XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Teoría geométrica de funciones: el punto de encuentro entre variable compleja y geometría

José Manuel Rodríguez García
José María Sigarreta Almira
Eva Tourís Lojo

MÉRIDA, VENEZUELA, 5 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2010

XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

Teoría geométrica de funciones:

el punto de encuentro entre variable compleja y geometría

José Manuel Rodríguez García(1)

José María Sigarreta Almira(2)

Eva Tourís Lojo(1)

(1) Universidad Carlos III de Madrid (España)

(2) Universidad Autónoma de Guerrero (México)

jomaro@math.uc3m.es, josemariasigarretaalmira@yahoo.es, etouris@math.uc3m.es

MÉRIDA, VENEZUELA, 5 AL 10 DE SEPTIEMBRE DE 2010

XXIII ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de las instituciones siguientes: Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado y Universidad de Oriente, y se realiza bajo el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana. La XXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS recibió financiamiento de la Academia de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, la Corporación Andina de Fomento (CAF), el Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT), la Fundación TALVEN, el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), la Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Facultad de Ciencias y Departamento de Matemáticas) y el Rectorado de la Unversidad Centroccidental Lisandro Alvarado.

2000 Mathematics Subject Classification: 30F45, (30C80, 32Q55).

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
RIF: G-20004206-0

Teoría geométrica de funciones: el punto de encuentro entre variable compleja y geometría
José Manuel Rodríguez, José María Sigarreta y Eva Tourís

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas
Preprensa e impresión: Editorial Texto
Depósito legal If66020105102082
ISBN 978-980-261-121-8
Caracas, Venezuela
2010

Para Raquel, Izan, Yeray, Sailí, Sailé y Tino,

que hacen que todo tenga sentido

Prefacio

Uno de los problemas fundamentales en la Teoría Geométrica de Funciones es determinar si existen funciones holomorfas entre dos superficies de Riemann dadas y, caso de que existan, el estudio de su crecimiento. Abordar este problema es el "hilo conductor" del presente texto, que tiene como objetivo presentar, de forma relativamente sencilla, muchos de los teoremas más complicados y potentes de la teoría clásica de Funciones de Variable Compleja. Esta simplificación es posible ya que no incluimos las demostraciones "clásicas", sino que usamos en nuestras pruebas elementos de Topología, Álgebra y (sobre todo) Geometría. Por tanto, además de aprender Variable Compleja, leyendo este libro podrá aprenderse algo de diferentes ramas de las Matemáticas. Queremos destacar que no es casual que se produzca esta simplificación en las pruebas: siempre que se establece un "puente" entre diversas áreas de las Matemáticas, ambas salen muy beneficiadas. Avanzamos ya en este momento que nuestro "puente" será la métrica de Poincaré.

Este libro pretende servir de apoyo a los estudiantes que sigan el curso de igual nombre, que impartimos José Manuel Rodríguez y Eva Tourís, en la XXIII edición de la Escuela Venezolana de Matemáticas 2010. Esto hace que el libro esté condicionado por el número de horas del curso, además de por las preferencias personales de los autores. Consecuentemente, este texto no pretende ser exhaustivo en los temas que trata, por lo que ofrece una suficientemente extensa bibliografía para profundizar en los temas que más capten el interés del lector.

Los prerrequisitos mínimos para la lectura de este libro son un primer curso de Variable Compleja y un primer curso de Geometría de Superficies.

El material se organiza de la siguiente forma: El Capítulo 1 incluye la mayoría de los resultados habituales en un primer curso de Variable Compleja; por un lado, esto pretende servir de recordatorio para los lectores que lo necesiten; por otro, hemos incluido (con demostraciones) los resultados "básicos" que se generalizarán en los capítulos posteriores y que, por tanto, merecen una especial atención.

También hemos incluido diversos resultados muy útiles (aunque no siempre muy conocidos) para realizar cálculos prácticos: recuperar una función holomorfa a partir de su parte real (ver Teorema 1.1.15), criterios para garantizar la holomorfía de funciones definidas mediante integrales (ver Teorema 1.3.12 y Corolario 1.3.15), fórmulas para el cálculo de integrales y transformadas de Fourier (ver Proposiciones 1.5.5, 1.5.6, 1.5.8 y 1.5.9), fórmulas para hallar sumas de series (ver Proposición 1.5.10), y una fórmula para hallar rápidamente la descomposición en fracciones simples de muchas funciones racionales (ver Corolario 1.5.4).

En las Secciones 2.2 y 2.4 se explican con todo el detalle necesario los conceptos geométricos y topológicos, respectivamente, que serán utilizados en el resto del libro. Estas dos secciones, a diferencia del resto del libro, no contienen demasiados detalles de la teoría, sino que, tratando de ser operativos, dado que no son la parte central del libro, incluyen sólo los conceptos que serán utilizados posteriormente. El resto del Capítulo 2 constituye el núcleo del presente libro. Los Capítulos 3 y 4 incluyen algunos resultados de la Teoría Geométrica de Funciones desarrolladas en los últimos 40 años. Más concretamente, el Capítulo 3 contiene teoremas que ilustran cómo la métrica de Poincaré puede ser utilizada para obtener teoremas de extensión holomorfa más sofisticados que los que aparecen en el Capítulo 2. Finalmente, el Capítulo 4 muestra una visión diferente de la interacción entre la Variable Compleja y la Geometría: los espacios hiperbólicos de Gromov, que permiten extender muchos resultados sobre el disco unidad al contexto, mucho más general, de espacios métricos.

Cada uno de los capítulos se divide en secciones. La numeración de cada resultado (lema, proposición, teorema o corolario) comienza por el número del capítulo y sigue por el número de la sección, para que puedan localizarse fácilmente. También la numeración de las fórmulas se corresponde con el capítulo y la sección donde se encuentran. Al final de cada sección se incluyen diversos ejercicios relacionados con su contenido. El símbolo □ indica el final de cada demostración.

Para el lector interesado en ampliar los conocimientos que aparecen en este libro, podemos recomendar los siguientes textos: para geometría hiperbólica [A], [An], [Be], [Fe], [Kr1] y [Kr2], y para superficies de Riemann [AS], [Bu], [JS] y [Ts]. Los libros [G] y [ON] son excelentes referencias para profundizar en geometría, y [M] en topología.

Deseamos mostrar nuestro agradecimiento a José Luis Fernández Pérez (Josechu para los amigos), que nos introdujo en el maravilloso universo de la Teoría Geométrica de Funciones. Todo el libro está impregnado de su sabiduría y su particular visión de este área de las Matemáticas, aunque los posibles defectos del presente texto se deben exclusivamente a los autores.

Quedaremos también muy agradecidos a todo el que desee señalarnos cualquier defecto que descubra en el libro, ayudándonos así a mejorarlo si existiera una posterior edición del mismo. Pueden usarse para ello nuestras direcciones electrónicas.

No queremos acabar este prefacio sin agradecer al comité organizador de la XXIII edición de la Escuela Venezolana de Matemáticas la oportunidad que nos ha brindado de impartir este curso.

Finalmente, deseamos expresar nuestra esperanza de que este libro sirva a sus lectores para aprender divirtiéndose; si esto sucede, nuestro esfuerzo se habrá visto gratamente recompensado.

José Manuel Rodríguez, José María Sigarreta y Eva Tourís

Notaciones:

Los símbolos d_S, L_S, A_S, B_S, λ_S denotarán respectivamente la distancia, la longitud, el área, la bola y la densidad de la métrica en S con respecto a la métrica euclídea (esto último sólo si S es un dominio contenido en $\mathbb{C}$). Usualmente esta métrica será la métrica de Poincaré. Si $S = \overline{\mathbb{C}}$, consideremos en ella la métrica esférica, que se define en la Sección 2.8. No hay posibilidad de confusión, ya que $\overline{\mathbb{C}}$ no tiene métrica hiperbólica.

$d_S(x, Y), d_S(X, Y), d_{\mathcal{H}}(X, Y)$ denotarán respectivamente la distancia en S de un punto a un conjunto, entre conjuntos y distancia de Hausdorff entre conjuntos respecto a la distancia que se esté considerando en el espacio.

Cuando estos símbolos aparezcan sin el subíndice S, denotarán estos mismos conceptos pero ahora referidos a la métrica euclídea usual.

Denotamos por R ó S superficies de Riemann no excepcionales, asumiendo que la métrica definida en ellas es la métrica de Poincaré, salvo que se especifique lo contrario.

$D(a, r)$ es el disco euclídeo de centro a y radio r, $\overline{D}(a, r)$ es la clausura de $D(a, r)$, $D(a, r)^* = D(a, r) \setminus \{a\}$ y $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

$\Re z$ y $\Im z$ denotan la parte real e imaginaria de z, respectivamente.

La expresión $a := b$ significa que a se define igual a b.

Contenido

Capítulo 1

Resultados básicos de la teoría de funciones de variable compleja

1.1 Funciones holomorfas

Definición 1.1.1. *Por* $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\}$ *denotaremos el disco de centro* z_0 *y radio* $r > 0$*. Dado* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *decimos que:*

(1) Ω *es* abierto *si para todo* $z_0 \in \Omega$*, existe* $\varepsilon > 0$ *con* $D(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$*.*

(2) Un conjunto abierto Ω *es* conexo *si para todo* $z_1, z_2 \in \Omega$*, existe una curva continua* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ *uniendo* z_1 *con* z_2*, es decir, tal que* $\gamma(a) = z_1$*,* $\gamma(b) = z_2$ *.*

(3) Ω *es un* dominio *si es un abierto conexo.*

(4) Ω *es* simplemente conexo *si es conexo y toda curva cerrada* γ *(es decir, tal que* $\gamma(a) = \gamma(b)$*) contenida en* Ω *puede deformarse continuamente dentro de* Ω *en un punto. Esto es equivalente a que* Ω *sea conexo y que no exista ninguna curva cerrada contenida en* Ω *que rodee algún punto que no pertenezca a* Ω *(es decir, que* Ω *no tenga "agujeros").*

La noción de conjunto simplemente conexo juega un papel central en la variable compleja. De hecho, puede afirmase con bastante rigor que el principal objetivo de un curso básico de funciones de variable compleja, como el que pretende resumirse en este primer capítulo, es probar el siguiente teorema acerca de dichos conjuntos. Las definiciones precisas de los conceptos que aparecen en el teorema se introducirán a lo largo del presente capítulo.

Teorema 1.1.2. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto conexo, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Ω es simplemente conexo.*
2. *$\int_\gamma f = 0$, para toda función holomorfa en Ω y para toda curva cerrada γ contenida en Ω.*
3. *Toda función f holomorfa en Ω posee una primitiva holomorfa en Ω, es decir, existe una función F holomorfa en Ω tal que $F' = f$.*
4. *Toda función f holomorfa en Ω con $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ tiene logaritmo analítico en Ω.*
5. *Toda función f holomorfa en Ω con $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ tiene raíz cuadrada en Ω.*
6. *Toda función holomorfa en Ω es el límite uniforme de una sucesión de polinomios sobre compactos en Ω.*
7. *$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ es conexo.*

Además, si $\Omega \neq \mathbb{C}$, todas las condiciones anteriores son equivalentes a la siguiente:

8. *Ω es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.*

Prosigamos con los conceptos y resultados básicos de la teoría.

Dados un abierto Ω y una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, los conceptos de límite y continuidad coinciden con los correspondientes a funciones reales sin más que considerar $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$ significa que para todo número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - w| < \varepsilon,$$

y f es continua en z_0 si $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Por tanto, se tienen los mismos resultados para límites y continuidad de sumas, restas, productos y cocientes de funciones de una variable real. Además, las funciones $\overline{z}$, $\Re z$, $\Im z$ y $|z|$ son continuas. Sin embargo, la función argumento no es continua en $\mathbb{C}$, aunque sí es continua en $\mathbb{C}$ menos una semirrecta que comience en 0.

También se tiene que $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$ si y sólo si $\lim_{z\to z_0} \Re f(z) = \Re w$ y $\lim_{z\to z_0} \Im f(z) = \Im w$.

Dada una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, para definir el concepto de derivada se podría adoptar para tal fin (al menos teóricamente) la definición de función diferenciable para funciones de dos variables reales. Sin embargo, es más adecuado adoptar la estrategia aparentemente inocente de definir la derivada de forma "uni-dimensional" (como en el caso de funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$), aprovechando la estructura de cuerpo de $\mathbb{C}$:

Definición 1.1.3. *Sean Ω abierto, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Decimos que f es* derivable *en z_0 si existe el límite finito* (*donde $h \in \mathbb{C}$*)

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} .$$

Puesto que esta definición coincide con la de derivabilidad de funciones reales de una variable real, se tienen las mismas reglas para el cálculo de derivadas de sumas, productos, cocientes y composiciones, con las mismas demostraciones.

Teorema 1.1.4. *Sean f, g funciones derivables en z_0, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces:*

(1) $\alpha f + \beta g$ es derivable en z_0, y se tiene

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha\, f'(z_0) + \beta\, g'(z_0) .$$

(2) fg es derivable en z_0, y

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0) .$$

(3) Si $g(z_0) \neq 0$, entonces f/g es derivable en z_0, y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g(z_0)^2} .$$

Teorema 1.1.5. *Si f es derivable en z_0 y g es derivable en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es derivable en z_0, y se verifica la regla de la cadena:*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)\,.$$

Teorema 1.1.6. *Si f es derivable en z_0, entonces f es continua en z_0.*

Como consecuencia del Teorema 1.1.4, las funciones racionales (es decir, los cocientes de polinomios) son derivables en todo $\mathbb{C}$ salvo en los ceros del denominador. Sin embargo, la función $\overline{z}$ no es derivable en ningún punto, como consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 1.1.7. *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(1) f es derivable en z_0.
(2) f es diferenciable (en sentido real) en z_0 y $f_y(z_0) = i f_x(z_0)$.
(3) u, v son diferenciables (en sentido real) en z_0 y se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann *en z_0:*

$$\begin{cases} u_x = v_y\,, \\ u_y = -v_x\,. \end{cases}$$

Además, si f es derivable en z_0, entonces $f'(z_0) = f_x(z_0)$.

Definición 1.1.8. *Decimos que f es* holomorfa en un abierto Ω *si es derivable en todos los puntos de Ω. También decimos que f es* holomorfa en z_0 *si es holomorfa en algún disco centrado en z_0.*

Se tiene que las constantes son las únicas funciones holomorfas en un dominio que sólo toman valores reales. Por tanto, funciones como $\Re z$, $\Im z$, $|z|$, $\arg z$ no son holomorfas en ningún conjunto abierto.

Definición 1.1.9. *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es* conforme *en el punto z_0 si preserva los ángulos con su orientación en dicho punto. Se dice que f es una aplicación* conforme local *si f es conforme en todos los puntos de Ω. Diremos que f es una aplicación* conforme *en Ω si es una aplicación conforme local y además es inyectiva en Ω (o biyectiva considerada como $f : \Omega \to f(\Omega)$).*

Teorema 1.1.10. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es un aplicación conforme en el punto z_0.*

Demostración. Sean γ_1, γ_2 dos curvas en el plano complejo, que son de clase C^1 y tienen derivada no nula, tales que $\gamma_1(t_1) = z_0 = \gamma_2(t_2)$. El ángulo orientado en z_0 desde γ_1 a γ_2 es el ángulo orientado de $\gamma_1'(t_1)$ a $\gamma_2'(t_2)$. Si $\gamma_1'(t_1) = r_1 e^{i\theta_1}$ y $\gamma_2'(t_2) = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces dicho ángulo es igual a

$$\theta_2 - \theta_1 = \arg \frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \arg \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} \, .$$

Si $\sigma_1 := f \circ \gamma_1$ y $\sigma_2 := f \circ \gamma_2$, $\sigma_1'(t_1) = R_1 e^{i\varphi_1}$ y $\sigma_2'(t_2) = R_2 e^{i\varphi_2}$, entonces el ángulo orientado en $f(z_0)$ desde σ_1 a σ_2 es igual a

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= \arg \frac{R_2 e^{i\varphi_2}}{R_1 e^{i\varphi_1}} = \arg \frac{\sigma_2'(t_2)}{\sigma_1'(t_1)} = \arg \frac{f'(\gamma_2(t_2))\gamma_2'(t_2)}{f'(\gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1)} \\ &= \arg \frac{f'(z_0)\gamma_2'(t_2)}{f'(z_0)\gamma_1'(t_1)} = \arg \frac{\gamma_2'(t_2)}{\gamma_1'(t_1)} = \theta_2 - \theta_1 \, . \end{aligned}$$

Por tanto, f preserva en z_0 los ángulos con su orientación. □

El siguiente resultado es bien conocido:

Teorema 1.1.11. *Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una aplicación biyectiva. Entonces f es una aplicación conforme si y sólo si f es holomorfa en Ω_1.*

Definición 1.1.12. *Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^2$, una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 se denomina* armónica *en Ω si*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{en } \Omega \, .$$

Teorema 1.1.13. *Si f es holomorfa en el abierto Ω y es de clase C^2 en Ω, entonces $\Re f$ e $\Im f$ son armónicas en Ω.*

Proposición 1.1.14. *Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es de clase C^2 y holomorfa en Ω_1, y $u : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 en Ω_2, entonces*

$$\Delta(u \circ f)(z) = (\Delta u)(f(z))|f'(z)|^2$$

para todo $z \in \Omega_1$. En particular, la composición de una función holomorfa con una función armónica es armónica.

El siguiente teorema resulta de gran utilidad si se desea encontrar una función holomorfa a partir de su parte real.

Teorema 1.1.15. *Si $f(z)$ es holomorfa en z_0 y $u(x,y)$ es su parte real, entonces*

$$f(z) = 2\,u\Big(\frac{z+\overline{z_0}}{2}\,,\frac{z-\overline{z_0}}{2i}\Big) - \overline{f(z_0)}\,.$$

1.1.1 Ejercicios

Ejercicio 1.1.1.1. *Prueba que si existe* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$, *entonces*
(a) $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w}$, *(b)* $\lim_{z\to z_0} \Re f(z) = \Re w$,
(c) $\lim_{z\to z_0} \Im f(z) = \Im w$, *(d)* $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w|$,
es decir, que las funciones $\overline{z}$, $\Re z$, $\Im z$ *y* $|z|$ *son continuas.*

Ejercicio 1.1.1.2. *Prueba que* $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$ *si y sólo si* $\lim_{z\to z_0} \Re f(z) = \Re w$ *y* $\lim_{z\to z_0} \Im f(z) = \Im w$.

Ejercicio 1.1.1.3. *Prueba que no existe ninguna determinación de la función argumento continua en* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, *aunque sí existen determinaciones continuas en* $\mathbb{C}\setminus S$, *donde* S *es cualquier semirrecta fija que comienza en* 0.

Ejercicio 1.1.1.4. *Prueba que las funciones racionales, es decir, los cocientes de polinomios, son derivables en todos los puntos excepto en los ceros del denominador.*

Ejercicio 1.1.1.5. *Halla la derivada de* $f(z) = z^2/(z+1)$.

Ejercicio 1.1.1.6. *Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, prueba que la función* $\overline{z}$ *no es derivable en ningún punto.*

Ejercicio 1.1.1.7. *Prueba que si* Ω *es un dominio y* $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable en* $z_0 \in \Omega$, *se tiene que* $f'(z_0) = 0$. *Prueba que si además* f *es derivable en todos los puntos de* Ω, *entonces* $f' = 0$ *en* Ω.

Ejercicio 1.1.1.8. *Deduce del ejercicio anterior que las constantes son las únicas funciones holomorfas en un dominio que sólo toman valores reales y que, por tanto, funciones como* $\Re z$, $\Im z$, $|z|$, $\arg z$ *no son holomorfas en ningún abierto.*

Ejercicio 1.1.1.9. *Prueba que la función* $|z|^2$ *sólo es derivable en* 0.

Ejercicio 1.1.1.10. *Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, verifica que la función exponencial compleja es derivable en todo $\mathbb{C}$ si la definimos mediante*

$$f(z) = e^z := e^x e^{iy} := e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)\,.$$

Prueba también que $f'(z) = e^z$.

Ejercicio 1.1.1.11. *Usando el ejercicio anterior, prueba que la función $f(z) = e^{z/(z^2+1)}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Halla $f'(z)$.*

Ejercicio 1.1.1.12. *Prueba que si f es holomorfa en el abierto Ω y es de clase C^2 en Ω, entonces $\Re f$ e $\Im f$ son armónicas en Ω (si identificamos $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$).*

Ejercicio 1.1.1.13. *Encuentra una función holomorfa f con $f(0) = i$ y con parte real $u(x, y) = x^2 - y^2$.*

Ejercicio 1.1.1.14. *Encuentra una función holomorfa f con $f(1) = 1$ y con parte real $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$.*

Ejercicio 1.1.1.15. *Prueba la Proposición 1.1.14.*

1.2 Series de potencias

Definiciones y resultados previos.

1. Si $\omega_n = a_n + ib_n$, $\omega = a + ib$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \omega_n = \omega \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \ \exists\, N \ \text{ tal que } \ |\omega_n - \omega| < \varepsilon\,,\ \forall\, n \geq N \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,. \end{aligned}$$

2. Decimos que $\lim_{n\to\infty} \omega_n = \infty$ si $\lim_{n\to\infty} |\omega_n| = \infty$.

3. $\{\omega_n\}$ se dice convergente si tiene límite finito (es decir, un límite diferente de ∞).

4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ es, por definición, el límite $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \omega_n$.

5. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$. Es decir, si $\lim_{n\to\infty} \omega_n$ es distinto de 0 o no existe, la serie diverge. (El recíproco es falso).

6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ se dice absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|$ converge.

7. Toda serie absolutamente convergente es convergente. (El recíproco es falso).

8. Sean $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en Ω, si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)\,, \quad \forall\, z \in \Omega\,,$$

es decir, si

$$\forall\, z \in \Omega\,,\ \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, N = N(z, \varepsilon) \ \text{ tal que } \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\,, \ \ \forall\, n \ge N\,.$$

9. Sean $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en Ω, si:

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, N = N(\varepsilon) \ \text{ tal que } \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon\,, \ \ \forall\, n \ge N\,, \ \ \forall z \in \Omega\,.$$

10. La convergencia uniforme implica la convergencia puntual. (El recíproco es falso).

11. Si f_n converge uniformemente a f en Ω, y f_n es continua en Ω para todo n, entonces también f es una función continua en Ω.

12. Criterio M de Weierstrass: Si se tiene que

$$|f_n(z)| \le M_n\,,\ \forall\, n \ge n_0\,,\ \forall z \in \Omega \quad y \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} M_n < \infty\,,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge absoluta y uniformemente en Ω.

13. Dada una sucesión $\{b_n\} \subset \mathbb{R}$, el límite superior de $\{b_n\}$ es el supremo del conjunto formado por todos los límites de subsucesiones de $\{b_n\}$. Más formalmente, $\limsup_{n\to\infty} b_n = \inf_n \sup_{m\ge n} b_m$. Por tanto,

$\limsup_{n\to\infty} b_n$ *existe siempre* (aunque puede ser ∞ ó $-\infty$). Se tiene que:

(a) Si existe $\lim_{n\to\infty} b_n$, entonces $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

(c) Si $a_n \geq 0$ y existe $\lim_{n\to\infty} a_n$, entonces $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$.

(d) Si $a_n, b_n \geq 0$, $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$.

(e) Si $a_n \geq 0$ y $\alpha > 0$, entonces $\limsup_{n\to\infty} a_n^\alpha = (\limsup_{n\to\infty} a_n)^\alpha$.

(f) Si f es una función continua y creciente, entonces $\limsup_{n\to\infty} f(a_n) = f(\limsup_{n\to\infty} a_n)$.

Definición 1.2.1. *Una* serie de potencias *centrada en z_0 es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,. \tag{1.2.1}$$

Teorema 1.2.2. *La serie* (1.2.1)

(a) converge absolutamente en $D(z_0, R) = \{z : |z - z_0| < R\}$, donde R viene dado por la fórmula de Cauchy-Hadamard

$$0 \leq R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \leq \infty \,,$$

y la convergencia es uniforme en cada disco cerrado $\overline{D(z_0, r)} \subset D(z_0, R)$, con $r < R$;

(b) diverge para todo z tal que $|z - z_0| > R$.

El número R se llama el *radio de convergencia* de la serie y el disco $D(z_0, R)$ se llama el *círculo de convergencia* de la misma.

El siguiente teorema permite calcular con facilidad el radio de convergencia en muchos casos:

Teorema 1.2.3. *Si existe* $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n|$, *entonces el radio de convergencia R de* (1.2.1) *verifica que*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \,.$$

Teorema 1.2.4. *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y supongamos que el radio de convergencia R de la serie es estrictamente positivo. Entonces f es holomorfa en $D(z_0, R)$, y*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}\,, \qquad \forall\, z \in D(z_0, R)\,.$$

Además, el radio de convergencia de la serie de f' también es R. También es R el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(z - z_0)^{n+1},$$

obtenida al integrar término a término la serie de $f(z)$.

Corolario 1.2.5. *Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, para todo $z \in D(z_0, R)$, entonces:*

(1) f es derivable infinitas veces en $D(z_0, R)$, y además

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}\,,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in D(z_0, R)$.

(2) $a_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

El Teorema 1.2.2 permite asegurar la convergencia de (1.2.1) en el interior del disco de convergencia y su divergencia en el exterior de dicho disco. La convergencia en la frontera del disco de convergencia es mucho más delicada, puesto que, en general, puede ocurrir cualquier cosa. El siguiente resultado es de utilidad en muchas situaciones.

Teorema 1.2.6. *Sea R el radio de convergencia de* (1.2.1). *Si $a_0 \geq a_1 R \geq a_2 R^2 \geq \cdots$ y $\lim_{n\to\infty} a_n R^n = 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge en la circunferencia $\{|z - z_0| = R\}$ salvo, quizás, en el punto $z = z_0 + R$.*

Definición 1.2.7. *Una función es* analítica *en z_0 si se puede escribir como una serie de potencias centrada en z_0, con radio de convergencia positivo. Una función es* analítica *en un conjunto Ω si es analítica en todos los puntos de Ω.*

1.2.1 Ejercicios

Ejercicio 1.2.1.1. *Halla el límite de las siguientes sucesiones de números complejos: (a)* $e^{-n} + i(n+1)/n$, *(b)* $(-1)^n n$, *(c)* i^n.

Ejercicio 1.2.1.2. *Prueba que si* $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$. *Prueba que el recíproco es falso.*

Ejercicio 1.2.1.3. *Prueba que si* $\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n|$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ *converge. Prueba que el recíproco es falso.*

Ejercicio 1.2.1.4. *Prueba que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i2^n}{3^n+in}$ *es convergente.*

Ejercicio 1.2.1.5. *Prueba que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual. Prueba que el recíproco es falso.*

Ejercicio 1.2.1.6. *Prueba que si* f_n *converge uniformemente a* f *en* Ω, *y* f_n *es continua en* Ω *para todo* n, *entonces también* f *es una función continua en* Ω.

Ejercicio 1.2.1.7. *Prueba el criterio M de Weierstrass: Si se tiene que*

$$|f_n(z)| \le M_n\,,\ \forall\, n \ge n_0\,,\ \forall z \in \Omega \quad y \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} M_n < \infty\,,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *converge absoluta y uniformemente en* Ω.

Ejercicio 1.2.1.8. *Prueba que la fución zeta de Riemann* $\zeta(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ *converge absoluta y uniformemente en* $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \ge a\}$ *si* $a > 1$, *donde* n^z *se define como* $n^z := e^{z \log n} := n^x\big(\cos(y \log n) + i \operatorname{sen}(y \log n)\big)$, *si* $z = x + iy$.

Ejercicio 1.2.1.9. *Prueba las siguientes afirmaciones:*

(*a*) *Si existe* $\lim_{n\to\infty} b_n$, *entonces* $\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(*b*) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

(*c*) *Si* $a_n \ge 0$ *y existe* $\lim_{n\to\infty} a_n$, *entonces* $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$.

(*d*) *Si* $a_n, b_n \ge 0$, $\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \le (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$.

(*e*) *Si* $a_n \ge 0$ *y* $\alpha > 0$, *entonces* $\limsup_{n\to\infty} a_n^{\alpha} = (\limsup_{n\to\infty} a_n)^{\alpha}$.

(*f*) *Si* f *es una función continua y creciente, entonces* $\limsup_{n\to\infty} f(a_n) = f(\limsup_{n\to\infty} a_n)$.

Ejercicio 1.2.1.10. *(a) Prueba que* $\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

(b) Prueba que $\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = 1$.

(c) ¿Por qué $\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+i}$ *no tiene sentido?*

Ejercicio 1.2.1.11. *Halla los radios de convergencia de las series:*
(a) $\sum_{n=0}^\infty z^n/n!$, *(b)* $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^{2n}/(2n)!$, *(c)* $\sum_{n=0}^\infty n^7 z^n$.

Ejercicio 1.2.1.12. *Prueba que* $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. *Usando este hecho, prueba el Teorema 1.2.4.*

Ejercicio 1.2.1.13. *Prueba el Corolario 1.2.5.*

Ejercicio 1.2.1.14. *Prueba que* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n+1}$ *converge en la circunferencia* $\{|z| = 1\}$ *salvo en el punto* $z = 1$.

Ejercicio 1.2.1.15. *Prueba que* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{(z-3)^n}{\sqrt{n}}$ *converge en la circunferencia* $\{|z-3| = 1\}$ *salvo en el punto* $z = 2$.

Ejercicio 1.2.1.16. *¿Por qué la serie real de la función* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n x^{2n}$ *converge sólo si* $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, *siendo* f *una función de clase* C^∞ *(y de hecho analítica) en todo el eje real?*

1.3 Integración compleja

Todas las curvas $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ que se consideren de ahora en adelante serán continuas y de clase C^1 a trozos.

Si f está definida sobre γ, es decir, $f : \gamma([a, b]) \longrightarrow \mathbb{C}$, entonces tiene sentido definir

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt\,.$$

La definición de $\int_\gamma f$ no depende de la parametrización elegida de la curva γ, siempre que consideremos parametrizaciones con la misma orientación. Un cambio de orientación en la curva a lo largo de la cual se integra, produce un cambio de signo en la integral.

Definimos la integral de f respecto a la longitud de arco en γ como

$$\int_\gamma f\,ds := \int_\gamma f(z)\,|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt,$$

donde s denota el parámetro arco. Es sencillo comprobar que este tipo de integración es no sólo independiente respecto a los cambios de parametrización, sino también de orientación.

Si $\int_\gamma |f(z)|\,|dz| < \infty$, decimos que la función f es *integrable* sobre la curva γ. Definimos la longitud de una curva γ como $L(\gamma) := \int_\gamma |dz|$.

Teorema 1.3.1. *Sean γ, γ_j curvas, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, y f, g funciones integrables sobre dichas curvas. Entonces:*

(1) $\int_\gamma (\alpha\, f + \beta\, g)\,dz = \alpha \int_\gamma f\,dz + \beta \int_\gamma g\,dz$,

(2) $\int_{\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f\,dz$, *si* $L(\gamma_j \cap \gamma_k) = 0$ *para* $j \neq k$,

(3) $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$,

(4) *si* $|f| \leq M$ *sobre* γ, *entonces* $\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leq M\,L(\gamma)$.

Definición 1.3.2. *Sean $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada (es decir, tal que $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$) y $a \notin \gamma([\alpha, \beta])$. El* índice *de γ con respecto al punto a es el número $n(\gamma, a)$ definido por*

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}\,.$$

Diremos que una curva cerrada está orientada *positivamente o en sentido positivo* si se recorre en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Denotaremos por *sentido negativo* el correspondiente al movimiento de las agujas del reloj.

Se puede probar, usando la teoría de espacios recubridores, que $n(\gamma, a)$ es el número de vueltas que γ da alrededor del punto a (ver Teorema

2.4.6). El índice $n(\gamma, a)$ será un entero positivo si γ está orientada en sentido positivo, y un entero negativo si γ está orientada en sentido negativo.

La teoría de espacios recubridores también jugará un papel importante en la definición de la métrica de Poincaré en superficies de Riemann.

Teorema 1.3.3. *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en el abierto Ω y $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una curva, entonces*

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Teorema 1.3.4. *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en el abierto Ω, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) Existe $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$.

(2) $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$.

De hecho, la condición $\int_\gamma f = 0$ se verifica para todas las curvas cerradas si Ω es simplemente conexo y f es holomorfa en Ω:

Teorema 1.3.5 (Teorema integral de Cauchy-Goursat)**.** *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en el abierto simplemente conexo Ω, se tiene que*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,, \qquad \textit{para toda curva cerrada } \gamma \subset \Omega\,.$$

No es difícil generalizar el teorema anterior a funciones holomorfas con un número finito de singularidades.

Teorema 1.3.6 (Teorema integral de Cauchy con singularidades)**.** *Si Ω es un abierto simplemente conexo, f es holomorfa en $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, y $\lim_{z\to a_j}(z - a_j)\, f(z) = 0$, para $j = 1, \dots, k$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,, \qquad \textit{para toda curva cerrada } \gamma \subset \Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}\,.$$

También se tiene la siguiente fórmula maravillosa:

Teorema 1.3.7 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en el abierto simplemente conexo Ω, entonces*

$$n(\gamma, a)\, f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,,$$

para todo punto $a \in \Omega$, y para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega \setminus \{a\}$.

Si γ es una curva cerrada simple (es decir, sin autointersecciones), el conocido teorema de la curva de Jordan, nos asegura que γ divide al plano complejo en dos dominios: $\operatorname{Ext}\gamma$ (que contiene un entorno del punto del infinito) e $\operatorname{Int}\gamma$ (que es simplemente conexa). La Fórmula integral de Cauchy nos dice que los valores en $\operatorname{Int}\gamma$ de las funciones holomorfas están prescritos por sus valores sobre γ.

Observación 1.3.8. *Siempre que no se diga explícitamente lo contrario, supondremos que las curvas cerradas simples están orientadas en sentido positivo.*

Corolario 1.3.9. *Si γ es una curva cerrada simple y f es holomorfa en un abierto simplemente conexo que contenga a $Int\gamma$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \begin{cases} f(a)\,, & si\ a \in\ Int\gamma\,, \\ 0\,, & si\ a \in\ Ext\gamma\,. \end{cases}$$

En particular, si γ es la frontera de un disco, se tiene:

Corolario 1.3.10. *Si f es holomorfa en el abierto Ω y D es un disco tal que $\overline{D} \subset \Omega$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\, dw\,, \qquad \forall\, z \in D\,.$$

La fórmula integral de Cauchy tiene la sorprendente consecuencia de que las funciones holomorfas son infinitamente derivables y todas sus derivadas son funciones holomorfas. Para demostrar estos sorprendentes hechos necesitamos dos resultados previos. El primero de ellos es un resultado de derivación bajo el signo integral, que puede probarse de la misma forma que su análogo real.

Teorema 1.3.11. *Sean γ una curva en $\mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, y $g : \Omega \times \gamma \to \mathbb{C}$ una función que verifica:*

(1) Para cada $w \in \gamma$, $g(\cdot, w) : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω.

(2) Para todo $z \in \Omega$ y $w \in \gamma$, se tiene que

$$\Big|\frac{\partial g}{\partial z}(z, w)\Big| \le h(w)\,,$$

donde $h : \gamma \to [0, \infty]$ es integrable (es decir, $\int_\gamma h(w)\,|dw| < \infty$).

Entonces la función definida por

$$f(z) := \int_\gamma g(z, w)\,dw$$

es holomorfa en Ω, y además

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial g}{\partial z}(z, w)\,dw\,.$$

Teorema 1.3.12. *Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva y $\varphi : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ una función integrable en γ (es decir, $\int_\gamma |\varphi(w)|\,|dw| < \infty$). Entonces,*

$$F(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\,dw$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, y además

$$F^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}}\,, dw\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \gamma\,.$$

Demostración. Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ y $w \in \gamma$ se verifica

$$\Big|\frac{1}{(w - z)^{n+1}}\Big| \le \frac{1}{d(z, \gamma)^{n+1}}\,.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ consideremos el conjunto abierto

$$D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma :\; d(z, \gamma) > \varepsilon\}.$$

En D_ε se tiene que

$$\Big|\frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}}\Big| \le \frac{|\varphi(w)|}{\varepsilon^{n+1}}\,,$$

y esta última función es integrable en γ con respecto a la variable w. Por otro lado, es claro que $\varphi(w)/(w-z)^{n+1}$ es holomorfa en $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ para cada $w \in \gamma$. Por tanto, la holomorfía de F y la fórmula para $F^{(n)}$ en el abierto D_ε se obtienen ahora a partir del Teorema 1.3.11 aplicando inducción. Para finalizar la prueba, basta observar que todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ pertenece a D_ε con $\varepsilon := d(z, \gamma)/2$. □

Como consecuencia del Corolario 1.3.10 y del Teorema 1.3.12 obtenemos:

Teorema 1.3.13 (Fórmula integral de Cauchy para las derivadas)**.** *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en el abierto Ω, entonces existen todas las derivadas $f^{(n)}$ de f, todas ellas son holomorfas en Ω y, si D es un disco abierto tal que $\overline{D} \subset \Omega$, entonces*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw\,, \qquad \forall\, z \in D\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

A partir de estos resultados pueden extraerse "jugosas consecuencias", la primera de las cuales constituye un recíproco (parcial) del Teorema integral de Cauchy.

Teorema 1.3.14 (Teorema de Morera)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,, \qquad \text{para toda curva cerrada } \ \gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega\,. \tag{1.3.1}$$

Entonces f es holomorfa en Ω.

Demostración. Sean A una componente conexa de Ω y z_0 un punto de A. La condición (1.3.1) implica que la función

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw\,, \qquad z \in A\,,$$

está bien definida. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que F es, de hecho, derivable en A y que $F' = f$. Por tanto F es holomorfa en A, y el Teorema 1.3.13 nos dice que $f = F'$ también lo es. □

Corolario 1.3.15. *Sean $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Sea también $f : \Omega \times \sigma([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función integrable en $\gamma \times \sigma$ para toda curva cerrada $\gamma \subset \Omega$ y tal que la función obtenida al fijar la segunda variable, $f(\cdot, w) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, es holomorfa en Ω para todo $w \in \sigma$. Entonces, la función*

$$F(z) := \int_\sigma f(z,w)\, dw$$

es holomorfa en Ω.

Demostración. Sea D cualquier disco abierto contenido en Ω. Para cualquier curva cerrada γ contenida en D se tiene

$$\int_\gamma F(z)\, dz = \int_\gamma \int_\sigma f(z,w)\, dw\, dz = \int_\sigma \int_\gamma f(z,w)\, dz\, dw\,,$$

ya que f es integrable en $\gamma \times \sigma$. Como D es simplemente conexo y $f(z,w)$ es holomorfa en z para cada w fijo, se tiene $\int_\gamma f(z,w)\, dz = 0$ por el Teorema integral de Cauchy (Teorema 1.3.5). Por tanto, $\int_\gamma F(z)\, dz = 0$ para toda curva cerrada γ contenida en D, y el Teorema de Morera (Teorema 1.3.14) garantiza que F es holomorfa en D. Como D puede ser cualquier disco contenido en Ω, concluimos que F es holomorfa en el abierto Ω. □

Es interesante destacar que, como consecuencia del Corolario 1.3.15 se obtiene directamente la primera conclusión del Teorema 1.3.12, con hipótesis más débiles.

También se tienen los siguientes resultados:

Teorema 1.3.16 (Teorema de Liouville)**.** *Si f es entera (holomorfa en $\mathbb{C}$) y acotada, entonces f es constante.*

Demostración. Por hipótesis, existe una constante M tal que $|f(z)| \le M$, para todo $z \in \mathbb{C}$. El Teorema 1.3.13 da que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw\,,$$

para todo $z \in D(0,R)$. Por tanto, para todo z con $|z| < R$, se tiene

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=R} \frac{|f(w)|}{|w-z|^2}\, dw \le \frac{M\,R}{(R-|z|)^2}\,,$$

Haciendo tender R hacia ∞, concluimos que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, f es constante. $\square$

Teorema 1.3.17 (Teorema fundamental del Algebra)**.** *Todo polinomio con coeficientes complejos de grado n tiene n raíces complejas (contando su multiplicidad).*

Teorema 1.3.18. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas que convergen uniformemente sobre los compactos contenidos en Ω a una función f. Entonces f es holomorfa en Ω y, además, las derivadas $f_n^{(k)}$ convergen uniformemente sobre los compactos contenidos en Ω a la derivada $f^{(k)}$.*

Teorema 1.3.19. *Sean Ω un abierto y $a \in \Omega$. Si f es holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ y se tiene que $\lim_{z\to a}(z-a)\, f(z) = 0$, entonces también existe el límite de f cuando z tiende al punto a y, si se define*

$$f(a) := \lim_{z\to a} f(z),$$

entonces f es holomorfa en Ω.

