_1} |K_{\varepsilon,R}f|^2(Rx')R^n dx' \\ &= \int_{B_1} |\tilde{K}_{\frac{\varepsilon}{R},1}\tilde{f}|^2(x')R^n dx' \\ &\leq CR^n \int_{B_1} |\tilde{f}(x')|^2 dx' \\ &\leq CR^n \int_{B_1} |f(Rx')|^2 dx' \\ &= C\int_{B_R} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Paso 2: Es suficiente probar que si $K_\varepsilon f(x) \equiv \theta(x)K_{\varepsilon,1}(\theta f)(x)$ con $\theta \in C_c^\infty(B_2)$, $\theta|_{B_1} \equiv 1$ y $\theta \in [0,1]$ con el núcleo k y el operador $K_{\varepsilon,1}$ satisfaciendo las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv), entonces,

$$||K_\varepsilon||_{\mathcal{L}(L^2(B_1),L^2(B_1))} \leq C, \tag{4.3}$$

con C dependiendo sólo de las constantes en (i), (ii), (iii) y (iv). Además veremos que el núcleo asociado al operador K_ε y el operador K_ε satisfacen las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv).

En efecto, supongamos que (4.3) es cierto, entonces si extendemos f como 0 fuera de B_1 tenemos

$$\begin{aligned}\int_{B_1} |K_{\varepsilon,1} f|^2(x)dx &= \int_{B_1} |\theta(x)K_{\varepsilon,1}(\theta f)(x)|^2 dx \\ &= \int_{B_1} |K_{\varepsilon} f|^2(x)dx \\ &\leq C\int_{B_1} |f|^2 dx,\end{aligned}$$

Se puede demostrar que si el núcleo k y el operador $K_{\epsilon,R}$ satisfacen las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) lo mismo es cierto para el operador K_ϵ y su núcleo.

EJERCICIO 4.1. *Si el núcleo k y el operador $K_{\epsilon,R}$ satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iv) lo mismo es cierto para el operador K_ϵ y su núcleo.*

Probaremos aquí que $K_{\varepsilon}1(x) \equiv \theta(x)K_{\varepsilon,1}(\theta)(x)$ con $\theta \in C_c^\infty(B_2)$ y $\theta|_{B_1} \equiv 1$ satisface que $K_{\varepsilon}1 \in BMO$ con constantes independientes de ε.

$$\begin{aligned}K_{\varepsilon}(x) &= \theta(x)\int_{\mathcal{R}^n} k_{\varepsilon,1}(x,y)\theta(y)dy \\ &= \theta^2(x)\int_{\mathcal{R}^n} k_{\varepsilon,1}(x,y)dy + \theta(x)\int_{\mathcal{R}^n} k_{\varepsilon,1}(x,y)(\theta(y)-\theta(x))dy.\end{aligned}$$

Usando que θ es Lipschitz y (i) tenemos que el segundo término es acotado por una constante. Entonces tenemos que estudiar sólo el primer término. Probaremos que $\theta^2(x)K_{\varepsilon,1}(1) \in$ BMO. Usando que $K_{\varepsilon,1}(1) \in$ BMO y que θ es una función Lipschitz tenemos que

$$\begin{aligned}&\fint_{B_{r\wedge 2}} \left|\theta^2(x)K_{\varepsilon,1}((x) - \fint_{B_{r\wedge 2}} \theta^2(y)K_{\varepsilon,1}(y)dy\right| dx \\ &\leq \fint_{B_{r\wedge 2}} |\theta^2(x)| \left|\left[K_{\varepsilon,1}(x) - \fint_{B_{r\wedge 2}} K_{\varepsilon,1}(y)dy\right]\right| dx \\ &\quad + \fint_{B_{r\wedge 2}\cap B_2(0)} \fint_{B_{r\wedge 2}\cap B_2(0)} |\theta^2(x)-\theta^2(y)||K_{\varepsilon,1}(y)|dydx \\ &\leq C||K_{\varepsilon,1}||_{BMO} + Cr^{1-n}\int_{B_{r\wedge 2}\cap B_2(0)} |K_{\varepsilon,1}(y)|dy,\end{aligned}$$

Ahora tenemos que acotar el último término. Usando Hölder

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^{n-1}}\int_{B_{r\wedge 2}\cap B_2(0)}|K_{\varepsilon,1}1(y)|dy &\leq \frac{1}{r^{n-1}}\left(\int_{B_{r\wedge 2}\cap B_2(0)}|K_{\varepsilon,1}1(y)|^n dy\right)^{\frac{1}{n}} r^{n-1}\\
&\leq C\left(\int_{B_2(0)}|K_{\varepsilon,1}1(y)|^n dy\right)^{\frac{1}{n}}\\
&\leq C||K_{\varepsilon,1}1||_{BMO_n}+C\left|\int_{B_2(0)}K_{\varepsilon,1}1(y)dy\right|.
\end{aligned}
$$

Tenemos que acotar $\left|\int_{B_2(0)} K_{\varepsilon,1}1(y)dy\right|$. Aquí vamos a usar la propiedad de cancelación débil. Tomamos $\psi \in C_c^\infty(B_4(0))$ tal que $\psi \equiv 1$ sobre $B_3(0)$, entonces

$$
\int_{B_2(0)} K_{\varepsilon,1}1(y)dy = C\int_{B_2(0)} K_{\varepsilon,1}(\psi)(y)dy \tag{4.4}
$$

$$
= C\int\left(\int_2^3 \chi_{B_1(0)}(\frac{x}{r})dr\right)K_{\varepsilon,1}(\psi)(y)dy. \tag{4.5}
$$

Ejercicio 4.2. *Probar que si $\psi \in C_c^\infty(B_4(0))$ tal que $\psi \equiv 1$ sobre $B_3(0)$, entonces*

$$
\begin{aligned}
\int_{B_2(0)} K_{\varepsilon,1}1(y)dy &= C\int_{B_2(0)} K_{\varepsilon,1}(\psi)(y)dy\\
&= C\int\left(\int_2^3 \chi_{B_1(0)}(\frac{x}{r})dr\right)K_{\varepsilon,1}(\psi)(y)dy.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.3. *La integral $\int_2^3 \chi_{B_1(0)}(\frac{x}{r})dr$ es una función que pertenece al espacio $C_c^{0,1}$.*

Utilizando el Ejercicio 4.3 podemos aplicar a (4.4) la propiedad (iii) con $t=1$ para concluir que $\displaystyle\int_{B_2(0)} K_{\epsilon,1}1(y)dy$ está acotado por una constante, y por lo tanto $K_\epsilon 1 \in BMO$ si consideramos r en lugar de $r\wedge 2$.