Demostración. Sea D un disco tal que $a \in D$ y $\overline{D} \subset \Omega$. La función

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

es holomorfa en D, como consecuencia del Teorema 1.3.12.

Sea $z \in D \setminus \{a\}$ fijo. La función definida por

$$F(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w-z}$$

es holomorfa en $\Omega \setminus \{a, z\}$ y verifica trivialmente que $\lim_{w\to a}(w-a)\, F(w) = 0$ y $\lim_{w\to z}(w-z)\, F(w) = 0$. El Teorema integral de Cauchy con singularidades (Teorema 1.3.6) nos dice que

$$\int_{\partial D} F(w)\, dw = 0\,.$$

Se sigue que

$$\int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z) \int_{\partial D} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i\, f(z)\,.$$

De ello se sigue que

$$f(z) = g(z)\,, \qquad \text{para todo } \; z \in D \setminus \{a\}\,.$$

Si definimos $f(a) := g(a)$, tendremos que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D$ y, por tanto, que f es holomorfa en Ω. □

Obsérvese que acabamos de demostrar que el Teorema integral de Cauchy con singularidades (Teorema 1.3.6) realmente "no dice nada nuevo" con respecto al Teorema integral de Cauchy (Teorema 1.3.5). Sin embargo, como hemos visto, es un resultado crucial en la prueba del Teorema 1.3.19.

Definición 1.3.20. *Un punto a tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ y $\lim_{z\to a}(z-a)\,f(z) = 0$, se llama una* singularidad evitable *de f.*

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 1.3.19.

Teorema 1.3.21 (Teorema de la singularidad evitable)**.** *Sean Ω un abierto y $a \in \Omega$. Si f es holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ y f está acotada en un entorno de a, entonces también existe el límite de f cuando z tiende al punto a, y si se define*

$$f(a) := \lim_{z\to a} f(z)\,,$$

entonces f es holomorfa en Ω.

Ya hemos visto que las funciones analíticas son holomorfas. El siguiente teorema, conocido como Teorema de Taylor infinito, nos dice que el recíproco también es cierto. Es decir, responde a la pregunta ¿qué funciones son analíticas?; además, también responde a la pregunta ¿cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias en un punto concreto?, sin necesidad de conocer los coeficientes de la serie.

Teorema 1.3.22. *Una función f es holomorfa en el abierto Ω si y sólo si f es analítica en Ω. Además, si $a \in \Omega$ y r es la mínima distancia de $\partial\Omega$ al punto a (es decir, $r = d(a, \partial\Omega)$), se verifica que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n, \qquad \textit{para todo } \; z \in D(a,r)\,.$$

Este resultado permite deducir algunas importantes consecuencias:

Corolario 1.3.23. *Si f es holomorfa en el dominio Ω, y existe un punto $a \in \Omega$ tal que*

$$0 = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = \cdots\,, \qquad \textit{para todo} \;\; n \geq 1\,,$$

entonces f es constante en Ω.

Corolario 1.3.24. *Si f es holomorfa en el dominio Ω y existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en Ω con todos los a_n distintos, y tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega\,, \quad y \quad f(a_n) = 0\,, \qquad n \geq 1\,,$$

entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

Teorema 1.3.25 (Principio de prolongación analítica)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos distintos de Ω tales que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \Omega\,.$$

Si f y g son funciones holomorfas en Ω tales que

$$f(a_n) = g(a_n)\,, \qquad \textit{para todo} \;\; n \geq 1\,,$$

entonces $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Como consecuencia, si Ω es un dominio, tenemos que

$$f|_{\Omega\cap\mathbb{R}} = g|_{\Omega\cap\mathbb{R}} \quad \Longrightarrow \quad f = g \quad \text{en } \Omega\,.$$

Por tanto, dada una función real definida en $\Omega\cap\mathbb{R}$, existe a lo sumo una forma de extender de forma analítica la función al dominio complejo Ω.

En particular, esto prueba que sólo existe una forma de extender las funciones elementales al plano complejo como funciones holomorfas, que es la que ya conocemos.

Teorema 1.3.26 (Ceros de funciones holomorfas)**.** *Si f es holomorfa y no constante en Ω, y $a \in \Omega$ es un cero de f (es decir, $f(a) = 0$), entonces existe un mínimo entero $k > 0$ tal que*

$$f(z) = (z-a)^k g(z)\,,$$

donde g es holomorfa en Ω y $g(a) \neq 0$.

Definición 1.3.27. *En las condiciones del teorema anterior, se dice que f tiene en a un* cero de orden k.

Corolario 1.3.28. *Si f es holomorfa en Ω y no es idénticamente cero, entonces f sólo puede tener un número finito de ceros en cada conjunto compacto contenido en Ω.*

Corolario 1.3.29 (Regla de Bernouilli-l'Hôpital)**.** *Sean f y g dos funciones holomorfas en z_0, tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Entonces se verifica que*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} .$$

Teorema 1.3.30 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Si f es holomorfa en el dominio Ω y no es constante, entonces f es una aplicación abierta, es decir, la imagen por f de todo abierto contenido en Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. En particular, $f(\Omega)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$.*

Teorema 1.3.31 (Teorema de la aplicación inversa)**.** *Si f es holomorfa en el abierto Ω y $z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$, entonces existen entornos U de z_0 y V de $f(z_0)$ tales que $f^{-1} : V \longrightarrow U$ es una función holomorfa y*

$$\big(f^{-1}\big)'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} ,$$

para todo $z \in U$.

También puede deducirse el siguiente resultado.

Teorema 1.3.32. *Si $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es una función holomorfa y biyectiva, entonces su inversa $f^{-1} : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$ es una función holomorfa. Además, f' y $(f^{-1})'$ no se anulan en Ω_1 y Ω_2, respectivamente.*

Como consecuencia de los Teoremas 1.1.11 y 1.3.32 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.3.33. *Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una aplicación conforme. Entonces f^{-1} también es una aplicación conforme.*

Teorema 1.3.34 (Principio del módulo máximo)**.** *Si f es holomorfa en el dominio Ω y no es constante, entonces $|f|$ no alcanza valor máximo en el dominio Ω.*

Corolario 1.3.35. *Si f es holomorfa en el dominio acotado Ω y es continua en $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, entonces el valor máximo de $|f|$ en $\overline{\Omega}$ se alcanza en $\partial\Omega$.*

Teorema 1.3.36 (Teorema 1/4 de Koebe)**.** *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa e inyectiva. Si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, entonces $f(\mathbb{D})$ contiene el disco abierto de centro 0 y radio $1/4$.*

El siguiente resultado se deduce directamente del Teorema 1/4 de Koebe.

Corolario 1.3.37. *Si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa e inyectiva, entonces $f(\mathbb{D})$ contiene el disco abierto de centro $f(0)$ y radio $|f'(0)|/4$.*

1.3.1 Ejercicios

Ejercicio 1.3.1.1. *Calcula la integral $\int_\gamma \overline{z}\, dz$, donde $\gamma(t) = t + 2ti$ para $t \in [0, 1]$.*

Ejercicio 1.3.1.2. *Calcula directamente (sin usar la definición de índice) la integral $\int_{|z|=1} dz/z$.*

Ejercicio 1.3.1.3. *Prueba que la definición de $\int_\gamma f(z)\, dz$ no depende de la parametrización elegida de la curva γ, siempre que consideremos parametrizaciones con la misma orientación.*

Indicación: *Toda reparametrización de $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ que preserva la orientación puede escribirse de la forma $\gamma(t(s))$, donde $t = t(s) : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ es continua, C^1 a trozos y creciente.*

Ejercicio 1.3.1.4. *Prueba que un cambio de orientación en la curva a lo largo de la cual se integra, produce un cambio de signo en la integral.*

Indicación: *Una parametrización del arco opuesto a $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es el arco $\tilde{\gamma} : [-b, -a] \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$.*

Ejercicio 1.3.1.5. *Prueba que la integral de f respecto a la longitud de arco en una curva no sólo es independiente respecto a los cambios de parametrización, sino también de orientación.*

Indicación: *Toda reparametrización de $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ (que preserve la orientación o no) puede escribirse de la forma $\gamma(t(s))$, donde $t =$*

$t(s) : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es continua, C^1 a trozos y monótona (creciente o decreciente).

Ejercicio 1.3.1.6. *Prueba el Teorema 1.3.1.*

Ejercicio 1.3.1.7. *Prueba que se tiene $\int_\gamma e^{z^2} dz = 0$, para toda curva cerrada γ.*

Ejercicio 1.3.1.8. *Calcula $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = 0$, para toda curva cerrada γ que no pase por el origen.*

Ejercicio 1.3.1.9. *Prueba directamente (sin usar la definición de índice) que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$, si γ es cualquier curva cerrada que rodee al punto a (sin pasar por a) en sentido positivo (en contra de las agujas del reloj) y que corte a la recta $\Re z = \Re a$ sólo 2 veces.*

Indicación: *Considera las funciones $F_1(z) = \log(z-a) = \log|z-a| + i\, arg\,(z-a)$ en $\{\Re z \ge a\} \setminus \{a\}$, donde elegimos los argumentos de forma que $arg\,(z-a) \in [-\pi/2, \pi/2]$, y $F_2(z) = \log(z-a) = \log|z-a| + i\, arg\,(z-a)$ en $\{\Re z \le a\} \setminus \{a\}$, pero eligiendo los argumentos de forma que $arg\,(z-a) \in [\pi/2, 3\pi/2]$.*

Ejercicio 1.3.1.10. *Calcula directamente (sin usar la definición de índice) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ si γ es cualquier curva cerrada que no rodea el punto a, y existe una semirrecta que comienza en a y no corta a γ.*

Ejercicio 1.3.1.11. *Prueba el Teorema integral de Cauchy (Teorema 1.3.5), bajo la hipótesis adicional de que f' es continua, usando la fórmula de Green.*

Ejercicio 1.3.1.12. *Prueba el Teorema 1.3.13.*

Indicación: *Usa el Corolario 1.3.10 y el Teorema 1.3.12.*

Ejercicio 1.3.1.13. *Prueba el Teorema de fundamental del Algebra (Teorema 1.3.17).*

Indicación: *Basta demostrar que cualquier polinomio no constante $P(z)$ tiene una raíz. Asume que esto no es cierto y aplica a la función $1/P$ el Teorema de Liouville (Teorema 1.3.16).*

Ejercicio 1.3.1.14. *Sea f una función entera. Utilizando el Teorema de Liouville (Teorema 1.3.16) demuestra que:*

a) Si $|f| \geq 1$, entonces f es constante.

b) Si $\Re f \geq 0$, entonces f es constante.

c) Si $\Im f \leq 1$, entonces f es constante.

d) Si $\Re f$ no tiene ceros, entonces f es constante.

e) Si existe una recta que no corta a la imagen de f, entonces f es constante.

Ejercicio 1.3.1.15. *Si $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ es integrable y verifica que $f(x)\, e^{-ax}$ está acotada cuando $x \geq M$ para algunos $a, M \in \mathbb{R}$, entonces la* transformada de Laplace de f *se define en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > a\}$ como*

$$Lf(z) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-zx}\, dx\,.$$

Prueba que $Lf(z)$ es holomorfa en dicho semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > a\}$.

Ejercicio 1.3.1.16. *Prueba que $z = 0$ es una singularidad evitable de la función $f(z) = (e^z - 1)/z$.*

Ejercicio 1.3.1.17. *Definimos $\log z := \log|z| + i \arg z$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Prueba que $\lim_{z \to 0} z \log z = 0$. ¿Es $z = 0$ una singularidad evitable de la función $f(z) = \log z$?*

Ejercicio 1.3.1.18. *Prueba que*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ y que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \geq 0$.
Explica la siguiente aparente contradicción con el Teorema 1.3.22: la serie de Taylor en $x = 0$ de $f(x)$ es idénticamente 0, pero f no es igual a cero.

Ejercicio 1.3.1.19. *Prueba el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.3.25), usando el Corolario 1.3.24.*

Ejercicio 1.3.1.20. *Prueba el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.3.25), usando el Corolario 1.3.23.*

Ejercicio 1.3.1.21. *Prueba la regla de Bernouilli-l'Hôpital (Corolario 1.3.29), usando el Teorema 1.3.26.*

Ejercicio 1.3.1.22. *Prueba el Corolario 1.3.35, usando el Teorema 1.3.34.*

Ejercicio 1.3.1.23. *Prueba que la conclusión del Principio del módulo máximo (Teorema 1.3.34) no se verifica si sustituimos la hipótesis Ω abierto conexo por Ω abierto no conexo.*

Ejercicio 1.3.1.24. *Prueba que la conclusión del Corolario 1.3.35 no es cierta si eliminamos la hipótesis de que Ω esté acotado.*

Ejercicio 1.3.1.25. *Prueba que la conclusión del Corolario 1.3.35 también es cierta si Ω es un abierto acotado con un número finito de componentes conexas.*

Ejercicio 1.3.1.26. *Prueba que la conclusión del Corolario 1.3.35 no es cierta si Ω es un abierto acotado con un número infinito de componentes conexas.*

Ejercicio 1.3.1.27. *Prueba el Corolario 1.3.37, usando el Teorema 1.3.36.*

1.4 Singularidades aisladas

Definición 1.4.1. *Un punto $a \in \Omega$ es una* singularidad aislada *de f, si f es holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$.*

Si a es una singularidad aislada de f, ocurre necesariamente una de las tres siguientes posibilidades:

(1) Que a sea una *singularidad evitable* de f. Esto es equivalente a todas las afirmaciones siguientes:
a) f está acotada en $D(a,r) \setminus \{a\}$ para algún $r > 0$,
b) existe el $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$,
c) $\lim_{z\to a}(z-a)\, f(z) = 0$.

Ya hemos visto que el Teorema 1.3.19 da una de las implicaciones, pero todas ellas son ciertas.

(2) Que a sea un *polo* de f. Por definición, ésto ocurre si

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty \,.$$

Proposición 1.4.2. *Sean Ω un abierto, $a \in \Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Entonces, a es un polo de f si y sólo si existe un número entero $k \geq 1$ (k se denomina el* orden del polo *de f en a) tal que*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k} \,,$$

con g holomorfa en Ω, y $g(a) \neq 0$.

(3) Que a sea una *singularidad esencial* de f. Por definición esto ocurre si no ocurre ni (1) ni (2).

Teorema 1.4.3 (Teorema de Casorati-Weierstrass)**.** *Sean Ω un abierto, $a \in \Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Si a es una singularidad esencial de f, entonces para todo $r > 0$ con $D(a,r) \subseteq \Omega$, el conjunto $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ es un abierto denso en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Para cada $r > 0$ fijo tal que $D(a,r) \subseteq \Omega$ el Teorema de la aplicación abierta (Teorema 1.3.30) asegura que $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ es un conjunto abierto.

Para ver que $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ es denso en $\mathbb{C}$, razonaremos por contradicción. Supongamos que $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ no es denso en $\mathbb{C}$ para todo $r > 0$ con $D(a,r) \subseteq \Omega$; por tanto, existen $r > 0$ y un disco $D = D(w,R)$ con $f(D(a,r) \setminus \{a\}) \cap D(w,R) = \varnothing$. Entonces $|f(z) - w| \geq R$ para todo $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$. Consecuentemente, la función

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$$

es holomorfa en $D(a,r) \setminus \{a\}$ y $|g(z)| \leq 1/R$ para todo $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$. El Teorema de la singularidad evitable (Teorema 1.3.21) garantiza que $g(z)$ tiene en a una singularidad evitable. Por tanto, $f(z) = w + 1/g(z)$ tiene en a una singularidad evitable o un polo, que es la contradicción que estábamos buscando. $\square$

En particular, el Teorema de Casorati-Weierstrass implica que para todo número complejo w existe una sucesión $a_n \to a$ con $f(a_n) \to w$.

Como consecuencia del famoso Teorema grande de Picard se obtiene algo mucho más fuerte (ver Teorema 2.6.11): que a es una singularidad esencial de f si y sólo si para todo $r > 0$ con $D(a,r) \subseteq \Omega$, el conjunto $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ es todo $\mathbb{C}$ salvo, a lo sumo, un punto.

El ejemplo más natural para ilustrar este resultado es la función $f(z) = e^{1/z}$, que tiene una singularidad esencial en 0 y que verifica $f(D(0,r) \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Las singularidades aisladas también pueden clasificarse en términos de series de potencias. Si a es una singularidad evitable de f, entonces f admite un desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

en un cierto disco $D(a,r)$.

Si f tiene en a un polo de orden k, entonces f admite un desarrollo de Laurent del tipo

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

con $c_{-k} \neq 0$, en un disco "punteado" $D(a,r) \setminus \{a\}$.

Por último, si f tiene en a una singularidad esencial, entonces f admite un desarrollo de Laurent del tipo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

con infinitos c_{-n} ($n \in \mathbb{N}$) distintos de cero.

Teorema 1.4.4 (Teorema de Laurent)**.** *Si f es holomorfa en el anillo $\Omega = \{z : r < |z-a| < R\}$ $(0 \le r < R \le \infty)$, entonces existe una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,, \qquad \forall\, z \in \Omega\,.$$

La serie converge absoluta y uniformemente en cualquier conjunto compacto contenido en Ω. Además, si Ω es el mayor anillo centrado en a en el que f es holomorfa, entonces se tiene que

$$r = \limsup_{n\to\infty} |c_{-n}|^{1/n}, \qquad \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}.$$

Definición 1.4.5. *Decimos que f es* meromorfa *en Ω si sólo tiene singularidades aisladas en Ω, y éstas son o bien evitables, o bien son polos.*

Teorema 1.4.6. *Una función f es meromorfa en el abierto Ω si y sólo si $f = g/h$ con g, h funciones holomorfas en Ω y h no es idénticamente nula.*

El Teorema 1.4.6 y el Corolario 1.3.28 implican directamente el siguiente resultado.

Corolario 1.4.7. *Si f es meromorfa en Ω y no es idénticamente cero, entonces f sólo puede tener un número finito de ceros y de polos en cada conjunto compacto contenido en Ω.*

1.4.1 Ejercicios

Ejercicio 1.4.1.1. *Prueba la regla de Bernouilli-l'Hôpital (Corolario 1.3.29) si f y g tienen en z_0 un polo en vez de un cero.*

Ejercicio 1.4.1.2. *Prueba que el origen es una singularidad esencial de la función $f(z) = e^{1/z}$.*

Ejercicio 1.4.1.3. *Desarrolla en serie de Laurent $f(z) = 1/(z^2-4z+3)$, en potencias de z en el dominio $\{|z| < 1\}$.*

Ejercicio 1.4.1.4. *Desarrolla en serie de Laurent $f(z) = 1/(z^2-4z+3)$, en potencias de z en el dominio $\{1 < |z| < 3\}$.*

Ejercicio 1.4.1.5. *Desarrolla en serie de Laurent $f(z) = 1/(z^2-4z+3)$, en potencias de z en el dominio $\{|z| > 3\}$.*

1.5 El Teorema de los residuos y sus aplicaciones

Definición 1.5.1. *Si a es una singularidad aislada de f, el* residuo *de f en $z = a$ es el coeficiente c_{-1} de $(z-a)^{-1}$ en su desarrollo en serie de Laurent en $z = a$. Se escribe* $\operatorname{Res}(f, a) = c_{-1}$.

Si f tiene en a un polo de orden 1 (es decir, un polo simple), entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,,$$

y si f tiene en a un polo de orden k, entonces

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big((z-a)^k f(z)\Big).$$

Si f tiene en a una singularidad esencial, NO existe una fórmula sencilla para el residuo de f en a; la forma de hallar el residuo es encontrar el coeficiente c_{-1} de la potencia $(z-a)^{-1}$ del desarrollo en serie Laurent de f (por supuesto, este método también es válido si a es un polo de f).

La siguiente proposición es un criterio tan sencillo como útil en el cálculo de residuos.

Proposición 1.5.2. *Si f tiene una singularidad aislada en a y*

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = l$$

existe y es distinto de 0 y de ∞, entonces f tiene en a un polo de orden 1 y su residuo es l.

Teorema 1.5.3 (Teorema de los residuos)**.** *Sean Ω un abierto simplemente conexo, f una función holomorfa en Ω salvo en un conjunto $\{a_j\}$ de singularidades aisladas, y $\gamma \subset \Omega$ una curva cerrada que no pasa por ningún a_j. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_j \operatorname{Res}(f, a_j)\, n(\gamma, a_j)\,.$$

Corolario 1.5.4. *Si $z_1, \ldots, z_n$ son números complejos distintos y $P(z)$ es un polinomio de grado menor que n, se tiene la descomposición en fracciones simples*

$$Q(z) = \frac{P(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)} = \frac{\operatorname{Res}(Q,z_1)}{z-z_1} + \cdots + \frac{\operatorname{Res}(Q,z_n)}{z-z_n}\,,$$

con $\operatorname{Res}(Q,z_j) = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)Q(z)$.

Proposición 1.5.5.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta &= \int_0^{2\pi} R\Big(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\,,\,\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\Big)\,\frac{ie^{i\theta}d\theta}{ie^{i\theta}}\\ &= \int_{|z|=1} R\Big(\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)\,,\,\frac{1}{2i}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)\Big)\,\frac{dz}{iz}\,.\end{aligned}$$

Las siguientes proposiciones también pueden deducirse del Teorema de los residuos (Teorema 1.5.3).

Proposición 1.5.6. *Sea f una función que es analítica en un dominio que contenga a la clausura del semiplano superior $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, salvo en un número finito de singularidades, que pueden estar sobre el eje real, pero que, en este caso, deben ser polos simples.*

(1) *Si* $\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$, *tenemos que*

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 2\pi i \sum_{a\in Sing(f),\Im a>0} \operatorname{Res}(f,a) \;+\; \pi i \sum_{a\in Sing(f),\Im a=0} \operatorname{Res}(f,a)\,.$$

(2) *Si* $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, *y* $c>0$, *entonces*

$$\begin{aligned}v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{icx}\,dx \;&=\; 2\pi i \sum_{a\in Sing(f),\Im a>0} \operatorname{Res}\big(f(z)\,e^{icz},a\big)\\ &\quad+\; \pi i \sum_{a\in Sing(f),\Im a=0} \operatorname{Res}\big(f(z)\,e^{icz},a\big)\,.\end{aligned}$$

(3) *Si* $\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$, $k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{C}$, $c_1, \ldots, c_n > 0$, *y* $g(z) = k_0 + k_1\,e^{ic_1 z} + \cdots + k_n\,e^{ic_n z}$, *tenemos que*

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx \;=\; 2\pi i \sum_{a\in Sing(f),\Im a>0} \operatorname{Res}(fg,a) \;+\; \pi i \sum_{a\in Sing(f),\Im a=0} \operatorname{Res}(fg,a)\,.$$

Si f tiene polos de orden mayor que 1 en el eje real, pero estos polos son singularidades evitables o polos simples para fg, entonces la conclusión de (3) sigue siendo cierta.

Si $\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0$ y f no tiene polos en el eje real, entonces las integrales de (1), (2) y (3) convergen y, por tanto, coinciden con sus valores principales.

Observación 1.5.7. *1. Si $f(x)$ es una función con valores reales, entonces se tiene que*

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{icx}\, dx = \overline{v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-icx}\, dx}\,.$$

Por tanto, si $c < 0$ se tiene $-c > 0$ y entonces se puede usar la fórmula de (2) en la proposición anterior.

2. Si $k_0 = 0$, la conclusión de (3) sigue siendo válida si se sustituye la condición $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ por la hipótesis más débil $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Conviene recordar aquí que si los polos simples de f son $x_1 < \cdots < x_n$, entonces el valor principal de Cauchy de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ se define como

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty, \varepsilon\to 0^+} \Big(\int_{-R}^{x_1-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\, dx \\ + \cdots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{R} f(x)\, dx \Big)\,, \end{aligned}$$

y que coincide con la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ si f es integrable.

También es interesante destacar que si alguno de los polos del integrando en el eje real no es simple, entonces el valor principal diverge "casi siempre". Por tanto, la hipótesis de que los polos del eje real sean simples es una hipótesis muy poco restrictiva.

Proposición 1.5.8. *Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, y sea f una función analítica en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de singularidades, ninguna de las cuales está sobre el semieje real positivo $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, y tal que*

$$\lim_{z\to 0} z^{\alpha+1} f(z) = 0\,, \qquad \lim_{z\to\infty} z^{\alpha+1} f(z) = 0\,.$$

Entonces, $\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx$ *converge, y*

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} \sum_{a\in Sing(f)} \operatorname{Res}\left(z^\alpha f(z),\, a\right),$$

donde tomamos $[0,2\pi)$ *como intervalo de argumentos principales.*

La siguiente proposición permite integrar en $(0,\infty)$ funciones bastante generales.

Proposición 1.5.9. *Sea* f *una función que es analítica en* $\mathbb{C}$ *salvo a lo sumo en un número finito de puntos, ninguno de los cuales está en el semieje real positivo* $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$*, y tal que* $\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$*. Entonces:*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = -\sum_{a\in Sing(f)} \operatorname{Res}\left(f(z)\log z, a\right),$$

donde $\log z$ *es la rama del logaritmo que se obtiene al tomar* $[0,2\pi)$ *como intervalo de argumentos principales.*

Finalmente, la siguiente proposición permite sumar muchas series.

Proposición 1.5.10. *Sea* f *una función analítica en* $\mathbb{C}$ *salvo a lo sumo en un número finito de singularidades y tal que* $\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = 0$*. Entonces,*

(1) $$\sum_{n=-\infty,\, n\notin Sing(f)}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{a\in Sing(f)} \operatorname{Res}\left(f(z)\,\operatorname{cotan}\pi z\,,\, a\right).$$

(2) $$\sum_{n=-\infty,\, n\notin Sing(f)}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{a\in Sing(f)} \operatorname{Res}\left(f(z)\,\operatorname{cosec}\pi z\,,\, a\right).$$

Veamos a continuación una última consecuencia del Teorema de los residuos, conocida como Principio del argumento, que tiene numerosas aplicaciones. Para poder demostrarlo necesitamos un resultado previo.

Lema 1.5.11. *Sea* f *una función meromorfa en un dominio* Ω*.*
a) Si f *tiene en* $a\in\Omega$ *un cero de orden* k*, la función*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{k}{z-a}$$

es holomorfa en un entorno de a.

b) Si f tiene en $a \in \Omega$ un polo de orden k, la función

$$\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{k}{z-a}$$

es holomorfa en un entorno de a.

Demostración. Si f tiene en $a \in \Omega$ un cero de orden k, el Teorema 1.3.26 da que $f(z) = (z-a)^k g(z)$, donde g es holomorfa en Ω y $g(a) \neq 0$. Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{k}{z-a} = \frac{k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z)}{(z-a)^k g(z)} - \frac{k}{z-a} = \frac{g'(z)}{g(z)}\,,$$

que es holomorfa en un entorno de a, ya que $g(a) \neq 0$, por el Teorema de la singularidad evitable (Teorema 1.3.21).

Si f tiene en $a \in \Omega$ un polo de orden k, la Proposición 1.4.2 da que $f(z) = g(z)/(z-a)^k$, con g holomorfa en Ω y $g(a) \neq 0$. Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{k}{z-a} = \frac{\frac{(z-a)^k g'(z) - k(z-a)^{k-1}g(z)}{(z-a)^{2k}}}{\frac{g(z)}{(z-a)^k}} + \frac{k}{z-a} = \frac{g'(z)}{g(z)}\,,$$

que es holomorfa en un entorno de a, ya que $g(a) \neq 0$, por el Teorema de la singularidad evitable (Teorema 1.3.21). □

Teorema 1.5.12 (Principio del argumento, primera versión). *Sea f una función meromorfa en un dominio simplemente conexo Ω cuyos ceros son $a_1, a_2, \dots, a_r$ y cuyos polos son $b_1, b_2, \dots, b_s$ (en la lista están los ceros y los polos contados según su multiplicidad, es decir, si un cero o un polo es de orden k, aparece k veces en la lista). Si γ es una curva cerrada contenida en Ω que no pasa por ningún cero ni ningún polo de f, entonces se verifica*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^r n(\gamma, a_j) - \sum_{k=1}^s n(\gamma, b_k)\,.$$

Demostración. Para establecer la primera igualdad, observemos que si parametrizamos γ como $\gamma : [a,b] \to \Omega$, entonces $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una parametrización de $f(\gamma)$. Por tanto, tomando $w = f(\gamma(t))$ y $z = \gamma(t)$, se tiene

$$\int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\, dt = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz\,.$$

Para probar la segunda igualdad, observemos en primer lugar que el Lema 1.5.11 garantiza que la siguiente función es holomorfa en Ω

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{z-a_j} + \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{z-b_k}\,,$$

puesto que si a_j es un cero de orden m entonces aparece m veces en la suma (y lo mismo es cierto para los polos); además, la función racional que estamos sumando a f'/f no contiene ninguna singularidad adicional (además de los a_j y los b_k). Por tanto, el Teorema integral de Cauchy (Teorema 1.3.5) garantiza que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \sum_{j=1}^{r} \int_\gamma \frac{dz}{z-a_j} + \sum_{k=1}^{s} \int_\gamma \frac{dz}{z-b_k} = 0\,,$$

lo cual implica inmediatamente la conclusión. □

Se puede deducir inmediatamente el siguiente corolario.

Teorema 1.5.13 (Principio del argumento, segunda versión)**.** *Si γ es una curva de Jordan que encierra un dominio simplemente conexo D y f es una función meromorfa en un entorno de $\overline{D}$, que no tiene ningún cero ni ningún polo en γ, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

es igual al número de ceros de f en D (contando su multiplicidad) menos el número de polos de f en D (contando su multiplicidad).

1.5.1 Ejercicios

Ejercicio 1.5.1.1. *Descompón en fracciones simples* $1/(z^3-z)$*, usando el Corolario 1.5.4.*

Ejercicio 1.5.1.2. *Descompón en fracciones simples* $(z+1)/(z^3+z^2)$*, usando el Corolario 1.5.4.*

Ejercicio 1.5.1.3. *Prueba el Corolario 1.5.4.*

Ejercicio 1.5.1.4. *Halla el valor principal de la integral*

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{icx}}{x}\, dx\,,$$

para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*.*

Ejercicio 1.5.1.5. *Halla la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{icx}}{x^2+1}\, dx\,,$$

para todo $c \in \mathbb{R}$*.*

Ejercicio 1.5.1.6. *Prueba que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$

Ejercicio 1.5.1.7. *Halla* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\,.$

Ejercicio 1.5.1.8. *Prueba que si* f *tiene en* a *un polo de orden* 1 *(es decir, un polo simple), entonces*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a} (z-a) f(z)\,.$$

Ejercicio 1.5.1.9. *Prueba que si* f *tiene en* a *un polo de orden* k*, entonces*

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big((z-a)^k f(z)\Big).$$

Capítulo 2

Teoría geométrica de funciones.

2.1 Transformaciones de Möbius.

Las *transformaciones de Möbius* se definen como las funciones que pueden escribirse de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}\,,\ ad - bc \neq 0\,.$$

Tienen la propiedad de transformar discos o semiplanos en discos o semiplanos. Esto en realidad es una consecuencia del siguiente resultado:

Teorema 2.1.1. *Toda transformación de Möbius T es una biyección de la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí misma. Si llamamos circunferencia generalizada a un elemento del conjunto de circunferencias o rectas del plano, se tiene que T transforma circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas. Mas aún, si C es una circunferencia generalizada, T transforma cada uno de los dos dominios complementarios en que C divide a la esfera de Riemann en uno de los dominios complementarios de $T(C)$.*

La composición de dos transformaciones de Möbius también es una transformación de Möbius. De hecho, el conjunto de transformaciones de Möbius con la operación de composición tiene estructura de grupo.

Proposición 2.1.2. *Dados $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos y $z_1', z_2', z_3' \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos, existe una única transformación de Möbius tal que $T(z_1) = z_1'$, $T(z_2) = z_2'$ y $T(z_3) = z_3'$.*

Proposición 2.1.3. *Toda transformación de Möbius de la forma*

$$T(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}\,,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$, aplica el disco unidad en sí mismo.

Demostración. Sea $T(z)$ como en el enunciado de la proposición. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\big|T(1)\big| &= \left|\frac{1-a}{1-\overline{a}}\right| = 1\,,\\
\big|T(-1)\big| &= \left|\frac{-1-a}{1+\overline{a}}\right| = \left|\frac{1+a}{1+\overline{a}}\right| = 1\,,\\
\big|T(i)\big| &= \left|\frac{i-a}{1-i\overline{a}}\right| = \left|\frac{1+ia}{1-i\overline{a}}\right| = \left|\frac{1+ia}{1+\overline{ia}}\right| = 1\,.
\end{aligned}$$

Como la imagen mediante T de tres puntos $\{1, -1, i\}$ en la circunferencia unidad $\partial\mathbb{D}$ también está en la circunferencia unidad y T es una transformación de Möbius, el Teorema 2.1.1 garantiza que $T(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$, y que se tiene, o bien $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ o bien $T(\mathbb{D}) = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Como $T(0) = -e^{i\alpha}a \in \mathbb{D}$ (ya que $|-e^{i\alpha}a| = |a| < 1$), podemos concluir que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. □

Lema 2.1.4 (Lema de Schwarz, primera versión)**.** *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa con $f(0) = 0$. Entonces $|f(z)| \le |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \le 1$. Además, si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ó $|f'(0)| = 1$, entonces f es una rotación $f(z) = e^{i\alpha}z$, donde α es una constante real.*

Demostración. Sea $g(z) := f(z)/z$. Como $f(0) = 0$, el Teorema 1.3.19 garantiza que g es holomorfa en $\mathbb{D}$ si definimos

$$g(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0)\,.$$

Sea $M(r) := \max\{|g(z)| : |z| \leq r\}$. Como consecuencia del Principio del módulo máximo (ver Corolario 1.3.35), se tiene

$$M(r) = \max\left\{\frac{|f(z)|}{|z|} : |z| = r\right\} = \frac{1}{r} \max\left\{|f(z)| : |z| = r\right\} \leq \frac{1}{r}\,,$$

ya que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces $|g(z)| \leq 1/r$ si $|z| \leq r$ y, haciendo tender r a 1, concluimos que $|g(z)| \leq 1$ si $|z| < 1$. Por tanto, $|f(z)| \leq |z|$ si $|z| < 1$ y $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Si $|f(z_0)| = |z_0|$ ó $|f'(0)| = 1$, entonces $|g(z_0)| = 1$ ó $|g(0)| = 1$; por tanto, $|g|$ alcanza el máximo en $\mathbb{D}$ en un punto interior y, como consecuencia del Principio del módulo máximo (Teorema 1.3.34) g es constante (de módulo 1, ya que $|g(z_0)| = 1$ ó $|g(0)| = 1$): $g(z) = e^{i\alpha} = f(z)/z$. Por lo tanto, $f(z) = e^{i\alpha} z$. □

Obsérvese que el Lema de Schwarz nos permite dar una cota superior para el crecimiento de todas las funciones holomorfas que verifican las hipótesis de dicho lema. Este va a ser el primero de una fructífera colección de resultados que acotan el crecimiento de las funciones holomorfas.

Además, el Lema de Schwarz va a permitir probar que toda transformación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ en sí mismo tiene que ser de Möbius (ver Teorema 2.1.6).

Comenzaremos probando una versión más "débil" de este resultado.

Proposición 2.1.5. *Toda transformación conforme del disco unidad sobre sí mismo y que también aplica el origen en sí mismo, es una rotación.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una aplicación conforme con $f(0) = 0$. El Lema de Schwarz (Lema 2.1.4) garantiza que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Dado que, por el Teorema 1.3.33, $f^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ también es una aplicación conforme con $f^{-1}(0) = 0$, el Lema de Schwarz implica que $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ para todo $w \in \mathbb{D}$, es decir, que $|z| \leq |f(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, $|f(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y el Lema de Schwarz permite concluir que f es una rotación. □

Teorema 2.1.6. *Toda transformación conforme del disco unidad sobre sí mismo es una transformación de Möbius de la forma*

$$T(z) = e^{i\alpha}\,\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\,,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$.

Demostración. Sean $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una aplicación conforme y

$$S(w) := \frac{w + f^{-1}(0)}{1 + \overline{f^{-1}(0)}w} \,.$$

Como $-f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, por la Proposición 2.1.3, S aplica $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ y, por tanto, $f \circ S$ también aplica $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$; además, $(f \circ S)(0) = f(f^{-1}(0)) = 0$. Por tanto, la Proposición 2.1.5 implica que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ con $f(S(w)) = e^{i\alpha}w$, y se tiene

$$f(z) = e^{i\alpha} S^{-1}(z) = e^{i\alpha} \, \frac{z - f^{-1}(0)}{1 - \overline{f^{-1}(0)}z} \,,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$. □

También puede probarse un resultado similar válido para el semiplano superior.

Teorema 2.1.7. *Toda transformación conforme que aplica el semiplano superior $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ en sí mismo es de la forma*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \,,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc > 0$.

2.1.1 Ejercicios

Ejercicio 2.1.1.1. *Prueba que la transformación*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \,, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C} \,,$$

aplica biyectivamente la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en sí misma si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

Ejercicio 2.1.1.2. *Prueba que la composición de dos transformaciones de Möbius también es una transformación de Möbius.*

Ejercicio 2.1.1.3. *Prueba que el conjunto de transformaciones de Möbius con la operación de composición tiene estructura de grupo.*

Ejercicio 2.1.1.4. *Las siguientes transformaciones son evidentemente de Möbius:*

i) la rotación $R_\theta(z) = e^{i\theta} z$ *(con* $\theta \in \mathbb{R}$*),*
ii) la transformación $J(z) = 1/z$*,*
iii) la dilatación $S_r(z) = rz$ *(con* $r > 0$*),*
iv) la traslación $T_t(z) = z + t$ *(con* $t \in \mathbb{C}$*).*

Prueba que toda transformación de Möbius es una composición de transformaciones de estas cuatro clases.

Indicación: *Si* $c = 0$ *esto es trivial; si* $c \neq 0$ *utiliza la identidad* $(az+b)/(cz+d) = a/c - (ad-bc)/(c(cz+d))$.