Ejercicio 4.4. *Probar que si reemplazamos $r\wedge 2$ por r en la demostración de que $K_\epsilon 1 \in BMO$ obtenemos la misma conclusión.*

Tenemos ahora que probar que el operador $K_\varepsilon f(x)$ con núcleo $k_\epsilon(x,y)$ tal que

$$
\text{soporte } k_\epsilon(x,y) \subset B_2 \times B_2, \tag{4.6}
$$

y satisfaciendo las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) verifica que

$$
||K_\varepsilon||_{\mathcal{L}(L^2(B_1),L^2(B_1))} \leq C. \tag{4.7}
$$

Para probar esto definimos

$$L, M : L^2(\mathcal{R}^n) \to L^2(\mathcal{R}^n); \tag{4.8}$$

tales que

$$L(1) = K_\varepsilon(1), \tag{4.9}$$
$$L^*(1) = M(1) = 0, \tag{4.10}$$
$$M^*(1) = K^*_\varepsilon(1); \tag{4.11}$$

con el núcleo $k_\epsilon^{M,L}(x,y)$ satisfaciendo las propiedades (i) y (ii); y además

$$|k_\epsilon^{M,L}(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{2n}} \text{ para } |x-y| \geq 1 \tag{4.12}$$

Paso 3: Es suficiente probar que el operador definido por $\tilde{K}_\varepsilon \equiv K_\varepsilon - L - M$, es acotado de $L^2(B_1)$ en $L^2(B_1)$. Notar que, por las propiedades que verifican L y M se tiene trivialmente que este nuevo operador verifica $\tilde{K}_\varepsilon(1) = \tilde{K}^*_\varepsilon(1) = 0$
Definición de los operadores L y M. Prueba de las propiedades que verifican
Sea $P_t f \equiv \phi_t * f$ y $Q_t f \equiv \psi_t * f$ donde las funciones ψ y ϕ son funciones con las propiedad (3.7) y tales en particular $\phi_t, \psi_t \in C_c(\mathcal{R}^n)$ y ψ la normalizada de la cual hablamos en la página 50. Llamemos $\beta \equiv K_\varepsilon(1)$. Definimos el operador L por:

$$Lf(x) \equiv \int_0^{+\infty} Q_t \left[Q_t\beta \cdot P_t f \right](x) \frac{dt}{t};$$

el operador M se define de modo análogo, con β^* en lugar de β. Haremos el razonamiento para L. El razonamiento para M es análogo.
Probaremos que el núcleo del operador L es

$$l(x,y) = \int_0^\infty \int_{\mathcal{R}^n} \psi_t(x-z) Q_t\beta(z) \phi_t(z-y) dz \frac{dt}{t} \tag{4.13}$$

Estudiemos este núcleo.
Comenzamos por definir la función

$$p_t(x,y) \equiv \int_{\mathcal{R}^n} |\psi_t(x-z)| \phi_t(z-y) dz \tag{4.14}$$
$$= \int_{|x-z|,\,|z-y| \leq tC} |\psi_t(x-z)| \phi_t(z-y) dz, \tag{4.15}$$

ya que ψ y ϕ tienen soporte compacto. Para la función $p_t(x,y)$ recién definida valen las propiedades

$$\text{soporte}(p_t) \subset \{(x,y) \in \mathcal{R}^{2n} : |x-y| \leq tC,\ C > 0\}; \tag{4.16}$$

$$|p_t(x,y)| \leq ||\psi||_\infty t^{-n}. \tag{4.17}$$

De (4.16) y de (4.17) tenemos que

$$|p_t(x,y)| \le \frac{C_N}{t^n\left(1+\frac{|x-y|}{t}\right)^N} \quad \forall N \in \mathcal{N}, \;\; N \ge 1. \tag{4.18}$$

EJERCICIO 4.5. *Probar que valen (4.16), (4.17) y (4.18).*

Estudiemos ahora un poco la función β y el operador Q_t aplicado a β.

EJERCICIO 4.6. *Probar que para $\beta = K_\varepsilon(1)$ se verifican las propiedades*

(1) $|\beta(x)| \le C_\varepsilon$,
(2) $|\nabla\beta(x)| \le C_\varepsilon$,

donde en general $C_\varepsilon \to +\infty$ para $\varepsilon \to 0$

Utilizando el Ejercicio 4.6 probaremos que

$$|Q_t\beta| \le \min(C_\varepsilon t,\, C||\beta||_{BMO}). \tag{4.19}$$

En efecto, ya que $\displaystyle\int_{\mathcal{R}^n}\psi = 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned} Q_t\beta(x) &= \int_{\mathcal{R}^n}\psi_t(x-z)\beta(z)dz \\ &= \int_{\mathcal{R}^n}\psi_t(x-z)\beta(z)dz - \beta(x)\int_{\mathcal{R}^n}\psi_t(x-z)dz \\ &= \int_{\mathcal{R}^n}\psi_t(x-z)[\beta(z)-\beta(x)]dz. \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto y utilizando la desigualdad para el gradiente de β, obtenemos que

$$\begin{aligned} |Q_t\beta(x)| &\le C|\nabla\beta(x)|\int_{\mathcal{R}^n}|z-x|\left|\psi\left(\frac{x-z}{t}\right)\right|\frac{dz}{t}\cdot t \\ &\le C_\varepsilon t\int_{\mathcal{R}^n}|y|\cdot|\psi(y)|dy \\ &= C_\varepsilon t. \end{aligned}$$

De modo similar se demuestra la desigualdad

$$\begin{aligned} |Q_t\beta(x)| &= \left|\int_{\mathcal{R}^n}\psi_t(x-z)\left[\beta(z) - \fint_B \beta\right]dz\right| \\ &\le \frac{||\psi||_\infty}{t^n}\int_{|x-z|<Ct}\left|\beta(z)-\fint_B\beta\right|dz \\ &\le C||\beta||_{BMO}, \end{aligned}$$

donde $B = B(x, Ct)$.