Ejercicio 2.1.1.5. *Prueba que toda transformación de Möbius aplica circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas.*

Indicación: *Usa el ejercicio anterior.*

Ejercicio 2.1.1.6. *Prueba que la aplicación identidad es la única transformación de Möbius* T *que fija los puntos* $0, \infty, 1$*, es decir, que verifica* $T(0) = 0$*,* $T(\infty) = \infty$ *y* $T(1) = 1$*.*

Ejercicio 2.1.1.7. *Dados* $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ *distintos dos a dos, prueba que existe una única transformación de Möbius que verifica* $T(z_1) = 0$*,* $T(z_2) = \infty$ *y* $T(z_3) = 1$ *. Encuentra dicha transformación.*

Indicación: *Para probar la unicidad usa el ejercicio anterior.*

Ejercicio 2.1.1.8. *Prueba la Proposición 2.1.2.*

Indicación: *Usa el ejercicio anterior.*

Ejercicio 2.1.1.9. *Sea* M *la aplicación que a cada transformación de Möbius*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}\,, \qquad ad - bc = 1\,,$$

le hace corresponder la matriz 2×2

$$M(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Prueba que $M(T_2 \circ T_1) = M(T_2)M(T_1)$ *para todo par de transformaciones de Möbius* T_1, T_2*, es decir, que la aplicación* M *es un homomorfismo de grupos.*

Ejercicio 2.1.1.10. *Prueba que toda transformación de Möbius T tiene algún punto fijo, es decir, algún punto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $T(z) = z$.*

Ejercicio 2.1.1.11. *Encuentra una transformación de Möbius T que aplique el disco unidad sobre sí mismo y tal que $T(1/2) = 1/3$.*

Ejercicio 2.1.1.12. *Halla la imagen del disco unidad $\mathbb{D}$ mediante la transformación $T(z) = i(1 - z)/(1 + z)$.*

Ejercicio 2.1.1.13. *Prueba el Teorema 2.1.7.*

Indicación: *Usa el Teorema 2.1.6 y una transformación de Möbius que aplique el disco unidad en el semiplano superior.*

Ejercicio 2.1.1.14. *Prueba que $d_0(a, b) := \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}\,b}\right|$ es una distancia en $\mathbb{D}$ tal que $d_0(a, b) < 1$ para todo $a, b \in \mathbb{D}$. ¿Es $(\mathbb{D}, d_0)$ un espacio métrico completo?*

Ejercicio 2.1.1.15. *Dados $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{D}$, ¿bajo qué condiciones existe una transformación de Möbius T que aplique el disco unidad en sí mismo y tal que $T(z_1) = w_1$ y $T(z_2) = w_2$?*

Ejercicio 2.1.1.16. *Deduce del Lema de Schwarz que si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es una función holomorfa, entonces*

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)\overline{f(z_2)}}\right| \le \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z_2}}\right|, \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{D}\,,$$

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \le \frac{1}{1 - |z|^2}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}\,.$$

2.2 Preliminares geométricos.

Para introducir el concepto de variedad de forma (relativamente) intuitiva usaremos como ejemplo la superficie de la Tierra. Aunque la superficie de nuestro planeta sea (aproximadamente) una esfera, nuestros sentidos nos muestran que localmente dicha superficie puede describirse de forma aproximada como un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$; esto es lo que hacemos al considerar las cartas geográficas. Tendremos una buena descripción de toda la superficie terrestre si disponemos de una colección de cartas geográficas que "cubran" toda la superficie.

También sería deseable imponer una cierta condición de compatibilidad a las cartas: si una determinada región aparece simultáneamente en dos cartas, querremos que las dos representaciones de dicha región "se parezcan".

Conviene observar que necesitamos varias cartas geográficas porque no es posible describir toda la superficie terrestre mediante una sóla carta.

Esta es la idea intuitiva que subyace en el concepto de variedad: básicamente, una variedad n-dimensional es un espacio que localmente puede describirse como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ gracias a unas cartas que cubren todo el espacio y que verifican unas condiciones de compatibilidad. Vamos a detallar ahora con precisión estos conceptos.

Un espacio topológico M se dice *Hausdorff* si dados dos puntos diferentes cualesquiera $x, y \in M$ existen entornos U de x y V de y con $U \cap V = \varnothing$.

Dados dos espacios topológicos X, Y, una aplicación $\psi : X \longrightarrow Y$ se dice un *homeomorfismo* si es biyectiva, y ψ y ψ^{-1} son continuas.

Dados dos abiertos $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, una aplicación $\psi : V_1 \longrightarrow V_2$ se dice un *difeomorfismo* si es biyectiva, y ψ y ψ^{-1} son de clase C^∞ (o, equivalentemente, si ψ es biyectiva, ψ es de clase C^∞ y $Df(x)$ tiene determinante no nulo para todo $x \in V_1$).

Si M es un espacio topológico, un par (U, φ) se denomina *carta local* o *carta* de M si U es un abierto de M y φ es un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dos cartas locales (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) de M son *compatibles* si, o bien $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, o bien se verifican las dos condiciones siguientes:

(a) $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ (n es el mismo para ambas cartas),

(b) $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ es un difeomorfismo.

Un conjunto de cartas locales $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ de M es un *atlas* si $\cup_\alpha U_\alpha = M$ y todo par de cartas es compatible.

Una *variedad diferenciable n-dimensional* (o variedad n-dimensional) es un par (M, A), donde M es un espacio topológico conexo y Hausdorff, A es un atlas de M, y n es la dimensión de la imagen de cualquier carta local de A.

Una *superficie* es una variedad 2-dimensional.

Una *superficie de Riemann* es una superficie en la que los cambios de carta son funciones holomorfas, es decir, cada función $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ en la parte (b) de la definición de compatibilidad de cartas locales es una función holomorfa (identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$). Como las funciones holomorfas preservan la orientación, toda superficie de Riemann es orientable.

Más generalmente, una *variedad holomorfa* es una variedad en la que los cambios de carta son funciones holomorfas (de una o varias variables complejas).

Ejemplo: De forma evidente, cualquier abierto conexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad n-dimensional, considerando el atlas formado por una sola carta (U, φ), con $\varphi : U \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ la aplicación identidad.

Ejemplo: Toda superficie "suave" inmersa en $\mathbb{R}^3$ es una variedad bidimensional (una superficie) en el sentido de nuestra definición.

Ejemplo: Cualquier subconjunto abierto conexo M_0 de una variedad n-dimensional M es también una variedad n-dimensional, considerando el atlas formado por las cartas de la forma $(U \cap M_0, \varphi|_{U \cap M_0})$, para toda carta local (U, φ) de M.

Sería interesante motivar la introducción del concepto de variedad mostrando alguna de sus aplicaciones.

La primera aplicación (y la más importante para nosotros) se encuentra en el resto de este libro: vamos a ser capaces de probar importantes teoremas (cuyas demostraciones originales son extraordinariamente complicadas) de forma elegante y relativamente sencilla, gracias a la introducción de elementos geométricos (y también, en menor medida, topológicos y algebraicos).

Una segunda aplicación es el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales: al igual que el conjunto de soluciones de los sistemas diferenciales lineales tiene estructura de espacio vectorial o espacio afín (por eso son tan importantes los espacios vectoriales), el conjunto de soluciones de los sistemas diferenciales no lineales tiene usualmente estructura de variedad n-dimensional (tomando como n el número de incógnitas); las aplicaciones de las cartas locales asignan a cada solución su valor inicial, que es un punto de $\mathbb{R}^n$.

Probablemente la condición que resulta más extraña en la definición de variedad es requerir que el espacio sea Hausdorff: a primera vista da la impresión de que si el espacio es localmente como $\mathbb{R}^n$, entonces debe de ser necesariamente Hausdorff. Para probar que esto no es cierto, a continuación vamos a mostrar un ejemplo de espacio topológico que cumple todas las condiciones en la definición de superficie excepto la de ser Hausdorff:

Sea S el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por la unión del plano XY y el punto $(0,0,1)$, con la siguiente topología. Si z está en el plano XY, que denotaremos por Π, la base de entornos de z son los discos euclídeos $D(z,r)$ en Π, con $r>0$. La base de entornos de $(0,0,1)$ son $\{(0,0,1)\}\cup\{(B((0,0,0),r)\setminus\{(0,0,0)\})\cap\Pi\}$, con $r>0$. Está claro que no existen ningún par de entornos disjuntos de $(0,0,0)$ y $(0,0,1)$. Si no figurara la hipótesis Hausdorff en la definición de variedad, S sería una superficie de Riemann con las cartas locales siguientes: si $\varphi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ denota la proyección sobre las dos primeras coordenadas $\varphi(x,y,z):=(x,y)$, consideramos las cartas (Π,φ) y $(\{(0,0,1)\}\cup\Pi\setminus\{(0,0,0)\},\varphi)$. Obsérvese que en $\Pi\setminus\{(0,0,0)\}\approx\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (la intersección de los dominios de ambas cartas) se tiene que $\varphi\circ\varphi^{-1}$ es la identidad, que es una función holomorfa en dicho dominio.

Si $x\in M$, diremos que (U,φ) es una *carta de* x si (U,φ) es una carta de M y $x\in U$.

Una función entre dos variedades $f:(M_1,A_1)\longrightarrow(M_2,A_2)$ se dice *de clase* C^k si su expresión en cartas locales es de clase C^k, es decir, si para todo $x\in M_1$ existen cartas (U_1,φ_1) de x y (U_2,φ_2) de $f(x)$ tales que $\varphi_2\circ f\circ\varphi_1^{-1}$ es de clase C^k en $\varphi_1(U_1)$.

Si S,R son dos superficies de Riemann, se dice que $f:S\longrightarrow R$ es *holomorfa* si su expresión en cartas locales es holomorfa, es decir, si para todo $z\in S$ existen cartas (U_1,φ_1) de z y (U_2,φ_2) de $f(z)$ tales que $\varphi_2\circ f\circ\varphi_1^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_1(U_1)$. La aplicación f se dice *conforme* si es biyectiva y su expresión en cartas locales es localmente conforme. Por tanto, en virtud del Teorema 1.1.11, f es conforme si y sólo si es holomorfa y biyectiva. Se denota la clase de funciones holomorfas de S en R por $H(S,R)$.

Denotamos por $\mathrm{Aut}(S)$ los *automorfismos* de S, es decir, el conjunto de aplicaciones conformes de S en sí misma.

Si M,N son dos variedades holomorfas, se dice que $f:M\longrightarrow N$ es *holomorfa* si su expresión en cartas locales es holomorfa.

El primer ejemplo de superficie de Riemann es el plano complejo $\mathbb{C}$ y, en general, cualquier dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, tomando como carta local (φ, Ω) (que es carta global en este caso) la identidad $\varphi(z) = z$ en Ω.

El segundo ejemplo más importante de superficie de Riemann es la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, con cartas locales $(\varphi_1, \mathbb{C})$ y $(\varphi_2, \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$, dadas por $\varphi_1(z) = z$ y $\varphi_2(z) = 1/z$. Obsérvese que si Ω es cualquier dominio de $\mathbb{C}$, el conjunto $H\big(\Omega, \overline{\mathbb{C}}\big)$ de funciones holomorfas de Ω en $\overline{\mathbb{C}}$ es precisamente el conjunto de funciones meromorfas en Ω.

La esfera de Riemann aparece de forma natural, como ya hemos visto, al estudiar transformaciones de Möbius en la sección anterior. Vamos a probar a continuación que $H\big(\overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}}\big)$, el conjunto de funciones holomorfas de la esfera de Riemann en sí misma, es precisamente el conjunto de funciones racionales, es decir, los cocientes de polinomios. Necesitamos un resultado previo.

Proposición 2.2.1. *Si f es una función entera y $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, entonces f es un polinomio.*

Demostración. Por hipótesis, la función $f(1/z)$ tiene un polo en 0 y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por la Proposición 1.4.2, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $z^k f(1/z)$ está acotada en un entorno de 0. Entonces $f(z)/z^k$ está acotada en un entorno de ∞ y es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $p_k(z)$ es el polinomio de Taylor de $f(z)$ de orden k en el punto $z = 0$, entonces la función

$$g(z) := \frac{f(z) - p_k(z)}{z^k}$$

es holomorfa en $\mathbb{C}$ por el Teorema de la singularidad evitable (Teorema 1.3.21), ya que $\lim_{z\to 0} g(z) = 0$, y está acotada en un entorno de ∞. Consecuentemente, g está acotada en $\mathbb{C}$ y el Teorema de Liouville (ver Teorema 1.3.16) asegura que g es una constante, de donde se deduce que $f(z) = p_k(z) + g(z)z^k$ es un polinomio. □

Proposición 2.2.2. *Si $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es una función holomorfa, entonces f es una función racional, es decir, un cociente de polinomios.*

Demostración. Por hipótesis, la funciones $f(z)$ y $f(1/z)$ son meromorfas en $\mathbb{C}$ y, por tanto, cada una tiene sólo un número finito de polos en el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, por el Corolario 1.4.7. Entonces $f(z)$ tiene sólo un número finito de polos $z_1, \dots, z_k$ en $\mathbb{C}$ de órdenes respectivos $a_1, \dots, a_k$. Si definimos el polinomio $Q(z) := (z - z_1)^{a_1} \cdots (z - z_k)^{a_k}$, se verifica que

$f(z)Q(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ por el Teorema de la singularidad evitable (Teorema 1.3.21). Como $f(z)$ tiene límite (finito o infinito) en ∞, lo mismo sucede con $f(z)Q(z)$.

Si $f(z)Q(z)$ tiene límite finito en ∞, entonces el Teorema de Liouville (ver Teorema 1.3.16) asegura que $f(z)Q(z)$ es una constante.

Si $f(z)Q(z)$ tiene límite infinito en ∞, entonces la Proposición 2.2.1 garantiza que $f(z)Q(z)$ es un polinomio.

Por tanto, en cualquiera de los dos casos, f es un cociente de polinomios. □

Resulta interesante destacar el marcado contraste entre las, relativamente, pocas funciones holomorfas de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$ (las funciones racionales) y la enorme variedad de funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$: las series de potencias con radio de convergencia infinito, que incluyen, como caso particular, todas las funciones que pueden obtenerse mediante sumas, productos y composiciones de polinomios, exponenciales, senos y cosenos.

Determinemos, a continuación, los automorfismos de $\overline{\mathbb{C}}$ y de $\mathbb{C}$.

Proposición 2.2.3. *Se tiene que*

$$\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \left\{ T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \;:\quad a,b,c,d \in \mathbb{C}\,,\; ad-bc \neq 0 \right\}.$$

Demostración. El Teorema 2.1.1 garantiza que toda transformación de Möbius $T(z)$ está en $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.

Supongamos ahora que $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$; en particular $f \in H(\overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}})$ y por la Proposición 2.2.2 sabemos que f es un cociente de polinomios $f = P/Q$. Para probar que los grados de P y Q son menores o iguales que 1 razonamos por contradicción. Supongamos pues que o bien el grado de P o bien el grado de Q es mayor que 1. Entonces está claro que la ecuación $P(z) = w\,Q(z)$ en la variable z (equivalente a $w = f(z)$) tiene más de una solución (contando la multiplicidad); por tanto, f no es inyectiva, lo cual es una contradicción. Consecuentemente, los grados de P y Q son menores o iguales que 1. Además $ad - bc \neq 0$, porque en caso contrario f sería una constante. Por tanto, f es una transformación de Möbius. □

Proposición 2.2.4. *Se tiene que*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{ T(z) = az + b : \quad a, b \in \mathbb{C}\,,\; a \neq 0 \}\,.$$

Demostración. Está claro que cualquier transformación afín $T(z)$ está en $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

Supongamos ahora que $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. La función $g(z) = f(1/z)$ es holomorfa e inyectiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $g(z)$ tiene una singularidad esencial en 0, por el Teorema 2.6.11 (que se probará sin usar esta proposición) se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un punto $w_\varepsilon \in \mathbb{C}$ con $\mathbb{C} \setminus \{w_\varepsilon\} \subseteq g(\{0 < |z| < \varepsilon\})$. Como los dominios $g(\{0 < |z| < \varepsilon\})$ disminuyen cuando ε disminuye, está claro que w_ε no depende de ε, y podemos escribir $w_\varepsilon = w$. Por tanto, $\mathbb{C} \setminus \{w\} \subseteq g(\{0 < |z| < \varepsilon\})$ para todo $\varepsilon > 0$, y esto contradice que g sea inyectiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Consecuentemente, g tiene en 0 una singularidad evitable o un polo, y entonces $f \in H(\overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}})$.

La Proposición 2.2.2 afirma que f es una función racional. Como f no tiene polos en $\mathbb{C}$, entonces f es un polinomio. Si f tiene grado mayor que 1 o grado 0, está claro que no puede ser inyectiva en $\mathbb{C}$, por lo que f es un polinomio de grado exactamente 1. □

Dado un punto p en una superficie S, denotamos por T_pS el plano tangente a S en p. Si S es un subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces T_pS se identifica de forma natural con el propio plano complejo con origen en p. Una métrica riemanniana $g = ds^2$ sobre S es un producto escalar en cada plano tangente T_pS tal que los coeficientes de g en cada carta local son funciones C^∞ de p. En cada carta local, podemos escribir $g = ds^2 = E\,dx^2 + 2\,F\,dx\,dy + G\,dy^2$.

Una superficie riemanniana es un par (S, g), donde S es una superficie y g es una métrica riemanniana en S.

Dado un dominio (conjunto abierto y conexo) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, se dice que la métrica riemanniana $g = ds^2 = E\,dx^2 + 2\,F\,dx\,dy + G\,dy^2$ es *conforme* si existe una función λ estrictamente positiva y de clase $C^2(\Omega)$ tal que

$$g = ds^2 = \lambda(z)^2 |dz|^2 = \lambda(z)^2 (dx^2 + dy^2)\,,$$

es decir, si $E = G = \lambda(z)^2$ y $F = 0$. La función $\lambda(z)$ se denomina *densidad conforme* de la métrica g, y suele escribirse $ds = \lambda(z)|dz|$.

Dada una métrica riemanniana conforme en Ω pueden definirse la *longitud* de una curva $\gamma \subset \Omega$, el *área* de un conjunto medible $E \subset \Omega$ y la *distancia* entre dos puntos $a, b \in \Omega$ (todas ellas referidas a su métrica riemanniana), respectivamente, como

$$L_\Omega(\gamma) := \int_\gamma \lambda(z)\,|dz|\,, \qquad A_\Omega(E) := \iint_E \lambda(z)^2\,dxdy\,,$$

$$d_\Omega(a,b) := \inf\{L_\Omega(\gamma) : \gamma \text{ es una curva en } \Omega \text{ que une } a \text{ y } b\}\,.$$

Dada una superficie riemanniana, una *geodésica* es una curva a lo largo de la cual se minimiza (localmente) la distancia en la superficie (con respecto a dicha métrica riemanniana).

La curvatura de la métrica $ds^2 := E\,dx^2 + G\,dy^2$, viene dada por la expresión

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left[\Big(\frac{E_y}{\sqrt{EG}}\Big)_y + \Big(\frac{G_x}{\sqrt{EG}}\Big)_x\right],$$

donde el subíndice indica derivada parcial. En particular, si la métrica es conforme ($E = G = \lambda^2$, $F = 0$), la curvatura es

$$K = -\frac{\Delta\big(\log\lambda(z)\big)}{\lambda(z)^2}\,.$$

Recordemos que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2}{\partial\bar z\,\partial z}\,.$$

Esta última igualdad es especialmente útil a la hora de hallar el laplaciano de funciones que dependen explícitamente de z y $\bar z$ (o de $|z|$, ya que $|z| = \sqrt{z\,\bar z}\,$).

Una aplicación $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ entre dos superficies riemannianas se dice una *isometría local* si

$$< u, v >_{T_x M_1} = < (Df)_x u, (Df)_x v >_{T_{f(x)} M_2},$$

para todo $x \in M_1$ y para todo $u, v \in T_x M_1$. Diremos que f es una *isometría* si es una isometría local y es biyectiva.

Denotaremos por $\mathrm{Isom}(M_1, M_2)$ el conjunto de isometrías de M_1 en M_2 y por $\mathrm{Isom}(M)$ el conjunto de isometrías de M en M.

Teorema 2.2.5. *Sean Ω_1 y Ω_2 dominios en $\mathbb{C}$ y $f : (\Omega_1, ds_1) \longrightarrow (\Omega_2, ds_2)$ una función holomorfa, donde $ds_1 = \lambda_1(z)|dz|$ y $ds_2 = \lambda_2(z)|dz|$. Entonces f es una isometría local si y sólo si*

$$\lambda_2(f(z))|f'(z)| = \lambda_1(z),$$

para todo $z \in \Omega_1$.

Definición 2.2.6. *Una aplicación* conforme *entre dos superficies riemannianas M_1 y M_2 es una función $f : M_1 \to M_2$ biyectiva y diferenciable que preserva los ángulos con su orientación en todos los puntos de M_1.*

Obsérvese que esta definición de aplicación conforme coincide con la definición que habíamos dado en el caso de superficies de Riemann si dichas superficies tienen métricas conformes (que siempre será nuestro caso).

Es interesante destacar que las isometrías locales preservan las longitudes de los vectores tangentes, los ángulos entre ellos e incluso su orientación. Además, $d_{M_2}(f(x), f(y)) \le d_{M_1}(x, y)$ para todo $x, y \in M_1$.

Consecuentemente, se tienen los siguientes resultados.

Proposición 2.2.7. *Toda isometría entre dos superficies riemannianas $f : M_1 \to M_2$ es una aplicación conforme y verifica*

$$d_{M_2}(f(x), f(y)) = d_{M_1}(x, y)$$

para todo $x, y \in M_1$. Además, las geodésicas en M_2 que pasan por $f(x)$ son las imágenes de las geodésicas en M_1 que pasan por x.

Proposición 2.2.8. *Toda aplicación conforme entre dos superficies riemannianas $f : M_1 \to M_2$ que verifica $d_{M_2}(f(x), f(y)) = d_{M_1}(x, y)$ para todo $x, y \in M_1$ es una isometría.*

Sean M una superficie, (N, ds) una superficie riemanniana y $f : M \longrightarrow (N, ds)$ una aplicación diferenciable. El *pullback de la métrica riemanniana ds* por f es la métrica riemanniana en M, definida como

$$< u, v >_{T_xM} := < (Df)_x u, (Df)_x v >_{T_{f(x)}N},$$

para todo $u, v \in T_xM$. El pullback de ds por f se denotará por $f^*(ds)$.

Por tanto, $f : (M, f^*(ds)) \longrightarrow (N, ds)$ es siempre una isometría local. Consecuentemente, el Teorema 2.2.5 permite deducir el siguiente resultado.

Teorema 2.2.9. *Sean Ω_1 y Ω_2 dominios en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega_1 \longrightarrow (\Omega_2, ds)$ una función holomorfa. Si $ds = \lambda|dz|$ y $ds^* = f^*(ds) = \lambda^*|dz|$, entonces se verifica*

$$\lambda(f(z))|f'(z)| = \lambda^*(z)\,,$$

para todo $z \in \Omega_1$.

2.2.1 Ejercicios

Ejercicio 2.2.1.1. *Prueba que* d_Ω *realmente define una distancia en* Ω.

Ejercicio 2.2.1.2. *Prueba, a partir de la fórmula para la curvatura de una métrica general, que la curvatura de una métrica conforme* $g = \lambda(z)^2|dz|^2$ *viene dada por* $K = -\dfrac{\Delta(\log \lambda(z))}{\lambda(z)^2}$.

Ejercicio 2.2.1.3. *Dada una métrica conforme* $g = \lambda(z)^2|dz|^2$ *en* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, *para cada* $\alpha > 0$ *puede definirse la métrica conforme* $g_\alpha = \alpha^2\lambda(z)^2|dz|^2$ *en* Ω.

1. *Encuentra la relación existente entre las curvaturas* $K(g)$ *y* $K(g_\alpha)$ *de estas métricas.*

2. *Dada una curva* $\gamma \subset \Omega$, *halla la relación entre* $L_g(\gamma)$ *y* $L_{g_\alpha}(\gamma)$.

3. *Dados* $z, w \in \Omega$, *encuentra la relación entre* $d_g(z,w)$ *y* $d_{g_\alpha}(z,w)$.

4. *Halla también la relación entre* $A_g(B_g(p,r))$ *y* $A_{g_\alpha}(B_{g_\alpha}(p,\alpha r))$, *y la relación entre* $L_g(\partial B_g(p,r))$ *y* $L_{g_\alpha}(\partial B_{g_\alpha}(p,\alpha r))$.

Ejercicio 2.2.1.4. *Halla la curvatura de la métrica conforme* $g = \lambda(z)^2|dz|^2$ *si* Ω *es el disco unidad* $\Omega = \mathbb{D}$ *y* $\lambda(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$.

Ejercicio 2.2.1.5. *Halla la curvatura de la métrica conforme* $g = \lambda(z)^2|dz|^2$ *si* Ω *es el semiplano superior* $\Omega = \mathbb{U}$ *y* $\lambda(z) = \dfrac{1}{y}$.

Ejercicio 2.2.1.6. *Halla la curvatura de la métrica conforme* $g = \lambda(z)^2|dz|^2$ *si* $\Omega = \mathbb{C}$ *y* $\lambda(z) = \dfrac{2}{1+|z|^2}$.

Ejercicio 2.2.1.7. *Halla la curvatura de la métrica conforme* $g = \lambda(z)^2|dz|^2$ *si* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *y* $\lambda(z) = \dfrac{1}{|z|}$.

Ejercicio 2.2.1.8. *Prueba que si S y R son superficies de Riemann y $f : S \to R$ es holomorfa, entonces para todo $z \in S$ y todas las cartas locales (V_1, ψ_1) de z y (V_2, ψ_2) de $f(z)$, se tiene que $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$ es holomorfa en un entorno de $\psi_1(z)$.*

Ejercicio 2.2.1.9. *Prueba que si S y R son superficies de Riemann y $f : S \to R$ es conforme localmente, entonces para todo $z \in S$ y todas las cartas locales (V_1, ψ_1) de z y (V_2, ψ_2) de $f(z)$, se tiene que $\psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$ es conforme en un entorno de $\psi_1(z)$.*

Ejercicio 2.2.1.10. *¿Existe alguna métrica conforme en $\mathbb{C}$ tal que* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{C})$*?*

Ejercicio 2.2.1.11. *¿Existe alguna métrica conforme en $\overline{\mathbb{C}}$ tal que* $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathrm{Isom}(\overline{\mathbb{C}})$*?*

Ejercicio 2.2.1.12. *Si M y N son variedades, prueba que $M \times N$ también admite una estructura natural de variedad.*

Ejercicio 2.2.1.13. *Prueba que si M es una superficie riemanniana, el conjunto* $\mathrm{Isom}(M)$ *tiene estructura de grupo con la composición.*

2.3 La métrica de Poincaré en $\mathbb{D}$ y $\mathbb{U}$.

A partir de ahora, en el disco unidad $\mathbb{D}$ consideramos la métrica conforme definida por $\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$. En el semiplano superior $\mathbb{U}$ consideramos la métrica conforme definida por $\lambda_{\mathbb{U}}(z) = \dfrac{1}{y}$. Por tanto, los símbolos $d_{\mathbb{D}}$ y $d_{\mathbb{U}}$ denotan las distancias asociadas a estas métricas, que se denominan *hiperbólicas ó de Poincaré*, ya que hacen de $\mathbb{D}$ y $\mathbb{U}$ modelos para el *plano hiperbólico.*

El siguiente es uno de los teoremas de los que más se ha hablado en el siglo XX. Se cuenta que Poincaré descubrió este resultado en un instante de “inspiración”, justo cuando iba a subir al tranvía que le llevaría a una excursión geológica.

Teorema 2.3.1. *Se verifica la igualdad*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{D}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \Big\{ T(z) = e^{i\alpha}\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \ : \ \alpha \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{D} \Big\}.$$

Demostración. La segunda igualdad es consecuencia directa del Teorema 2.1.6. Probemos ahora la primera igualdad.

Si $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{D})$, en particular, f es una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$, es decir, está en $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, en particular, es biyectiva. Por tanto, como f es holomorfa, para probar que f es una isometría basta con ver que es una isometría local, es decir, que $\lambda_{\mathbb{D}}\big(f(z)\big)\big|f'(z)\big| = \lambda_{\mathbb{D}}(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, en virtud del Teorema 2.2.5. Como

$$f(z) = e^{i\alpha}\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\,, \qquad f'(z) = e^{i\alpha}\,\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\,,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathbb{D}}\big(f(z)\big) &= \frac{2}{1-|f(z)|^2} = \frac{2}{1-\dfrac{|z-a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}} \\
&= \frac{2\,|1-\overline{a}z|^2}{(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})-(z-a)(\overline{z}-\overline{a})} \\
&= \frac{2\,|1-\overline{a}z|^2}{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}\,.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, $\lambda_{\mathbb{D}}\big(f(z)\big)\big|f'(z)\big| = \frac{2}{1-|z|^2} = \lambda_{\mathbb{D}}(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, como ya hemos visto, esto implica $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{D})$. $\square$

De forma parecida puede probarse el siguiente resultado, usando los Teoremas 2.1.7 y 2.2.5.

Teorema 2.3.2. *Se verifica la igualdad*

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{U}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{U}) = \Big\{ T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ : \ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc>0 \Big\}.$$

Hallemos a continuación las geodésicas en $\mathbb{D}$ y una expresión explícita para $d_{\mathbb{D}}$.

Teorema 2.3.3. *Las geodésicas en el disco unidad $\mathbb{D}$ son los diámetros y los arcos de circunferencia contenidos en $\mathbb{D}$ que cortan perpendicularmente a la circunferencia unidad $\partial\mathbb{D}$. Además, para todo $a, b \in \mathbb{D}$*

$$d_{\mathbb{D}}(a,b) = \log \frac{1 + \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}\,b}\right|}{1 - \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}\,b}\right|}\,.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que si $|z| < 1$, entonces

$$d_{\mathbb{D}}(0,z) = \log\Big(\frac{1+|z|}{1-|z|}\Big), \tag{2.3.1}$$

y que las geodésicas que pasan por 0 son los diámetros (euclídeos) de $\mathbb{D}$.

Si $z \in (0,1)$, sea $\gamma(t)$ una curva uniendo 0 y z. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}$, con $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = z$ y $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$. Por tanto, $\gamma'(t) = e^{i\theta(t)}(r'(t) + ir(t)\theta'(t))$ y

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{D}}(\gamma) &= \int_0^1 \frac{2}{1-r(t)^2}\,\big|r'(t) + ir(t)\theta'(t)\big|\,dt \ge \int_0^1 \frac{2\,r'(t)}{1-r(t)^2}\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{r'(t)}{1+r(t)} + \frac{r'(t)}{1-r(t)}\Big)dt \\ &= \log\Big(\frac{1+r(t)}{1-r(t)}\Big)\Big]_0^1 = \log\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big). \end{aligned}$$

Dado que la desigualdad en la expresión anterior se convierte en igualdad si $r(t) = zt$, podemos concluir que (2.3.1) se verifica para $z \in (0,1)$ y que el segmento $[0,1)$ es una geodésica en $\mathbb{D}$. Ya que las rotaciones alrededor de 0 son isometrías en $\mathbb{D}$, se tiene (2.3.1) para todo $z \in \mathbb{D}$ y que las geodésicas que pasan por 0 son los diámetros de $\mathbb{D}$.

Si aplicamos a $\mathbb{D}$ cualquier $f \in \operatorname{Isom}(\mathbb{D})$ con $f(0) = a \neq 0$, las geodésicas que pasan por 0 se transforman en las geodésicas que pasan por a, por la Proposición 2.2.7. Como f es una transformación de Möbius y $a \neq 0$, las imágenes de los diámetros (que son circunferencias generalizadas que cortan perpendicularmente a $\partial\mathbb{D}$) son los arcos de circunferencia que pasan por a y cortan perpendicularmente a $\partial\mathbb{D}$ (y el único diámetro de $\mathbb{D}$ que pasa por a), y estas son precisamente las geodésicas que pasan por a. Por tanto, las geodésicas en el disco unidad $\mathbb{D}$ son los diámetros y los arcos de circunferencia contenidos en $\mathbb{D}$ que cortan perpendicularmente a la circunferencia unidad $\partial\mathbb{D}$.

Además, si $a, b \in \mathbb{D}$ y f es la isometría $f(z) := (z-a)/(1-\overline{a}z)$, entonces (2.3.1) da

$$d_{\mathbb{D}}(a,b) = d_{\mathbb{D}}(f(a), f(b)) = d_{\mathbb{D}}\Big(0, \frac{b-a}{1-\overline{a}\,b}\Big) = \log \frac{1+\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}\,b}\right|}{1-\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}\,b}\right|}.$$

□

En Los Elementos, escrito por Euclides hacia el año 300 a. C., se exponen los conocimientos geométricos de la Grecia clásica deduciéndolos a partir de cinco axiomas, considerados como los más evidentes y sencillos (axioma significa "lo valioso" en griego). Sólo el plano euclídeo y el plano hiperbólico satisfacen los cuatro primeros axiomas. El quinto axioma establece que por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela. Este quinto axioma deja como única posibilidad el plano euclídeo, que es precisamente el objeto de estudio de la geometría de Euclides. Cuando a principios del siglo XIX Gauss, Lobachevsky y Bolyai se plantearon la posibilidad de una geometría sin el quinto postulado, descubrieron la geometría hiperbólica. Ésta fue la primera geometría no euclídea en aparecer históricamente y Gauss consideró seriamente la posibilidad de que fuera la geometría del espacio en que vivimos, planteando así la cuestión de la estructura geométrica del Universo, que conduciría a la teoría de la relatividad general de Einstein. El disco unidad con la métrica de Poincaré que acabamos de introducir es un modelo para la geometría hiperbólica.

De la fórmula para la distancia hiperbólica en $\mathbb{D}$ se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 2.3.4. *Para todo* $0 < r < 1$*, las bolas hiperbólicas en* $\mathbb{D}$ *centradas en* 0 *verifican*

$$B_{\mathbb{D}}\Big(0, \log\Big(\frac{1+r}{1-r}\Big)\Big) = D(0,r) = \{|z| < r\}.$$

Se dice que una superficie riemanniana (M, g) es *geodésicamente completa* si toda geodésica (parametrizada con longitud de arco) tiene como dominio toda la recta real (es decir, si toda geodésica tiene longitud infinita "por ambos lados"). Por el Teorema de Hopf-Rinow (ver [GHL, p. 92]) esto es equivalente a que el espacio métrico (M, d_g) sea completo (es decir, que toda sucesión de Cauchy en M con la distancia d_g asociada a la métrica g sea convergente).

Teorema 2.3.5. *La topología de $\mathbb{D}$ con la métrica hiperbólica coincide con la euclídea, pero $\mathbb{D}$ es geodésicamente completo y, por tanto, un espacio métrico completo.*

Demostración. El Corolario 2.3.4 nos dice que las bolas en $\mathbb{D}$ con centro 0 son las mismas (aunque con radios diferentes) para ambas métricas. Para cada $z_0 \in \mathbb{D}$ fijo, la isometría $f(z) = (z + z_0)/(1 + \overline{z_0}z)$ verifica $f(0) = z_0$ y, por tanto, transforma las bolas hiperbólicas con centro 0 en círculos euclídeos que contienen a z_0 (aunque no estén centrados en z_0), por el Teorema 2.1.1. Consecuentemente, ambas métricas tienen bases de entornos equivalentes. Además,

$$L_{\mathbb{D}}\big([0,1)\big) = \int_0^1 \frac{2\,dt}{1-t^2} = \log \frac{1+t}{1-t}\Big]_0^1 = \infty.$$

Como las rotaciones centradas en 0 son isometrías, deducimos que todas las geodésicas para la métrica hiperbólica que comienzan en 0 tienen longitud infinita. Aplicando la isometría f anterior, concluimos que todas las geodésicas para la métrica hiperbólica que comienzan en cualquier punto z_0 tienen longitud infinita. Por tanto, $\mathbb{D}$ es geodésicamente completo con la métrica hiperbólica. $\square$

Es fácil ver que $\mathbb{D}$ no es una superficie geodésicamente completa para la métrica euclídea, ya que todas sus geodésicas (las líneas rectas) tienen longitud (euclídea) menor o igual que 2.

Finalmente probaremos que ambos modelos del plano hiperbólico son isométricos, es decir, que son esencialmente el mismo.

Teorema 2.3.6. *Los espacios $\mathbb{D}$ y $\mathbb{U}$ con sus respectivas métricas hiperbólicas son isométricos.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ la transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}\,.$$

Para probar el Teorema 2.3.6 es suficiente con demostrar que f es una isometría de $\mathbb{U}$ en $\mathbb{D}$. En primer lugar, se tiene que $f'(z) = 2i/(z+i)^2$.

Como $f(0) = -1$, $f(-1) = i$, $f(1) = -i$, y $-1, i, -i \in \partial\mathbb{D}$, el Teorema 2.1.1 garantiza que $f(\mathbb{R}) = \partial\mathbb{D}$, y que se tiene, o bien $f(\mathbb{U}) = \mathbb{D}$ o bien $f(\mathbb{U}) = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Como $f(i) = 0 \in \mathbb{D}$, concluimos que f aplica biyectivamente $\mathbb{U}$ en $\mathbb{D}$.

Ya que

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| &= \frac{2}{1 - \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2}} \cdot \frac{2}{|z+i|^2} \\ &= \frac{4}{x^2 + (y+1)^2 - x^2 - (y-1)^2} = \frac{1}{y} = \lambda_{\mathbb{U}}(z)\,,\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{U}$, el Teorema 2.2.5 garantiza que f es una isometría local. Como además f es biyectiva, se tiene que es una isometría. $\square$

Usando los Teoremas 2.3.3 y 2.3.6 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.7. *Las geodésicas en el semiplano superior $\mathbb{U}$ son las semirrectas verticales y los arcos de circunferencia contenidos en $\mathbb{U}$ que cortan perpendicularmente al eje real. Además, para todo $a, b \in \mathbb{U}$*

$$d_{\mathbb{U}}(a,b) = \log \frac{|a-\bar{b}| + |a-b|}{|a-\bar{b}| - |a-b|}\,.$$

Examinaremos a continuación algunas importantes propiedades del plano hiperbólico que lo diferencian del plano euclídeo.

Sea T un triángulo hiperbólico en $\mathbb{D}$ de lados A, B y C, y ángulos opuestos α, β y γ respectivamente. Denotemos por a, b y c las longitudes hiperbólicas de los lados A, B y C respectivamente.

Se verifican las siguientes relaciones trigonométricas hiperbólicas:

Ley de los cosenos I: $\cosh a = \cosh b \cosh c - \operatorname{senh} b \operatorname{senh} c \cos\alpha\,.$

Ley de los senos: $\dfrac{\operatorname{senh} a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\operatorname{senh} b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\operatorname{senh} c}{\operatorname{sen}\gamma}\,.$

Ley de los cosenos II: $\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \cosh c\,.$

El teorema de Gauss-Bonnet da que $A_{\mathbb{D}}(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma > 0$, con lo que deducimos que siempre la suma de los ángulos de un triángulo es estrictamente menor que π.

También puede comprobarse que

$$A_{\mathbb{D}}(B_{\mathbb{D}}(z_0, r)) = 4\pi \operatorname{senh}^2 \frac{r}{2} \approx \begin{cases} \pi r^2, & \text{si } r \to 0, \\ \pi e^r, & \text{si } r \to \infty. \end{cases}$$

$$L_{\mathbb{D}}(\partial B_{\mathbb{D}}(z_0,r)) = 2\pi \operatorname{senh} r \approx \begin{cases} 2\pi r^2, & \text{si}\, r \to 0, \\ \pi e^r, & \text{si}\, r \to \infty. \end{cases}$$

Por el Teorema 2.3.6, los mismos resultados son ciertos para los triángulos y las bolas en $\mathbb{U}$.

Obsérvese que, cuando r es grande, tanto el área de las bolas como la longitud de su frontera son, aproximadamente, πe^r, hecho que contrasta notablemente con el caso euclídeo, en el cual

$$\begin{aligned} A(D(z_0,r)) &= \pi r^2, \\ L(\partial D(z_0,r)) &= 2\pi r. \end{aligned}$$

Este hecho es el que propicia que en el plano euclídeo se verifique la desigualdad isoperimétrica cuadrática, $4\pi A(\Omega) \le L(\partial\Omega)^2$ para todo dominio acotado y con frontera suave Ω. En cambio, en el plano hiperbólico se verifica la siguiente desigualdad isoperimétrica lineal.

Teorema 2.3.8. *En $\mathbb{U}$ se verifica la desigualdad isoperimétrica lineal $A_{\mathbb{U}}(\Omega) \le L_{\mathbb{U}}(\partial\Omega)$, para todo dominio acotado y con frontera suave Ω en el semiplano superior $\mathbb{U}$.*

Demostración. Usando una de las fórmulas de Green se tiene

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{U}}(\Omega) &= \iint_{\Omega} \frac{1}{y^2}\, dxdy = \iint_{\Omega} \Delta\Big(\log\frac{1}{y}\Big)\, dxdy = \int_{\partial\Omega} \nabla\Big(\log\frac{1}{y}\Big)\cdot \mathbf{n}\, |dz| \\ &\le \int_{\partial\Omega} \Big|\nabla\Big(\log\frac{1}{y}\Big)\Big| |dz| = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{y}\, |dz| = L_{\mathbb{U}}(\partial\Omega)\,. \end{aligned}$$

Por tanto, $A_{\mathbb{U}}(\Omega) \le L_{\mathbb{U}}(\partial\Omega)$. □

Por el Teorema 2.3.6, la misma desigualdad isoperimétrica es cierta en el disco unidad $\mathbb{D}$.