Probaremos ahora que el operador y el núcleo del operador L verifica las hipótesis del teorema. Comenzaremos probando que tal operador existe y es finito. Por la definición de L y las propiedades antes probadas tenemos que

$$\begin{aligned}
|Lf(x)| &\leq \int_0^{+\infty} |Q_t\left[Q_t\beta\cdot P_tf\right](x)|\frac{dt}{t}\\
&\leq \int_0^{+\infty} |\psi_t * [Q_t\beta(\phi_t * f)](x)|\frac{dt}{t}\\
&\leq \int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{R}^n} |\psi_t(x-z)(Q_t\beta)(z)(\phi_t * f)(z)|dz\frac{dt}{t}\\
&\leq ||Q_t\beta||_{L^\infty}\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{R}^n} |\psi_t(x-z)||\phi_t * f(z)|dz\frac{dt}{t}\\
&\leq \int_0^{+\infty}\min(C_\varepsilon t, C||\beta||_{BMO})\int_{\mathcal{R}^n}|\psi_t(x-z)|\int_{\mathcal{R}^n}|\psi_t(z-y)||f(y)|dydz\frac{dt}{t}\\
&\leq \int_0^{+\infty}\min(C_\varepsilon t, C||\beta||_{BMO})\int_{\mathcal{R}^n}|p_t(x,y)||f(y)|dy\frac{dt}{t}\\
&\leq C_\varepsilon\int_0^1\int_{\mathcal{R}^n}|f(y)||p_t(x,y)|dydt\\
&\qquad +C||\beta||_{BMO}||f||_{L^2(\mathcal{R}^n)}\int_1^{+\infty}||p_t(x,\cdot)||_{L^2(\mathcal{R}^n)}\frac{dt}{t}\\
&\leq C_\varepsilon\sup_{t>0}p_t(|f|)+C||\beta||_{BMO}||f||_{L^2(\mathcal{R}^n)}\int_1^{+\infty}||p_t(x,\cdot)||_{L^2(\mathcal{R}^n)}\frac{dt}{t}\\
&= C_\varepsilon(Mf(x)+||\beta||_{BMO}||f||_{L^2(\mathcal{R}^n)})\\
&< \infty;
\end{aligned}$$

donde $Mf(x)$ es la maximal de Hardy-Littlewood de la función f en el punto x.

Ejercicio 4.7. *Probar que*

$$\sup_{t>0}p_t(|f|)(x)\leq Mf(x),$$

donde $p_t(|f|)(x)=\int_{\mathcal{R}^n}p_t(x,y)f(y)dy$, *con* $p_t(x,y)$ *definido bajo la fórmula (4.14) y* $Mf(x)$ *es la maximal de Hardy-Littlewood de la función* f *en el punto* x.

Ejercicio 4.8. *Probar, utilizando (4.16), (4.17) y (4.18) que*

$$\int_1^{+\infty}||p_t(x,\cdot)||_{L^2(\mathcal{R}^n)}\frac{dt}{t}\leq C.$$

Hemos demostrado la convergencia absoluta de la integral que define el operador L, podemos ahora aplicar el Teorema de Fubini y definir el núcleo de L como (4.13).

$$l(x,y)=\int_0^\infty\int_{\mathcal{R}^n}\psi_t(x-z)Q_t\beta(z)\phi_t(z-y)dz\frac{dt}{t}$$

Antes de domstrar las propiedades que cumple l probaremos que L mapea $L^2(\mathcal{R}^n)$. Tomemos $f, g \in L^2(\mathcal{R}^n)$ con $||g||_{L^2} = 1$. Queremos probar que

$$\left| \int_{\mathcal{R}^n} Lf(x)g(x)dx \right| \leq C||\beta||_{BMO}||f||_{L^2}.$$

Dado que Q_t es un operador autoadjunto sobre $L^2(\mathcal{R}^n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathcal{R}^n} Lf(x)g(x)dx \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \int_{\mathcal{R}^n} \left[Q_t\beta \cdot P_t f\right](x) Q_t g(x) dx \frac{dt}{t} \right| \\
&\leq \left(\int_{\mathcal{R}^{n+1}_+} |Q_t\beta|^2 |P_t f|^2 dx \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathcal{R}^{n+1}_+} |Q_t g|^2 dx \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C||\beta||_{BMO}||f||_{L^2} \left|\left| \left(\int_0^{+\infty} |Q_t g|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right|\right|_{L^2} \\
&\leq C||\beta||_{BMO}||f||_{L^2}||g||_{L^2},
\end{aligned}$$

donde en la penúltima desigualdad hemos usados (3.7) al primer factor y el la última el Lema 3.8.
Para el núcleo l valen las desigualdades

$$|l(x,y)| \leq \frac{C||\beta||_{BMO}}{|x-y|^n}; \tag{4.20}$$

$$|\nabla_x l(x,y)| + |\nabla_y l(x,y)| \leq \frac{C||\beta||_{BMO}}{|x-y|^{n+1}}; \tag{4.21}$$

$$|l(x,y)| \leq \frac{C_\varepsilon}{|x-y|^{n-1}}, \;\; |l(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{2n}}. \tag{4.22}$$

Observemos que la (4.22) implica $l \in L^1(\mathcal{R}^n)$ y que, en particular, $L(1)$ está bien definido.

Ejercicio 4.9. *Probar que para el núcleo l valen las desigualdades (4.20), (4.21 y (4.22).*

Para completar el Paso 3 falta probar $L(1) = \beta$ y $L^*(1) = 0$. Después de comprobar que $P_t(1) = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(L(1))\hat{}\,(x) &= \int_0^{+\infty} \left[Q_t(Q_t\beta)\right]\hat{}\,(x) \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}_t(tx)|^2 \hat{\beta}(x) \frac{dt}{t} \\
&= \hat{\beta}(x)
\end{aligned}$$

y adem as

$$\begin{aligned} L^*(1)(x) &= \int_0^{+\infty} l(x,y)dy \\ &= \int_{\mathcal{R}^n}\int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{R}} \psi_t(y-z)Q_t\beta(z)\phi_t(z-x)dz\frac{dt}{t}dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

dado que $\int_{\mathcal{R}^n}\psi_t(y-z)dy$ es cero (ver propiedad (3.8)).
Por lo estudiado en el Capítulo 3, Sección 3, ya que el operador L está acotado de $L^2(\mathcal{R}^n)$ en $L^2(\mathcal{R}^n)$, vale para él la (WCP), con lo que terminamo con la prueba de las propiedades del operador L. De forma análoga es la prueba para el operador M.

Paso 4.

En el paso anterior hemos definido el operador $\tilde{K}_\varepsilon$ cuyo núcleo verifica las hipótesis del teorema. Más aún este operador verifica $\tilde{K}_\varepsilon(1) = \tilde{K}^*_\varepsilon(1) = 0$. Para completar la demostración del teorema es suficiente probar que el operador $\tilde{K}_\epsilon$ mapea $L^2(B_1)$ en sí̃mismo. Esto se hará en cinco etapas, las cuales sintetizaremos ahora. Para simplificar notación de ahora en más $\tilde{K}\equiv\tilde{K}_\varepsilon$.
Primera etapa: Se demuestra que el operador $\tilde{K}$ es un operador que mapea el espacio $C^\alpha(\mathcal{R}^n)$ de las funciones Hölder con exponente $\alpha<1$ en sí mismo.
Secunda etapa: $\theta\tilde{K}(\theta)$, con θ como en el Paso 2 mapea $C^\alpha(B_2)$ en sí mismo (recordemos que tal espacio es denso en $L^2(\mathcal{R}^n)$ con immersion continua).
Tercer etapa: El Lema de Krein, que enunciaremos y demostraremos al final de la demostración que muestra como un operador acotado en un espacio de Banach, espacio que está densa y continuamente incluido en uno de Hilbert, puede extenderse acotado a todo el espacio de Hilbert. Cuarta etapa: Utilizar la etapa 3 y 4 para probar que el operador $\theta\tilde{K}(\theta)$ mapea $L^2(B_2)$ en sí mismo y como consecuencia el operador K mapea $L^2(B_1)$ en sí mismo.

Prueba de la Etapa 1: En el espacio $C^\alpha(\mathcal{R}^n)$ definimos la norma

$$||f||_\alpha \equiv ||f||_\infty + \sup_{h\neq 0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\alpha};$$

Para probar la etapa 1 debemos probar las estimaciones

$$||\tilde{K}f||_\infty \le C||f||_\alpha;\quad \sup_{h\neq 0}\frac{|\tilde{K}f(x+h)-\tilde{K}f(x)|}{|h|^\alpha}\le C||f||_\alpha. \tag{4.23}$$

Para probar la primera recordemos que $\tilde{K}(1)=0$ y si indicamos con k su núcleo, $\int_{\mathcal{R}^n} k(x,y)dy = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} |\tilde{K}f(x)| &\le \int_{|x-y|<1}|k(x,y)||f(x)-f(y)|dy + \int_{|x-y|>1}|k(x,y)||f(x)-f(y)|dy \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Para I tenemos que

$$I \leq \int_{|x-y|<1} \frac{C}{|x-y|^n} |x-y|^{\alpha} ||f||_{\alpha} dy = C||f||_{\alpha};$$

para II recordemos que el núcleo de K_{ε} se anula para $|x-y|>1$ y la segunda mayorización de (4.22) es válida para el núcleo de L y M, obteniendo así

$$II \leq \int_{|x-y|>1} \frac{C}{|x-y|^{2n}} ||f||_{\infty} dy = C||f||_{\infty} \leq C||f||_{\alpha}.$$

Para la segunda estimación se procede de manera análoga. Utilizando que $\displaystyle\int k(x+h,y)f(y)dy = \int k(x,y)dy = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{K}f(x+h) - \tilde{K}f(x) &= \int \left(k(x+h,y) - k(x,y)\right)\left(f(y)-f(x)\right) dy \\
&= \int_{|x-y|>2|h|} \left(k(x+h,y) - k(x,y)\right)\left(f(y)-f(x)\right) dy \\
&\quad + \int_{|x-y|<2|h|} \left(k(x+h,y) - k(x,y)\right)\left(f(y)-f(x)\right) dy \\
&= I + II
\end{aligned}$$

Utilizando la acotación del gradiente del núcleo k tenemos que

$$I \leq C||f||_{\alpha}|h|^{\alpha} \int_{|x-y|>2|h|} \frac{C}{|x-y|^{n+1}} |x-y|^{\alpha} dy \leq C|h|^{\alpha}||f||_{\alpha}.$$

Para II notemos que utilizando la acotación del néculeo k tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|x-y|\leq 2|h|} k(x,y)\left(f(y)-f(x)\right) dy\right| &\leq C||f||_{\alpha} \int_{|x-y|\leq 2|h|} \frac{C}{|x-y|^n} |x-y|^{\alpha} dy \\
&\leq C|h|^{\alpha}||f||_{\alpha}.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|\leq 2|h|} k(x+h,y)\left(f(y)-f(x)\right) dy &= \int_{|x-y|\leq 2|h|} k(x+h,y)\left(f(y)-f(x+h)\right) dy \\
&\quad + \left(f(x+h)-f(x)\right) \int_{|x-y|\leq 2|h|} k(x+h,y)dy \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Como antes tenemos que $I \leq C|h|^{\alpha}||f||_{\alpha}$. Para II notar que

$$\{y: \ |x+h-y|<3|h|\} = \{y: \ |x-y|<2|h|\} \cup [\{y: \ |x-y|>2|h|\} \cap \{y: \ |x+h-y|<3|h|\}];$$

así después de observar que si $|x-y| > 2|h|$ entonces $|x-y+h| > |x-y|-|h| > |h|$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|II| &\leq C||f||_{\alpha}|h|^{\alpha}|\int_{|x-y+2h|<3|h|} k(x+h,y)dy - \\
&- \int_{|x-y|>2|h| \text{ and } |x-y+h|<3|h|} k(x+h,y)dy| \\
&\leq C||f||_{\alpha}|h|^{\alpha}|\int_{|x-y+2h|<3|h|} k(x+h,y)dy| + \int_{|h|<|x-y+h|<3|h|} \frac{C}{|x-y+h|^n}dy \\
&\leq C|h|^{\alpha}||f||_{\alpha};
\end{aligned}$$

si probamos que para $\varepsilon \leq 1$ se tiene

$$\left|\int_{|x-y|<\varepsilon} k(x,y)dy\right| \leq C. \tag{4.24}$$

Pero ya que $\int k(x,y)dy = 0$, (4.24) es equivalente a probar que

$$\left|\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y)dy\right| \leq C. \tag{4.25}$$