2.3.1 Ejercicios

Ejercicio 2.3.1.1. *Prueba que dados $z, w \in \mathbb{D}$, existe una isometría f de $\mathbb{D}$ tal que $f(z) = w$.*

Ejercicio 2.3.1.2. *Para $t > 0$ sean A_t el segmento euclídeo que une los puntos $-1+it$ y $1+it$, y B_t la geodésica hiperbólica en $\mathbb{U}$ que une dichos puntos. Calcula $L_{\mathbb{U}}(A_t)$ y $L_{\mathbb{U}}(B_t)$.*

Ejercicio 2.3.1.3. *Prueba el Teorema 2.3.2 usando los Teoremas 2.1.7 y 2.2.5.*

Ejercicio 2.3.1.4. *Para* $s > 0$ *sea* X_s *el dominio en* $\mathbb{U}$ *definido por* $X_s := \{z : -1 \leq \Re(z) \leq 1, \operatorname{Im}(z) \geq s\}$*. Calcula el área hiperbólica del dominio* X_s*.*

Ejercicio 2.3.1.5. *Prueba que si* X *es un conjunto medible de* $\mathbb{U}$ *y* $B(z) = -\overline{z}$*, entonces* $A_{\mathbb{U}}(X) = A_{\mathbb{U}}(B(X))$*.*

Ejercicio 2.3.1.6. *Prueba que si* X *es un conjunto medible de* $\mathbb{U}$ *y* $f(z) = z + \operatorname{Im}(z)$*, entonces* $A_{\mathbb{U}}(X) = A_{\mathbb{U}}(f(X))$*.*

Ejercicio 2.3.1.7. *Prueba, usando el Teorema 2.3.3, que la siguiente fórmula se verifica para todo* $a, b \in \mathbb{D}$

$$\operatorname{senh}^2 \frac{d_{\mathbb{D}}(a,b)}{2} = \frac{\cosh d_{\mathbb{D}}(a,b) - 1}{2} = \frac{|a-b|^2}{(1-|a|^2)(1-|b|^2)} .$$

Ejercicio 2.3.1.8. *Prueba directamente que* $d_{\mathbb{U}}(i, iy) = |\log y|$ *para todo* $y > 0$*.*

Ejercicio 2.3.1.9. *Usando el problema anterior, prueba que para todo* $a, b \in \mathbb{U}$

$$d_{\mathbb{U}}(a,b) = \log \frac{|a-\overline{b}| + |a-b|}{|a-\overline{b}| - |a-b|} ,$$

$$\operatorname{senh}^2 \frac{d_{\mathbb{U}}(a,b)}{2} = \frac{\cosh d_{\mathbb{U}}(a,b) - 1}{2} = \frac{|a-b|^2}{4\,\Im a\,\Im b} .$$

Ejercicio 2.3.1.10. *Sea* γ *la geodésica que une* $2i$ *y* $10i$ *en* $\mathbb{U}$*. Para cada* $n \geq 2$*, encuentra los puntos que dividen a* γ *en* n *segmentos de igual longitud.*

Ejercicio 2.3.1.11. *Si* $C(z) = \overline{z}$ *y* γ *es una curva contenida en* $\mathbb{D}$*, prueba que* $L_{\mathbb{D}}(\gamma) = L_{\mathbb{D}}(C(\gamma)) = L_{\mathbb{D}}(-C(\gamma))$*. ¿Son* C *ó* $-C$ *isometrías en* $\mathbb{D}$*?, ¿son transformaciones conformes en* $\mathbb{D}$*?*

Ejercicio 2.3.1.12. *Si* $C(z) = \overline{z}$ *y* γ *es una curva contenida en* $\mathbb{U}$*, prueba que* $L_{\mathbb{U}}(\gamma) = L_{\mathbb{U}}(-C(\gamma))$*. ¿Es* $-C$ *una isometría en* $\mathbb{U}$*?, ¿es una transformación conforme en* $\mathbb{U}$*?*

Ejercicio 2.3.1.13. *Prueba que la aplicación* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = \overline{z}$ *es una aplicación que preserva las distancias, si consideramos en* $\mathbb{C}$ *la métrica euclídea usual. Prueba también que la aplicación* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *dada por* $f(z) = \overline{z}$ *es una aplicación que preserva las distancias, si consideramos en* $\mathbb{D}$ *la métrica hiperbólica.*

Ejercicio 2.3.1.14. *Prueba que para todo* $r > 0$*, la circunferencia hiperbólica en* $\mathbb{U}$ *de centro* ia *y radio* r *es*

$$\{z \in \mathbb{U} : d_{\mathbb{U}}(ia, z) = r\} = \{x + iy \in \mathbb{U} : x^2 + (y - a\cosh r)^2 = a^2 \operatorname{senh}^2 r\}.$$

Ejercicio 2.3.1.15. *Usando el ejercicio anterior, halla la circunferencia hiperbólica en* $\mathbb{U}$ *de centro* $x_0 + iy_0$ *y radio* r.

Ejercicio 2.3.1.16. *Usando el Corolario 2.3.4, prueba que se verifica la igualdad* $B_{\mathbb{D}}(0, t) = D(0, \tanh(t/2))$ *para todo* $t > 0$.

Ejercicio 2.3.1.17. *¿Cuál es la circunferencia hiperbólica en* $\mathbb{D}$ *de centro* 0 *y radio* r*? ¿Y la de centro* a *y radio* r*?*

Ejercicio 2.3.1.18. *Prueba que*

$$A_{\mathbb{D}}(B_{\mathbb{D}}(z, r)) = 4\pi \operatorname{senh}^2 \frac{r}{2}, \quad L_{\mathbb{D}}(\partial B_{\mathbb{D}}(z, r)) = 2\pi \operatorname{senh} r.$$

Prueba el mismo resultado en $\mathbb{U}$.

Indicación: *Haz el cálculo para* $z = 0$*, usando el Corolario 2.3.4 o el Ejercicio 2.3.1.16. Demuestra que el resto de los casos pueden deducirse a partir de éste.*

Ejercicio 2.3.1.19. *Usando el problema anterior, prueba que si se tiene la desigualdad isoperimétrica* $A_{\mathbb{D}}(\Omega) \le c\, L_{\mathbb{D}}(\partial\Omega)$*, para cierta constante positiva* c *y para todo dominio acotado y con frontera suave* $\Omega \subset \mathbb{D}$*, entonces* c *tiene que verificar* $c \ge 1$.

Ejercicio 2.3.1.20. *Prueba que se tiene la desigualdad isoperimétrica* $A_{\mathbb{D}}(\Omega) \le L_{\mathbb{D}}(\partial\Omega)$ *para todo dominio acotado y con frontera suave* $\Omega \subset \mathbb{D}$*, usando los Teoremas 2.3.6 y 2.3.8.*

Ejercicio 2.3.1.21. *Usando el problema anterior, prueba que se tiene* $A_{\mathbb{D}}(\Omega) \le L_{\mathbb{D}}(\partial\Omega)$ *para todo dominio abierto acotado y con frontera suave* $\Omega \subset \mathbb{D}$.

Ejercicio 2.3.1.22. *Prueba que la longitud de las semigeodésicas* $\{iy : y \in (0,1]\}$ *y* $\{iy : y \in [1,\infty)\}$ *en* $\mathbb{U}$ *es infinita. Deduce de ello que* $\mathbb{U}$ *es geodésicamente completo.*

Ejercicio 2.3.1.23. *Sean* X *e* Y *subconjuntos de* $\mathbb{U}$*. Si se define*

$$d_{\mathbb{U}}(X,Y) := \inf\{d_{\mathbb{U}}(x,y) : x \in X,\, y \in Y\},$$

prueba que $d_{\mathbb{U}}(X,Y) > 0$ *si y sólo si* X *e* Y *tienen clausuras disjuntas. Prueba que si* X *es compacto e* Y *es cerrado, entonces el ínfimo es de hecho un mínimo.*

Ejercicio 2.3.1.24. *Sean* γ *una geodésica de* $\mathbb{U}$ *y* $w \in \mathbb{U} \setminus \gamma$*. Prueba que existe un único punto* $z \in \gamma$ *tal que* $d_{\mathbb{U}}(w,\gamma) = d_{\mathbb{U}}(w,z)$*.*

Ejercicio 2.3.1.25. *Sean* γ *el semieje imaginario positivo en* $\mathbb{U}$*,* $\varepsilon > 0$ *y* W_ε *el conjunto de puntos de* $\mathbb{U}$ *que están a distancia hiperbólica* ε *de* γ*. Prueba que* W_ε *es la unión de dos semirrectas euclídeas que comienzan en* 0 *y que forman un ángulo* θ *con* γ*. Encuentra la relación entre el ángulo* θ *y la distancia* ε*.*

Ejercicio 2.3.1.26. *Sea* T *un triángulo hiperbólico en* $\mathbb{U}$ *de lados* A*,* B *y* C*. Prueba que para todo* $z \in A$ *se verifica* $d_{\mathbb{U}}(z, B \cup C) \le \log(1+\sqrt{2}\,)$*.*

Indicación: *Prueba que basta considerar el triángulo “ideal” en* $\mathbb{U}$ *de vértices* $0, 1, \infty \in \partial\mathbb{U}$*.*

Ejercicio 2.3.1.27. *Deduce la ley de los cosenos II y la ley de los senos de la ley de los cosenos I.*

Ejercicio 2.3.1.28. *A partir de las leyes anteriores, deduce el teorema de Pitágoras hiperbólico, que relaciona las longitudes hiperbólicas de los lados de un triángulo rectángulo hiperbólico.*

Ejercicio 2.3.1.29. *Sea* T *un triángulo hiperbólico cuyos lados tienen todos longitud hiperbólica* a*. Prueba que los tres ángulos interiores de* T *son iguales, y que si dichos ángulos son iguales a* α*, entonces*

$$2\cosh\frac{a}{2}\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\ = 1\,.$$

Ejercicio 2.3.1.30. *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $\delta, \varepsilon > 0$. Se define*

$$H_{\delta,\varepsilon}(A) := \inf \Big\{ \sum_j (\operatorname{diam} U_j)^\delta : U_j \text{ es una bola, } A \subseteq \cup_j U_j,\, \operatorname{diam} U_j \le \varepsilon \Big\},$$
$$H_\delta(A) := \sup_{\varepsilon>0} H_{\delta,\varepsilon}(A) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} H_{\delta,\varepsilon}(A)\,.$$

$H_\delta(A)$ es la medida de Hausdorff *de exponente δ del conjunto A. Aquí, como es natural,* diam *denota el diámetro referido a la distancia d.*

Prueba los siguientes resultados, si $0 < \delta_1 < \delta_2$:
a) $H_{\delta_2,\varepsilon}(A) \le \varepsilon^{\delta_2-\delta_1} H_{\delta_1,\varepsilon}(A)$.
b) Si $H_{\delta_1}(A) < \infty$, entonces $H_{\delta_2}(A) = 0$.
c) Si $H_{\delta_2}(A) > 0$, entonces $H_{\delta_1}(A) = \infty$.
d) $\sup\{\delta > 0 : H_\delta(A) = \infty\} = \inf\{\delta > 0 : H_\delta(A) = 0\}$.

El número

$$\dim A := \sup\{\delta > 0 : H_\delta(A) = \infty\} = \inf\{\delta > 0 : H_\delta(A) = 0\}$$

se conoce como dimensión de Hausdorff *del conjunto A.*

Ejercicio 2.3.1.31. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{U}$. ¿Existe alguna relación entre las dimensiones de Hausdorff de K cuando se consideran la distancia euclídea y la hiperbólica?*

2.4 Preliminares topológicos y algebraicos.

Nuestro siguiente objetivo es definir la métrica de Poincaré en superficies de Riemann, pero antes de poder definirla necesitamos recordar algunos hechos básicos de la teoría de espacios recubridores. Para profundizar en este teorema puede consultarse el Capítulo 5 de [M].

Una curva cerrada en un espacio conexo por arcos X es *homótopa a un punto* o *trivial* si puede deformarse de forma continua en un punto dentro de X. De forma más precisa, si $\gamma : [a, b] \to X$ es una curva cerrada, decimos que γ es trivial si existe una función continua $F : [a, b] \times [0, 1] \to X$ tal que $F(t, 0) = \gamma(t)$ para todo $t \in [a, b]$ y $F(t, 1)$ es constante. Por tanto, X es simplemente conexo si X es conexo y toda curva cerrada en X es trivial.

Así, por ejemplo, la circunferencia unidad $\partial\mathbb{D}$ es trivial en $\mathbb{C}$ pero no es trivial en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Definición 2.4.1. *Sea X un espacio topológico conexo por arcos y localmente conexo por arcos. Un* espacio recubridor *de X es un par $(\widetilde{X},p)$ donde $\widetilde{X}$ es un espacio topológico y $p:\widetilde{X}\to X$ es una función continua y sobreyectiva, y además se cumple que todo punto $x\in X$ tiene un entorno U abierto y conexo por arcos tal que $p^{-1}(U)=\bigcup_j \tilde{U}_j$, donde $\{\tilde{U}_j\}_j$ son las componentes conexas por arcos de $p^{-1}(U)$ y para cada $\tilde{U}_j$ se tiene que $p|_{\tilde{U}_j}:\tilde{U}_j\to U$ es un homeomorfismo. Todo entorno abierto U que satisfaga esta condición se denomina* entorno elemental. *La aplicación p se denomina habitualmente* proyección.

Un espacio recubridor se llama universal *si es simplemente conexo, es decir, si toda curva cerrada es trivial o, lo que es lo mismo, su primer grupo de homotopía es trivial. El espacio recubridor universal es único salvo homeomorfismos.*

El concepto de espacio recubridor se utiliza en ámbitos muy diversos, tales como Geometría Diferencial, Grupos de Lie, Superficies de Riemann, Homotopía o Teoría de Nudos. Para aclarar este concepto veamos un par de ejemplos sencillos.

Ejemplo: Sea $p:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ definida por $p(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Entonces el par $(\mathbb{R},p)$ es un espacio recubridor de la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$. Todo subintervalo abierto del círculo $\mathbb{S}^1$ puede servir como entorno elemental. Además $\mathbb{R}$ es recubridor universal de $\mathbb{S}^1$, ya que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo.

Ejemplo: Si $(\widetilde{X},p)$ es un espacio recubridor de X, y $(\tilde{Y},q)$ es un espacio recubridor de Y, entonces $(\widetilde{X}\times\tilde{Y},p\times q)$ es un espacio recubridor de $X\times Y$, donde la aplicación $p\times q$ se define como $(p\times q)(x,y)=(p(x),q(y))$ y, si U es un entorno elemental del punto $x\in X$ y V un entorno elemental del punto $y\in Y$, entonces $U\times V$ es un entorno elemental de $(x,y)\in X\times Y$.

Teorema 2.4.2. *Dado un espacio topológico X conexo por arcos, localmente conexo por arcos, y tal que cada punto posee un entorno abierto* *simplemente conexo, existe un espacio recubridor universal* $(\widetilde{X}, \pi)$*. Además,* π *es una aplicación continua y abierta que es localmente un homeomorfismo.*

Si X *es una variedad diferenciable* n*-dimensional, entonces* $\widetilde{X}$ *también lo es y* $\pi \in C^\infty(\widetilde{X}, X)$*.*

Si X *es una superficie riemanniana, entonces* $\widetilde{X}$ *también lo es con el pullback de la métrica riemanniana en* X*. Entonces* π *es una isometría local que verifica*

$$d_X\big(\pi(x), \pi(y)\big) \le d_{\widetilde{X}}(x, y), \qquad x, y \in \widetilde{X},$$
$$d_X(a, b) = \min\big\{d_{\widetilde{X}}\big(\tilde{a}, \tilde{b}\big) : \pi\big(\tilde{a}\big) = a, \pi\big(\tilde{b}\big) = b\big\}, \qquad a, b \in X.$$

Si $\tilde{a}_0$ *es cualquier punto fijo con* $\pi(\tilde{a}_0) = a$*, entonces*

$$d_X(a, b) = \min\big\{d_{\widetilde{X}}\big(\tilde{a}_0, \tilde{b}\big) : \pi\big(\tilde{b}\big) = b\big\}, \qquad a, b \in X.$$

Si X *es una superficie de Riemann (o una variedad holomorfa),* $\widetilde{X}$ *también lo es y* π *es holomorfa.*

Si Γ es el grupo de transformaciones recubridoras

$$\Gamma := \{g : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X} \text{ homeomorfismo tal que } \pi \circ g = \pi\},$$

entonces el espacio cociente $\widetilde{X}/\Gamma$ es homeomorfo a X (y lo escribiremos $\widetilde{X}/\Gamma = X$). Además, Γ es un grupo discreto sin puntos fijos, y es único salvo conjugación.

Que el grupo Γ sea discreto quiere decir que para todo $x \in \widetilde{X}$ existe un entorno U de x tal que $g(x) \notin U$ para todo $g \in \Gamma$ distinto de la aplicación identidad (el elemento neutro de Γ) o, lo que es lo mismo, que para todo $x \in \widetilde{X}$ el conjunto $\{g(x)\}_{g\in\Gamma}$ es un conjunto discreto.

Que Γ no tenga puntos fijos significa que ningún elemento de Γ distinto de la aplicación identidad tiene un punto fijo, es decir, que si $g(x) = x$ para algún $g \in \Gamma$ y $x \in \widetilde{X}$, entonces g es la aplicación identidad.

Teorema 2.4.3. *Sea* $(\widetilde{X}, \pi)$ *un espacio recubridor universal de* X *con grupo de transformaciones recubridoras* Γ*. Si* $(\widetilde{X}, ds_0)$ *es una superficie riemanniana y* Γ *es, además, un subgrupo del grupo de isometrías de* $(\widetilde{X}, ds_0)$*, entonces existe una métrica riemanniana* ds *en* X *tal que* $\pi^* ds = ds_0$*. Por tanto,*

$$d_X\big(\pi(x), \pi(y)\big) \le d_{\widetilde{X}}(x, y), \qquad x, y \in \widetilde{X},$$
$$d_X(a, b) = \min\big\{d_{\widetilde{X}}\big(\tilde{a}, \tilde{b}\big) : \pi\big(\tilde{a}\big) = a, \pi\big(\tilde{b}\big) = b\big\}, \qquad a, b \in X.$$

Si $\tilde{a}_0$ es cualquier punto fijo con $\pi(\tilde{a}_0) = a$, entonces

$$d_X(a,b) = \min\big\{d_{\widetilde{X}}\big(\tilde{a}_0, \tilde{b}\big) : \pi\big(\tilde{b}\big) = b\big\}, \qquad a, b \in X.$$

Además, si $X = \Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces $\widetilde{\Omega}$ puede elegirse contenido en $\mathbb{C}$, y si $ds = \lambda(z)|dz|$ en Ω y $ds_0 = \lambda_0(z)|dz|$ en $\widetilde{\Omega}$, entonces

$$\lambda(\pi(z))|\pi'(z)| = \lambda_0(z) \qquad \textit{para todo } z \in \Omega.$$

Obsérvese que la métrica ds_0 en $\widetilde{X}$ es precisamente el pullback de la métrica ds en X, por el Teorema 2.2.9.

Los dos resultados siguientes también nos serán útiles en el futuro.

Teorema 2.4.4 (Teorema del elevamiento, primera versión)**.** *Dados una aplicación recubridora universal $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$, un espacio simplemente conexo Y y una aplicación continua $f : Y \longrightarrow X$, existe un elevamiento $\tilde{f}$ de f, es decir, una aplicación continua $\tilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$.*

Además, si $x \in X, y \in Y, f(y) = x, \tilde{x} \in \widetilde{X}$ y $\pi(\tilde{x}) = x$, entonces puede elegirse $\tilde{f}$ con $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$.

Teorema 2.4.5 (Teorema del elevamiento, segunda versión)**.** *Sean una aplicación recubridora universal $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$, un espacio conexo y localmente conexo por arcos Y y una aplicación continua $f : Y \longrightarrow X$. Si $f \circ \gamma$ es trivial en X para toda curva cerrada $\gamma \subset Y$, entonces existe un elevamiento $\tilde{f}$ de f, es decir, una aplicación continua $\tilde{f} : Y \longrightarrow \widetilde{X}$ tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$.*

Además, si $x \in X, y \in Y, f(y) = x, \tilde{x} \in \widetilde{X}$ y $\pi(\tilde{x}) = x$, entonces puede elegirse $\tilde{f}$ con $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$.

Obsérvese que la primera versión es una consecuencia directa de la segunda, ya que si Y es simplemente conexo, entonces toda curva cerrada γ es trivial en Y y, consecuentemente, $f \circ \gamma$ es trivial en X.

La teoría de espacios recubridores permite, entre otras muchas cosas, probar el siguiente resultado crucial en la teoría de funciones de variable compleja.

Teorema 2.4.6. *Dada una curva γ cerrada y de clase C^1 a trozos en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, el índice de γ respecto al punto a,*

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}\,,$$

es igual al número de vueltas que γ da alrededor de a.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 0$. Consideremos la aplicación recubridora $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) = e^{2\pi i x}.$$

Si $z = \gamma(s)$ es una curva diferenciable en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, podemos considerar la curva $h(s) = \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}$ en $\mathbb{S}^1$ y su elevación $\tilde{h}(s)$ a $\mathbb{R}$. Entonces $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(0) + n$ para algún entero n, que es precisamente el número de vueltas que γ da alrededor de 0. Teniendo en cuenta que $p\,(\tilde{h}(s)) = h(s)$, con $h : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$, entonces

$$e^{2\pi i\tilde{h}(s)} = \frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|} \quad \Rightarrow \quad \gamma(s) = e^{2\pi i\tilde{h}(s)}|\gamma(s)|\,,$$

y, por tanto,

$$\gamma'(s) = e^{2\pi i\tilde{h}(s)}\Big(|\gamma(s)|2\pi i\tilde{h}'(s) + \frac{d}{ds}(|\gamma(s)|)\Big)\,.$$

Sustituyendo en la integral y, teniendo en cuenta que $\gamma(1) = \gamma(0)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{e^{2\pi i\tilde{h}(s)}\Big(|\gamma(s)|2\pi i\tilde{h}'(s) + \frac{d}{ds}(|\gamma(s)|)\Big)}{e^{2\pi i\tilde{h}(s)}|\gamma(s)|}\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\Big[2\pi i\tilde{h}(s) + \log(|\gamma(s)|)\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi i}\Big[2\pi i\big(\tilde{h}(1) - \tilde{h}(0)\big) + \log(|\gamma(1)|) - \log(|\gamma(0)|)\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi i}(2\pi i n + 0) = n.
\end{aligned}$$

□

2.4.1 Ejercicios

Ejercicio 2.4.1.1. *Demuestra que* $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *es simplemente conexo.*

Ejercicio 2.4.1.2. *Demuestra, como consecuencia del problema anterior, que* $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *es simplemente conexo.*

Ejercicio 2.4.1.3. *Sea una ecuación polinómica* $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ *con coeficientes reales o complejos. Demuestra que si* $|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$ *entonces todas las raíces de la ecuación están en el disco unidad* $\mathbb{D}$*.*

Ejercicio 2.4.1.4. *Prueba que el plano es recubridor universal del cilindro* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$*, encontrando una aplicación recubridora.*

Ejercicio 2.4.1.5. *Encuentra un espacio recubridor de un toro.*

Ejercicio 2.4.1.6. *Prueba que si* (X, p_1) *es un espacio recubridor de* Y*, e* (Y, p_2) *es espacio recubridor de* Z*, entonces* $(X, p_2 \circ p_1)$ *es espacio recubridor de* Z*.*

Ejercicio 2.4.1.7. *Si* X *es simplemente conexo, ¿cómo han de ser sus espacios recubridores?*

Ejercicio 2.4.1.8. *Encuentra un espacio recubridor de un "ocho" (es decir, el espacio formado al unir dos circunferencias por un punto).*

Ejercicio 2.4.1.9. *Prueba que el espacio recubridor de un grafo es un árbol.*

2.5 La métrica de Poincaré en superficies de Riemann.

Ya hemos definido la métrica de Poincaré en el disco y el semiplano superior. Dado que dicha métrica será extraordinariamente útil, conviene definirla en la mayor clase posible de conjuntos, y ese es el objetivo de la presente sección. Comencemos recordando el teorema más importante sobre aplicaciones conformes.

Diremos que dos superficies riemannianas son *conformemente equivalentes* si existe una aplicación conforme entre ellas.

Teorema 2.5.1 (Teorema de la aplicación de Riemann)**.** *Dado cualquier dominio simplemente conexo* $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ *existe una aplicación conforme* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$*, es decir,* Ω *es conformemente equivalente a* $\mathbb{D}$ *(y a* $\mathbb{U}$*).*

Además, fijado cualquier $z_0 \in \Omega$*, existe una tal aplicación conforme* f *con* $f(0) = z_0$*. Tal aplicación* f *es única si imponemos la condición adicional* $f'(0) > 0$*.*

Consecuentemente, dados dos dominios simplemente conexos $\Omega_1, \Omega_2 \subsetneq \mathbb{C}$, existe una función $f \in H(\Omega_1, \Omega_2)$ biyectiva, es decir, Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes.

Teorema 2.5.2 (Teorema de uniformización)**.** *Dada una superficie de Riemann* S*, su recubridor universal* $\widetilde{S}$ *es conformemente equivalente a* $\overline{\mathbb{C}}$*,* $\mathbb{C}$ *ó* $\mathbb{D}$*.*

1. *Si* $\widetilde{S}$ *es conformemente equivalente a* $\overline{\mathbb{C}}$*, entonces* S *también es conformemente equivalente a* $\overline{\mathbb{C}}$*.*

2. *Si* $\widetilde{S}$ *es conformemente equivalente a* $\mathbb{C}$*, entonces* S *es conformemente equivalente al plano complejo* $\mathbb{C}$*, al plano punteado* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *o a un toro* $\mathbb{T}$*.*

3. *Si* $\widetilde{S}$ *es conformemente equivalente a* $\mathbb{D}$ *(ó a* $\mathbb{U}$*), obtenemos todas las demás superficies de Riemann, que llamaremos* hiperbólicas *o* no excepcionales*.*

Denotaremos por $< g_1, g_2, \dots, g_k >$ el subgrupo de las transformaciones de Möbius generado por los elementos $g_1, g_2, \dots, g_k$.

Demostración. El primer enunciado es consecuencia del Teorema de la aplicación de Riemann (Teorema 2.5.1): como $\widetilde{S}$ es simplemente conexo, no tiene género y debe ser conformemente equivalente a $\overline{\mathbb{C}}$, a $\mathbb{C}$ o a algún dominio simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$; pero dichos dominios Ω son todos conformemente equivalentes a $\mathbb{D}$.

1. Supongamos que $\widetilde{S}$ es conformemente equivalente a $\overline{\mathbb{C}}$. Observemos que $\overline{\mathbb{C}}$ sólo puede recubrirse a sí mismo: sea Γ un grupo discreto tal que $S = \overline{\mathbb{C}}/\Gamma$; Γ es un subgrupo del grupo de las transformaciones de Möbius, por la Proposición 2.2.3. Como toda transformación de Möbius tiene algún punto fijo en $\overline{\mathbb{C}}$ (ver Ejercicio 2.1.1.10) Γ es sólo el elemento neutro (la aplicación identidad); por tanto, $\Gamma = \{id\}$ y entonces $S = \widetilde{S}/\{id\} = \widetilde{S}$ también es conformemente equivalente a $\overline{\mathbb{C}}$.

2. Supongamos que $\widetilde{S}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$. Entonces Γ ha de ser un subgrupo de $\{T(z) = az + b : a \neq 0, a, b \in \mathbb{C}\}$, por la Proposición 2.2.4.

   - Si Γ es sólo el elemento neutro (la aplicación identidad), $\Gamma = \{id\}$, entonces S es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$.
   - Si Γ tiene un único generador, entonces Γ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y al grupo generado por la traslación $< z + 2\pi i >$. En este caso $\mathbb{C}/\Gamma$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La función $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una aplicación recubridora universal para $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, con $\Gamma =< z + 2\pi i >$.
   - Si Γ tiene dos generadores, entonces Γ es isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ y al grupo generado por dos traslaciones $< z + 1, z + \tau >$, con $\Re\tau \neq 0$. Por tanto, el espacio cociente $\mathbb{C}/\Gamma$ es conformemente equivalente a un toro $\mathbb{T}$.
   - Si Γ tiene más de dos generadores, entonces Γ no es discreto, por lo que llegamos a una contradicción.

     Por tanto, sólo estos tres tipos de superficies pueden ser recubiertos por $\mathbb{C}$.

3. El punto tres no necesita demostración, ya que simplemente especifica todos los casos no tratados hasta ahora.

$\square$

Como ya hemos visto, la función $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una aplicación recubridora universal para $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, con $\Gamma =< z+2\pi i >$. Como las traslaciones son isometrías para la métrica euclídea, el Teorema 2.4.3 garantiza que podemos proyectar la métrica euclídea sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, resultando:

$$\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}(e^z)|e^z| = \lambda_{\mathbb{C}}(z) = 1.$$

Escribiendo $w = e^z$, entonces $\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}(w) = 1/|w|$ y $ds_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}(w) = |dw|/|w|$.

Si S es una superficie de Riemann hiperbólica, denominaremos *métrica hiperbólica o de Poincaré* en S a la proyección de la métrica hiperbólica de $\mathbb{D}$ (o de $\mathbb{U}$) mediante cualquier aplicación recubridora universal. Como S es conformemente equivalente a $\mathbb{D}/\Gamma$, donde Γ es el grupo de transformaciones recubridoras de un recubrimiento universal, los grupos Γ que podemos elegir para realizar tal representación son únicos salvo conjugación por un elemento de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, es decir, existe una biyección entre el conjunto de superficies de Riemann hiperbólicas (salvo equivalencia conforme) y el conjunto de subgrupos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ (salvo conjugación), que por el Teorema 2.3.1 coincide con el grupo de isometrías de $\mathbb{D}$. Como Γ es un grupo de isometrías para la métrica de Poincaré de $\mathbb{D}$, dicha métrica puede proyectarse mediante π, por el Teorema 2.4.3. Esta métrica está bien definida, ya que Γ es único salvo conjugación por una isometría de $\mathbb{D}$. La métrica hiperbólica es conforme con la euclídea (en cada carta local), tiene curvatura $K = -1$ (ya que es localmente isométrica a $\mathbb{D}$) y es completa. Además, su métrica hiperbólica es la única métrica que verifica estas tres propiedades, como veremos en el Teorema 2.5.4.

Dada cualquier superficie no excepcional S, si $\pi : \mathbb{D} \to S$ es un recubrimiento universal de S y $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, entonces $\pi \circ g : \mathbb{D} \to S$ es también un recubrimiento universal. Por tanto, al elegir un recubrimiento universal, se pueden prefijar $\pi(0)$ y el argumento de $\pi'(0)$ (en una carta local fija). Entonces, dado cualquier punto $p \in S$, existe una aplicación recubridora universal $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow S$ con $\pi(0) = p$. Por tanto, todo punto de S tiene un entorno isométrico a un entorno del origen en el disco unidad $\mathbb{D}$.

Obsérvese que toda superficie de Riemann admite una métrica conforme con la euclídea, con curvatura constante, y completa. Por tanto, siempre existe una geodésica de longitud mínima uniendo dos puntos cualesquiera (aunque no tiene por qué ser necesariamente única).

- Si $\widetilde{S} = \overline{\mathbb{C}}$, entonces $S = \overline{\mathbb{C}}$, con $K = 1$ (ver Sección 2.8 y Ejercicio 2.2.1.6).
- Si $\widetilde{S} = \mathbb{C}$, entonces S es $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ó $\mathbb{T}$, con $K = 0$.
- Si $\widetilde{S} = \mathbb{D}$ (ó $\mathbb{U}$), S tiene la métrica hiperbólica, con $K = -1$.

Si Ω es un dominio de $\mathbb{C}$ y $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$ es una aplicación recubridora, entonces

$$\lambda_\Omega(\pi(z))\, |\pi'(z)| = \frac{2}{1 - |z|^2}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}\,,$$

por el Teorema 2.4.3. De igual forma, si $\pi : \mathbb{U} \longrightarrow \Omega$ es una aplicación recubridora, entonces

$$\lambda_\Omega(\pi(z))\, |\pi'(z)| = \frac{1}{\Im z}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{U}\,.$$

Constituye un pequeño abuso de lenguaje el decir que la métrica de Poincaré es una métrica conforme, ya que la propiedad de conformalidad (conservar ángulos y orientaciones), es una relación de equivalencia entre dos métricas. Al hablar de superficies de Riemann que están contenidas en el plano, que la métrica sea conforme significa que es conforme con la métrica euclídea. Si trabajamos con una superficie general S, que la métrica sea conforme quiere decir que cualquier carta local de S es una aplicación conforme local sobre el plano con su métrica euclídea.

Conviene destacar un hecho importante acerca de la unicidad de la métrica de Poincaré: dada una variedad bidimensional orientable M, existen infinitos atlas de superficie de Riemann para M incompatibles (no conformes) entre sí, y para cada uno de ellos existe una única métrica de Poincaré. La elección de atlas de superficie de Riemann es equivalente a la elección de una clase de métricas conformes en la superficie y, por tanto, a la elección de la métrica de Poincaré.

Obsérvese que cualquier variedad riemanniana bidimensional orientable puede ser dotada de un atlas holomorfo de forma que su métrica sea conforme con la euclídea en cada carta, considerando como cartas las coordenadas isotermales y todas las que sean conformes con ellas.

La idea de la demostración de un hecho tan sorprendente como la unicidad de la métrica de Poincaré, es muy sencilla, pero necesitamos un lema previo.

Lema 2.5.3. *Si $f : (\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}}) \to (\mathbb{D}, g)$ es una isometría, g es una métrica conforme y $g_{\mathbb{D}}$ es la métrica de Poincaré, entonces $g_{\mathbb{D}} = g$.*

Demostración. Como f es una isometría, en particular, es una aplicación conforme de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ en $(\mathbb{D}, g)$; como $g_{\mathbb{D}}$ y g son métricas conformes con la euclídea, entonces f también es una aplicación conforme (en sentido euclídeo clásico) de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. Por el Teorema 2.3.1, f es una isometría de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ en $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ y, por tanto, $g_{\mathbb{D}} = g$. $\square$

Teorema 2.5.4 (Unicidad de la métrica hiperbólica)**.** *Dadas dos métricas completas g_1, g_2 en una superficie de Riemann hiperbólica S con $K = -1$ y conformes entre sí, entonces $g_1 = g_2$. En particular, existe una única métrica de Poincaré en S.*

Demostración. Obsérvese que basta probar el teorema con la hipótesis adicional de que g_1 sea la métrica de Poincaré en S, puesto que si dos tales métricas son iguales a la métrica de Poincaré, entonces también son iguales entre sí. Supongamos, por tanto, que g_1 es la métrica de Poincaré en S

Consideremos una aplicación recubridora $\pi : \mathbb{D} \to S$ y los pullbacks $g_{\mathbb{D}}$ y g en $\mathbb{D}$ por π de las métricas g_1 y g_2, es decir, $g_{\mathbb{D}} = \pi^* g_1$ y $g = \pi^* g_2$. Las métricas $g_{\mathbb{D}}$ y g también son completas, conformes y tienen curvatura $K = -1$. Fijemos un punto arbitrario $p \in S$; sea ahora $z \in \mathbb{D}$ con $\pi(z) = p$. Si consideramos en z las respectivas coordenadas geodésicas exponenciales para $g_{\mathbb{D}}$ y g (que están definidas en todo $\mathbb{D}$) la aplicación identidad en dichas coordenadas locales (que, de hecho, son coordenadas globales) es una isometría, ya que dichas coordenadas están completamente determinadas por la curvatura. Por tanto, el Lema 2.5.3 da que $g_{\mathbb{D}} = g$. Si proyectamos las métricas por π en un entorno de z, obtenemos que $g_1 = g_2$ en un entorno de p.

Como $p \in S$ es un punto arbitrario, concluimos que $g_1 = g_2$. $\square$

Acabamos esta sección con la siguiente inesperada relación entre el área (con la métrica de Poincaré) de una superficie compacta y su topología.

Teorema 2.5.5. *Si S es una superficie de Riemann compacta de género $g > 1$, el Teorema de Gauss-Bonnet garantiza que $A_S(S) = 4\pi(g-1)$.*

2.5.1 El cálculo de la métrica de Poincaré para algunos dominios sencillos.

Hallemos a continuación la métrica de Poincaré de algunos dominios sencillos: los anillos y el disco punteado.

Proposición 2.5.6. *La densidad de la métrica de Poincaré del anillo $A_\mu := \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < \mu\}$ es*

$$\lambda_{A_\mu}(w) = \frac{c}{|w| \operatorname{sen}(c \log |w|)}, \qquad \textit{con} \qquad c = \frac{\pi}{\log \mu}.$$

Demostración. Sea $\Gamma =< \sigma z >$, con $\sigma = e^{\frac{2\pi^2}{\log \mu}} > 1$. Tomando logaritmos se obtiene $\mu = e^{\frac{2\pi^2}{\log \sigma}}$.

Sea $f(z) := e^{-2\pi i \frac{\log z}{\log \sigma}}$. Observemos en primer lugar que

$$|f(z)| = e^{\frac{2\pi}{\log \sigma} \arg z} \in (1, \mu), \qquad \text{si } \arg z \in (0, \pi).$$

Además

$$f(\sigma z) = e^{-2\pi i \frac{\log z + \log \sigma}{\log \sigma}} = f(z)\,.$$

Por tanto, se tiene que $f : \mathbb{U} \to A_\mu$ es una aplicación recubridora universal y que Γ es el grupo de cubrimiento de $f(z)$. Por el Teorema 2.4.3, esto implica que

$$\lambda_{A_\mu}(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\mathbb{U}}(z) = \frac{1}{\Im z}\,.$$

Escribiendo $w = f(z) = e^{2\pi \frac{\arg z}{\log \sigma}} e^{-2\pi i \frac{\log |z|}{\log \sigma}}$, se tiene

$$f'(z) = \frac{-2\pi i}{\log \sigma} f(z) \frac{1}{z} \qquad \text{y} \qquad \lambda_{A_\mu}(w) \frac{2\pi}{\log \sigma} |w| = \frac{|z|}{\Im z}\,.$$

Escribiendo z en función de w, se tiene que

$$z = e^{\frac{\log \sigma \log w}{-2\pi i}} = e^{i \frac{\log \sigma \log |w|}{2\pi}} e^{-\frac{(\arg w + 2k\pi) \log \sigma}{2\pi}} = \sigma^{-k} e^{-\frac{\arg w \log \sigma}{2\pi}} e^{i \frac{\log \sigma \log |w|}{2\pi}}\,.$$

Por tanto,

$$\frac{\Im z}{|z|} = \operatorname{sen}\Big(\frac{\log \sigma \log |w|}{2\pi}\Big),$$

$$\lambda_{A_\mu}(w) = \frac{c}{|w| \operatorname{sen}(c \log |w|)}\,, \qquad \text{con} \quad c = \frac{\log \sigma}{2\pi} = \frac{\pi}{\log \mu}\,.$$

□

Proposición 2.5.7. *La densidad de la métrica de Poincaré del disco punteado* $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *es*

$$\lambda_{\mathbb{D}^*}(w) = \frac{1}{|w| \log \frac{1}{|w|}}\,.$$

Demostración. Sean $\Gamma =< z+1 >$ y $w = f(z) = e^{2\pi i z}$. En primer lugar,

$$|f(z)| = e^{-2\pi \Im z} \in (0,1) \qquad \text{si } \Im z > 0.$$

Despejando $\Im z$ se tiene

$$\Im z = \frac{-1}{2\pi} \log |f(z)| \,.$$

Puede comprobarse fácilmente que $f(z) = f(z+1)$ y que Γ es el grupo de cubrimiento de f. Por tanto, se tiene que $f : \mathbb{U} \to \mathbb{D}^*$ es una aplicación recubridora universal. Por el Teorema 2.4.3, esto implica

$$\lambda_{\mathbb{D}^*}(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\mathbb{U}}(z) = \frac{1}{\Im z} \,.$$

Como $f'(z) = 2\pi i f(z)$, escribiendo $w = f(z) = e^{2\pi i z}$, entonces $\Im z = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|w|}$ y $\lambda_{\mathbb{D}^*}(w) 2\pi |w| = \frac{2\pi}{\log \frac{1}{|w|}}$. Por tanto,

$$\lambda_{\mathbb{D}^*}(w) = \frac{1}{|w| \log \frac{1}{|w|}} \,.$$

$\square$

Los Ejercicios 2.5.4.2 y 2.5.4.3 proponen probar, respectivamente, los dos siguientes resultados.