Probaremos (4.25). Para ello consideramos una función $\varphi \in C^{\infty}(\mathcal{R}^n)$ con integral uno y soportada en la bola $B_{\frac{1}{2}}(0)$. Tomemos $x_1 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$; es fácil ver que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y)dy &= \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)\int_{|x-y|>\varepsilon}[k(x,y)-k(x_1,y)]dy \\
&+\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)\tilde{K}\left(\chi_{B_\varepsilon(x)^C}\right)(x_1).
\end{aligned}$$

Integrando la desigualdad anterior en x_1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,y)dy &= \int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)\int_{|x-y|>\varepsilon}[k(x,y)-k(x_1,y)]dydx_1 \\
&+\int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)\tilde{K}\left(\chi_{B_\varepsilon(x)^C}\right)(x_1)dx_1.
\end{aligned}$$

La primera integral se estima utilizando la acotación del gradiente de k. Para la segunda aproximaremos la función $\chi_{B_\varepsilon(x)}(y)$ con $\psi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$, donde $\psi \in C^{\infty}(\mathcal{R}^{2n})$, $\psi \equiv 1$ sobre $B_{2\varepsilon}(0)$ e $\psi \equiv 0$ su $B_{3\varepsilon}(0)^C$. Recordando además que $\tilde{K}(1) = 0$ podemos mayorar la segunda integral por la suma de las integrales siguientes

$$\left|-\int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)\tilde{K}(\psi)(x_1)dx_1\right|+\left|\int_{\mathcal{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right)\tilde{K}(\psi-\chi_{B_\varepsilon(x)})(x_1)dx_1\right|;$$

de lo que se concluye la desigualdad (4.25) si aplicamos (WCP) al primer sumando y la estimación del ńculeo de $\tilde{K}$ al segundo (notando que la función integrada es cero fuera de la corona $\varepsilon < |x-y| < 3\varepsilon$).

Prueba de la Etapa 2: Definimos el operador

$$K \equiv \theta \tilde{K} \theta,$$

con $\theta \in C_0^\infty(B_2)$ y $\theta \equiv 1$ en B_1. Probaremos que

$$K : C^\alpha(B_2) \to C^\alpha(B_2). \tag{4.26}$$

Probemos (4.26). Utilizaremos fuertemente (4.23). Así

$$\begin{aligned} |\theta(x)\tilde{K}(\theta f)(x)| &\leq |\tilde{K}(\theta f)(x)| \\ &\leq C||\theta f||_\alpha \\ &\leq C||f||_{C^\alpha(B_2)}. \end{aligned}$$

Por otro lado ya que $\theta \in C^\alpha(B^2)$ para todo $0 < \alpha \leq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} |\theta(x+h)\tilde{K}(\theta f)(x+h) - \theta(x)\tilde{K}(\theta f)(x)| &\leq |\theta(x+h)\left(\tilde{K}(\theta f)(x+h) - \tilde{K}(\theta f)(x)\right)| \\ &\quad + |\theta(x+h) - \theta(x)||\tilde{K}(\theta f)(x)| \\ &\leq C|h|^\alpha ||f||_{C^\alpha(B_2)} + C|h|^\alpha ||f||_{C^\alpha(B_2)}. \end{aligned}$$

Prueba de la Etapa 3:

Lema 4.2. **Krein** *Sea B un espacio de Banach denso en un espacio de Hilbert H con inmersión continua y $T : B \to B$ un operador tal que $||T||_{\mathcal{L}(B,B)} \leq A_1$ y $||T^*||_{\mathcal{L}(B,B)} \leq A_2$. Entonces T se exitende a H y su norma es $||T||_{\mathcal{L}(H,H)} \leq A_1^{\frac{1}{2}} \cdot A_2^{\frac{1}{2}}$.*

Prueba de la Etapa 4:Utilizando el Lema de Krein se tiene (por ser $C^\alpha(B_2)$ denso en $L^2(B_2)$ con inmersión continua), se tiene de (4.26) que

$$K : L^2(B_2) \to L^2(B_2). \tag{4.27}$$

Utilizando (4.27) probaremos que

$$\tilde{K} : L^2(B_1) \to L^2(B_1). \tag{4.28}$$

Que (4.27) implica (4.28) es fácil si consideramos que para $f \in L^2(B_1)$ consideramos su extensión a $L^2(B_2)$ por 0. Entonces se tiene que $f = f\theta$ y así

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} |\tilde{K}f|^2(x)dx &= \int_{B_1} |\theta(x)\tilde{K}(\theta f)(x)|^2 dx \\
&\leq \int_{B_2} |\theta(x)\tilde{K}(\theta f)(x)|^2 dx \\
&= \int_{B_2} |Kf|^2(x)dx \\
&\leq C\int_{B_2} |f|^2 dx \\
&= C\int_{B_1} |f|^2 dx.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 4.10. *Probar que $C^\alpha(B_2)$ es denso en $L^2(B_2)$ con inmersión continua.*

Demostraremos por último el Lema de Krein antes enunciado.