Proposición 2.5.8. *La densidad de la métrica de Poincaré del disco $D(a,R)$ es*

$$\lambda_{D(a,R)}(z) = \frac{2\,R}{R^2 - |z-a|^2} \,.$$

Proposición 2.5.9. *La densidad de la métrica de Poincaré del disco punteado $D(a,R)^* = D(a,R) \setminus \{a\}$ es*

$$\lambda_{D(a,R)^*}(z) = \frac{1}{|z-a| \, \log \frac{R}{|z-a|}} \,.$$

En los Ejercicios 2.5.4.6, 2.5.4.7, 2.5.4.8 y 2.5.4.9 también se propone el cálculo de la métrica de Poincaré de diversos dominios.

Es interesante recordar aquí el famoso Teorema de Hilbert.

Teorema 2.5.10 (Teorema de Hilbert)**.** *Ninguna superficie completa con* $K = -1$ *admite una inmesrión isométrica en* $\mathbb{R}^3$*.*

Esto significa que no podemos "ver con ojos euclídeos" ninguna superficie de Riemann con su métrica de Poincaré (ni siquiera $\mathbb{D}$). No obstante, la pseudoesfera muestra "cómo" es un entorno pequeño de cualquier punto en cualquier superficie de Riemann hiperbólica. Recordemos que la pseudoesfera es una superficie no completa, definida como la superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$ obtenida por la rotación de la tractriz, y dada por la parametrización

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen} u \cos v\,, \\ y &= \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\,, \\ z &= \log \tan \frac{u}{2} + \cos u\,. \end{aligned}$$

Conviene destacar que la métrica de Poincaré permite probar de forma sencilla y elegante muchos teoremas difíciles de variable compleja, como los Teoremas pequeño y grande de Picard, el Teorema de Schottky,... como veremos en las siguientes secciones.

La siguiente subsección la dedicaremos a la principal herramienta para trabajar con la métrica de Poincaré.

2.5.2 El Lema de Schwarz

Lema 2.5.11 (Lema de Schwarz, segunda versión)**.** *Si* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *es una función holomorfa, entonces*

$$d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \le d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \qquad \textit{para todo} \;\; z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $f(0) = 0$. La Primera versión del Lema de Schwarz da $|f(z)| \le |z|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Como la función $h(t) := \log \frac{1+t}{1-t}$ es creciente para $t \in [0, 1)$, podemos concluir que

$$\log \frac{1 + |f(z)|}{1 - |f(z)|} \le \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}\,, \qquad \text{para todo} \;\; z \in \mathbb{D}.$$

Esto implica que $d_{\mathbb{D}}(f(z), f(0)) \le d_{\mathbb{D}}(z, 0)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Supongamos ahora que $f(0) \neq 0$. Sea $T(z) = \frac{z-f(0)}{1-\overline{f(0)}z}$; T es una isometría de $\mathbb{D}$ con $T(f(0)) = 0$. Entonces $g = T \circ f$ es una función holomorfa de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ que verifica $g(0) = 0$ y, por tanto, podemos concluir que $d_{\mathbb{D}}(T(f(z)), T(f(0))) \leq d_{\mathbb{D}}(z, 0)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Como T es una isometría, entonces

$$d_{\mathbb{D}}(f(z), f(0)) = d_{\mathbb{D}}(T(f(z)), T(f(0))).$$

Por tanto, deducimos que $d_{\mathbb{D}}(f(z), f(0)) \leq d_{\mathbb{D}}(z, 0)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Dados ahora $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, sea $S(z) = \frac{z+z_1}{1+\overline{z_1}z}$; S es una isometría de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ con $S(0) = z_1$. Entonces $h = f \circ S$ es una función holomorfa de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ y, como ya hemos probado, $d_{\mathbb{D}}(h(0), h(S^{-1}(z_2))) \leq d_{\mathbb{D}}(0, S^{-1}(z_2))$.

Observemos ahora que, como S^{-1} es una isometría,

$$d_{\mathbb{D}}(0, S^{-1}(z_2)) = d_{\mathbb{D}}(S^{-1}(z_1), S^{-1}(z_2)) = d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$$

y

$$d_{\mathbb{D}}(h(0), h(S^{-1}(z_2))) = d_{\mathbb{D}}(f(S(0)), f(S(S^{-1}(z_2)))) = d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)).$$

Por tanto, $d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. $\square$

Lema 2.5.12 (Lema de Schwarz, tercera versión)**.** *Si $f : \mathbb{D} \to S$ es una función holomorfa y S una superficie de Riemann hiperbólica, entonces*

$$d_S(f(z_1), f(z_2)) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \qquad \textit{para todo } \ z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Consideremos una aplicación recubridora universal $\pi : \mathbb{D} \to S$. Por la primera versión del Teorema del elevamiento (ver Teorema 2.4.4), como $\mathbb{D}$ es simplemente conexo, existe $\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$. Recordemos que la métrica de Poincaré en $\mathbb{D}$ es el pullback de la métrica de Poincaré en S por π (ver Teorema 2.4.3).

Usando que π decrece distancias (ver Teorema 2.4.3) y la Segunda versión del Lema de Schwarz para $\tilde{f}$, se tiene que

$$d_S(f(z_1), f(z_2)) = d_S(\pi(\tilde{f}(z_1)), \pi(\tilde{f}(z_2))) \leq d_{\mathbb{D}}(\tilde{f}(z_1), \tilde{f}(z_2)) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2),$$

para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. $\square$

Teorema 2.5.13 (Lema de Schwarz, última versión)**.** *Si $f : S_1 \to S_2$ es holomorfa, con S_1, S_2 superficies de Riemann hiperbólicas, entonces*

$$d_{S_2}(f(p), f(q)) \leq d_{S_1}(p, q) \qquad \textit{para todo } \ p, q \in S_1.$$

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{D} \to S_1$ una aplicación recubridora universal. Entonces $f \circ \pi : \mathbb{D} \to S_2$ y la Tercera versión del Lema de Schwarz da que $d_{S_2}(f(\pi(z_1)), f(\pi(z_2)) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Dados $p, q \in S_1$, existen puntos $z_1 \in \pi^{-1}(p)$, $z_2 \in \pi^{-1}(q)$ con $d_{S_1}(p, q) = d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$, por el Teorema 2.4.3. Por tanto,

$$d_{S_2}(f(p), f(q)) = d_{S_2}(f(\pi(z_1)), f(\pi(z_2)) \leq d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = d_{S_1}(p, q).$$

□

Puede probarse que si se alcanza la igualdad en el Lema de Schwarz, entonces f es una aplicación recubridora.

Obsérvese que el Lema de Schwarz permite acotar de manera uniforme el crecimiento de todas las funciones holomorfas entre dos superficies de Riemann hiperbólicas (el Teorema 2.6.14 ilustra a la perfección esta afirmación). Por tanto, esta espectacular versión del Lema de Schwarz justifica por sí sola el estudio de la métrica de Poincaré.

Ahora podemos deducir algunas importantes consecuencias del Teorema 2.5.13. Recordemos en primer lugar el siguiente famoso teorema. Diremos que p es un *punto fijo* de una aplicación f si $f(p) = p$.

Teorema 2.5.14 (Teorema del punto fijo)**.** *Si X es un espacio métrico completo no vacío y $f : X \to X$ es una aplicación contractiva, es decir, existe $r < 1$ tal que $d(f(p), f(q)) \leq r\, d(p, q)$ para todo $p, q \in X$, entonces existe un único punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$.*

Veamos a continuación una versión del Teorema del punto fijo para funciones holomorfas.

Teorema 2.5.15. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una aplicación holomorfa tal que su imagen tiene clausura compacta en $\mathbb{D}$. Entonces, existe un único punto $z \in \mathbb{D}$ tal que $f(z) = z$.*

Demostración. Por hipótesis existe un $r < 1$ tal que $f(\mathbb{D}) \subset D(0,r)$, y para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ se verifica $d_{D(0,r)}(f(z_1), f(z_2)) \le d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$. Pero esta desigualdad no es suficiente para conseguir nuestro objetivo.

Obsérvese que para todo $0 \le t \le r^2 < 1$ se verifica la desigualdad $1 - t \ge (r^2 - t)/r^2$. Consecuentemente,

$$\lambda_{D(0,r)}(w) = \frac{2r}{r^2 - |w|^2} \ge \frac{2r^{-1}}{1 - |w|^2} = r^{-1} \lambda_{\mathbb{D}}(w)\,,$$

para todo $w \in D(0,r)$, y se tiene entonces que $r\, L_{D(0,r)}(\gamma) \ge L_{\mathbb{D}}(\gamma)$ para toda curva γ diferenciable en $D(0,r)$. Por tanto, $r\, d_{D(0,r)}(f(z_1), f(z_2)) \ge d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2))$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Finalmente deducimos de la última versión del Lema de Schwarz que

$$d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \le r\, d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) \qquad \text{para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{D},$$

por lo que f es una aplicación contractiva con respecto a la métrica de Poincaré. Como el disco $\mathbb{D}$ dotado con la métrica de Poincaré es un espacio métrico completo, podemos aplicar el Teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas, y concluimos que f tiene un único punto fijo en $\mathbb{D}$. $\square$

Usando la ultima versión del Lema de Schwarz (Teorema 2.5.13) podemos probar la siguiente generalización del Teorema 2.3.1.

Teorema 2.5.16. *Si S_1, S_2 son superficies de Riemann hiperbólicas, entonces una aplicación de S_1 en S_2 es una isometría (con sus respectivas métricas de Poincaré) si y sólo si es conforme. En particular, para toda superficie de Riemann hiperbólica S se tiene que* $\operatorname{Aut}(S) = \operatorname{Isom}(S)$.

Demostración. Sea f una aplicación de S_1 en S_2.

Si f es una isometría, entonces preserva longitudes y ángulos con sus orientaciones y, en particular, es conforme.

Si f es una aplicación conforme, entonces tanto f como f^{-1} son holomorfas, y la ultima versión del Lema de Schwarz da

$$d_{S_2}(f(z_1), f(z_2)) \le d_{S_1}(z_1, z_2)$$
$$d_{S_1}(z_1, z_2) = d_{S_1}(f^{-1}(f(z_1)), f^{-1}(f(z_2))) \le d_{S_2}(f(z_1), f(z_2))$$

para todo $z_1, z_2 \in S_1$. Por tanto, $d_{S_2}(f(z_1), f(z_2)) = d_{S_1}(z_1, z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in S_1$. La Proposición 2.2.8 garantiza entonces que f es una isometría. $\square$

De los Teoremas 2.5.16 y 2.2.5 se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 2.5.17. *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dos dominios hiperbólicos y $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una aplicación conforme, entonces*

$$\lambda_{\Omega_2}(f(z))\,|f'(z)| = \lambda_{\Omega_1}(z)\,, \qquad \textit{para todo} \;\; z \in \Omega_1\,.$$

Los siguientes resultados son "versiones infinitesimales" de la última versión del Lema de Schwarz (Teorema 2.5.13).

Teorema 2.5.18. *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dos dominios hiperbólicos y $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una función holomorfa. Entonces*

$$\lambda_{\Omega_2}(f(z))\,|f'(z)| \le \lambda_{\Omega_1}(z)\,, \qquad \textit{para todo} \;\; z \in \Omega_1\,.$$

Podemos deducir directamente el siguiente resultado:

Teorema 2.5.19. *Sean $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ dominios hiperbólicos. Entonces $\lambda_{\Omega_2}(z) \le \lambda_{\Omega_1}(z)$, para todo $z \in \Omega_1$.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema 2.5.18, tomando como f la inclusión de Ω_1 en Ω_2, que verifica $f'(z) = 1$ para todo $z \in \Omega_1$. □

Teorema 2.5.20. *Sean S_1, S_2 superficies de Riemann hiperbólicas y $f : S_1 \to S_2$ holomorfa. Si γ es una curva en S_1 y B es un conjunto medible en S_1, entonces se tiene $L_{S_2}(f(\gamma)) \le L_{S_1}(\gamma)$ y $A_{S_2}(f(B)) \le A_{S_1}(B)$.*

Teorema 2.5.21. *Sean $S_1 \subseteq S_2$ superficies de Riemann hiperbólicas. Si γ es una curva en S_1 y B es un conjunto medible en S_1, entonces se tiene $L_{S_2}(\gamma) \le L_{S_1}(\gamma)$ y $A_{S_2}(B) \le A_{S_1}(B)$.*

2.5.3 Estimaciones de la métrica de Poincaré en dominios planos

Para la mayor parte de los dominios Ω contenidos en $\mathbb{C}$, el cálculo explícito de λ_Ω es imposible, pero existen estimaciones muy buenas, que suelen ser suficientes en los casos prácticos.

En primer lugar, una aplicación del Lema de Schwarz implica la siguiente desigualdad.

Proposición 2.5.22. *Para todo dominio hiperbólico $\Omega \subset \mathbb{C}$ se verifica*

$$\lambda_\Omega(z) \le \frac{2}{d(z,\partial\Omega)},$$

para todo $z \in \Omega$, donde d es la distancia euclídea.

Demostración. Si definimos $r := d(z,\partial\Omega)$, entonces se tiene $D(z,r) \subseteq \Omega$, y así el Teorema 2.5.19 y la Proposición 2.5.8 implican que

$$\frac{2}{r} = \lambda_{D(z,r)}(z) \ge \lambda_\Omega(z).$$

$\square$

El Teorema 1/4 de Koebe permite deducir el siguiente resultado, que es un recíproco parcial de la proposición anterior.

Proposición 2.5.23. *Para todo dominio simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ se tiene*

$$\lambda_\Omega(z) \ge \frac{1}{2\, d(z,\partial\Omega)},$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Sean $z_0 \in \Omega$, $r := d(z,\partial\Omega)$ y f una aplicación de Riemann, $f : \mathbb{D} \to \Omega$, tal que $f(0) = z_0$. Entonces el Corolario 1.3.37 garantiza que $D(z_0, |f'(0)|/4) \subset f(\mathbb{D})$ y, por tanto, $|f'(0)| \le 4r$. Como $\lambda_\Omega(z_0)|f'(0)| = \lambda_\mathbb{D}(0) = 2$ por el Corolario 2.5.17, deducimos que

$$\lambda_\Omega(z_0) = \frac{\lambda_\mathbb{D}(0)}{|f'(0)|} = \frac{2}{|f'(0)|} \ge \frac{1}{2r}\,,$$

que es la desigualdad deseada. $\square$

Consecuentemente, en los dominios simplemente conexos se tiene que $\lambda_\Omega(z)$ y $d(z,\partial\Omega)^{-1}$ son funciones comparables. Esto es también cierto para una clase de dominios mucho más amplia, los llamados dominios modulados (ver [BP]).

Veamos ahora una desigualdad muy precisa para la métrica de Poincaré en $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, que se prueba en [Mi]:

Teorema 2.5.24. *Para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *se tiene*

$$\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(z) \geq \frac{1}{|z|\big(k + \log|z|\big)}\,,$$

donde $k := \dfrac{\Gamma(1/4)^4}{4\pi^2} = 4.3768796\ldots$

Unas muy buenas estimaciones de λ_Ω para un dominio plano general fueron obtenidas por Beardon y Pommerenke en [BP]; combinando sus ideas con la desigualdad del Teorema 2.5.24 se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.5.25. *Para cualquier dominio hiperbólico* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *se tiene*

$$1 \leq \lambda_\Omega(z)\, d(z, \partial\Omega)\, (k + \beta_\Omega(z)) \leq 2k + \pi/2, \qquad \textit{para todo } z \in \Omega,$$

donde $k := \dfrac{\Gamma(1/4)^4}{4\pi^2} = 4.3768796\ldots$ *y*

$$\beta_\Omega(z) := \inf\left\{ \left|\log\frac{|z-a|}{|b-a|}\right| : \ a, b \in \partial\Omega,\ |z-a| = d(z,\partial\Omega) \right\}.$$

Proof. Fijemos cualquier punto $z \in \Omega$. Es fácil probar que el ínfimo en la definición de $\beta_\Omega(z)$ es, de hecho, un mínimo. Elijamos, por tanto, $a, b \in \partial\Omega$ con $|z-a| = d(z,\partial\Omega)$ y

$$\beta_\Omega(z) = \left|\log\frac{|z-a|}{|b-a|}\right|.$$

Para probar la primera desigualdad, consideremos ahora la función $g(w) := (w-a)/(b-a)$. Observemos que $g(\Omega) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ puesto que $a, b \notin \Omega$; por tanto, el Teorema 2.5.19 nos dice que $\lambda_{g(\Omega)}(g(z)) \geq \lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(g(z))$. El Corolario 2.5.17 nos asegura que $\lambda_{g(\Omega)}(g(z)) = |b-a|\, \lambda_\Omega(z)$, y entonces el Teorema 2.5.24 nos permite concluir

$$\begin{aligned} |b-a|\lambda_\Omega(z) = \lambda_{g(\Omega)}(g(z)) \geq \lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(g(z)) &\geq \frac{1}{|g(z)|\big(k + \big|\log|g(z)|\big|\big)} \\ = \frac{1}{\frac{|z-a|}{|b-a|}\big(k + \big|\log\frac{|z-a|}{|b-a|}\big|\big)} &= \frac{|b-a|}{|z-a|\big(k+\beta_\Omega(z)\big)}\,, \end{aligned}$$

y esto da la primera desigualdad.

Para probar la segunda desigualdad, supongamos primero que $\beta_\Omega(z) = 0$; entonces la Proposición 2.5.22 implica directamente el resultado. Supongamos ahora que $\beta_\Omega(z) > 0$ y consideremos el anillo $A := \{\delta e^{-\beta} < |w-a| < \delta e^{\beta}\}$, donde $\delta := d(z, \partial\Omega) = |z-a|$ and $\beta := \beta_\Omega(z)$. Si $\zeta \in A$, entonces

$$e^{-\beta} < \frac{\delta}{|\zeta - a|} < e^{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad \left| \log \frac{|z-a|}{|\zeta - a|} \right| < \beta,$$

y concluimos que $\zeta \notin \partial\Omega$; por tanto, $A \cap \partial\Omega = \varnothing$. Como $z \in A \cap \Omega$, deducimos que $A \subseteq \Omega$. Consecuentemente, el Teorema 2.5.19 implica que

$$\lambda_\Omega(z) \le \lambda_A(z) = \frac{\pi}{2\,\delta\,\beta} = \frac{\pi}{2\,d(z,\partial\Omega)\,\beta_\Omega(z)}\,,$$

ya que $|z-a| = \delta = d(z, \partial\Omega)$ y el Ejercicio 2.5.4.4 asegura que

$$\lambda_A(w) = \frac{\pi}{2\,\beta\,|w-a|\,\operatorname{sen} \frac{\pi}{2\beta}\big(\beta + \log \frac{|w-a|}{\delta}\big)}\,.$$

□

2.5.4 Ejercicios

Ejercicio 2.5.4.1. *Si $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ es un dominio hiperbólico, $f(z) = az + b$ y $\Omega = f(\Omega_0)$, prueba que Ω es hiperbólico y halla λ_Ω en función de λ_{Ω_0}.*

Ejercicio 2.5.4.2. *Prueba que la densidad de la métrica hiperbólica en el disco euclídeo de centro a y radio R es $\lambda_\Omega(z) = \dfrac{2\,R}{R^2 - |z-a|^2}$ usando el Ejercicio 2.5.4.1.*

Ejercicio 2.5.4.3. *Prueba que si $\Omega := \{0 < |z-a| < R\}$, entonces*

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{1}{|z-a|\,\log \frac{R}{|z-a|}}\,,$$

usando el Ejercicio 2.5.4.1 y la Proposición 2.5.7.

Ejercicio 2.5.4.4. *Prueba que si* $\Omega := \{\delta e^{-\beta} < |z-a| < \delta e^{\beta}\}$, *entonces*

$$\lambda_\Omega(z) = \frac{\pi}{2\,\beta\,|z-a|\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2\beta}\left(\beta + \log\frac{|z-a|}{\delta}\right)},$$

usando el Ejercicio 2.5.4.1 y la Proposición 2.5.6.

Ejercicio 2.5.4.5. *Prueba que el ínfimo en la definición de* β_Ω *en el Teorema 2.5.25 es, de hecho, un mínimo.*

Ejercicio 2.5.4.6. *Encuentra una aplicación conforme de* $\mathbb{U}$ *en* $\Omega = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. *Comprueba que* $\lambda_\Omega(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,|z|\,(|z|+x)}}$ *si* $z = x+iy$.

Ejercicio 2.5.4.7. *Encuentra una aplicación conforme de* $\mathbb{U}$ *en el primer cuadrante* C. *Comprueba que* $\lambda_C(z) = \dfrac{|z|}{xy}$ *si* $z = x+iy$.

Ejercicio 2.5.4.8. *Encuentra una aplicación conforme de* $\mathbb{U}$ *en la banda horizontal* $B_\pi = \{z = x+iy : 0 < y < \pi\}$. *Comprueba que se verifica* $\lambda_{B_\pi}(z) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,y}$.

Ejercicio 2.5.4.9. *Prueba que la métrica de Poincaré de la banda horizontal* $B_a = \{z = x+iy : 0 < y < a\}$ *es* $\lambda_{B_a}(z) = \dfrac{\pi}{a\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi y}{a}}$.

Indicación: *Usa los Ejercicios 2.5.4.1 y 2.5.4.8.*

Ejercicio 2.5.4.10. *Comprueba que la métrica hiperbólica del disco punteado* $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}\setminus\{0\}$ *tiene curvatura* -1.

Ejercicio 2.5.4.11. *Comprueba que la métrica hiperbólica del anillo* $A_\mu = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \mu\}$ *tiene curvatura* -1.

Ejercicio 2.5.4.12. *Prueba cuándo se alcanza la igualdad en el Lema 2.5.11:*

Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *es holomorfa y existen* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ *con* $z_1 \neq z_2$ *y* $d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) = d_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)$, *entonces* f *es una isometría de* $\mathbb{D}$.

Indicación: *Sigue el argumento de la demostración del Lema 2.5.11 y usa la parte relativa a la igualdad en el Lema 2.1.4.*

Ejercicio 2.5.4.13. *Si* S *es una superficie de Riemann hiperbólica, prueba que para cada* $p \in S$ *existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que* $A_S(B_S(p,r)) = 4\pi\ \mathrm{senh}^2\frac{r}{2}$ *y* $L_S(\partial B_S(p,r)) = 2\pi\ \mathrm{senh}\ r$, *para todo* $0 < r < \varepsilon$.

Ejercicio 2.5.4.14. *Es conocido que toda superficie de Riemann compacta es conformemente equivalente a la esfera de Riemann, a un toro, o a un "toro con g asas" (con género $g > 1$). Prueba que una superficie de Riemann compacta es hiperbólica si y sólo si es conformemente equivalente a un toro con género $g > 1$.*

Ejercicio 2.5.4.15. *Prueba que la pseudoesfera tiene curvatura constante $K = -1$.*

Ejercicio 2.5.4.16. *Demuestra que para todo dominio hiperbólico $\Omega \subset \mathbb{C}$, se tiene que $\lim_{z\to\partial\Omega} \lambda_\Omega(z) = \infty$.*

Ejercicio 2.5.4.17. *Sea $\{\Omega_n\}$ una exhaución de un domino hiperbólico Ω, es decir, Ω_n son dominios verificando $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$ y $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. Demuestra que $\lambda_{\Omega_n}(z)$ converge uniformemente sobre compactos a $\lambda_\Omega(z)$.*

En conexión con este ejercicio se puede consultar el artículo [H], donde se prueba un resultado más fuerte que éste.

2.6 Primeros teoremas de la Teoría Geométrica de Funciones

Uno de los problemas más importantes en la Teoría Geométrica de Funciones es determinar si existen funciones holomorfas entre dos superficies de Riemann dadas y, en caso afirmativo, estudiar su crecimiento. Esta sección contiene muchos resultados que pueden situarse en este contexto.

Recordemos que una función u es armónica en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ si $\Delta u = 0$ en Ω. El siguiente es un resultado tan clásico como importante en variable compleja y en ecuaciones en derivadas parciales.

Teorema 2.6.1 (Lema de Harnack)**.** *Si u es una función armónica positiva en $\mathbb{D}$ y $z = re^{i\theta}$, se tiene que*

$$\frac{1-r}{1+r} \le \frac{u(re^{i\theta})}{u(0)} \le \frac{1+r}{1-r}\,, \qquad \text{para todo } r \in [0,1),\ \theta \in [0,2\pi).$$

Demostración. Como es bien conocido (ver, por ejemplo, [Ts, p.143]), una función armónica positiva puede escribirse como la integral de Poisson de una medida (positiva) μ en $\partial\mathbb{D}$:

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\mu(\varphi)\,.$$

Como

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{1-r^2}{1+2r+r^2} \le \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2} \le \frac{1-r^2}{1-2r+r^2} = \frac{1+r}{1-r}\,,$$

y μ es una medida positiva, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1-r}{1+r}\int_0^{2\pi} d\mu(\varphi) &\le \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\mu(\varphi) \\ &\le \frac{1+r}{1-r}\int_0^{2\pi} d\mu(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{1-r}{1+r}\, u(0) \le u(re^{i\theta}) \le \frac{1+r}{1-r}\, u(0)\,,$$

de donde se deduce el resultado, ya que $u(0) > 0$. $\square$

Si S es una superficie de Riemann, una función $u : S \to \mathbb{R}$ se dice *armónica* si para todo $p \in S$ existe una carta local (U, φ) de S con $p \in U$, tal que $u \circ \varphi^{-1}$ es armónica en $\varphi(U)$.

Proposición 2.6.2. *Si S es una superficie de Riemann y $u : S \to \mathbb{R}$ es armónica, entonces para toda carta local (V, ψ) de S, se tiene que $u\circ\psi^{-1}$ es armónica en $\psi(V)$.*

Demostración. Sean (V, ψ) una carta local de S y $z \in \psi(V)$. Como u es armónica, existe una carta local (U, φ) de S con $\psi^{-1}(z) \in U$ tal que $u \circ \varphi^{-1}$ es armónica en $\varphi(U)$. Como $u \circ \psi^{-1} = (u \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$ en $\psi(U \cap V)$ es la composición de una función holomorfa con una función armónica, entonces $u\circ\psi^{-1}$ es armónica en un entorno de z (en $\psi(U\cap V)$) por la Proposición 1.1.14. Como esto se cumple para todo $z \in \psi(V)$, entonces $u \circ \psi^{-1}$ es armónica en $\psi(V)$. $\square$

El siguiente resultado generaliza la Proposición 1.1.14 en el contexto de superficies de Riemann.

Proposición 2.6.3. *Si S_1, S_2 son superficies de Riemann, $f : S_1 \to S_2$ holomorfa y $u : S_2 \to \mathbb{R}$ armónica, entonces $u \circ f$ es armónica en S_1.*

Demostración. Dado $p \in S_1$, sean (V, ψ) una carta local de S_2 con $f(p) \in V$ y (U, φ) una carta local de S_1 con $p \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Como f es holomorfa, la función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(U)$. Como u es armónica, la función $u \circ \psi^{-1}$ es armónica en $\psi(V)$. Por tanto, la Proposición 1.1.14 da que

$$(u \circ f) \circ \varphi^{-1} = (u \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

es armónica en $\varphi(U)$. Como p es un punto cualquiera de S_1, concluimos que $u \circ f$ es armónica en S_1. $\square$

Teorema 2.6.4 (Lema de Harnack en superficies de Riemann)**.** *Si v es una función armónica positiva en una superficie de Riemann hiperbólica S, se tiene*

$$e^{-d_S(p,q)} \le \frac{v(q)}{v(p)} \le e^{d_S(p,q)} \qquad \textit{para todo } p, q \in S.$$

Obsérvese que esta es una excelente generalización del Lema de Harnack clásico, incluso si tomamos $S = \mathbb{D}$, puesto que compara los valores de v en dos puntos cualesquiera.

Demostración. Fijemos dos puntos $p, q \in S$. Sea $\pi : \mathbb{D} \to S$ una aplicación recubridora universal con $\pi(0) = p$. El Teorema 2.4.3 garantiza que existe un punto $a \in \pi^{-1}(q)$ con $d_{\mathbb{D}}(0, a) = d_S(p, q)$.

La función $u = v \circ \pi$ es armónica y positiva en $\mathbb{D}$ por la Proposición 2.6.3, y satisface

$$\frac{1 - |a|}{1 + |a|} \le \frac{u(a)}{u(0)} \le \frac{1 + |a|}{1 - |a|},$$

por el Lema de Harnack, es decir, $e^{-d_{\mathbb{D}}(0,a)} \le \frac{v(\pi(a))}{v(\pi(0))} \le e^{d_{\mathbb{D}}(0,a)}$, y esto es equivalente a

$$e^{-d_S(p,q)} \le \frac{v(q)}{v(p)} \le e^{d_S(p,q)}.$$

$\square$

Aunque ya disponemos de una demostración del Teorema de Liouville (ver Teorema 1.3.16), vamos a probarlo de nuevo, de forma tan rápida como elegante, usando la última versión del Lema de Schwarz (Teorema 2.5.13).

Teorema 2.6.5 (Teorema de Liouville)**.** *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ es holomorfa, entonces f es constante.*

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $R > \max\{|z_1|, |z_2|\}$. Si denotamos por D_R el disco de centro 0 y radio R, se tiene

$$d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \le d_{D_R}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{D}}\Big(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}\Big) \to 0\,, \quad \text{si } R \to \infty\,,$$

ya que $g(z) = z/R$ es una aplicación conforme de D_R en $\mathbb{D}$.

Por lo tanto, $d_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) = 0$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, lo cual implica que f es constante. □

El Teorema de Liouville nos dice que las únicas funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$ son las constantes. Pero, de hecho, esta misma prueba permite obtener unos resultados mucho más generales.

Teorema 2.6.6. *Si S es una superficie de Riemann hiperbólica y $f : \mathbb{C} \to S$ es una aplicación holomorfa, entonces f es constante.*

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $R > \max\{|z_1|, |z_2|\}$. Si denotamos por D_R el disco de centro 0 y radio R, se tiene

$$d_S(f(z_1), f(z_2)) \le d_{D_R}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{D}}\Big(\frac{z_1}{R}, \frac{z_2}{R}\Big) \to 0\,, \quad \text{si } R \to \infty\,.$$

Por lo tanto, $d_S(f(z_1), f(z_2)) = 0$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, lo cual implica que f es constante. □

Teorema 2.6.7. *Si R es una superficie de Riemann no hiperbólica, S es una superficie de Riemann hiperbólica y $f : R \to S$ es una aplicación holomorfa, entonces f es constante.*

Demostración. Si $R = \overline{\mathbb{C}}$, entonces el Teorema 2.6.6 implica que f es constante.

En otro caso, se tiene que el recubridor universal $\tilde{R}$ de R es $\tilde{R} = \mathbb{C}$ y podemos considerar la aplicación recubridora universal $\pi : \mathbb{C} \to R$. Entonces, la función $f \circ \pi : \mathbb{C} \to S$ es constante por el Teorema 2.6.6. Dado que π es suprayectiva deducimos que f es constante. □

El Teorema 2.6.6, que generaliza el Teorema de Liouville, nos asegura que las únicas funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en una superficie de Riemann hiperbólica son las constantes. En particular, se tiene:

Corolario 2.6.8 (Teorema pequeño de Picard)**.** *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ es holomorfa, entonces f es constante.*

El siguiente resultado es un corolario del Teorema 1.3.21.

Teorema 2.6.9 (Teorema de la singularidad evitable)**.** *Si $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{D}$ es holomorfa, entonces f tiene una singularidad evitable en $z = 0$.*

El Teorema grande de Picard generaliza el Teorema 2.6.9.

Teorema 2.6.10 (Teorema grande de Picard)**.** *Si $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ es holomorfa, entonces f se extiende a $z = 0$ como una función meromorfa , donde tiene o bien una singularidad evitable o bien un polo.*

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ una aplicación recubridora universal. Para $0 < r < 1$, sea $\gamma_r := \{|z| = r\}$. Si $f(\gamma_r)$ es trivial en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ para algún $r \in (0, 1)$ (y, por tanto, para todo $r \in (0, 1)$), entonces, por el Teorema 2.4.5, existe una elevación $\tilde{f}$ de f, con $\pi \circ \tilde{f} = f$ y $\widetilde{f} : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{D}$. Como $\widetilde{f}$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$ por el Teorema 2.6.9, entonces f también la tiene ya que π es biholomorfa en un entorno de $\tilde{f}(0)$ (es decir, es holomorfa e inyectiva en dicho entorno y su inversa también es holomorfa).

Si $f(\gamma_r)$ no es trivial en $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, entonces rodea sólo a 0, sólo a 1 ó a ambos puntos. Por el Teorema 2.5.20 y la Proposición 2.5.7 se tiene que

$$L_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(f(\gamma_r)) \le L_{\mathbb{D}\setminus\{0\}}(\gamma_r) = \int_{|z|=r} \frac{|dz|}{|z| \log \frac{1}{|z|}} = \frac{2\pi r}{r \log \frac{1}{r}}$$
$$= \frac{2\pi}{\log \frac{1}{r}} \to 0, \qquad \text{si } \ r \to 0^+.$$

Dado $0 < \delta < 1/2$, sean $N_\delta := \{w \in \mathbb{C} : \ \delta \le |w| \le \delta^{-1}, \ |w-1| \ge \delta\}$, $C_\delta^1 := \{|w| > \delta^{-1}\}$, $C_\delta^2 := \{0 < |w| < \delta\}$ y $C_\delta^3 := \{0 < |w-1| < \delta\}$. Como la métrica de Poincaré es completa, para todo $j \neq k$ se tiene que $\lim_{\delta \to 0^+} d_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(C_\delta^j, C_\delta^k) = \infty$. Por lo tanto, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $0 < \delta < \delta_0$, entonces $d_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(C_\delta^j, C_\delta^k) > 1$, para todo $j \neq k$.

Fijemos $0 < \delta < \delta_0$; como N_δ es compacto, existe $0 < C(\delta) < 1$ tal que toda curva γ no trivial en $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ que interseca N_δ verifica $L_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(\gamma) \ge C(\delta)$.

Como $\lim_{r \to 0^+} L_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(f(\gamma_r)) = 0$, existe r_δ tal que si $0 < r < r_\delta$, entonces $L_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(f(\gamma_r)) < C(\delta)$; entonces $f(\gamma_r) \cap N_\delta = \varnothing$ para todo $0 < r < r_\delta$. Por lo tanto, $f(\gamma_r)$, para todo $0 < r < r_\delta$, está contenida o bien en C_δ^1, o bien en C_2^δ, o bien en C_3^δ.

Supongamos que $f(\gamma_r) \subset C_\delta^2$ para todo $0 < r < r_\delta$; entonces

$$f(D(0, r_\delta) \setminus \{0\}) \subseteq \{0 < |w| < \delta\}$$

para todo $0 < \delta < \delta_0$, por lo que $\lim_{z \to 0} f(z) = 0$. De forma similar, si $f(\gamma_r) \subset C_\delta^3$ (respectivamente, si $f(\gamma_r) \subset C_\delta^1$), entonces $\lim_{z \to 0} f(z) = 1$ (respectivamente, $\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$).

Por tanto, $f(z)$ tiende o bien a 0, o bien a 1, o bien a ∞, cuando z tiende a 0. Si $f(z)$ tiende a 0 o a 1, entonces f está acotada en un entorno de 0, y el Teorema clásico de la singularidad evitable (Teorema 1.3.21) garantiza que f se extiende a $z = 0$ como una función holomorfa. Si $\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$, entonces f tiene en $z = 0$ un polo, por definición. Consecuentemente, f se extiende a $z = 0$ como una función meromorfa.

$\square$

Un ejemplo que muestra que f puede tener un polo en 0 bajo las hipótesis del Teorema 2.6.10 es $f(z) = 1/z$.

Como corolario del Teorema grande de Picard se tiene el siguiente resultado espectacular sobre singularidades esenciales de funciones holomorfas, que mejora el Teorema de Casorati-Weierstrass (Teorema 1.4.3).

Teorema 2.6.11. *Sean Ω un dominio plano, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa que tiene una singularidad esencial en a. Entonces, para todo $r > 0$, $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ contiene todos los números complejos salvo a lo sumo uno.*

Demostración. Probémoslo por reducción al absurdo. Supongamos que existen $\varepsilon > 0$ y $u, v \in \mathbb{C}$ ($u \neq v$) tal que $f(D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{u, v\}$.

Si definimos $g(z) := f(a + \varepsilon z)$, entonces $g : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{u, v\}$ es holomorfa. Definamos ahora $h(z) := \frac{g(z)-u}{v-u}$; se tiene que $h : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ es holomorfa, y el Teorema grande de Picard asegura que h tiene una singularidad evitable o un polo en 0. Por tanto, f tiene una singularidad evitable o un polo en a, lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 2.6.12. *Si la métrica $ds = \lambda(z)\,|dz|$ en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ satisface $\lambda(z) \geq \rho(|z|)$ si $r_1 \leq |z| \leq r_2$, entonces*

$$d_\Omega\big(R_1 e^{i\phi}, R_2 e^{i\varphi}\big) \geq \int_{R_1}^{R_2} \rho(s)\, ds\,,$$

para todo $r_1 \leq R_1 \leq R_2 \leq r_2$ y $0 \leq \phi, \varphi < 2\pi$.

Demostración. Sea γ_0 una geodésica uniendo $R_1 e^{i\phi}$ y $R_2 e^{i\varphi}$. Aunque γ_0 quizás no está contenida en el conjunto $\{R_1 \leq |z| \leq R_2\}$, γ_0 contiene una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \{R_1 \leq |z| \leq R_2\}$, con $\gamma(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$, $r(a) = R_1$ y $r(b) = R_2$. Entonces,

$$\gamma'(t) = e^{i\theta(t)}(r'(t) + i r(t)\theta'(t)), \quad \big|\gamma'(t)\big| = \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2} \geq |r'(t)|,$$

y se tiene, ya que $\{R_1 \leq |z| \leq R_2\} \subseteq \{r_1 \leq |z| \leq r_2\}$,

$$\begin{aligned} d_\Omega\big(R_1 e^{i\phi}, R_2 e^{i\varphi}\big) &= \int_a^b \lambda\big(\gamma(t)\big)\big|\gamma'(t)\big|\, dt \geq \int_a^b \lambda\big(r(t)e^{i\theta(t)}\big)|r'(t)|\, dt \\ &\geq \int_a^b \rho(r(t)) r'(t)\, dt = \int_{R_1}^{R_2} \rho(s)\, ds\,. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.6.13 (Teorema de Schottky, primera versión)**.** *Sean $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ holomorfa y $0 < r < 1$. Existe una constante C, que sólo depende de $|f(0)|$ y r, tal que $|f(z)| \leq C$ para todo $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \leq r$.*

De hecho, puede probarse una versión cuantitativa de este resultado.

Teorema 2.6.14 (Teorema de Schottky, segunda versión)**.** *Para toda función holomorfa $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ y para todo $z \in \mathbb{D}$ se verifica la desigualdad*

$$|f(z)| \leq A \exp\left(\frac{B}{1-|z|}\right),$$

con $A := e^{-4.38}$ *y* $B := 2(\log_+ |f(0)| + 4.38)$*, donde* $\log_+ t := \max\{\log t, 0\}$*.*

Demostración. Observemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} A \exp\left(\frac{B}{1-|z|}\right) &= e^{-4.38} \exp\left(\frac{2(\log_+ |f(0)| + 4.38)}{1-|z|}\right) \\ &\geq e^{-4.38} \exp\big(2(\log(\max\{|f(0)|, 1\}) + 4.38)\big) \\ &= e^{4.38} (\max\{|f(0)|, 1\})^2 \geq \max\{|f(0)|, 1\}. \end{aligned}$$

Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|f(z)| > \max\{|f(0)|, 1\}$.

Sea $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. El Teorema 2.5.24 da que para todo $z \in \Omega$ se tiene

$$\lambda_\Omega(z) \geq \frac{1}{|z|\big(4.38 + |\log|z||\big)},$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. El Lema 2.6.12 asegura que si $1 \leq |f(0)| \leq |f(z)|$, se verifica

$$d_\Omega(f(z), f(0)) \geq \int_{|f(0)|}^{|f(z)|} \frac{dt}{t\,(4.38 + \log t)} = \log \frac{4.38 + \log|f(z)|}{4.38 + \log|f(0)|}.$$

Si $|f(0)| \leq 1 \leq |f(z)|$, se verifica

$$\begin{aligned} d_\Omega(f(z), f(0)) \geq d_\Omega(f(z), \{|w| = 1\}) &\geq \int_1^{|f(z)|} \frac{dt}{t\,(4.38 + \log t)} \\ &= \log \frac{4.38 + \log|f(z)|}{4.38}. \end{aligned}$$

Por tanto, en ambos casos se tiene

$$d_\Omega(f(z), f(0)) \geq \log \frac{4.38 + \log|f(z)|}{4.38 + \log_+ |f(0)|}.$$

Como f es una función holomorfa de $\mathbb{D}$ en Ω, la versión final del Lema de Schwarz asegura que

$$d_\Omega(f(z), f(0)) \le d_\mathbb{D}(z, 0) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \le \log \frac{2}{1 - |z|} \,.$$

Por tanto,

$$\frac{2}{1 - |z|} \ge \frac{4.38 + \log |f(z)|}{4.38 + \log_+ |f(0)|} \,,$$

y despejando $|f(z)|$ en esta desigualdad se obtiene la conclusión del teorema. □

2.6.1 Ejercicios

Ejercicio 2.6.1.1. *Si u es una función armónica en $\mathbb{D}$, $u \ge 0$ en $\mathbb{D}$ y $u(0) > 0$, ¿verifica u la conclusión del Lema de Harnack (Teorema 2.6.1)?*

Ejercicio 2.6.1.2. *Prueba la siguiente generalización del Teorema grande de Picard: Si $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ con a, b, c tres puntos diferentes de la esfera de Riemann, entonces f se extiende a una función holomorfa de $\mathbb{D}$ en $\overline{\mathbb{C}}$, es decir, a una función meromorfa en $\mathbb{D}$.*

Ejercicio 2.6.1.3. *Prueba un análogo del Teorema de Schottky para las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{0, b\}$, con $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Ejercicio 2.6.1.4. *Prueba un análogo del Teorema de Schottky para las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \ne b$.*

Ejercicio 2.6.1.5. *Prueba que la función $H(t) := t(4.38 + |\log t|)$ es creciente para $t > 0$.*

2.7 Métricas ultrahiperbólicas y aplicaciones

Lema 2.7.1 (Lema de Ahlfors-Schwarz)**.** *Si $u(z)|dz|$ es una métrica en $\mathbb{D}$ con $u > 0, u \in C^2(\mathbb{D})$ y curvatura $K(u) \le -1$, entonces $u(z) \le \lambda_\mathbb{D}(z)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u \in C^2(\overline{\mathbb{D}})$ ya que, en caso contrario, podemos considerar $v(z) := ru(rz)$ con $r \in (0,1)$, que sigue verificando $K(v) \leq -1$, demostrar el lema, y luego hacer tender r a 1.

Sea $h(z) = \log u(z) - \log \lambda_{\mathbb{D}}(z)$. Como $\lim_{|z|\to 1} h(z) = -\infty$, $h(z)$ tiene un máximo en un punto $z_0 \in \mathbb{D}$; entonces $\Delta h(z_0) \leq 0$.

Como $K(u) \leq -1$ y $K(\lambda_{\mathbb{D}}) = -1$, se tiene para todo $z \in \mathbb{D}$

$$u^2(z) \leq \Delta \log u(z), \qquad \lambda_{\mathbb{D}}^2(z) = \Delta \log \lambda_{\mathbb{D}}(z).$$

Por lo tanto,

$$u^2(z_0) - \lambda_{\mathbb{D}}^2(z_0) \leq \Delta \log u(z_0) - \Delta \log \lambda_{\mathbb{D}}(z_0) = \Delta h(z_0) \leq 0,$$

y se tiene que $u(z_0) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z_0)$, lo que implica que $h(z_0) \leq 0$. Como z_0 es un punto máximo para la función h en $\mathbb{D}$, se concluye que $h(z) \leq h(z_0) \leq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, consecuentemente, $u(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. □

Observación 2.7.2. *De hecho, puede probarse que si u es igual a $\lambda_{\mathbb{D}}$ en un punto de $\mathbb{D}$, entonces u es igual a $\lambda_{\mathbb{D}}$ en todo $\mathbb{D}$.*

Definición 2.7.3. *Se dice que una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superiormente si $\limsup_{x\to a} f(x) \leq f(a)$ para todo $a \in X$.*

Definición 2.7.4. *Diremos que la métrica $u(z)|dz|$ es* ultrahiperbólica *en un dominio Ω si*

1. *$u \geq 0$ en Ω,*
2. *u es semicontinua superiormente en Ω,*
3. *para todo punto $z_0 \in \Omega$ tal que $u(z_0) > 0$, existen un entorno V de z_0 y una* métrica soporte *$\rho \in C^2(V)$ tal que $K(\rho) \leq -1$ en V, $\rho(z_0) = u(z_0)$ y $\rho \leq u$ en V.*

Puede probarse el siguiente resultado.

Corolario 2.7.5. *Si $u(z)|dz|$ es una métrica ultrahiperbólica en un dominio Ω, entonces $u(z) \leq \lambda_\Omega(z)$ para todo $z \in \Omega$, y si u es igual a λ_Ω en un punto de Ω, entonces u es igual a λ_Ω en todo Ω.*

Teorema 2.7.6 (Teorema de Landau)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *cualquier dominio tal que* $d(z,\partial\Omega) \le 1$ *para todo* $z \in \Omega$*. Entonces, si* $L(\Omega) := \inf_{z\in\Omega} \lambda_\Omega(z)$ *y* $L := \inf_\Omega L(\Omega)$*, se tiene que* $L \ge 1$*.*

Demostración. Vamos a probar que, de hecho, se tiene $\lambda_\Omega(z) > 1$ para todo punto $z \in \Omega$ y para todo dominio Ω tal que $d(z,\partial\Omega) \le 1$ para todo $z \in \Omega$. Definimos una función u en Ω como

$$u(z) := \frac{1}{d(z,\partial\Omega)\log\frac{e}{d(z,\partial\Omega)}},$$

y veremos ahora que $u(z)\,|dz|$ es ultrahiperbólica en Ω.

Por definición, u es estrictamente positiva y continua. Sean $z_0 \in \Omega$ fijo y $a \in \partial\Omega$ tales que $|z_0 - a| = d(z_0,\partial\Omega)$; la función

$$\rho(z) := \frac{1}{|z-a|\log\frac{e}{|z-a|}},$$

verifica $K(\rho) = -1$, $\rho(z_0) = u(z_0)$ y $\rho(z) \le u(z)$ en un entorno de z_0, ya que $|z-a| \ge d(z,\partial\Omega)$ y $H(x) := \frac{1}{x\log\frac{e}{x}}$ es una función decreciente si $x \in (0,1]$ (recordemos que $d(z,\partial\Omega) \le 1$). Por tanto, $u(z)|dz|$ es ultrahiperbólica en Ω, que junto con $H(x) \ge H(1) = 1$ para todo $x \in (0,1]$, implica $1 = H(1) \le u(z) \le \lambda_\Omega(z)$, por el Corolario 2.7.5.

Como u no es la métrica de Poincaré de Ω, se tiene la desigualdad estricta $1 \le u(z) < \lambda_\Omega(z)$. □

Se ha conseguido mejorar el Teorema de Landau (con unos argumentos muy complicados) probando que $L > 1$. El valor de exacto de L es desconocido, pero se conjetura que se alcanza cuando Ω es $\mathbb{C}$ menos el conjunto de puntos correspondientes a los vértices de los triángulos equiláteros de un embaldosado regular del plano (y tal que el disco más grande que contiene es de radio 1), y cuando z es el baricentro de cualquiera de dichos triángulos.

El Teorema de Landau tiene su traducción en la teoría de funciones holomorfas, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 2.7.7. *Si* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *es una función holomorfa y* $|f'(0)| \ge 2$*, entonces la imagen de* f *contiene un disco de radio* 1*.*

Demostración. Sea $\Omega = f(\mathbb{D})$. Si Ω no contiene ningún disco de radio 1, entonces la prueba del Teorema de Landau nos da $\lambda_\Omega(w) > 1$ para todo $w \in \Omega$. Por otra parte, $\lambda_\Omega(f(z))|f'(z)| \leq \lambda_\mathbb{D}(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ por el Teorema 2.5.18. Por tanto, $|f'(0)| < \lambda_\Omega(f(0))|f'(0)| \leq \lambda_\mathbb{D}(0) = 2$, lo que contradice la hipótesis del enunciado. □

Corolario 2.7.8. *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces la imagen de f contiene un disco de radio $|f'(0)/2|$.*

2.7.1 Ejercicios

Ejercicio 2.7.1.1. *Sea $u(z)\,|dz|$ una métrica en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ con $u > 0, u \in C^2(\Omega)$ y $K(u) \leq -1$. Si consideramos $v(z) := ru(rz)$ con $r \in (0,1)$, prueba que la métrica $v(z)\,|dz|$ verifica $K(v) \leq -1$ en su dominio de definición.*

Ejercicio 2.7.1.2. *Prueba que si en el Lema de Ahlfors-Schwarz (Lema 2.7.1) se alcanza la igualdad en un punto de $\mathbb{D}$, entonces se tiene que u es igual a $\lambda_\mathbb{D}$ en todo $\mathbb{D}$.*

Ejercicio 2.7.1.3. *Prueba el Corolario 2.7.5, usando el Lema de Ahlfors-Schwarz (Lema 2.7.1).*

Ejercicio 2.7.1.4. *Prueba que la función $H(x) := \frac{1}{x \log \frac{e}{x}}$, que aparece en la demostración del Teorema de Landau, es una función decreciente si $x \in (0,1]$.*

Ejercicio 2.7.1.5. *Prueba que la función u, que aparece en la demostración del Teorema de Landau, no es la métrica de Poincaré del dominio Ω.*

Ejercicio 2.7.1.6. *Prueba el Corolario 2.7.8 usando el Teorema 2.7.7.*

Ejercicio 2.7.1.7. *Prueba un análogo del Teorema 2.7.7 reemplazando 0 por cualquier punto $z_0 \in \mathbb{D}$ fijo.*

2.8 Familias normales

Uno de los conceptos más importantes en topología es la compacidad. Una forma de destacar la importancia de la compacidad es recordar el siguiente teorema.

Teorema 2.8.1. *Una función semicontinua superiormente (ver Definición 2.7.3) y acotada superiormente en un compacto, alcanza su valor máximo en dicho compacto.*

Demostración. Denotemos la función por f y el compacto por K. Sean $\alpha := \sup_{x\in K} f(x)$ y $\{x_n\}_n \subset K$ tales que $f(x_n) \to \alpha$; como K es un conjunto compacto, existe una subsucesión $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Entonces $\alpha = \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \le f(x_0) \le \alpha$; por tanto, $f(x_0) = \alpha$. Consecuentemente, x_0 es un punto máximo de f en K y $f(x_0)$ es el valor máximo de f en K. $\square$

Los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los conjuntos cerrados y acotados. No obstante, hay "pocos" conjuntos compactos en espacios de dimensión infinita: es bien conocido que una bola cerrada en un espacio de Banach X es compacta si y sólo si X tiene dimensión finita.

Cuando se trabaja con espacios de funciones se buscan topologías que favorezcan la compacidad, como la topología débil. También se utiliza a menudo el concepto de familia normal.

Definición 2.8.2. *Una familia de funciones $\mathcal{F}$ definidas en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$ se dice* normal *si toda sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre todo compacto de Ω.*

Definición 2.8.3. *Dados dos espacios métricos X e Y, sea una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en Y. Se dice que $\mathcal{F}$ es* equicontinua *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $z, w \in X$ con $d_X(z,w) < \delta$ y para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene $d_Y(f(z), f(w)) < \varepsilon$. Se dice que $\mathcal{F}$ es* equiacotada *si existen $M > 0$ y $p \in Y$ tal que $d_Y(f(z), p) \le M$ para todo $z \in X$ y toda $f \in \mathcal{F}$.*

Necesitaremos el siguiente resultado topológico (ver [Ru] para encontrar una prueba).

Teorema 2.8.4 (Teorema de Ascoli-Arzelà)**.** *Sean X, Y espacios métricos tales que X es compacto e Y es completo y localmente compacto. Sea $\mathcal{F}$ una familia equicontinua y equiacotada de funciones de X en Y. Entonces $\mathcal{F}$ contiene una sucesión que converge uniformemente en X.*

El Teorema de Ascoli-Arzelà es una herramienta clave para probar que un conjunto de funciones es una familia normal. Una de sus aplicaciones más sencillas es la siguiente.

Teorema 2.8.5 (Teorema de Montel, primera versión)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en Ω tales que $|f(z)| \le M$ para todo $z \in \Omega$ y para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

La primera versión del Teorema de Montel (Teorema 2.8.5) es una consecuencia del siguiente resultado más fuerte.

Teorema 2.8.6 (Teorema de Montel, segunda versión)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en Ω tal que para cada compacto $K \subset \Omega$, existe una constante $M_K > 0$ con $|f(z)| \le M_K$ para todo $z \in K$ y para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

Obsérvese que la segunda versión del Teorema de Montel (Teorema 2.8.6) es una gran mejora de la primera versión ya que, con frecuencia, las funciones definidas en un abierto pueden comportarse mal al acercarse a la frontera de dicho abierto.

Demostración. Sean U_n dominios que verifican que $K_n = \overline{U_n}$ es compacto, $K_n \subset U_{n+1}$ y $\cup_n U_n = \Omega$. Obsérvese que como K_n es compacto, se tiene que U_n es hiperbólico.

Sabemos que $f(z) \in \overline{D(0, M_{K_{n+1}})} \subset D(0, 1 + M_{K_{n+1}})$ para todo $z \in U_{n+1}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$. Por tanto, la versión final del Lema de Schwarz asegura que

$$d_{D(0,1+M_{K_{n+1}})}(f(a), f(b)) \le d_{U_{n+1}}(a, b)$$

para todo $a, b \in K_n$ y para toda $f \in \mathcal{F}$; consecuentemente, se tiene que $\mathcal{F}$ es equicontinua en el compacto K_n.

Además, $d_{D(0,1+M_{K_{n+1}})}(f(z), f(0)) \le d_{U_{n+1}}(z, 0) \le C$ para todo $z \in K_n$ y para toda $f \in \mathcal{F}$; por lo tanto, $\mathcal{F}$ es equiacotada en K_n.

Consecuentemente, el Teorema de Ascoli-Arzelà (Teorema 2.8.4) garantiza que existe una subsucesión convergente en K_n. Ahora un típico argumento diagonal proporciona una subsucesión convergente en todo Ω que converge uniformemente en todo subconjunto compacto de Ω: Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$; acabamos de ver que existe una subsucesión de $\{f_n\}$, que denotaremos por $\{f_n^1\}$, convergente en K_1. De igual forma, existe una subsucesión de $\{f_n^1\}$, que denotaremos por $\{f_n^2\}$, convergente en K_2. Por inducción se puede probar que para cada j existe una subsucesión de $\{f_n^{j-1}\}$, que denotaremos por $\{f_n^j\}$, convergente en K_j.

Comprobemos que la sucesión diagonal $\{f_n^n\}_n$ converge uniformemente sobre compactos de Ω. Dado un compacto K en Ω, K está contenido en $\cup_n U_n$ y, por compacidad, existe un n_0 tal que $K \subset U_{n_0}$ (ya que $U_n \subset U_{n+1}$ para todo n). Como $\{f_n^n\}_{n \geq n_0}$ es una subsucesión de $\{f_n^{n_0}\}_n$, converge uniformemente en $K_{n_0} \supset K$. $\square$

Ejemplo: La familia $\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \{\Re z > 0\}$ holomorfa$\}$ es normal. Basta considerar una aplicación conforme $g : \{\Re z > 0\} \to \mathbb{D}$ y la familia $\mathcal{F}' := g \circ \mathcal{F}$, y aplicar la primera versión del Teorema de Montel (Teorema 2.8.5).

Ejemplo: Dado un dominio simplemente conexo $\Omega_0 \subsetneq \mathbb{C}$, la familia $\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \Omega_0$ holomorfa$\}$ es normal. Basta considerar una aplicación conforme $g : \Omega_0 \to \mathbb{D}$ y la familia $\mathcal{F}' := g \circ \mathcal{F}$, y aplicar la primera versión del Teorema de Montel (Teorema 2.8.5).

Definición 2.8.7. *La* métrica esférica *en la esfera de Riemann* $\overline{\mathbb{C}}$ *es la métrica que en el plano complejo se expresa como* $d\sigma = \frac{2\,|dz|}{1+|z|^2}$. *Puede probarse que para todo par de puntos* $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$, *la distancia asociada a esta métrica es*

$$d_\sigma(z, w) = 2 \arctan \left| \frac{z - w}{1 + \overline{w} z} \right| .$$

Como se vió en el Ejercicio 2.2.1.6, la métrica esférica tiene curvatura constante 1. Un resultado importante de geometría riemanniana asegura que las esferas son las únicas variedades con curvatura constante positiva (ver [Wo] para un estudio más general sobre este tema).

Definición 2.8.8. *Diremos que una sucesión de funciones* $\{g_n\}$ *con valores en la esfera de Riemann* converge normalmente *a* g *en un dominio*

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$, si converge uniformemente (con respecto a la distancia euclídea en Ω y a la esférica en la imagen de f) sobre compactos en Ω.

Obsérvese que si $\{g_n\}$ converge a ∞ uniformemente sobre compactos, entonces converge normalmente a ∞.

Ejemplo: Las familias $\mathcal{F}_1 := \{z^n\}$ y $\mathcal{F}_2 := \left\{\frac{z^n}{2+z^n}\right\}$ convergen normalmente en $\{|z| < 1\}$ y $\{|z| > 1\}$, pero no convergen normalmente en ningún dominio que contenga un punto de $\partial\mathbb{D}$.

Definición 2.8.9. *Una familia de funciones meromorfas $\mathcal{F}$ de Ω en $\overline{\mathbb{C}}$ se denomina* normal *si toda sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión normalmente convergente.*

Ejemplo: Las familias $\mathcal{F}_1 := \left\{\frac{n}{z}\right\}$ y $\mathcal{F}_2 := \{nz\}$ son normales en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, respectivamente.

Si $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ es meromorfa, entonces

$$f^*\sigma = \frac{2\,|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}\,|dz|\,.$$

Por tanto, $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es una isometría para la métrica esférica si y sólo si se verifica

$$\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}\,.$$

Observación 2.8.10. *Obsérvese que para toda función holomorfa f se tiene*

$$\frac{2\,|\left(\frac{1}{f}\right)'(z)|}{1 + |\left(\frac{1}{f}\right)(z)|^2} = \frac{2\,|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}\,.$$

Teorema 2.8.11 (Teorema de Marty)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones meromorfas en Ω. Si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe M_K tal que*

$$\frac{2\,|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \le M_K \qquad \text{para todo } z \in K \text{ y toda } f \in \mathcal{F},$$

entonces $\mathcal{F}$ es normal.

El recíproco del Teorema de Marty también es cierto (ver [Kr1] para encontrar una prueba).

Demostración. Sea D un disco cerrado contenido en Ω. Si $\gamma : [a,b] \to D$ es una curva rectificable, la longitud esférica de $f \circ \gamma$ es

$$L_{\overline{\mathbb{C}}}(f \circ \gamma) := \int_a^b \frac{2\,|f'(\gamma(t))|}{1+|f(\gamma(t))|^2}\,|\gamma'(t)|\,dt \le M_D \int_a^b |\gamma'(t)|dt = M_D L_{\mathbb{C}}(\gamma),$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. Si elegimos como γ el segmento euclídeo que une $z, w \in D$, entonces $f \circ \gamma$ es una curva uniendo $f(z)$ y $f(w)$; por tanto, se tiene que

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(f(z), f(w)) \le L_{\overline{\mathbb{C}}}(f \circ \gamma) \le M_D|z-w|$$

para todo $z, w \in D$ y para toda $f \in \mathcal{F}$.

Entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua en D. También es equiacotada en D, ya que $\overline{\mathbb{C}}$ es compacta. Ahora, si K es cualquier subconjunto compacto de Ω, entonces K puede cubrirse con un número finito de discos D como los anteriores. Consecuentemente, $\mathcal{F}$ es equicontinua y equiacotada (de K con su métrica euclídea en la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ con su métrica esférica) y, por el Teorema de Ascoli-Arzelà (Teorema 2.8.4), dada cualquier sucesión $\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{F}$, existe una subsucesión uniformemente convergente en K. El típico argumento diagonal proporciona una subsucesión que converge uniformemente en todo subconjunto compacto de Ω, por lo que $\mathcal{F}$ es una familia normal. □

Observación 2.8.12. *Observemos que la normalidad es equivalente a la equicontinuidad con la métrica esférica, ya que $\overline{\mathbb{C}}$ es un espacio acotado con la métrica esférica.*

Teorema 2.8.13 (Teorema de Montel, tercera versión)**.** *El conjunto*

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a,b,c\} / \, f \text{ es meromorfa}\}$$

es una familia normal.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{a,b,c\}$ $= \{0,1,\infty\}$, ya que en otro caso podemos componer con una transformación de Möbius apropiada (que es un automorfismo de la esfera de Riemann), por la Proposición 2.1.2. Por tanto, todas las funciones de $\mathcal{F}$ son holomorfas.

Fijemos cualquier disco cerrado $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$. Elijamos ahora una constante $R > r$ tal que $D(z_0,R) \subset \Omega$.

Para todo $z \in D(z_0, R)$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, se tiene por el Teorema 2.5.18 que $\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(f(z))|f'(z)| \leq \lambda_{D(z_0,R)}(z)$.

Recordemos que si d denota la distancia euclídea, la función beta de Beardon y Pommerenke verifica

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(z) &:= \inf\left\{\left|\log\frac{|z-a|}{|b-a|}\right| : \; a, b \in \{0,1\}, \;\; |z-a| = d(z,\{0,1\})\right\} \\ &= \big|\log d(z,\{0,1\})\big|.\end{aligned}$$

Por tanto, el Teorema 2.5.25 asegura que

$$\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(z) \geq \frac{1}{d(z,\{0,1\})\big(4.38 + \big|\log d(z,\{0,1\})\big|\big)}$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

Si definimos $s(w) := 2/(1+|w|^2)$, entonces

$$\frac{s(w)}{\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(w)} \leq \frac{2\,d(w,\{0,1\})\big(4.38 + \big|\log d(w,\{0,1\})\big|\big)}{1+|w|^2}$$

para todo $w \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Por tanto, está claro que $s(w)/\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(w) \to 0$ si w tiende a 0,1 ó ∞, y consecuentemente, existe una constante M tal que $s(w) \leq M\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(w)$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

Por tanto,

$$\tilde{f}(z) := \frac{2\,|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq M\,\lambda_{\mathbb{C}\setminus\{0,1\}}(f(z))\,|f'(z)| \leq M\,\lambda_{D(z_0,R)}(z)$$

para todo $z \in D(z_0, R)$ y para toda función $f \in \mathcal{F}$.

Entonces $\tilde{f}$ está acotada en cada disco compacto $\overline{D(z_0, r)}$ contenido en Ω con una cota independiente de $f \in \mathcal{F}$. El argumento usual de compacidad garantiza que $\tilde{f}$ está acotada para toda $f \in \mathcal{F}$ en cada compacto contenido en Ω. Entonces, por el Teorema de Marty podemos concluir que $\mathcal{F}$ es normal. $\square$

De forma inmediata se deduce el siguiente resultado.

Corolario 2.8.14. *La familia* $\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \mathbb{C}\setminus\{a,b\} / \; f$ *es holomorfa*$\}$ *es normal.*

2.8.1 Ejercicios

Ejercicio 2.8.1.1. *Prueba que el eje real es una geodésica para la métrica esférica.*

Ejercicio 2.8.1.2. *Prueba que* $T(z) = e^{i\theta} z$ *y* $T(z) = e^{i\theta}/z$ *son isometrías para la métrica esférica.*

Ejercicio 2.8.1.3. *Prueba que todas las rectas del plano complejo que pasan por* 0 *son geodésicas para la métrica esférica.*

Ejercicio 2.8.1.4. *Encuentra todas las transformaciones de Möbius que son isometrías para la métrica esférica.*

Ejercicio 2.8.1.5. *En la esfera de Riemann se define la* proyección estereográfica *como*

$$P(x, y) := \Big(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, 1 - \frac{2}{1 + x^2 + y^2} \Big).$$

Prueba que para todo par de puntos $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$*, la distancia esférica* $d_\sigma(z, w)$ *es la distancia (a lo largo del círculo máximo sobre la superficie de la esfera) de* $p(z)$ *a* $p(w)$*. Demuestra que esta distancia es*

$$d_\sigma(z, w) = 2 \arctan \left| \frac{z - w}{1 + \overline{w} z} \right| .$$

2.9 La distancia de Kobayashi

Dado que la métrica de Poincaré juega un papel tan importante en la teoría de funciones de una variable compleja, resulta natural preguntarse si existirá un análogo para dimensiones superiores. Ese análogo es la distancia de Kobayashi. En esta sección veremos los resultados más elementales sobre la distancia de Kobayashi; si se desea profundizar en este tema, una lectura obligada es el libro del propio Kobayashi [Ko], aunque conviene destacar que, motivado por su humildad, denomina "una pseudodistancia invariante" a la distancia de Kobayashi.

Sean M una variedad holomorfa (es decir, una variedad en la que los cambios de carta son funciones holomorfas) y p, q dos puntos en M.

Elegimos puntos $p_0, p_1, \dots, p_n$, tales que $p = p_0$ y $q = p_n$, y aplicaciones $f_j : \mathbb{D} \to M$ holomorfas tales que $f_j(0) = p_{j-1}$ y $f_j(a_j) = p_j$, para algún $a_j \in \mathbb{D}$ y para todo $j = 1, \dots, n$.

Denotemos por $\rho_{\mathbb{D}}$ la distancia de Poincaré en $\mathbb{D}$. Definimos la *distancia de Kobayashi* en M entre los puntos $p, q \in M$, y la denotaremos por $d_M(p, q)$, como el ínfimo de las cantidades $\sum_{j=1}^{n} \rho_{\mathbb{D}}(0, a_j)$, donde el ínfimo se toma para toda elección de puntos y aplicaciones holomorfas asociadas a dicha elección.

Queremos destacar que constituye un pequeño abuso de lenguaje llamar distancia de Kobayashi a d_M. La función d_M es, de hecho, una pseudodistancia (es decir, verifica $d_M(p, q) = d_M(q, p) \geq 0$ para todo $p, q \in M$ y $d_M(p, r) \leq d_M(p, q) + d_M(q, r)$ para todo $p, q, r \in M$) pero, en general, si $p \neq q$ no se tiene $d_M(p, q) > 0$.

La variedad M se dirá *hiperbólica* (en sentido de Kobayashi) si la igualdad $d_M(p, q) = 0$ implica que $p = q$, es decir, si d_M es realmente una distancia.

Aunque esta notación para las distancias de Poincaré y Kobayashi pueda parecer inconsistente con la de las secciones anteriores, veremos en breve que esto no es así, ya que el Teorema 2.9.7 nos dice que, de hecho, ambas coinciden no sólo en $\mathbb{D}$, sino en todas las superficies de Riemann hiperbólicas. Consecuentemente, esta definición de hiperbolicidad coincide con la que hemos estado utilizando, si la variedad M es una superficie de Riemann.

Una prueba de lo "bien diseñada" que está la distancia de Kobayashi es que permite probar, sin apenas esfuerzo, la siguiente generalización del Lema de Schwarz.

Teorema 2.9.1 (Lema de Schwarz-Kobayashi)**.** *Dadas M, N variedades holomorfas y una función holomorfa $f : M \to N$, entonces*

$$d_N(f(p), f(q)) \leq d_M(p, q)$$

para todo $p, q \in M$.

Veremos en el Teorema 2.9.12 que, además, d_M es la mayor pseudodistancia que verifica la correspondiente generalización del Lema de Schwarz.

Demostración. Dados dos puntos cualesquiera $p, q \in M$, consideremos puntos $p_0, p_1, \ldots, p_n$ con $p = p_0$ y $q = p_n$. Sean $f_j : \mathbb{D} \to M$ funciones holomorfas tales que $f_j(0) = p_{j-1}$ y $f_j(a_j) = p_j$ para $j = 1, \ldots, n$. Considerando ahora los puntos $f(p_0), \ldots, f(p_n)$ en N y las funciones holomorfas $g_j := f \circ f_j : \mathbb{D} \to N$, se verifica $f(f_j(0)) = f(p_{j-1}), f(f_j(a_j)) = f(p_j)$, y se tiene

$$d_N(f(p), f(q)) \leq \sum_{j=1}^{n} \rho_{\mathbb{D}}(0, a_j).$$

Tomando ahora el ínfimo sobre dichas particiones, obtenemos

$$d_N(f(p), f(q)) \leq d_M(p, q)$$

para todo $p, q \in M$. □

Una aplicación $f : M \to N$ entre dos variedades holomorfas se dice *biholomorfa* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son holomorfas.

Corolario 2.9.2. *Toda aplicación biholomorfa $f : M \to N$ entre dos variedades holomorfas preserva la distancia de Kobayashi, es decir,*

$$d_N(f(p), f(q)) = d_M(p, q)$$

para todo $p, q \in M$.

Teorema 2.9.3. *Dada cualquier aplicación recubridora holomorfa $\pi : M \to N$ entre dos variedades holomorfas, $p, q \in N$ y $\tilde{p} \in M$ con $\pi(\tilde{p}) = p$, se tiene*

$$d_N(p, q) = \inf \Big\{ d_M(\tilde{p}, \tilde{q}) \, : \, \pi(\tilde{q}) = q \Big\}.$$

Demostración. Ya que π es holomorfa, para todo $\tilde{q} \in M$ con $\pi(\tilde{q}) = q$ se tiene que

$$d_N(p, q) = d_N(\pi(\tilde{p}), \pi(\tilde{q})) \leq d_M(\tilde{p}, \tilde{q}),$$

por el Lema de Schwarz-Kobayashi (Teorema 2.9.1), y basta tomar el ínfimo en $\tilde{q}$ para obtener una de las dos desigualdades que necesitamos. Para probar la otra desigualdad, razonaremos por contradicción. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $d_N(p, q) + \varepsilon < \inf d_M(\tilde{p}, \tilde{q})$. Entonces existen puntos $p_0, p_1, \ldots, p_n$ en N, tales que $p = p_0$ y $q = p_n$, y aplicaciones $f_j : \mathbb{D} \to N$ holomorfas tales que $f_j(0) = p_{j-1}$ y $f_j(a_j) = p_j$, con

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{\mathbb{D}}(0, a_j) < d_N(p, q) + \varepsilon\,.$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{\mathbb{D}}(0, a_j) < \inf_{\tilde{q}} d_M(\tilde{p}, \tilde{q})\,.$$

Por otra parte, elevemos cada f_j (por el Teorema 2.4.4) a $\tilde{f}_j : \mathbb{D} \to M$ con $\pi \circ \tilde{f}_j = f_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$, de tal forma que $\tilde{p} = \tilde{f}_1(0)$ y $\tilde{f}_j(a_j) = \tilde{f}_{j+1}(0)$ para $j = 1, \ldots, n-1$. Si definimos $\tilde{q} := \tilde{f}_n(a_n)$, se tiene que $\pi(\tilde{q}) = q$ ya que $\pi(\tilde{q}) = \pi(\tilde{f}_n(a_n)) = f_n(a_n) = q$. Entonces,

$$d_M(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq \sum_{j=1}^{n} \rho_{\mathbb{D}}(0, a_j).$$

Por tanto,

$$\inf_{\tilde{q}} d_M(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq \sum_{j=1}^{n} \rho_{\mathbb{D}}(0, a_j),$$

lo que nos da una contradicción. □

El ínfimo en el Teorema 2.9.3 es, de hecho, un mínimo para las superficies de Riemann. Sin embargo, si la variedad holomorfa tiene dimensión mayor que dos (o dimensión compleja mayor que uno) no está claro cuándo se alcanza o no el ínfimo en el Teorema 2.9.3.

Probemos ahora que las distancias de Poincaré y de Kobayashi coinciden en el disco unidad.

Proposición 2.9.4. *Sean $\rho_{\mathbb{D}}$ la distancia de Poincaré y $d_{\mathbb{D}}$ la distancia de Kobayashi en $\mathbb{D}$. Entonces $d_{\mathbb{D}} = \rho_{\mathbb{D}}$.*

Demostración. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{D}$, consideramos $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{D}$ con $p = p_0$ y $q = p_n$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, sea $f_j : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa tal que $f_j(0) = p_{j-1}$ y $f_j(a_j) = p_j$. Por el Lema de Schwarz se verifica

$$\rho_{\mathbb{D}}(p_{j-1}, p_j) = \rho_{\mathbb{D}}(f_j(0), f_j(a_j)) \leq \rho_{\mathbb{D}}(0, a_j).$$

Por tanto,

$$\rho_{\mathbb{D}}(p,q) \le \sum_{j=1}^{n} \rho_{\mathbb{D}}(p_{j-1},p_j) \le \sum_{j=1}^{n} \rho_{\mathbb{D}}(0,a_j)$$

y, consecuentemente, $\rho_{\mathbb{D}}(p,q) \le d_{\mathbb{D}}(p,q)$.

Consideramos ahora la aplicación $T : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida como $T(z) := \frac{z-p}{1-\overline{p}z}$. Por tanto, $T(p) = 0$ y, si definimos $a := T(q)$, se tiene

$$d_{\mathbb{D}}(p,q) \le \rho_{\mathbb{D}}(0,a) = \rho_{\mathbb{D}}(T(p),T(q)) = \rho_{\mathbb{D}}(p,q).$$

Consecuentemente $d_{\mathbb{D}}(p,q) \le \rho_{\mathbb{D}}(p,q)$.

Juntando ambos resultados se concluye que $d_{\mathbb{D}}(p,q) = \rho_{\mathbb{D}}(p,q)$ para todo $p,q \in \mathbb{D}$. □

Teniendo en cuenta el Teorema 2.9.3 y la Proposición 2.9.4, podemos concluir lo siguiente:

Proposición 2.9.5. *Toda superficie que tiene a $\mathbb{D}$ como recubridor universal es hiperbólica (en sentido de Kobayashi) y, además, su distancia de Kobayashi coincide con su distancia de Poincaré.*

También se verifica el siguiente resultado.

Proposición 2.9.6. *Las superficies de Riemann excepcionales (es decir, las que no tienen a $\mathbb{D}$ como recubridor universal) no son hiperbólicas en sentido de Kobayashi. De hecho, sus métricas de Kobayashi son idénticamente cero.*

Demostración. Para probar que $d_{\mathbb{C}} = 0$, es suficiente demostrar que $d_{\mathbb{C}}(0,1) = 0$, ya que las aplicaciones $T(z) = az + b$ son biholomorfas y, por el Corolario 2.9.2, conservan la distancia de Kobayashi. La función $f(z) = Rz$ verifica $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ y $f(1/R) = 1$; por tanto, $d_{\mathbb{C}}(0,1) \le d_{\mathbb{D}}(0,1/R)$ para todo $R > 1$, y haciendo tender R a infinito se deduce que $d_{\mathbb{C}}(0,1) = 0$.

Para probar que $d_{\overline{\mathbb{C}}} = 0$ se aplica el mismo razonamiento, reemplazando $T(z) = az + b$ por $T(z) = (az + b)/(cz + d)$.

Como $\mathbb{C}$ es el recubridor universal para el plano "punteado" $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y los toros $\mathbb{T}$, por el Teorema 2.9.3 y el resultado $d_{\mathbb{C}} = 0$, se tiene que $d_{\mathbb{C}^*} = 0$ y $d_{\mathbb{T}} = 0$. □

Podría decirse de manera informal que la distancia en $\mathbb{C}$ es cero porque "existen discos muy grandes" centrados en el mismo punto.

Las Proposiciones 2.9.5 y 2.9.6 permiten deducir el siguiente resultado.

Teorema 2.9.7. *Una superficie de Riemann es hiperbólica en sentido de Poincaré (es decir, tiene a $\mathbb{D}$ como recubridor universal) si y sólo si es hiperbólica en sentido de Kobayashi. Además, si la superficie es hiperbólica su distancia de Kobayashi coincide con su distancia de Poincaré.*

Corolario 2.9.8 (Teorema pequeño de Picard)**.** *Si $f : \mathbb{C} \to M$ es una función holomorfa y M es una variedad hiperbólica, entonces f es constante.*

Demostración. Para todo par de puntos $p, q \in \mathbb{C}$ se verifica que

$$d_M(f(p), f(q)) \leq d_{\mathbb{C}}(p, q) = 0.$$

Por tanto, se tiene que $f(p) = f(q)$ para todo par de puntos $p, q \in \mathbb{C}$ y, consecuentemente, f es constante. □

El mismo argumento usado en la prueba del Corolario 2.9.8 prueba de hecho el siguiente resultado.

Teorema 2.9.9. *Si $f : S \to M$ es una función holomorfa, M es una variedad hiperbólica y S es una superficie no hiperbólica, entonces f es constante.*

Esto es "casi" una caracterización de las variedades complejas hiperbólicas, pero necesitamos algo más.

Teorema 2.9.10 (Teorema de Brody)**.** *Sea M una variedad compleja compacta. Entonces, M es hiperbólica si y sólo si las únicas funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en M son las constantes.*

Existen ejemplos que prueban que la hipótesis de compacidad es absolutamente necesaria en el Teorema de Brody.

Probemos ahora la "maximalidad" de la pseudodistancia de Kobayashi.

Teorema 2.9.11. *Sean M una variedad compleja y δ_M una pseudodistancia en M tal que*

$$\delta_M(f(a), f(b)) \le d_{\mathbb{D}}(a, b) \qquad \forall\, f \in H(\mathbb{D}, M), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{D}.$$

Entonces $\delta_M(p, q) \le d_M(p, q)$ para todo $p, q \in M$.

Demostración. Consideremos los puntos $p_0, p_1, \dots, p_n$ tales que $p = p_0$ y $q = p_n$ y las aplicaciones holomorfas $f_j : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ con $f_j(0) = p_{j-1}$ y $f_j(a_j) = p_j$ para $j = 1, \dots, n$. Entonces

$$\delta_M(p, q) \le \sum_{j=1}^{n} \delta_M(p_{j-1}, p_j) = \sum_{j=1}^{n} \delta_M(f_j(0), f_j(a_j)) \le \sum_{j=1}^{n} d_{\mathbb{D}}(0, a_j).$$

Por tanto, $\delta_M(p, q) \le \inf \big\{ \sum_{j=1}^{n} d_{\mathbb{D}}(0, a_j) \big\} = d_M(p, q)$. $\square$

El Teorema 2.9.11 permite deducir directamente el siguiente resultado.

Teorema 2.9.12. *Sea δ_R una pseudodistancia definida en toda variedad holomorfa R, tal que para todas las variedades holomorfas M, N se tiene*

$$\delta_N(f(a), f(b)) \le \delta_M(a, b) \qquad \forall\, f \in H(M, N), \quad \forall\, a, b \in M,$$

y además $\delta_{\mathbb{D}} \le d_{\mathbb{D}}$. Entonces para toda variedad holomorfa M se verifica $\delta_M \le d_M$.

Los Teoremas 2.9.11 y 2.9.12 prueban que la pseudodistancia de Kobayashi es la mayor entre todas las posibles pseudodistancias que satisfacen la correspondiente versión del Lema de Schwarz. Es muy interesante que la pseudodistancia de Kobayashi sea lo mayor posible para que tenga más posibilidades de ser, de hecho, una distancia. Existen otras pseudodistancias útiles que verifican la correspondiente versión del Lema de Schwarz, como la de Carathéodory, pero como acabamos de ver, es menor o igual que la de Kobayashi.