LEMA 4.3. **Krein** *Sea B un espacio de Banach denso en un espacio de Hilbert H con inmersión continua y $T : B \to B$ un operador tal que $||T||_{\mathcal{L}(B,B)} \leq A_1$ y $||T^*||_{\mathcal{L}(B,B)} \leq A_2$. Entonces T se exitende a H y su norma es $||T||_{\mathcal{L}(H,H)} \leq A_1^{\frac{1}{2}} \cdot A_2^{\frac{1}{2}}$.*

PRUEBA DEL LEMA 4.2. Notemos que el operador T^*T es autoadjunto y satisface las mismas hipótesis que T. Supongamos que hemos probado que el operador T^*T satisface la tesis del teorema entonces concluimos

$$||Tf||_H^2 =< Tf, Tf >=< f, T^*Tf >\leq ||f||_H ||T^*Tf||_H,$$

entonces

$$\Rightarrow ||Tf||_H^2 \leq C||f||_H^2.$$

Tomemos entonces ahora que el operador es autoadjunto y con las hipótesis del teorema entonces

$$\begin{aligned}
||Tf||_H^2 &= < Tf, Tf > \\
&= < f, T^2 f > \\
&\leq ||f||_H ||T^2 f||_H.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
||Tf||_H &\leq ||f||_H^{\frac{1}{2}} ||T^2 f||_H^{\frac{1}{2}} \\
&\leq ||f||_H^{\frac{1}{2}} ||f||_H^{\frac{1}{4}} ||T^4 f||_H^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \cdots \\
&\leq ||f||_H^{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i}} ||T^{2^N} f||_H^{\frac{1}{2^N}};
\end{aligned}$$

de nuestra hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} ||Tf||_H &\leq C^{\frac{1}{2^N}} ||f||_H^{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i}} ||T^{2^N} f||_B^{\frac{1}{2^N}} \\ &\leq C^{\frac{1}{2^N}} ||f||_H^{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i}} ||T||_{\mathcal{L}(B,B)} ||f||_B^{\frac{1}{2^N}}; \end{aligned}$$

haciendo tender N a infinito tenemos la tesis del lema.
El Teorema T(1) queda entonces totalmente probado.

CAPITULO 5

Una aplicación del Teorema T(1)

Probaremos ahora brevemente una aplicación del Teorema T(1) que fue enunciada en el Capítulo 1. Recordemos que hemos probado en el Capítulo 3, Sección 3, que si el núcleo k de un Operador Integral Singular verifica la condición de tamaño

$$|k(x,y)| \leq \frac{c}{|x-y|^n}$$

y es antisimétrico $k(x,y) = -k(y,x)$ entonces el operador $K_{\varepsilon,R}$ satisface la WCP (iii). En lo que sigue el núcleo a tratar tendrá dicha condición.

1. Integral sobre una curva de Lipschitz

Supongamos que tenemos una función $a \in C^{0,1}(\mathcal{R})$ con constante de Lipschitz menor a 1 y que el núcleo de Cauchy

$$\begin{aligned} k(x,y) \equiv \frac{1}{x-y+i(a(x)-a(y))} &= \frac{1}{x-y}\sum_{j\geq 0}(-i)^j\left(\frac{a(x)-a(y)}{x-y}\right)^j \\ &= \sum_{j\geq 0}(-i)^j k^j(x,y), \end{aligned}$$

donde llamamos $k^M(x,y) \equiv \frac{(a(x)-a(y))^M}{(x-y)^{M+1}}$. Si $K_{\varepsilon,R}$ es el operador integral truncado suavizado de núcleo k queremos demostrar que, existe una constante $C > 0$ tal que

$$||K_{\varepsilon,R}f||_{L^2} \leq C||a'||_{L^\infty}||f||_{L^2}.$$

Enunciaremos y probaremos a grandes líneas el teorema que asegura que el opeador $K_{\varepsilon,R}$ es acotado de $L^2(\mathcal{R})$ en sí mismo: este es un resultado clásico de Calderón cuya prueba está basada en una generalización del Teorema T(1).

Teorema 5.1. [**2**] **Teorema (Calderón), A. P.** *(1977). En la notación precedente, si existe un ε_0 positivo y $||a'||_{L^\infty} \leq \varepsilon_0$ entonces el operador $K_{\epsilon,R}$ está acotado de $L^2(\mathcal{R})$ en sí mismo con constante independiente de ε y R.*

En un teorema de Coifman, MacIntoch, Meyer, [**3**] se demuestra que la tesis del Teorema de Calderón sigue siendo válida eliminando la restricción sobre el tamaño de $||a'||_{L^\infty}$.

Prueba del Teorema 5.1. Recordando que

$$K_{\varepsilon,R}f(x) \equiv \sum_{M\geq 0}(-i)^M K^M_{\varepsilon,R}f(x),$$

si probamos que $||K^M_{\varepsilon,R}f||_{L^2} \leq (C||a'||_{L^\infty})^M$ obtenemos como consecuencia la tesis. En efecto

$$\begin{aligned} ||K_{\varepsilon,R}f||_{L^2} &\leq \sum_{M\geq 0}||K^M_{\varepsilon,R}f||_{L^2} \\ &\leq \sum_{M\geq 0}(C||a'||_{L^\infty})^M||f||_{L^2} \\ &\leq C||f||_{L^2}; \end{aligned}$$

si $||a'||_{L^\infty}$ suficientemente pequeña. El teorema queda así demostrado.

Estudiemos entonces los operadores $K^M_{\varepsilon,R}$.
Para los núcleos k^M son válidas las siguientes estimaciones:

i) $|k^M(x,y)| \leq \dfrac{||a'||_\infty}{|x-y|}$;

ii) $\left|\dfrac{\partial k^M}{\partial x}\right| \leq M\dfrac{||a'||^M_\infty}{(x-y)^2}$.

Además, ya que el núcleo k_M es antisimétrico, es cierta la (WCP).
Para poder utilizar el Teorema T(1) necesitamos probar que la norma BMO de $K_{\varepsilon,R}$ está acotada. (No es necesario probar lo mismo para $K^*_{\varepsilon,R}$ ya que el operador adjunto tiene como núcleo el del operador $K_{\varepsilon,R}$ con distinto signo).
Trataremos primero el caso $M=1$, usando la notación del Teorema T(1):

$$\begin{aligned} K^1_{\varepsilon,R}(1) &= -\int_{\mathcal{R}}[a(x)-a(y)]\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\left(1-\varphi\left(\frac{x-y}{R}\right)\right)d\left(\frac{1}{x-y}\right) = \\ &= -\int_{\mathcal{R}}\frac{d}{dy}\left[(a(x)-a(y))\,\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\left(1-\varphi\left(\frac{x-y}{R}\right)\right)\right]\frac{1}{x-y}dy \\ &= \int_{\mathcal{R}}a'(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\left(1-\varphi\left(\frac{x-y}{R}\right)\right)\frac{1}{x-y}dy \\ &\quad+\int_{\mathcal{R}}\frac{a(x)-a(y)}{x-y}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\varphi'\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\left(1-\varphi\left(\frac{x-y}{R}\right)\right)dy- \\ &\quad+\int_{\mathcal{R}}\frac{a(x)-a(y)}{x-y}\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{1}{R}\varphi'\left(\frac{x-y}{R}\right)dy. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.1. *Probar que la Transformada de Hilbert truncada definida por*

$$\mathcal{H}^\varphi(b)(x) = \int_{\mathcal{R}}b(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\left(1-\varphi\left(\frac{x-y}{R}\right)\right)\frac{1}{x-y}dy \tag{5.1}$$

está acotada de L^∞ a BMO.

La primera integral es una truncación de la Transformada de Hilbert aplicada a la función a' la cual tiene norma BMO acotada por Ejercicio 5.1. El segundo y el tercer sumando se mayoran fácilmente usando la condición Lispchitz de la función a y la regularidad de φ. Así obtenemos

$$\begin{aligned} ||K^1_{\varepsilon,R}(1)||_{BMO} &\leq ||H^{\varphi}_{\varepsilon,R}(a')||_{BMO} + C||a'||_{L^\infty} \\ &\leq C||a'||_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Aplicando ahora el Teorema T(1) podemos concluir que

$$||K^1_{\varepsilon,R}(f)||_{L^2(\mathcal{R})} \leq C||a'||_{L^\infty(\mathcal{R})}. \tag{5.2}$$

En el caso de un M general procedemos por inducción: comenzamos demostrando que $K^M_{\varepsilon,R}(1) \in BMO$. Para hacerlo escribiremos $K^M_{\varepsilon,R}(1)$ como suma de tres integrales análogas a las que teníamos para $K^1_{\varepsilon,R}(1)$ probándose así

$$K^M_{\varepsilon,R}(1)(x) = K^{M-1}_{\varepsilon,R}(a')(x) + b^M_{\varepsilon,R}(x), \qquad ||b^M_{\varepsilon,R}||_{L^\infty} \leq \frac{C}{M}||a'||^M_{L^\infty};$$

Ejercicio 5.2. *Probar que*

$$K^M_{\varepsilon,R}(1)(x) = K^{M-1}_{\varepsilon,R}(a')(x) + b^M_{\varepsilon,R}(x), \qquad ||b^M_{\varepsilon,R}||_{L^\infty} \leq \frac{C}{M}||a'||^M_{L^\infty}.$$

Si suponemos por hipótesis inductiva que $K^{M-1}_{\varepsilon,R}(1) \in BMO$, entonces $K^{M-1}_{\varepsilon,R}$ mapea $L^2(\mathcal{R}$ en sí mismo. Como consecuencia de eso $K^M_{\varepsilon,R}(1) \in BMO$ y

$$||K^M_{\varepsilon,R}(1)||_{BMO} \leq C\left(||K^{M-1}_{\varepsilon,R}||_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} + (M-1)||a'||^{M-1}_{L^\infty}\right)||a'||_{L^\infty} + \frac{C}{M}||a'||^M_{L^\infty} \tag{5.3}$$

Aplicando el Teorema T(1) tenemos que

$$\begin{aligned} ||K^M_{\varepsilon,R}||_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} &\leq CM||a'||_{L^\infty} + C_1||K^{M-1}_{\varepsilon,R}||_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}||a'||_{L^\infty} && (5.4)\\ &\leq \sum_{j=0}^{M} C^j(M-j)||a'||^M_{L^\infty} && (5.5)\\ &\leq C_0^M||a'||^M_{L^\infty}, && (5.6) \end{aligned}$$

para C_0 suficientemente grande.

Ejercicio 5.3. *Probar la desigualdad (5.5).*

En lo que sigue enunciaremos y daremos una idea de la prueba del teorema que asegura que el Teorema de Calderón sigue siendo válida en el caso en que la constante de Lipschitz de la función a es cualquiera. Como hemos dicho anteriormente este teorema es debido a Coiffman-McIntosh-Meyer ([**3**].

Teorema 5.2. *Dada la función a Lipschitz sobre $\mathcal{R}$ y el operador $K_{\varepsilon,R} = k_{\varepsilon,R}(x,y)f(y)dy$, donde*

$$k(x,y) = \frac{1}{x-y+i(a(x)-a(y))}, \qquad ||a'||_{L^\infty} \leq M,$$

entonces $K_{\varepsilon,R}$ mapea $L^2(\mathcal{R})$ en sí mismo y además $||K_{\varepsilon,R}||_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leq C||a'||_{L^\infty}$.

Idea de la prueba del Teorema 5.2.
Primera Observación. Supongamos, para comenzar que $||a'||_{L^\infty} \leq \varepsilon_0$ como en el Teorema de Calderón. Entonces, para cualquier constante positiva L, la tesis del teorema vale para la función $\bar{a}(x) \equiv a(x) + Lx$.
Prueba de la Primera Observación: Operando obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-y+i[a(x)+Lx-a(y)-Ly]} &= \frac{1}{1+iL}\frac{1}{x-y+i\left(\frac{a(x)-a(y)}{1+iL}\right)} \\ &= \frac{1}{1+iL}\sum_{M\geq 0}\left(\frac{-i}{1+iL}\right)^M \frac{(a(x)-a(y))^M}{(x-y)^{M+1}};\end{aligned}$$

de donde se concluye la tesis dado que $\left|\frac{i}{1+iL}\right| < 1$.