Para finalizar esta sección, vamos a probar un último resultado sobre no existencia de funciones holomorfas. Para probarlo necesitamos el siguiente resultado que generaliza el Teorema de la aplicación abierta (Teorema 1.3.30).

Teorema 2.9.13 (Teorema de la aplicación abierta en variedades holomorfas)**.** *Si $f : M \to S$ es una función holomorfa no constante, donde M es una variedad holomorfa y S es una superficie de Riemann, entonces f es una aplicación abierta, es decir, la imagen por f de todo abierto contenido en M es un conjunto abierto de S. En particular, $f(M)$ es un conjunto abierto de S.*

Demostración. Obsérvese que basta con probar que dado cualquier punto $p \in M$ existe un abierto en S que contiene a $f(p)$ y que está contenido en $f(M)$.

Dado $p \in M$, existen (U, φ) carta local de M con $p \in U$ y (V, ψ) carta local de S con $f(p) \in V$. Sea U' un entorno abierto de p contenido en U tal que $f(U') \subseteq V$. Por tanto, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U') \to \psi(V)$ es una función holomorfa de varias variables no constante. Entonces existe al menos una de las variables en la que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ no es constante, y aplicando el Teorema de la aplicación abierta (Teorema 1.3.30) en esa variable, tenemos que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(U')) = \psi(f(U'))$ contiene un entorno abierto de $\psi(f(p))$ en $\psi(V)$. Por tanto, $f(U')$ contiene un entorno abierto de $f(p)$ en S. $\square$

Teorema 2.9.14. *Sea $f : M \to S$ holomorfa, donde M es una variedad holomorfa compacta y S es una superficie de Riemann no compacta. Entonces f es constante.*

Demostración. Argumentaremos por contradicción; por lo tanto, suponemos que f no es constante. Como f es una aplicación abierta por el teorema anterior, se tiene que $f(M)$ es abierto; como f es continua y M compacta, entonces $f(M)$ es compacto. Por lo tanto, $f(M)$ es abierto y cerrado. Teniendo en cuenta que $f(M) \neq S$ por no ser S compacta, y $f(M) \neq \varnothing$, llegamos a una contradicción por ser S conexa. Podemos concluir, por tanto, que f es constante. $\square$

El mismo argumento de la demostración del Teorema 2.9.14 permite probar el siguiente resultado más general.

Teorema 2.9.15. *Sean dos espacios topológicos X, Y tales que X es compacto e Y es conexo y no compacto. Entonces no existen funciones $f : X \to Y$ continuas y abiertas.*

2.9.1 Ejercicios

Ejercicio 2.9.1.1. *Sean A una matriz $n \times n$ con coeficientes complejos y determinante no nulo, $b \in \mathbb{C}^n$ y $f(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n)A + b$. Si Ω es un dominio de $\mathbb{C}^n$, prueba que $f(\Omega)$ es hiperbólico si y sólo si Ω es hiperbólico.*

Ejercicio 2.9.1.2. *Prueba que d_M es una pseudodistancia en cualquier variedad holomorfa M.*

Ejercicio 2.9.1.3. *Si M es una variedad holomorfa hiperbólica y M_0 es cualquier dominio contenido en M, prueba, usando el Lema de Schwarz-Kobayashi (Teorema 2.9.1), que M_0 también es una variedad holomorfa hiperbólica.*

Ejercicio 2.9.1.4. *Prueba el Teorema 2.9.9 usando el argumento de la demostración del Corolario 2.9.8.*

Ejercicio 2.9.1.5. *Prueba el Teorema de Brody (Teorema 2.9.10) en el caso de superficies de Riemann.*

Ejercicio 2.9.1.6. *Si M y N son variedades holomorfas, prueba que $M \times N$ también admite una estructura natural de variedad holomorfa.*

Ejercicio 2.9.1.7. *Si M y N son variedades holomorfas, prueba que*

$$d_{M\times N}\big((p_1, p_2), (q_1, q_2)\big) \le d_M(p_1, q_1) + d_N(p_2, q_2)$$

para todo $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in M \times N$.

Ejercicio 2.9.1.8. *Si M y N son variedades holomorfas, prueba que*

$$d_{M\times N}\big((p_1, p_2), (q_1, q_2)\big) \ge \max\big\{d_M(p_1, q_1), d_N(p_2, q_2)\big\}$$

para todo $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in M \times N$.

Ejercicio 2.9.1.9. *Usando los problemas anteriores, prueba que si M y N son variedades holomorfas, entonces $M \times N$ es hiperbólica si y sólo si M y N son hiperbólicas.*

Ejercicio 2.9.1.10. *Prueba que si $S_1, \dots, S_n$ son superficies de Riemann hiperbólicas, entonces la variedad holomorfa $S_1 \times \cdots \times S_n$ es hiperbólica. En particular, el* polidisco *$\mathbb{D}^n := \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}$ es hiperbólico.*

Ejercicio 2.9.1.11. *Prueba que si M es una variedad hiperbólica, entonces la variedad holomorfa $M \times \mathbb{C}$ no es hiperbólica. En particular, $\mathbb{C}^n$ no es hiperbólica.*

Ejercicio 2.9.1.12. *Prueba que*

$$d_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}}\big((p_1,p_2),(q_1,q_2)\big) = \max\big\{d_{\mathbb{D}}(p_1,q_1), d_{\mathbb{D}}(p_2,q_2)\big\}$$

para todo $(p_1,p_2),(q_1,q_2) \in \mathbb{D}\times\mathbb{D}$.

Ejercicio 2.9.1.13. *Prueba que si $\mathbb{D}^n$ es el polidisco $\mathbb{D}^n := \mathbb{D}\times\cdots\times\mathbb{D}$, entonces*

$$d_{\mathbb{D}^n}\big((p_1,\ldots,p_n),(q_1,\ldots,q_n)\big) = \max\big\{d_{\mathbb{D}}(p_j,q_j) : j = 1,\ldots,n\big\}$$

para todo $(p_1,\ldots,p_n),(q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{D}^n$.

Ejercicio 2.9.1.14. *Usando los ejercicios 2.9.1.3 y 2.9.1.13, prueba que cualquier bola en $\mathbb{C}^n$ centrada en el origen y con radio suficientemente pequeño es hiperbólica.*

Ejercicio 2.9.1.15. *Usando los ejercicios 2.9.1.1 y 2.9.1.14, prueba que cualquier bola en $\mathbb{C}^n$ es hiperbólica.*

Ejercicio 2.9.1.16. *Usando los ejercicios 2.9.1.3 y 2.9.1.15, prueba que cualquier dominio acotado en $\mathbb{C}^n$ es hiperbólico.*

Ejercicio 2.9.1.17. *Prueba el Teorema 2.9.15 usando el argumento de la demostración del Teorema 2.9.14*

Capítulo 3

Otros resultados sobre singularidades evitables

En este capítulo se exponen resultados más sofisticados sobre singularidades evitables. Algunos de estos teoremas se probaron recientemente en [R], [Sh] y [Su].

3.1 Introducción y enunciado de los resultados

Como ya se ha comentado, uno de los problemas fundamentales de la teoría geométrica de funciones es el estudio de la existencia de funciones holomorfas entre dos superficies de Riemann dadas.

En este contexto podemos ver los teoremas de Liouville y de Picard:

Teorema 3.1.1 (Teorema de Liouville). *Las únicas funciones en $H(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ son las constantes.*

Teorema 3.1.2 (Teorema pequeño de Picard). *Las únicas funciones en $H(\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ son las constantes.*

Es evidente que el Teorema de Liouville se deduce del Teorema de Picard. Existen dos teoremas de los que pueden deducirse los anteriores (recordemos que $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$):

Teorema 3.1.3 (Teorema de la singularidad evitable de Riemann). *Si $f \in H(\mathbb{D}^*, \mathbb{D})$ entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.*

Teorema 3.1.4 (Teorema grande de Picard)**.** *Si* $f \in H(\mathbb{D}^*, \mathbb{C} \setminus \{0,1\})$ *entonces* f *se extiende a una función de* $H(\mathbb{D}, \overline{\mathbb{C}})$.

Ya que nunca va a crear confusión, se denotará de igual forma a una función y a su extensión holomorfa.

En este caso también el Teorema de Riemann se deduce del Teorema grande de Picard.

A su vez, estos teoremas pueden generalizarse mucho más:

El Teorema grande de Picard puede ser probado de forma muy elegante usando la métrica de Poincaré de $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ (ver Teorema 2.6.10), y de los argumentos usados en esa demostración pueden deducirse varios resultados:

Corolario 3.1.5. *Sea* $f \in H(\mathbb{D}^*, S)$ *donde* S *es una superficie de Riemann hiperbólica. Supongamos que para alguna sucesión* $\{z_n\}$ *convergente a* 0 *se tiene que la sucesión imagen* $\{f(z_n)\}$ *converge a algún punto* $p \in S$*. Entonces puede definirse* $f(0) = p$ *y se tiene* $f \in H(\mathbb{D}, S)$.

Corolario 3.1.6. *Si* $f \in H(\mathbb{D}^*, S)$ *donde* S *es una superficie de Riemann hiperbólica y si se verifica una de las dos condiciones siguientes:*
(a) S *no es compacta y* $f(\mathbb{D}^*)$ *es relativamente compacto,*
(b) S *es compacta,*
entonces f *se extiende a una función de* $H(\mathbb{D}, S)$.

En [Ro] se prueba el teorema que resuelve por completo esta cuestión:

Teorema 3.1.7. *Sea* $f \in H(\mathbb{D}^*, S)$ *donde* S *es una superficie de Riemann hiperbólica. Entonces se verifica una de las dos siguientes afirmaciones:*
(i) f *puede extenderse a una función de* $H(\mathbb{D}, S)$,
(ii) S *está contenida en otra superficie de Riemann* $R = S \cup \{p\}$ *de tal forma que si definimos* $f(0) = p$, *entonces* $f \in H(\mathbb{D}, R)$.

Si se pretende generalizar el teorema de la singularidad evitable de Riemann en la otra dirección posible, es decir, buscar conjuntos E que se puedan quitar a $\mathbb{D}$ en lugar de $\{0\}$, de forma que el teorema de Riemann continúe siendo cierto, es necesario introducir el concepto de capacidad analítica. Para entender más a fondo el problema conviene hablar de conjuntos nulos, en el sentido de Painlevé.

Un subconjunto compacto $E \subset \mathbb{C}$ es un *conjunto nulo* si las únicas funciones holomorfas y acotadas en $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ son las constantes.

El Teorema de la aplicación de Riemann muestra que si un compacto E contiene un conexo cerrado con más de un punto, entonces E no es un conjunto nulo. Por tanto, un conjunto nulo es totalmente disconexo. A partir de ahora sólo se considerarán compactos E totalmente disconexos.

También existe una condición suficiente.

Proposición 3.1.8. *Si E es un compacto con $H_1(E) = 0$, donde H_1 es la medida de Hausdorff unidimensional (ver Ejercicio 2.3.1.30), entonces E es un conjunto nulo.*

Se sabe que existe un compacto E con $H_1(E) = 1$, que es un conjunto nulo.

Sin embargo, esta condición suficiente ($H_1(E) = 0$) es una caracterización en el caso de que E esté contenido en una curva rectificable.

También se ha probado que si $\dim E > 1$ entonces E no es un conjunto nulo, donde dim denota la dimensión de Hausdorff (ver Ejercicio 2.3.1.30).

La relación entre conjuntos nulos y la generalización del teorema de Riemann viene dada por el siguiente resultado.

Proposición 3.1.9. *Sea E un compacto. E es un conjunto nulo si y sólo si para cualquier dominio Ω que contiene a E se verifica que toda función de la clase $H(\Omega \setminus E, \mathbb{D})$ puede extenderse a una función de $H(\Omega, \mathbb{D})$.*

Las ideas para probar estos hechos se encuentran en [Fi, p. 64].

Dados un compacto E y un punto p de $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, se define

$$\gamma(E) = \sup \{|h'(p)| : h \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus E, \mathbb{C}), \ \sup |h(z)| \leq 1\}.$$

El hecho de que $\gamma(E)$ sea cero es independiente del punto p elegido. Se acostumbra a elegir $p = \infty$ para normalizar, definiendo

$$h'(\infty) := \lim_{z \to \infty} z\big(h(z) - h(\infty)\big).$$

A $\gamma(E)$ se le denomina la *capacidad analítica de E*. Como ya se ha comentado, si $H_1(E) = 0$, entonces $\gamma(E) = 0$, y si $\dim E > 1$, entonces $\gamma(E) > 0$. Por tanto, la capacidad analítica está "al nivel" de la dimensión de Hausdorff 1.

En virtud de la Proposición 3.1.9, $\gamma(E) = 0$ si y sólo si cualquier función holomorfa y acotada en un entorno de E, excepto quizás en E, admite una extensión holomorfa a E. Por tanto, se tiene:

Teorema 3.1.10. *Sea E un compacto de capacidad analítica cero contenido en $\mathbb{D}$, y $f \in H(\mathbb{D} \setminus E, \mathbb{D})$. Entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.*

Después de estudiar los dos problemas por separado, puede plantearse la búsqueda de resultados que unifiquen ambas posibilidades. Es decir, si se tiene una $f \in H(\mathbb{D} \setminus E, S)$, donde E es un compacto de capacidad analítica cero y S una superficie de Riemann, ¿bajo qué condiciones puede f extenderse analíticamente a E?

Ya se ha visto que se verifica el Corolario 3.1.6. En la próxima sección se prueba la siguiente generalización de dicho resultado (ver también la tesis doctoral [R]).

Teorema 3.1.11. *Sean E un compacto de capacidad analítica cero contenido en $\mathbb{D}$, S una superficie de Riemann y $f \in H(\mathbb{D} \setminus E, S)$. Si se verifica*

(a') S no es compacta y $f(\mathbb{D} \setminus E)$ es relativamente compacto,

entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S)$.

Conviene destacar el hecho de que en este enunciado desaparece la hipótesis, hasta ahora omnipresente, de que S sea hiperbólica. La causa de que esto ocurra es que un compacto contenido en una superficie de Riemann no compacta, puede (con una construcción apropiada) "meterse dentro" de una superficie hiperbólica. Se hace algo semejante a esto en la demostración del Corolario 3.1.12.

El ejemplo más sencillo de esta situación es el caso $S = \mathbb{C}$. Entonces, $f(\mathbb{D} \setminus E)$ compacto quiere decir que f está acotada, y se obtiene el Teorema 3.1.10.

Observemos que el resultado no es cierto en general si sustituimos la hipótesis (a') por (b'): S es compacta e hiperbólica (que una superficie de Riemann compacta sea hiperbólica es equivalente a que su género sea mayor que 1).

La hipótesis sobre la no compacidad de S es pues, esencial, pero utilizando este teorema puede encontrarse un resultado acerca de superficies compactas.

Corolario 3.1.12. *Sean E un compacto de capacidad analítica cero contenido en $\mathbb{D}$, S una superficie de Riemann compacta y $f \in H(\mathbb{D} \setminus E, S)$. Si existe un abierto no vacío $\mathcal{U}$ de S tal que $f(\mathbb{D} \setminus E)$ tiene intersección vacía con $\mathcal{U}$, entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S)$.*

El Corolario 3.1.12 ha sido probado por Shiga en [Sh], y por Fernández y Rodríguez en [R], usando técnicas distintas.

Si se desea probar un teorema que permita extender $f \in H(\mathbb{D} \setminus E, S)$ para S compacta, pidiendo que E sea un conjunto "pequeño", no basta con pedir $\dim E < \alpha$, para ningún $\alpha > 0$, ya que se conocen contraejemplos.

Por tanto, un teorema que restrinja el tamaño de E debe hacer hipótesis a nivel de dimensión cero. Esto es precisamente lo que ha hecho Suzuki en [Su]:

Teorema 3.1.13. *Si E es un compacto de capacidad logarítmica cero contenido en $\mathbb{D}$, S es una superficie de Riemann compacta de género mayor que uno y $f \in H(\mathbb{D} \setminus E, S)$, entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S)$.*

La restricción en el género no es gratuita, ya que si $S = \overline{\mathbb{C}}$, la conclusión falla de forma trivial con $E = \{0\}$ y $f(z) = \exp(1/z)$. Lo mismo ocurre si $S = \mathbb{T} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, $E = \{0\}$ y $f(z) = \exp(1/z)/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$.

Como se ha comentado antes, la hipótesis sobre E de este teorema es del orden de magnitud correcto si queremos una condición que permita extender cualquier función de $H(\mathbb{D} \setminus E, S)$ donde S es cualquier superficie de Riemann compacta de género mayor que uno. Pero las hipótesis sobre E pueden hacerse menos restrictivas si se impone alguna condición sobre la superficie compacta S.

Uno de los puntos de partida de esta discusión fue el Teorema grande de Picard, que habla de singularidades aisladas ($E = \{0\}$ en dicho teorema). Se introduce ahora una medida de "cómo está de aislado" un punto de E. Se probará que si los puntos de E están "suficientemente aislados" (la suficiencia dependerá de S), las funciones de $H(\mathbb{D} \setminus E, S)$ pueden extenderse a funciones de $H(\mathbb{D}, S)$.

Si E es un compacto y e es un punto de E, para cada $r > 0$ se definen

$$\beta(e,r) := \frac{1}{r} \inf \{ s \, : \, D(e,s) \cap E = D(e,r) \cap E \},$$
$$\beta^*(e) := \liminf_{r \to 0} \beta(e,r).$$

Si S es una superficie de Riemann hiperbólica, se define la *sístole de* S (y se denota $Sis(S)$) como el ínfimo de las longitudes de las geodésicas cerradas. Por tanto, si γ es una curva cerrada en S no homótopa a un punto, se tiene que

$$L_S(\gamma) \geq Sis(S).$$

Obsérvese que si S es compacta, entonces $Sis(S) > 0$.

Con esta notación, el siguiente teorema (ver [R]) se escribe así:

Teorema 3.1.14. *Sea f una función de $H(\mathbb{D} \setminus E, S)$, donde S es una superficie de Riemann compacta de género mayor que uno y E es un compacto de capacidad analítica cero contenido en $\mathbb{D}$. Si*

$$\beta^*(e) < \exp\left(\frac{-2\pi^2}{Sis(S)} \right),$$

para todo punto e de E, entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S)$.

Como corolario de la demostración también se tiene el siguiente enunciado más fuerte:

Teorema 3.1.15. *Sean E un conjunto compacto de capacidad analítica cero contenido en $\mathbb{D}$ y S una superficie de Riemann hiperbólica tal que $Sis(S) > 0$. Si f es una función de $H(\mathbb{D} \setminus E, S)$ y se verifica que*

$$\beta^*(e) < \exp\left(\frac{-2\pi^2}{Sis(S)} \right)$$

para todo punto e de E, entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S)$.

Los teoremas 3.1.13 y 3.1.14 están relacionados pero ninguno contiene al otro. Para ver esto basta con encontrar un compacto E con $\beta^*(e) < \beta < 1$, para todo punto e de E, y que tenga capacidad logarítmica positiva. Pero se puede construir un ejemplo mucho más espectacular:

existe un conjunto de Cantor de dimensión de Hausdorff uno, y tal que β^* se anula en todo punto.

Sería interesante conseguir un resultado que pudiera englobar estos dos teoremas. Por ejemplo: si $\dim E \leq C(S)$, donde $C(S)$ es una constante que depende exclusivamente de la geometría de la superficie compacta S, entonces f tiene una extensión holomorfa a E.

3.1.1 Ejercicios

Ejercicio 3.1.1.1. *Prueba el Teorema de Liouville (Teorema 3.1.1) a partir del Teorema de la singularidad evitable (Teorema 3.1.3).*

Ejercicio 3.1.1.2. *Prueba el Teorema pequeño de Picard (Teorema 3.1.2) a partir del Teorema grande de Picard (Teorema 3.1.4).*

Ejercicio 3.1.1.3. *Prueba el Corolario 3.1.5 usando los argumentos de la demostración del Teorema 2.6.10.*

Ejercicio 3.1.1.4. *Prueba el Corolario 3.1.6 usando los argumentos de la demostración del Teorema 2.6.10.*

Ejercicio 3.1.1.5. *Usando el Teorema 3.1.11, prueba el Corolario 3.1.12.*

3.2 Prueba del Teorema 3.1.11.

Teorema 3.2.1 (Teorema 3.1.11)**.** *Sean E un compacto de capacidad analítica cero contenido en $\mathbb{D}$, S una superficie de Riemann y $f \in H(\mathbb{D} \setminus E, S)$. Si se verifica*

(a') S no es compacta y $f(\mathbb{D} \setminus E)$ es relativamente compacto,
entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S)$.

Demostración. Si se define Y como $Y := f(\mathbb{D} \setminus E)$, entonces $\overline{Y}$ es un compacto de S.

Sea $h : S \to \overline{\mathbb{C}}$ una función holomorfa no constante y tal que no toma el valor ∞ en el compacto $\overline{Y}$. La existencia de una tal función está garantizada ya que S es una superficie de Riemann no compacta [Fo, p.

203]. (Este es el momento en el que el argumento deja de funcionar para las superficies compactas.) Al ser h continua, $h(\overline{Y})$ es un compacto de $\mathbb{C}$, por lo que puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que $h(\overline{Y}) \subset \mathbb{D}$.

Ya que la función $g := h \circ f$ está en la clase $H(\mathbb{D} \setminus E, \mathbb{D})$ y que la capacidad analítica de E es cero, g tiene una extensión holomorfa a todo el disco unidad, a la que se seguirá llamando g.

Sean ahora e un punto particular del conjunto E y $\{z_n\}$ una sucesión contenida en $\mathbb{D} \setminus E$ y convergente al punto e. Como la sucesión $\{f(z_n)\}$ está contenida en el compacto $\overline{Y}$, existe una subsucesión $\{z_n^a\}$ tal que su imagen $\{f(z_n^a)\}$ converge a un punto s^a del compacto $\overline{Y}$. Evidentemente, la sucesión $h(f(z_n^a))$ converge a $h(s^a)$, pero como $g = h \circ f$ es holomorfa en todo el disco unidad, $g(z_n^a)$ también converge a $g(e)$. Por tanto, se tiene que $h(s^a) = g(e)$.

El conjunto Λ de todos los s^a que son puntos de acumulación de la imagen mediante f de alguna sucesión convergente a e, ha de ser necesariamente finito, ya que Λ es un subconjunto del compacto $\overline{Y}$, h es holomorfa y no constante en $\overline{Y}$, y $h(\Lambda) = g(e)$. A continuación se probará que, de hecho, Λ se reduce a un único punto:

Sea $\Lambda = \{s^1, \dots, s^k\}$, y sean $V_1, \dots, V_k$ entornos disjuntos dos a dos de $s^1, \dots, s^k$ respectivamente. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(D(e,\varepsilon) \setminus E) \subset \cup_{j=1}^{k} V_j.$$

Si no fuese así, para cada n natural existiría un punto $z_n \in D(e, 1/n) \setminus E$, tal que su imagen $f(z_n)$ no estaría en $\cup_j V_j$. Como los z_n constituyen una sucesión convergente a e, existe una subsucesión z_n^j tal que $f(z_n^j)$ converge a uno de los s^j, pero esto es imposible ya que $f(z_n) \notin V_j$, lo cual aporta la contradicción deseada.

Como la capacidad analítica de E es cero, E es totalmente disconexo, lo cual implica que $f(D(e,\varepsilon) \setminus E)$ es un conexo contenido en $\cup_j V_j$. Por tanto, existe un j tal que

$$f(D(e,\varepsilon) \setminus E) \subset V_j\,.$$

Si ahora se define $f(e) = s^j$, se verifica la igualdad

$$h \circ f = g$$

en todos los puntos del disco unidad.

Si en un punto $a \in E$ se tiene $dh|_{f(a)} \neq 0$, entonces existen un entorno V de $f(a)$ en el que h es holomorfa e inyectiva y un entorno U de a tal que $f(U) \subset V$. Entonces $f = h^{-1} \circ g$ en el abierto U, por lo que f es holomorfa en U.

Sean $b_1, \ldots, b_r$ todos los puntos críticos de h en $\overline{Y}$, y sea $A := E \cap f^{-1}(\{b_1, \ldots, b_r\})$. Ya se ha probado que la extensión de f es holomorfa en $E \setminus A$; veamos que también va a serlo en A:

Sea W_j un entorno simplemente conexo de b_j, con $W_1, \ldots, W_r$ disjuntos dos a dos. Sea a un punto del conjunto A. Si $f(a) = b_j$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(D(a, \varepsilon) \setminus A) \subset W_j.$$

Si $a_0 \in A \cap D(a, \varepsilon)$, entonces $f(a_0) = b_j$, por lo que

$$f(D(a, \varepsilon)) \subset W_j,$$

lo cual prueba que la extensión de f es continua en todo el disco unidad.

Como ya se ha visto, dado un punto $a \in A$, existe un $\varepsilon_a > 0$ con

$$f(D(a, \varepsilon_a)) \subset W_j \qquad \text{para algún } j.$$

Como $\cup_{a \in A} D(a, \varepsilon_a)$ cubre $A = E \cap f^{-1}(\{b_1, \ldots, b_r\})$, que es un compacto ya que f es continua, existen $a_1, \ldots, a_m$ con

$$A \subset \Omega := \cup_{k=1}^{m} D(a_j, \varepsilon_j).$$

Dado un $a \in A$, sea Ω_a la componente conexa de Ω que lo contiene. Entonces

$$f(\Omega_a) \subset W_j \qquad \text{para algún } j \in \{1, \ldots, r\}.$$

Como W_j es un entorno simplemente conexo de b_j, se sabe que existe una aplicación conforme $\eta_j : W_j \to \mathbb{D}$.

Entonces

$$\eta_j \circ f : \Omega_a \to \mathbb{D}$$

es continua en Ω_a y holomorfa y acotada en $\Omega_a \setminus (A \cap \Omega_a)$. Como $A \cap \Omega_a$ es un compacto de capacidad analítica cero, entonces $\eta_j \circ f$ es holomorfa en a, por lo que f también es holomorfa en a. $\square$

Corolario 3.2.2. *Sean E un compacto de capacidad analítica cero contenido en $\mathbb{D}$, S una superficie de Riemann compacta y $f \in H(\mathbb{D} \setminus E, S)$. Si existe un abierto no vacío $\mathcal{U}$ de S tal que $f(\mathbb{D} \setminus E)$ tiene intersección vacía con $\mathcal{U}$, entonces f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S)$.*

Demostración. La idea de la prueba es muy sencilla: se trata de encontrar una superficie S_0 que contenga a $f(\mathbb{D}\setminus E)$ pero que no sea compacta, y entonces se podrá usar el Teorema 3.1.11.

Si S tiene género cero, entonces S está contenida en $\overline{\mathbb{C}}$ y la situación es la del caso clásico.

Si S tiene género positivo, se puede considerar un simplemente conexo V con frontera "suave" y tal que $\overline{V} \subset \mathcal{U}$. Sean $S_1 := S \setminus V$, que es una superficie con borde $\gamma := \partial V$, y S_2 el doble de Schottky de S_1 [AS, pp. 26-27]. Si dotamos a S_2 de su métrica de Poincaré (cosa que podemos hacer, ya que S_2 tiene género mayor que 1), γ es una geodésica, ya que la reflexión en γ preserva la distancia de Poincaré en S_2.

Sea $l := L_{S_2}(\gamma)$ y sea A el anillo

$$A := \{\, 1 < |z| < \exp{(2\pi^2/l)}\},$$

dotado de su métrica hiperbólica. La curva $\gamma' := \{|z| = \exp{(\pi^2/l)}\}$ tiene longitud l en A. Por tanto, si se corta A a lo largo de γ', S_2 a lo largo de γ y se pega una parte de A a S_1 (dotada de la métrica inducida como subconjunto de S_2, para la cual γ es una geodésica de longitud l), identificando las geodésicas frontera, se obtiene una superficie de Riemann S_0, no compacta, y tal que $S_1 \subset S_0$.

Como $f(\mathbb{D} \setminus E)$ está contenido en S_1, que es un compacto contenido en S_0, f se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S_0)$. Como E está contenido en la frontera de $\mathbb{D} \setminus E$, se tiene que $f(E)$ está contenido en S_1, por lo que f está en $H(\mathbb{D}, S)$. $\square$

3.2.1 Ejercicios

Ejercicio 3.2.1.1. *Si l es una constante positiva y A es el anillo*

$$A := \{\, 1 < |z| < \exp{(2\pi^2/l)}\},$$

dotado de su métrica hiperbólica, prueba que la curva $\gamma' := \{|z| = \exp(\pi^2/l)\}$ *tiene longitud* l*.*

Ejercicio 3.2.1.2. *¿Se puede eliminar alguna hipótesis del Teorema 3.2.1?*

Ejercicio 3.2.1.3. *Intenta mejorar el Teorema 3.2.1.*

Ejercicio 3.2.1.4. *¿Se puede eliminar alguna hipótesis del Corolario 3.2.2?*

Ejercicio 3.2.1.5. *Intenta mejorar el Corolario 3.2.2.*

3.3 Prueba del Teorema 3.1.14.

Antes de comenzar la prueba, conviene enunciar un sencillo lema que será muy útil en la demostración del Teorema 3.1.14.

Lema 3.3.1. *Si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es un dominio hiperbólico que contiene al anillo* $A := \{1 < |z| < R\}$*, entonces se verifica la desigualdad siguiente:*

$$L_\Omega\big(\{\, |z| = \sqrt{R}\,\}\big) \leq \frac{2\,\pi^2}{\log R}.$$

Teorema 3.3.2 (Teorema 3.1.14)**.** *Sea* f *una función de* $H(\mathbb{D} \setminus E, S)$*, donde* S *es una superficie de Riemann compacta de género mayor que uno y* E *es un compacto de capacidad analítica cero contenido en* $\mathbb{D}$*. Si*

$$\beta^*(e) < \exp\left(\frac{-2\pi^2}{Sis(S)}\right)$$

para todo punto e *de* E*, entonces* f *se extiende a una función de* $H(\mathbb{D}, S)$*.*

Demostración. Sea σ una curva cerrada cualquiera en $\mathbb{D} \setminus E$. Lo que se pretende probar es que $f(\sigma)$ es homótopa a un punto. Si se prueba esto, la función f admite una elevación $\tilde{f} : \mathbb{D} \setminus E \longrightarrow \mathbb{D}$, tal que $f = \pi \circ \tilde{f}$, donde $\pi : \mathbb{D} \longrightarrow S$ es un recubrimiento universal, por el Teorema 2.4.5.

Como E es un conjunto de capacidad analítica cero, $\tilde{f}$ se extiende a una función de $H(\mathbb{D},\mathbb{D})$, y consecuentemente $f = \pi \circ \tilde{f}$ se extiende a una función de $H(\mathbb{D}, S)$.

Por tanto, para probar el Teorema 3.1.14 basta con probar que $f(\sigma)$ es homótopa a un punto.

Si σ es homótopa a un punto, el resultado es elemental.

Si σ rodea un subconjunto cerrado F de E, dado cualquier $e \in F$, existe un radio positivo $r_e < d(\sigma, F)$ tal que

$$\beta := \beta(e, r_e) < \exp\left(\frac{-2\pi^2}{Sis(S)}\right).$$

Evidentemente, se tiene que

$$F \subset \cup_{e\in F}\overline{D(e, r_e\beta)},$$

y, como F es compacto, existen $\{e_1, \dots, e_k\}$ tales que

$$F \subset \cup_{j=1}^{k}\overline{D(e_j, r_j\beta_j)}.$$

Sean γ_j las curvas $\gamma_j := \{\, |z - e_j| = r_j\sqrt{\beta_j}\,\}$. Como los anillos $\{\, r_j\beta_j < |z - e_j| < r_j\}$ están contenidos en $\mathbb{D} \setminus E$, y son conformemente equivalentes (y por tanto isométricos) a los anillos $\{1 < |z| < 1/\beta_j\}$, el Lema 3.3.1 implica que

$$L_{\mathbb{D}\setminus E}(\gamma_j) \leq \frac{2\,\pi^2}{\log(1/\beta_j)} < Sis(S),$$

y entonces se tiene que

$$L_S(f(\gamma_j)) \leq L_{\mathbb{D}\setminus E}(\gamma_j) < Sis(S).$$

Como cualquier curva no homótopa a un punto en S tiene longitud mayor o igual que $Sis(S)$, se deduce que $f(\gamma_j)$ es homótopa a un punto. Para finalizar, sólo falta observar que como σ es libremente homótopa a la unión de las γ_j's, $f(\sigma)$ es libremente homótopa a la unión de las $f(\gamma_j)$'s, y por ello, homótopa a un punto. $\square$

3.3.1 Ejercicios

Ejercicio 3.3.1.1. *Dado al anillo* $A := \{1 < |z| < R\}$*, prueba que* $\gamma := \{|z| = \sqrt{R}\,\}$ *es una geodésica simple cerrada en* A*.*

Ejercicio 3.3.1.2. *Dado al anillo* $A := \{1 < |z| < R\}$*, prueba que* $\gamma := \{|z| = \sqrt{R}\,\}$ *es la única geodésica simple cerrada en* A*.*

Ejercicio 3.3.1.3. *Dado al anillo* $A := \{1 < |z| < R\}$ *y* $\gamma := \{|z| = \sqrt{R}\,\}$*, prueba que*

$$L_A(\gamma) = \frac{2\,\pi^2}{\log R}\,.$$

Ejercicio 3.3.1.4. *Prueba el Lema 3.3.1, usando los ejercicios anteriores y el Teorema 2.5.19.*

Ejercicio 3.3.1.5. *Dado al anillo* $A := \{1 < |z| < R\}$ *y* $\gamma := \{|z| = \sqrt{R}\,\}$*, prueba que toda curva* σ *no trivial en* A *verifica* $L_A(\sigma) \geq L_A(\gamma)$*.*

Capítulo 4

Espacios hiperbólicos de Gromov

4.1 Introducción a los espacios de Gromov

La teoría de espacios hiperbólicos de Gromov fue introducida por Mikhail Gromov en 1980 y, a partir de entonces, ha sido estudiada y desarrollada por numerosos autores.

Aunque la hiperbolicidad de Gromov puede definirse sobre espacios métricos arbitrarios, las dos primeras definiciones que veremos a continuación (triángulos thin y fine) necesitan la hipótesis adicional de que el espacio sea geodésico.

Definición 4.1.1. *Si $g : [a, b] \longrightarrow X$ es una curva continua en un espacio métrico (X, d), la* longitud *de g se define como*

$$L(g) := \sup \Big\{ \sum_{j=1}^{n} d(g(t_{j-1}), g(t_j)) : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \Big\} .$$

Una geodésica *γ en un espacio métrico X es una isometría de un intervalo de la recta real $I \subset \mathbb{R}$ en el espacio X, es decir, una aplicación que verifica $L(\gamma|_{[s,t]}) = d_X(\gamma(t), \gamma(s)) = t - s$ para todo $s, t \in I$ con $s < t$. Decimos que un espacio métrico X es un* espacio métrico geodésico *si* *para todo $x, y \in X$ existe una geodésica uniendo x con y, y que denotaremos por $[x, y]$.*

Obsérvese que, en principio, pueden existir varias geodésicas uniendo x con y, por lo que la notación $[x, y]$ puede resultar ambigua en algunos casos. No obstante, usaremos dicha notación ya que es la notación habitual y, además, resulta muy útil.

Definición 4.1.2. *Un* triángulo geodésico *$T = \{x_1, x_2, x_3\}$ está formado por la unión de tres geodésicas $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ y $[x_1, x_3]$ de X. Decimos que un triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ es δ-*thin *(o satisface la* condición de Rips *con constante δ) si para todo $p \in [x_i, x_j]$ se verifica*

$$d(p, [x_j, x_k] \cup [x_i, x_k]) \leq \delta,$$

para toda permutación $\{i, j, k\}$ de $\{1, 2, 3\}$.

*Decimos que un espacio métrico geodésico X es δ-*thin *si todo triángulo geodésico es δ-thin, para algún $\delta \geq 0$.*

Definición 4.1.3. *Dado un triángulo geodésico $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ en un espacio métrico geodésico X, construimos el triángulo T_E en el plano euclídeo cuyos lados tienen la misma longitud que los de T. Como no hay posible confusión, usaremos la misma notación para los puntos correspondientes a T y T_E. El círculo máximo inscrito en T_E interseca el lado $[x_1, x_2]$ (respectivamente $[x_2, x_3]$, $[x_3, x_1]$) en un punto x_3' (respectivamente x_1', x_2') de tal forma que $d(x_1, x_3') = d(x_1, x_2')$, $d(x_2, x_1') = d(x_2, x_3')$ y $d(x_3, x_1') = d(x_3, x_2')$. A los puntos x_1', x_2', x_3', les llamaremos* puntos internos *de $\{x_1, x_2, x_3\}$. Hay una única isometría f del triángulo $\{x_1, x_2, x_3\}$ sobre un* trípode *T_0 (un árbol con un vértice w de grado 3, y tres vértices x_1'', x_2'', x_3'' de grado uno, tal que $d(x_1'', w) = d(x_1, x_3') = d(x_1, x_2')$, $d(x_2'', w) = d(x_2, x_1') = d(x_2, x_3')$ y $d(x_3'', w) = d(x_3, x_1') = d(x_3, x_2')$).*

*El triángulo $\{x_1, x_2, x_3\}$ es δ-*fine *si $f(p) = f(q)$ implica que $d(p, q) \leq \delta$. El espacio X es δ-*fine *si todo triángulo geodésico en X es δ-fine.*

Definición 4.1.4. *Dado un espacio métrico (X, d) y un punto w, se define el* producto de Gromov *entre $x, y \in X$ respecto del punto base w como*

$$(x|y)_w := \frac{1}{2} \big(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y) \big) \geq 0\,.$$

Diremos que el espacio métrico (X,d) *es* δ-hiperbólico ($\delta \geq 0$)*, si*

$$(x|z)_w \geq \min\big\{(x|y)_w, (y|z)_w\big\} - \delta\,,$$

para todo $x,y,z,w \in X$*. Diremos que* X *es* hiperbólico *o* hiperbólico de Gromov *si es* δ*-hiperbólico para algún* δ*.*

Obsérvese que en la definición de producto de Gromov no influye demasiado el punto base elegido, ya que para todo $x,y,w,w' \in X$ se tiene

$$\big|(x|y)_w - (x|y)_{w'}\big| \leq d(w,w'). \tag{4.1.1}$$

Veremos a continuación que la hiperbolicidad de Gromov es equivalente a la condición de Rips y a la condición fine.

Teorema 4.1.5 ([GH] y [ABCD])**.** *Sea* X *un espacio métrico geodésico:*

1. *Si* X *es* δ*-hiperbólico, entonces es* 3δ*-thin y* 4δ*-fine.*
2. *Si* X *es* δ*-thin, entonces es* 4δ*-hiperbólico y* 4δ*-fine.*
3. *Si* X *es* δ*-fine, entonces es* 2δ*-hiperbólico y* δ*-thin.*

Una interpretación geométrica interesante del producto de Gromov en espacios hiperbólicos es la siguiente.

Proposición 4.1.6 (Lemma 1.7, p. 38 [GH])**.** *Sea* X *un espacio métrico geodésico* δ*-fine. Para todo* $x,y,w \in X$ *se tiene que*

$$d(w,[x,y]) - \delta \leq (x|y)_w \leq d(w,[x,y]),$$

para toda geodésica $[x,y]$ *uniendo* x *con* y *en* X*.*

La idea que subyace detrás de la *condición de Rips* es que los triángulos geodésicos en un espacio hiperbólico de Gromov son "uniformemente delgados"; por lo tanto, podemos interpretar la condición de Rips como una forma, más primitiva, de entender la curvatura negativa, que la tradicionalmente formulada como que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo geodésico es menor que π. Además, esta definición tiene la gran ventaja de no necesitar una métrica riemanniana, ya que se aplica a espacios métricos geodésicos.