Lema 5.3. *Supongamos que a es Lipschitz en $\mathcal{R}$ y que existe una constante L tal que*

$$|a(x)-a(y)+L(x-y)| \leq M|x-y|.$$

Fijamos un intervalo $I=[c,d]$. Entonces existe una función $\tilde{a}$ y una constante $\tilde{L}$ tal que para todo x e y se tiene

$$|\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y)+\tilde{L}(x-y)| \leq \frac{9}{10}M|x-y| \text{ y}, \qquad |\{x\in I : \tilde{a}(x)=a(x)\}| \geq \frac{3}{8}|I| \;\; \tilde{a}(c)=a(c);$$

Esto se demuestra tomando $\tilde{a}$ la función más pequeña no decreciente $\geq a$.

Lema 5.4. *Dado $k(x,y)$. Supongamos que existe $v\in]0,1]$y $c_0 \geq 0$ tal que para cualquier intervalo $[a,b]$ existe un compacto $E\subset I$ y un núcleo $k_I(x,y)$ que satisface propriedades*

(1) $|E| \geq v|I|$,
(2) Para todo $x\in E$ y para todo I_j componente conexa de $I-E$ se tiene

$$|k_I(x,y)-k(x,y)| \leq c_0\frac{|\tilde{I}|}{(x-y)^2} \quad \textit{para todo } x\in E,\ \forall y\in I-E, \tag{5.7}$$

(3) $k_I(x,y)=k(x,y)$, *para todo* $x,\ y\in E$,
(4) $|k_I(x,y)| \leq \frac{C_0}{|x-y|}$, $|\frac{\partial}{\partial x}k_I(x,y)| + |\frac{\partial}{\partial y}k_I(x,y)| \leq \frac{C_0}{|x-y|^2}$.
(5) El operador truncado suavizado correspondiente a $k_I(x,y)$ tiene norma en L^2 acotada por C_0.

Entonces $||K_{\varepsilon,R}||_{\mathcal{L}L^2,L^2} \leq C_0$

Segunda Observación: Supongamos que el teorema es cierto para toda función Lipschitz $\tilde{a}$ con la propiedad que existe un número $\tilde{L}$ tal que

$$|\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y)+\tilde{L}(x-y)| \leq \frac{9}{10}M|x-y|.$$

Entonces el teorema es cierto para toda función Lipschitz a para la cual existe un L tal que

$$|a(x)-a(y)+L(x-y)| \leq M|x-y|.$$

Prueba de la segunda Observación: Fijemos a y un intervalo I. Ya que a es Lipschitz con constante M existe un número $L(L=0)$ tal que

$$|a(x)-a(y)+L(x-y)| \leq M|x-y|.$$

Por el Lema 5.3 existe una $\tilde{a}$ y un intervalo $I=[c,d]$ tal que

$$|\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y)+\tilde{L}(x-y)| \leq \frac{9}{10}M|x-y| \text{ y}, \qquad |\{x\in I : \tilde{a}(x)=a(x)\}| \geq \frac{3}{8}|I| \;\; \tilde{a}(c)=a(c).$$

Por nuestra suposición el teorema es cierto para $\tilde{a}$. Si escribimos ahora $I-E=\cup I_j$, con I_j las componentes conexas entonces sabemos que $\tilde{a}=a$ en al menos uno de los puntos finales de cada I_j. Entonces si $x\in E$ e $y\in I_j$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-y)+i(a(x)-a(y))} &- \frac{1}{(x-y)+i(\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y))}\\ &= i\frac{a(y)-\tilde{a}(y)}{((x-y)+i(a(x)-a(y)))((x-y)+i(\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y)))};\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}|\frac{1}{(x-y)+i(a(x)-a(y))} &- \frac{1}{(x-y)+i(\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y))}|\\ &\leq \frac{|a(y)-\tilde{a}(y)|}{|((x-y)+i(a(x)-a(y)))||((x-y)+i(\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y)))|}\\ &\leq C_0\frac{|I_j|}{(x-y)^2};\end{aligned}$$

ya que $|a(y)-\tilde{a}(y)| \leq |a(y)-a(y_o)|+|\tilde{a}(y)-\tilde{a}(y_o)| \leq C|y-y_o|$ para y_o el punto extremo de I_j tal que a y $\tilde{a}$ coinciden.
Podemos aplicar entonces el Lema 5.4 (ya que por nuestra suposición el Teorema es válido para $\tilde{a}$) para concluir que el Teorema es válido para a.

Utilizaremos ahora la Primera observación y la Segunda observación para concluir con la prueba del Teorema 5.2. Tomamos una función Lipschitz a con constante de Lipschitz igual a M y un intervalo I. Entonces existe un N tal que $(\frac{10}{9})^N\varepsilon_0 > M$. Por el Lema 5.3 existen (luego de aplicarlo N veces) funciones $\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_N$ y números $L_1,\dots,L_N$ tales que

$$|\tilde{a}_i(x)-\tilde{a}_i(y)-\tilde{L}_i| \leq (\frac{10}{9})^{N-i}|x-y|, \quad \text{para todo} x,\, y\in I.$$

Por la Primera Observación el Teorema es cierto para $\tilde{a}_N$, aplicando la Segunda observación N veces el Teorema es cierto para a. Con lo que se concluye la prueba del Teorema 5.2.

Bibliografía

[1] Duoandikoetxea, J.: *Fourier Analysis*. American Mathematical Society, 2001.

[2] Calderón, A.: *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*. Proc. NAS USA, 74 (1977), 1324-1327.

[3] Coifman, R. R., Deng, D. G. and Meyer, Y.: *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes*. Annals of Mathematics, 116 (1982), 361-387.

[4] David, G and Journé J. L.: *A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators*. Annals of Mathematics, 120 (1984), 371-397.

[5] Fabes, E, Mitrea, I and Mitrea M.: *On the boundedness of Singular Integrals*. Pacific Journes of Mathematics, Vol. 189, Nro. 1, 1999.

[6] John, F. and Nirenberg, L.: *On functions of bounded mean oscillation*. Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 415-426.

[7] Stein, E. M.: *Singular integrals, harmonic functions, and differentiability properties of functions of several variables*. Proc. Symp. in Pure Math. 10 (1967), 316-335.

[8] Wheeden, R. y Zygmund, A.: *Measure and Integral.*