Existen ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos, como son los siguientes:

1. Toda variedad riemanniana completa simplemente conexa con curvatura seccional acotada superiormente por una constante negativa es hiperbólica (ver [GH, p. 52]).

2. Todo espacio métrico acotado es $(\operatorname{diam} X)$-hiperbólico (ver [GH, p. 29]).

3. Un espacio vectorial normado es hiperbólico si y sólo si tiene dimensión uno.

4. Todo árbol con aristas de longitud arbitraria es 0-hiperbólico (ver [GH, p. 29]).

Presentamos a continuación un tipo de aplicaciones que juegan un papel muy importante en esta teoría: las quasi-isometrías.

Definición 4.1.7. *Una función entre dos espacios métricos $f : X \longrightarrow Y$ es una* quasi-isometría *si existen constantes $a \geq 1$, $b \geq 0$ tales que para todo $x_1, x_2 \in X$ se tiene*

$$\frac{1}{a}\, d_X(x_1, x_2) - b \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq a\, d_X(x_1, x_2) + b.$$

*Dichas funciones son llamadas (a, b)-*quasi-isometrías*.*

*Una quasi-isometría se dice ε-*full *si para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ con $d_Y(y, f(x)) \leq \varepsilon$.*

*Una (a, b)-*quasigeodésica *en X es una (a, b)-quasi-isometría entre un intervalo de la recta real $I \subset \mathbb{R}$ y X.*

Cabe destacar que las quasi-isometrías son una clase muy flexible de aplicaciones, ya que pueden ser, incluso, discontinuas (por ejemplo, la parte entera, como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es una quasi-isometría). Sin embargo, juegan un papel crucial en la teoría de Gromov, ya que preservan la hiperbolicidad, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.1.8 (p. 88, [GH])**.** *Consideremos una (a, b)-quasi-isometría entre espacios métricos geodésicos $f : X \longrightarrow Y$. Si Y es δ-hiperbólico, entonces X es δ'-hiperbólico, donde δ' es una constante que sólo depende de δ, a y b. Además, si f es ε-full, entonces X es hiperbólico si y sólo si Y es hiperbólico.*

La teoría de espacios hiperbólicos de Gromov nació motivada inicialmente por el estudio de grupos finitamente generados, y ha demostrado ser de enorme importancia práctica. En sus comienzos fue aplicada principalmente al estudio de grupos automáticos (ver, por ejemplo, el capítulo 3 de [O]), que juegan un importante papel en ciencias de la computación (de hecho, los grupos que son espacios de Gromov, son a su vez grupos automáticos fuertemente geodésicos; para profundizar en este tema se puede consultar, por ejemplo, [W]).

Sin embargo, en los últimos años se ha producido un importante cambio en la forma de trabajar en espacios de Gromov. Dicho cambio consiste en enfocar el tema desde un punto de vista más analítico y geométrico, en lugar del tradicional punto de vista algebraico. Esto ha permitido obtener uno de los resultados más importantes de la teoría: el teorema de Mario Bonk que caracteriza los espacios de Gromov como aquellos espacios métricos geodésicos que satisfacen la propiedad de "estabilidad geodésica".

Definición 4.1.9. *Consideremos una constante $H > 0$, un espacio métrico X, y dos conjuntos $Y, Z \subseteq X$. El conjunto $V_H(Y) := \{x \in X : d(x,Y) \leq H\}$ se denomina* H-entorno *de Y en X. La* distancia de Hausdorff *de Y a Z se define como*

$$d_{\mathcal{H}}(Y,Z) := \inf\{H > 0 : Y \subseteq V_H(Z),\ Z \subseteq V_H(Y)\}.$$

Teorema 4.1.10 (Teorema de estabilidad geodésica)**.** *Todo espacio métrico geodésico δ-hiperbólico X es geodésicamente estable, en el sentido de que si h es una (a,b)-quasigeodésica uniendo dos puntos x, y, y g es una geodésica en X uniendo dichos puntos, entonces existe una constante $H = H(\delta, a, b)$ tal que $d_{\mathcal{H}}(h,g) \leq H$, donde $d_{\mathcal{H}}$ es la distancia de Hausdorff.*

Recíprocamente, la estabilidad geodésica implica que el espacio es hiperbólico.

La primera parte del resultado puede encontrarse en [GH], mientras que el recíproco fue probado por Mario Bonk en [Bo]. Dicha propiedad puede expresarse de forma intuitiva de la siguiente manera: cerca de una quasigeodésica hay siempre una geodésica con los mismos extremos, donde la palabra "cerca" involucra constantes uniformes.

Esta importante propiedad de los espacios de Gromov es la clave de su más moderna e importante aplicación: ayudar a garantizar la seguridad de la transmisión de información por internet (ver [J, p. 47] y [JL]).

El Departamento de Defensa de Estados Unidos está interesado en prevenir lo que podría ser un ataque informático a cierta escala (lo que denominan con el exótico nombre de *Electronic Pearl Harbor*). De hecho, ha subvencionado la investigación en espacios de Gromov de Edmond Jonckheere (doctor en Ingeniería Eléctrica y Full Professor of Electrical Engineering and Mathematics, University of Southern California, Los Angeles), debido a las aplicaciones de la hiperbolicidad relacionadas con la seguridad informática.

Una estrategia clásica para preservar la seguridad en el envío de información por internet es dividir el mensaje en una gran cantidad de partes, y enviar cada parte por un "camino" diferente; la reconstrucción del mensaje resulta mucho más sencilla si las diferentes partes del mensaje llegan prácticamente al mismo tiempo, es decir, si los diferentes caminos usados para el envío tienen aproximadamente la misma longitud. Y aquí es donde juega un papel importante la hiperbolicidad de Gromov, ya que puede probarse que el grafo que modeliza internet es hiperbólico en sentido de Gromov, y eso permite demostrar que próximas a cualquier geodésica pueden encontrarse gran cantidad de quasigeodésicas.

La hiperbolicidad también juega un importante papel en la propagación de virus por la red (ver [J]).

Otro campo de aplicación de la hiperbolicidad es el análisis filogenético, área con un gran desarrollo en la actualidad, que trata de construir árboles o grafos que representen los datos sobre el ADN (ver [BKM]).

Una forma alternativa de entender la importancia de los espacios hiperbólicos es verlos como espacios que se parecen mucho a los árboles: de hecho, los árboles son precisamente los únicos espacios 0-hiperbólicos (ver, por ejemplo, [GH, p. 30]). Esta similitud hace que los espacios de Gromov disfruten de interesantes propiedades en común con los árboles (ver, por ejemplo, [GH, p. 33]).

Deseamos acabar esta introducción mencionando los artículos [APRT], [HLPRT], [HPRT1], [HPRT2], [PRT1], [PRT2], [PRT3], [PRT4], [PT], [RT1], [RT2], [RT3] y [T], en los que los autores investigan la hiperbolicidad de superficies de Riemann con la métrica de Poincaré, e incluso la hiperbolicidad de superficies con métricas de curvatura negativa no constante.

4.1.1 Ejercicios

Ejercicio 4.1.1.1. *Prueba que* $d_p(x,y) := |x-y|^p$ *es una distancia en* $\mathbb{R}$ *para cada* $0 < p \leq 1$ *y que no lo es para cualquier otro valor real de* p.

Ejercicio 4.1.1.2. *Prueba que* $(\mathbb{R}, d_p)$, *con* $d_p(x,y) := |x-y|^p$, *es un espacio métrico geodésico si y sólo si* $p = 1$.

Ejercicio 4.1.1.3. *Prueba que si* X *es un espacio métrico geodésico* δ-*thin, entonces todo polígono geodésico* P *de* n *lados* ($n \geq 3$) *es* $(n-2)\delta$-*thin, es decir, si* p *pertenece a un lado de* P *entonces la distancia de* p *a la unión de los otros* $n-1$ *lados de* P *es menor o igual que* δ.

Ejercicio 4.1.1.4. *Prueba que un espacio vectorial normado es hiperbólico si y sólo si tiene dimensión* 1.

Ejercicio 4.1.1.5. *Prueba que para todo* $x, y, w, w' \in X$ *se tiene*

$$\big|(x|y)_w - (x|y)_{w'}\big| \leq d(w,w').$$

Ejercicio 4.1.1.6. *Prueba que si* (X,d) *es un espacio métrico geodésico, entonces* $(x|y)_w = 0$ *si y sólo si* w *pertenece a una geodésica uniendo los puntos* x *e* y.

Ejercicio 4.1.1.7. *Prueba que* $\lim_{x \to y} (x|y)_w = d(y,w)$.

Ejercicio 4.1.1.8. *Prueba que para todo* x, y, z *en el espacio métrico* (X,d) *se tiene* $(x|y)_z + (x|z)_y = d(y,z)$.

Ejercicio 4.1.1.9. *Prueba que para todo* x, x_0, y, w *en el espacio métrico geodésico* (X,d) *con* $x_0 \in [x,w]$ *se tiene* $(x_0|y)_w \leq (x|y)_w$.

Ejercicio 4.1.1.10. *Prueba que si* $f : X \to Y$ *es una* (a,b)-*quasi-isometría y* $g : Y \to Z$ *es una* (c,d)-*quasi-isometría, entonces la composición* $g \circ f : X \to Z$ *también es una quasi-isometría.*

Ejercicio 4.1.1.11. *Si $f : X \to Y$ es una (a, b)-quasi-isometría ε-full entre dos espacios métricos, encuentra una (a', b')-quasi-isometría $g : Y \to X$, donde a', b' dependen sólo de a, b y ε. A g se le denomina* quasi-inversa *de f.*

Ejercicio 4.1.1.12. *Prueba que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{U}$ son $\log(1+\sqrt{2}\,)$-thin.*

Indicación: *Prueba que basta considerar el triángulo "ideal" en $\mathbb{U}$ de vértices $0, 1, \infty \in \partial\mathbb{U}$.*

Ejercicio 4.1.1.13. *Prueba que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{U}$ son fine.*

Indicación: *Dado un triángulo geodésico T en $\mathbb{D}$, considera la bola (hiperbólica) de mayor radio incluida en T, y recuerda que el teorema de Gauss-Bonnet garantiza que el área encerrada por T es menor que π.*

Ejercicio 4.1.1.14. *Prueba la Proposición 4.1.6.*

4.2 Demostraciones de algunos de los resultados básicos

Si X es un espacio hiperbólico, denotaremos por $\delta^*(X)$ la mejor constante de hiperbolicidad de X, es decir,

$$\delta^*(X) := \inf\big\{\delta : \ X \ \text{ es } \delta\text{-hiperbólico}\,\big\},$$

por $\delta(X)$ la mejor constante para la condición de Rips de X, es decir,

$$\delta(X) := \inf\big\{\delta : \ X \ \text{ es } \delta\text{-thin}\,\big\},$$

y por $\delta_f(X)$ la mejor constante para la condición fine de X, es decir,

$$\delta_f(X) := \inf\big\{\delta : \ X \ \text{ es } \delta\text{-fine}\,\big\}.$$

Teorema 4.2.1. *Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una $(1, b)$-quasi-isometría. Entonces,*

$$\delta^*(X) \le \delta^*(Y) + 3b.$$

Si además f es ε-full, entonces

$$\delta^*(Y) \le \delta^*(X) + 3b + 6\varepsilon.$$

Demostración. Observemos primeramente que

$$
\begin{aligned}
(f(x)|f(y))_{f(w)} &= \frac{1}{2}\big(d_Y(f(x),f(w)) + d_Y(f(y),f(w)) - d_Y(f(x),f(y))\big)\\
&\le \frac{1}{2}\big(d_X(x,w)+b+d_X(y,w)+b-d_X(x,y)+b\big)\\
&= (x|y)_w + \frac{3b}{2}\,,\\
(f(x)|f(y))_{f(w)} &= \frac{1}{2}\big(d_Y(f(x),f(w)) + d_Y(f(y),f(w)) - d_Y(f(x),f(y))\big)\\
&\ge \frac{1}{2}\big(d_X(x,w)-b+d_X(y,w)-b-d_X(x,y)-b\big)\\
&= (x|y)_w - \frac{3b}{2}\,,
\end{aligned}
$$

para todo $x,y,w \in X$. Por tanto,

$$(x|y)_w - \frac{3b}{2} \le (f(x)|f(y))_{f(w)} \le (x|y)_w + \frac{3b}{2}\,,$$

para todo $x,y,w \in X$. Consecuentemente,

$$
\begin{aligned}
(x|z)_w &\ge (f(x)|f(z))_{f(w)} - \frac{3b}{2}\\
&\ge \min\big\{(f(x)|f(y))_{f(w)}, (f(y)|f(z))_{f(w)}\big\} - \delta^*(Y) - \frac{3b}{2}\\
&\ge \min\big\{(x|y)_w, (y|z)_w\big\} - \delta^*(Y) - 3b,
\end{aligned}
$$

para todo $x,y,z,w \in X$. Entonces $\delta^*(X) \le \delta^*(Y) + 3b$.

Si además f es ε-full, entonces dados $x',y',w' \in Y$ existen $x,y,w \in X$ con $d_Y(x',f(x)) \le \varepsilon$, $d_Y(y',f(y)) \le \varepsilon$ y $d_Y(w',f(w)) \le \varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
&(x'|y')_{w'} = \frac{1}{2}\big(d_Y(x',w') + d_Y(y',w') - d_Y(x',y')\big)\\
&\quad\le \frac{1}{2}\big(d_Y(f(x),f(w)) + 2\varepsilon + d_Y(f(y),f(w)) + 2\varepsilon - d_Y(f(x),f(y)) + 2\varepsilon\big)\\
&\quad= (f(x)|f(y))_{f(w)} + 3\varepsilon \le (x|y)_w + \frac{3b}{2} + 3\varepsilon,\\
&(x'|y')_{w'} = \frac{1}{2}\big(d_Y(x',w') + d_Y(y',w') - d_Y(x',y')\big)\\
&\quad\ge \frac{1}{2}\big(d_Y(f(x),f(w)) - 2\varepsilon + d_Y(f(y),f(w)) - 2\varepsilon - d_Y(f(x),f(y)) - 2\varepsilon\big)\\
&\quad= (f(x)|f(y))_{f(w)} - 3\varepsilon \ge (x|y)_w - \frac{3b}{2} - 3\varepsilon,
\end{aligned}
$$

para todo $x', y', w' \in Y$. Consecuentemente,

$$(x|y)_w - \frac{3b}{2} - 3\varepsilon \le (x'|y')_{w'} \le (x|y)_w + \frac{3b}{2} + 3\varepsilon,$$

para todo $x', y', w' \in Y$. Entonces

$$\begin{aligned}(x'|z')_{w'} &\ge (x|z)_w - \frac{3b}{2} - 3\varepsilon \ge \min\big\{(x|y)_w, (y|z)_w\big\} - \delta^*(X) - \frac{3b}{2} - 3\varepsilon \\ &\ge \min\big\{(x'|y')_{w'}, (y'|z')_{w'}\big\} - \delta^*(X) - 3b - 6\varepsilon,\end{aligned}$$

para todo $x', y', z', w' \in Y$. Por tanto, $\delta^*(Y) \le \delta^*(X) + 3b + 6\varepsilon$. □

El Teorema 4.2.1 tiene como consecuencia directa que la hiperbolicidad también se preserva entre espacios métricos (aunque no sean geodésicos) por $(1, b)$-quasi-isometrías.

Teorema 4.2.2. *Consideremos una $(1, b)$-quasi-isometría entre espacios métricos $f : X \longrightarrow Y$. Si Y es δ-hiperbólico, entonces X es δ'-hiperbólico, donde $\delta' = \delta + 3b$. Además, si f es ε-full para algún $\varepsilon \ge 0$, entonces X es hiperbólico si y sólo si Y es hiperbólico.*

Existen ejemplos que muestran que la conclusión del Teorema 4.2.2 no siempre se verifica si f es una (a, b)-quasi-isometría con $a > 1$.

Lema 4.2.3. *Sean X un espacio métrico geodésico δ-fine, g una geodésica en X, $z \in g$ y $z_0 \in X$. Denotemos por w uno de los puntos más cercanos a z_0 en g. Entonces $d(z_0, w) + d(w, z) - 2\delta \le d(z_0, z) \le d(z_0, w) + d(w, z)$.*

Demostración. La segunda desigualdad $d(z_0, z) \le d(z_0, w) + d(w, z)$ es una consecuencia directa de la desigualdad triangular.

Para probar la primera desigualdad consideremos $[w, z] \subseteq g$. Por la Proposición 4.1.6 sabemos que $d(z_0, [w, z]) \le (w|z)_{z_0} + \delta$, y entonces

$$\begin{aligned}d(z_0, w) = d(z_0, g) &\le d(z_0, [w, z]) \le (w|z)_{z_0} + \delta \\ &= \frac{1}{2}\big(d(z_0, w) + d(z_0, z) - d(w, z)\big) + \delta\,.\end{aligned}$$

Consecuentemente, deducimos que $d(z_0, w) + d(w, z) - 2\delta \le d(z_0, z)$. □

Es fácil probar que si h es una curva uniendo dos puntos x, y en un espacio métrico geodésico con $L(h) \le d(x, y) + b$, entonces h es una $(1, b)$-quasigeodésica (ver Ejercicio 4.2.1.1).

Teorema 4.2.4 (Versión "light" del Teorema de estabilidad geodésica)**.** *Todo espacio métrico geodésico hiperbólico X verifica que si h es una curva uniendo dos puntos x, y, con $L(h) \le d(x, y) + b$, y g es una geodésica en X uniendo dichos puntos, entonces $d_{\mathcal{H}}(g, h) \le 4\delta_f(X) + b$.*

Demostración. Fijemos $z_0 \in h$ y denotemos por w uno de los puntos más cercanos a z_0 en g. Por hipótesis, se verifica $L(h) \le L(g) + b = d(x, y) + b$. Además, si h_1 es la parte de h que une x con z_0 y h_2 es la parte de h que une z_0 con y, se tiene que $L(h_1) \ge d(x, z_0)$ y $L(h_2) \ge d(z_0, y)$. Consecuentemente, $L(h) \ge d(x, z_0) + d(z_0, y)$.

El Lema 4.2.3 permite deducir

$$\begin{aligned} d(x,y) &\ge L(h) - b \ge d(x, z_0) + d(z_0, y) - b \\ &\ge d(x,w) + d(w,z_0) - 2\delta_f(X) + d(z_0,w) + d(w,y) - 2\delta_f(X) - b \\ &\ge d(x,y) + 2d(z_0,w) - 4\delta_f(X) - b. \end{aligned}$$

Por tanto, $d(z_0, g) \le d(z_0, w) \le 2\delta_f(X) + b/2$ para todo $z_0 \in h$, y deducimos que $h \subseteq V_{2\delta_f(X)+b/2}(g)$.

Fijemos ahora $\varepsilon > 0$ y elijamos puntos $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$ en h con $d(x_j, x_{j+1}) \le \varepsilon$ para $j = 0, 1, \dots, k-1$. Denotemos por w_j uno de los puntos más cercanos a x_j en g para cada $j = 0, 1, \dots, k$. El razonamiento anterior, con $z_0 = x_j$ nos da $d(x_j, w_j) \le 2\delta_f(X) + b/2$ para $j = 0, 1, \dots, k$. Por la desigualdad triangular obtenemos que

$$\begin{aligned} d(w_j, w_{j+1}) &\le d(w_j, x_j) + d(x_j, x_{j+1}) + d(x_{j+1}, w_{j+1}) \\ &\le 2\delta_f(X) + b/2 + \varepsilon + 2\delta_f(X) + b/2 \\ &= 4\delta_f(X) + b + \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ya que podemos elegir $w_0 = x_0 = x$ y $w_k = x_k = y$, para cada punto $z \in g$ existe un punto $w_j \in g$ con $d(z, w_j) \le 2\delta_f(X) + b/2 + \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned} d(z,h) &\le d(z, x_j) \le d(z, w_j) + d(w_j, x_j) \\ &\le 2\delta_f(X) + b/2 + \varepsilon/2 + 2\delta_f(X) + b/2 = 4\delta_f(X) + b + \varepsilon/2\,. \end{aligned}$$

Entonces, $d(z, h) \le 4\delta_f(X) + b$. Por tanto, $g \subseteq V_{4\delta_f(X)+b}(h)$ y $d_{\mathcal{H}}(g, h) \le 4\delta_f(X) + b$. □

Teorema 4.2.5. *Para cada $\delta, b \ge 0$ y $a \ge 1$, existe una constante $K = K(\delta, a, b)$ con la siguiente propiedad:*

Si X es un espacio métrico geodésico δ-hiperbólico y $T \subseteq X$ es un triángulo de lados (a,b)-quasigeodésicos, entonces T es K-thin. Además, $K = 3\delta + 2H(\delta,a,b)$, donde H es la constante del Teorema 4.1.10.

Demostración. Sea T un triángulo de lados (a,b)-quasigeodésicos g_1, g_2 y g_3, y sea γ_j una geodésica uniendo los extremos de g_j para cada $j = 1,2,3$. Denotemos por T' el triángulo geodésico de lados $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Sea $p \in T$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \in g_1$. El Teorema 4.1.10 nos dice que existe un punto p' en γ_1 con $d(p,p') \le H(\delta,a,b)$. Dado que T' es un triángulo 3δ-thin por el Teorema 4.1.5, existe $q' \in \gamma_2 \cup \gamma_3$ con $d(p',q') \le \delta$. Usando de nuevo el Teorema 4.1.10, sabemos que existe un punto $q \in g_2 \cup g_3$ con $d(q,q') \le H(\delta,a,b)$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} d(p, g_2 \cup g_3) &\le d(p,q) \le d(p,p') + d(p',q') + d(q',q) \\ &\le H(\delta,a,b) + 3\delta + H(\delta,a,b), \end{aligned}$$

y T es $(3\delta + 2H(\delta,a,b))$-thin. □

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 4.1.8 usando el Teorema 4.2.5.

Demostración del Teorema 4.1.8. Sean T un triángulo geodésico en X de lados g_1, g_2 y g_3, y T_Y el triángulo de lados (a,b)-quasigeodésicos $f(g_1)$, $f(g_2)$ y $f(g_3)$ en Y. Por el Teorema 4.2.5, T_Y es K-thin.

Sean $\varepsilon > 0$ y $p \in T$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \in g_1$. Como T_Y es K-thin, entonces $d_Y(f(p), f(g_2) \cup f(g_3)) \le K$ y existe un punto $q \in g_2 \cup g_3$ con $d_Y(f(p), f(q)) \le K + \varepsilon$.

Por tanto,

$$d_X(p, g_2 \cup g_3) \le d_X(p,q) \le a d_Y(f(p), f(q)) + ab \le aK + a\varepsilon + ab,$$

y $d_X(p, g_2 \cup g_3) \le aK + ab$. Por tanto, T es $(aK + ab)$-thin. Como T es un triángulo arbitrario, se tiene que X es $(aK + ab)$-thin y, por el Teorema 4.1.5, es $4(aK + ab)$-hiperbólico.

Supongamos además que f es ε-full. Es fácil comprobar que existe una (a',b')-quasi-isometría $g : Y \longrightarrow X$, donde a', b' dependen sólo de a, b y ε. (A g se le denomina *quasi-inversa* de f.) Entonces basta con aplicar la primera parte del teorema, ya probada. □

4.2.1 Ejercicios

Ejercicio 4.2.1.1. *Prueba que si h es una curva uniendo dos puntos x, y en un espacio métrico geodésico con $L(h) \leq d(x, y) + b$, entonces h es una $(1, b)$-quasigeodésica.*

Ejercicio 4.2.1.2. *Encuentra dos espacios métricos $(X, d_X), (Y, d_Y)$ y una (a, b)-quasi-isometría $f : X \to Y$ tal que Y es hiperbólico y X no es hiperbólico. ¿Contradice esto los Teoremas 4.1.8 y 4.2.2?*

Ejercicio 4.2.1.3. *¿Es posible mejorar la desigualdad $L(h) \geq d(x, z_0) + d(z_0, y)$ que se usa en la demostración del Teorema 4.2.4?*

Ejercicio 4.2.1.4. *Mejora la desigualdad $d_{\mathcal{H}}(g, h) \leq 4\delta_f(X) + b$ del Teorema 4.2.4 en el caso particular de que h también sea una geodésica, obteniendo $d_{\mathcal{H}}(g, h) \leq \delta(X)$.*

Ejercicio 4.2.1.5. *Consideremos una $(1, b)$-quasi-isometría entre espacios métricos $f : X \longrightarrow Y$. Si Y es δ-hiperbólico, prueba que entonces X es $(\delta + 3b)$-hiperbólico.*

Ejercicio 4.2.1.6. *Consideremos una $(1, b)$-quasi-isometría ε-full entre espacios métricos $f : X \longrightarrow Y$. Si X es δ-hiperbólico, prueba que entonces Y es δ'-hiperbólico, y encuentra una expresión explícita para δ' que sólo dependa de b y ε.*

4.3 Frontera de Gromov

Si un espacio es hiperbólico en sentido de Gromov, entonces es posible definir su frontera de Gromov (generalizando la situación del disco unidad $\mathbb{D}$, que tiene como frontera natural la circunferencia unidad) de la siguiente forma.

Definición 4.3.1. *Una sucesión $\{x_i\}$ de puntos en un espacio métrico X se dice que* converge a infinito *si*

$$\lim_{i,j \to \infty} (x_i | x_j)_w = \infty.$$

Obsérvese que por (4.1.1) la definición de sucesión convergente a infinito es independiente del punto base elegido w. Si $\{x_i\}$ converge a infinito entonces $\lim_{i\to\infty} d(x_i, w) = \infty$. *Dos sucesiones* $\{x_i\}, \{y_i\}$, *que tienden a infinito, son* equivalentes *si* $\lim_{i\to\infty}(x_i|y_i)_w = \infty$ *(puede demostrarse que esto es una relación de equivalencia en todo espacio hiperbólico de Gromov). La* frontera *de X, denotada por ∂X, es el conjunto de las clases de equivalencia de las sucesiones que convergen a infinito. Si $\{x_i\}$ pertenece a la clase de equivalencia de $\xi \in \partial X$, entonces escribiremos* $\lim_{i\to\infty} x_i = \xi$. *Se define la* clausura de Gromov *de X como $\widehat{X} = X \cup \partial X$.*

El producto de Gromov se extiende a la frontera de la siguiente forma: dados dos puntos en la frontera $\xi, \eta \in \partial X$

$$(\xi|\eta)_w := \inf \liminf_{i\to\infty} (x_i|y_i)_w \,,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones $\{x_i\}, \{y_i\} \in X$ tales que $\lim_{i\to\infty} x_i = \xi$ y $\lim_{i\to\infty} y_i = \eta$. Si $\xi \in \partial X$ e $y \in X$, entonces definimos $(\xi|y)_w := \inf \liminf_{i\to\infty}(x_i|y)_w$, donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones $\{x_i\} \in X$, tal que $\lim_{i\to\infty} x_i = \xi$.

Además, se puede comprobar que se sigue verificando la desigualdad

$$(\xi|\eta)_w \ge \min\big\{(\xi|\zeta)_w, (\zeta|\eta)_w\big\} - \delta \,, \tag{4.3.1}$$

para todo $\xi, \eta, \zeta \in \widehat{X}$ y para todo punto base $w \in X$.

Definición 4.3.2. *Un* rayo geodésico *en un espacio X es la imagen isométrica de la semirrecta* $[0, \infty)$. *Se dice que dos rayos geodésicos son* equivalentes *si su distancia de Hausdorff es finita.*

Definición 4.3.3. *Un espacio métrico* (X, d) *es* propio *si toda bola cerrada en X es compacta.*

Si el espacio métrico X es geodésico y propio, puede definirse su frontera geodésica, que denotaremos por $X(\infty)$, como las clases de equivalencia de los rayos geodésicos en X comenzando en un punto base w. Por tanto, si $a \in X(\infty)$ entonces existe un rayo geodésico $a(t)$ que lo representa, y escribiremos $\lim_{t\to\infty} a(t) = a$.

Si X es un espacio geodésico y propio, ambas fronteras, ∂X y $X(\infty)$, son equivalentes:

Proposición 4.3.4 (Proposition 4, p.120, [GH]). *Dado un espacio métrico geodésico propio X, existe una biyección natural entre ∂X y $X(\infty)$.*

Pueden definirse una métrica de Gromov en la frontera y una topología natural en $\widehat{X} = X \cup \partial X$, que coincide en X con su topología original, y que tiene interesantes propiedades.

La frontera de Gromov tiene la propiedad de functorialidad, es decir, que las isometrías (e incluso las quasi-isometrías) pueden extenderse como un homeomorfismo a la frontera (e incluso un homeomorfismo bi-Hölder con respecto a la métrica de Gromov en la frontera). Esto ha permitido conseguir resultados muy sorprendentes como, por ejemplo, la clasificación de las isometrías de tales espacios: al igual que las isometrías del disco unidad con su métrica de Poincaré (es decir, las transformaciones de Möbius que preservan el disco) se clasifican en elípticas, hiperbólicas y parabólicas (según sean sus puntos fijos), en cualquier espacio geodésico hiperbólico propio se obtiene una clasificación semejante (ver [GH, Capítulo 8.2]). Además, estas isometrías elípticas, hiperbólicas y parabólicas tienen propiedades muy similares a las isometrías del mismo tipo en el disco unidad. Esto resulta especialmente sorprendente si recordamos que en el estudio de las isometrías del disco juega un papel muy destacado el hecho de que las isometrías son funciones holomorfas. Esta clasificación de las isometrías resulta crucial en las pruebas de los teoremas que aparecen en [MRT] y [P].

Otro espectacular éxito de la teoría de espacios hiperbólicos ha sido la mejora del teorema de Charles Fefferman (matemático galardonado con la Medalla Fields). Es bien conocido que las aplicaciones conformes (o lo que es lo mismo, biholomorfas, es decir, funciones holomorfas inyectivas tales que sus inversas también son holomorfas) entre dominios simplemente conexos con frontera regular en el plano complejo pueden extenderse de forma continua a la frontera, de forma que se obtiene un homeomorfismo entre las clausuras de dichos dominios. Si nos planteamos trabajar en $\mathbb{C}^n$ en lugar de en $\mathbb{C}$, el problema es mucho más difícil, pero Fefferman (muchos años después de conocerse el resultado en $\mathbb{C}$) demostró en [Fe], con una prueba muy complicada, que las aplicaciones biholomorfas entre dominios acotados estrictamente pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$ con frontera suave también se extienden como un homeomorfismo a la frontera.

Consideremos el caso de la métrica de Kobayashi en uno de tales dominios; Balogh y Bonk han demostrado en [BB] que dichos dominios con esta métrica son hiperbólicos en sentido de Gromov, y que su frontera de Gromov es homeomorfa a su frontera topológica. Como una aplicación de la functorialidad de la frontera de Gromov, obtienen "gratis" que las aplicaciones biholomorfas (que siempre son isometrías para la métrica de Kobayashi, por el Corolario 2.9.2) se extienden a la frontera como homeomorfismos (de hecho, como homeomorfismos bi-Lipschitz con respecto a la métrica de Carnot-Carathéodory en la frontera). Pero esta misma prueba también funciona para clases de aplicaciones mucho más generales que las aplicaciones biholomorfas, como son las quasi-isometrías para la métrica de Kobayashi, mejorando así el teorema de Charles Fefferman.

En aplicaciones a diversas áreas de las matemáticas, puede demostrarse que la frontera de Gromov (bajo condiciones apropiadas) coincide con otras fronteras naturales, como la euclídea, la euclídea interior, o la frontera de Martin, y por tanto podemos obtener una gran variedad de resultados de extensión a la frontera similares a los anteriores.

4.3.1 Ejercicios

Ejercicio 4.3.1.1. *Prueba que la definición de sucesión convergente a infinito (Definición 4.3.1) es independiente del punto base w elegido.*

Ejercicio 4.3.1.2. *Prueba que si la sucesión $\{x_i\}$ converge a infinito entonces* $\lim_{i\to\infty} d(x_i, w) = \infty$.

Ejercicio 4.3.1.3. *Si X es un espacio hiperbólico de Gromov, prueba que la relación R entre sucesiones $\{x_i\}, \{y_i\}$, que tienden a infinito, definida como $\{x_i\}R\{y_i\}$ si $\lim_{i\to\infty}(x_i|y_i)_w = \infty$, es una relación de equivalencia.*

Ejercicio 4.3.1.4. *Encuentra una cota para*

$$\big|(\xi|\eta)_w - (\xi|\eta)_{w'}\big|$$

en términos de $d(w, w')$, para $\xi, \eta \in \partial X$.

Ejercicio 4.3.1.5. *Encuentra una cota para*

$$\big|(\xi|y)_w - (\xi|y)_{w'}\big|$$

en términos de $d(w,w')$*, para* $\xi \in \partial X$ *e* $y \in X$*.*

Ejercicio 4.3.1.6. *Prueba que si* X *es un espacio hiperbólico, se sigue verificando la desigualdad*

$$(\xi|\eta)_w \geq \min\big\{(\xi|\zeta)_w, (\zeta|\eta)_w\big\} - \delta\,,$$

para todo $\xi,\eta,\zeta \in \widehat{X}$ *y para todo punto base* $w \in X$*.*

Ejercicio 4.3.1.7. *Si* (X,d) *es un espacio métrico propio, prueba que un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Ejercicio 4.3.1.8. *Halla la frontera de Gromov* $\mathbb{R}^2(\infty)$ *de* $\mathbb{R}^2$*.*

Ejercicio 4.3.1.9. *Halla las fronteras de Gromov* $\mathbb{D}(\infty)$ *y* $\widehat{\mathbb{D}}$ *de* $\mathbb{D}$*, y comprueba que coinciden.*

Bibliografía

[A] Ahlfors, L. V., *Conformal invariants.* McGraw-Hill, New York, 1973.

[AS] Ahlfors, L. V., Sario, L., *Riemann Surfaces.* Princeton University Press, Princeton, 1960.

[ABCD] Alonso, J., Brady, T., Cooper, D., Delzant, T., Ferlini, V., Lustig, M., Mihalik, M., Shapiro, M., Short, H., *Notes on word hyperbolic groups*, in: E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky (Eds.), Group Theory from a Geometrical Viewpoint, World Scientific, Singapore, 1992.

[APRT] Alvarez, V., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Gromov hyperbolicity of Denjoy domains*, Geom. Dedicata **121** (2006), 221-245.

[An] Anderson, J. W., *Hyperbolic Geometry.* Springer-Verlag, London, 1999.

[BB] Balogh, Z. M., Bonk, M., *Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains*, Comment. Math. Helv. **75** (2000), 504-533.

[Be] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[BP] Beardon, A. F., Pommerenke, Ch., *The Poincaré metric of a plane domain*, J. London Math. Soc. (2) **18** (1978), 475-483.

[Bo] Bonk, M., *Quasi-geodesics segments and Gromov hyperbolic spaces*, Geom. Dedicata **62** (1996), 281-298.

[BKM] Brinkmann, G., Koolen J., Moulton, V., *On the hyperbolicity of chordal graphs*, Ann. Comb. **5** (2001), 61-69.

[Bu] Buser, P., *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Progress in Mathematics, Volume 106. Birkhäuser, Boston, 1992.

[Ca] Carleson, L., *A remark on Picard's theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 142-144.

[CDP] Coornaert, M., Delzant, T., Papadopoulos, A., *Géométrie et théorie des groupes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1441, Springer, Berlin, 1991.

[F] Fefferman, C., *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. **26** (1974), 1-65.

[Fe] Fenchel, W., *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1989.

[Fi] Fisher, S., *Function theory on planar domains*. John Wiley & Sons, 1983.

[Fo] Forster, O., *Lectures on Riemann surfaces*. Springer-Verlag, 1977.

[GHL] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, 1987.

[GH] Ghys, E., de la Harpe, P., *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*. Progress in Mathematics, Volume 83. Birkhäuser, 1990.

[G] Gonzalo, J., *Variedades y Geometría: un curso breve. Segunda reimpresión*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Volumen 64, 2010.

[HLPRT] Hästö, P. A., Lindén, H., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Gromov hyperbolicity of Denjoy domains with hyperbolic and quasihyperbolic metrics*. Por aparecer en J. Math. Soc. Japan.

[HPRT1] Hästö, P. A., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Gromov hyperbolic equivalence of the hyperbolic and quasihyperbolic metrics in Denjoy domains*, B. London Math. Soc. **42** (2010), 282-294.

[HPRT2] Hästö, P. A., Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Comparative Gromov hyperbolicity results for the hyperbolic and quasihyperbolic metrics*, Complex Var. Elliptic Eq. **55** (2010), 127-135.

[H] Hejhal, D. A., *Universal Covering Maps for Variable Regions*, Math. Z. **137** (1974), 7-20.

[J] Jonckheere, E., *Contrôle du trafic sur les réseaux à géométrie hyperbolique*, J. Europ. Syst. Autom. **8** (2002), 45-57.

[JL] Jonckheere, E., Lohsoonthorn, P., *A hyperbolic geometry approach to multipath routing*, Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2002), Lisbon, Portugal, July 2002. FA5-1.

[JS] Jones, G. A., Singerman, D., *Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[Ko] Kobayashi, S., *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.

[Kr1] Krantz, S. G., *Complex analysis: the geometric viewpoint.* Carus Mathematical Monographs, M.A.A., Washington, 1990.

[Kr2] Krantz, S. G., *Geometric Function Theory.* Birkhäuser, Washington, 2006.

[M] Massey, W., *Introducción a la topología algebraica.* Reverté, Barcelona, 1972.

[MRT] Melián, M. V., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Escaping geodesics in Riemannian surfaces with variable negative curvature.* En preparación.

[Mi] Minda, D., *A reflection principle for the hyperbolic metric and applications to Geometric Function Theory*, Complex Variables **8** (1987), 129-144.

[ON] O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry, Second Edition*, Academic Press, 2006.

[O] Oshika, K., *Discrete groups*, AMS Bookstore, 2002.

[P] Paulin, F., *On the critical exponent of a discrete group of hyperbolic isometries*, Diff. Geom. Appl. **7** (1997), 231-236.

[PRT1] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *The topology of balls and Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces*, Diff. Geom. Appl. **21** (2004), 317-335.

[PRT2] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *The role of funnels and punctures in the Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **49** (2006), 399-425.

[PRT3] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Stability of Gromov hyperbolicity*, J. Advan. Math. Studies **2** (2009), 1-20.

[PRT4] Portilla, A., Rodríguez, J. M., Tourís, E., *A real variable characterization of Gromov hyperbolicity of flute surfaces*. Por aparecer en Osaka J. Math.

[PT] Portilla, A., Tourís, E., *A characterization of Gromov hyperbolicity of surfaces with variable negative curvature*, Publ. Mat. **53** (2009), 83-110.

[R] Rodríguez, J. M., *Superficies de Riemann bass, función de Green y extensión holomorfa*. Tesis Doctoral dirigida por José Luis Fernández. Universidad Autónoma de Madrid, 1991.

[RT1] Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces*, Acta Math. Hung. **103** (2004), 53-84.

[RT2] Rodríguez, J. M., Tourís, E., *A new characterization of Gromov hyperbolicity for Riemann surfaces*, Publ. Mat. **50** (2006), 249-278.

[RT3] Rodríguez, J. M., Tourís, E., *Gromov hyperbolicity of Riemann surfaces*, Acta Math. Sinica **23** (2007), 209-228.

[Ro] Royden, H. L., *The Picard theorem for Riemann surfaces*, Proc. Am. Math. Soc. **90** (1984), 571-574.

[Ru] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis.* 3^{rd} ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

[Sh] Shiga, H., *On the boundary behavior of holomorphic mappings of plane domains to Riemann surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **4** (1989), 643-651.

[Su] Suzuki, M., *Comportement des applications holomorphes autour d'un ensemble polaire*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 304, Série I, **8** (1987), 191-194.

[T] Tourís, E., *Graphs and Gromov hyperbolicity of non-constant negatively curved surfaces.* Enviado para su publicación.

[Ts] Tsuji, M., *Potential theory in modern function theory.* Maruzen, Tokyo, 1959.

[W] Wikipedia, página
http://en.wikipedia.org/wiki/Negatively_curved_group

[Wo] Wolf, J., *Spaces of Constant Curvature.* 4^{th} ed., Publish or Perish Press, Berkeley, 1977.