Ortogonalidad no estándar: problemas directos e inversos

Antonia M. Delgado Amaro

Departamento de Matemáticas
Escuela Politécnica Superior
Universidad Carlos III de Madrid

ORTOGONALIDAD NO ESTÁNDAR: PROBLEMAS DIRECTOS E INVERSOS

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

TESIS DOCTORAL

Ortogonalidad no estándar: problemas directos e inversos

Autora:
Antonia María Delgado Amaro

Directores:
Dr. Francisco Marcellán Español
Dr. Jeffrey S. Geronimo

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Leganés, Mayo 2006

TESIS DOCTORAL

ORTOGONALIDAD NO ESTÁNDAR: PROBLEMAS DIRECTOS E INVERSOS

Autora: Antonia María Delgado Amaro

Directores: Dr. Francisco Marcellán Español
Dr. Jeffrey S. Geronimo

Firma Del Tribunal Calificador:

			Firma
Presidente:	Dr.	____________________	________
Vocal:	Dr.	____________________	________
Vocal:	Dr.	____________________	________
Vocal:	Dr.	____________________	________
Secretario:	Dr.	____________________	________

Calificación:

Leganés, de Mayo de 2006

A mis padres,
a Mateo, a Seba
y a Juanjo.

Agradecimientos

Se me hace difícil expresar con palabras la gratitud que os debo a todos aquellos que me habéis apoyado y animado durante este tiempo. No han sido pocos los malos momentos pero, afortunadamente, han sido muchos más los buenos gracias a todos vosotros.

Deseo, en primer lugar, expresar mi más sincero agradecimiento a Paco, porque desde el principio aceptó, sin condiciones, la difícil tarea de guiarme en este camino. Gracias por tu apoyo, por valorar mi esfuerzo y animarme en todo momento, por el tiempo que, con cariño, dedicaste a seguir adelante con este proyecto.

También me gustaría dar las gracias a Jeff, que ha sido mi segundo jefe al otro lado del océano. Gracias por la maravillosa acogida en Atlanta aquel otoño del 2003 y por enseñarme a divertirme haciendo matemáticas.

En estos momentos no puedo olvidar a Mayte, que desde Granada me dio el primer empujón y me adentró en el mundo de la investigación y de los polinomios ortogonales. Gracias por tu apoyo y por recordarme el valor del trabajo diario. Gracias por tu amistad.

A mis amigos y compañeros de batalla en el departamento, especialmente a Ángeles, Marina, Pedro y Mayte. Gracias por esos buenos ratos de conversación y risas, sin los cuales todo esto no tendría sentido.

A mis compañeros de piso, Mayte y Alberto, C.A. y Sergei, gracias por hacerme compañía, por estar dispuestos a escucharme y animarme con una sonrisa cada vez que llegaba a casa.

A mi familia, por estar siempre a mi lado. Gracias por vuestro cariño y apoyo diario e incondicional, por soportar con paciencia mi mal humor, por compartir mis ilusiones.

Y, en especial, a Juanjo. Gracias por estar cada día aquí conmigo, a pesar de la distancia que nos separaba. Por tus consejos, por escucharme y animarme, por hacerme reír. Gracias por tu paciencia durante todos estos años, porque tú y yo sabemos que esto no es el final, sino el principio...

Índice general

Introducción general

A lo largo de la presente memoria pretendemos realizar diversos estudios que podemos enmarcar dentro de la Teoría General de Polinomios Ortogonales. Concretamente, el trabajo desarrollado gira en torno a dos ejes principales que pasamos a describir de manera breve para focalizar el objeto de nuestro estudio. Por un lado, realizamos un análisis de las familias de polinomios ortogonales con respecto a pares de funcionales $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sobre los que supondremos que verifican ciertas condiciones que llamaremos de *coherencia generalizada*. Tales condiciones proporcionan una herramienta útil para el estudio de los polinomios de Sobolev que son ortogonales con respecto al producto escalar definido por

$$\langle p, q \rangle_S = \langle \mathbf{u}, pq \rangle + \lambda \langle \mathbf{v}, p'q' \rangle,$$

donde p, q son polinomios y p' denota la primera derivada de p.

Por otro lado, hacemos una incursión en la teoría de polinomios ortogonales en varias variables, estableciendo las definiciones apropiadas de ortogonalidad y desarrollando una teoría constructiva de los mismos.

Para una mejor estructuración y comprensión de los resultados hemos dividido esta memoria en siete capítulos, además de la presente introducción general y una bibliografía final común para todos los capítulos. En cada capítulo, compuesto a su vez de secciones y subsecciones, hemos incluído una primera sección (sin numerar) que comprende una introducción, a modo de resumen, de su contenido.

A continuación enunciaremos, de manera descriptiva, los contenidos y principales resultados de cada uno de los capítulos.

El Capítulo 1 es una introducción a la teoría general de polinomios ortogonales. Tras un breve apunte histórico sobre el origen de la teoría de polinomios ortogonales, en la primera sección presentamos los conceptos básicos sobre funcionales lineales y polinomios ortogonales estándar. En particular, definimos operaciones algebraicas en el espacio vectorial $\mathbb{P}'$ de las aplicaciones lineales definidas sobre el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales $\mathbb{P}$. Introducimos el concepto de sucesión de momentos asociada a un funcional lineal y presentamos las propiedades fundamentales de las sucesiones de polinomios ortogonales respecto de funcionales lineales, destacando el papel de las familias clásicas de polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite. La segunda parte del capítulo contiene una introducción básica a los productos escalares de Sobolev, prestando especial atención a los conceptos de coherencia y coherencia simétrica introducidos por A. Iserles *et al.* en [35].

El Capítulo 2 está dedicado exclusivamente al análisis de los funcionales lineales semiclásicos según la definición dada por P. Maroni en [65]. Establecemos las propiedades que caracterizan los funcionales semiclásicos y las familias de polinomios ortogonales asociadas, haciendo especial hincapié en criterios para determinar de la clase del funcional. De las propiedades que más nos van a interesar, cabe resaltar la de cuasi–ortogonalidad de las derivadas que caracteriza a las familias semiclásicas. En la última parte del capítulo nos centraremos en el análisis del problema de simetrización de este tipo de funcionales, destacando la conservación del carácter semiclásico en este proceso, así como la determinación de la clase del funcional simetrizado. Además, el carácter simétrico de un funcional semiclásico da información clave sobre la forma de los polinomios que aparecen en la ecuación de Pearson asociada. Este hecho nos permitirá realizar un análisis sistemático para describir todos los funcionales definidos positivos simétricos semiclásicos de clase 2, que los deduciremos mediante un proceso de simetrización a partir de funcionales semiclásicos de clase 1.

El Capítulo 3 es el primero en esta memoria dedicado al estudio de pares coherentes. Concretamente, determinamos una condición de coherencia que generaliza la introducida por A. Iserles *et al.* en [35]. El mayor interés es poder caracterizar las familias de polinomios ortogonales de Sobolev que verifican cierta relación algebraica *"dos a dos"* con los polinomios ortogonales asociados al primer funcional del producto de Sobolev. El resultado principal de este capítulo asegura que si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente generalizado, entonces al menos uno de estos dos funcionales tiene que ser, bien clásico, o bien semiclásico de clase 1. Además, existe una relación entre ambos funcionales que permite determinar el funcional compañero mediante una modificación racional. Así, en la segunda parte del capítulo, nos dedicaremos a la descripción de todos los pares de funcionales que verifican esta condición de coherencia generalizada, comprobando explícitamente dicha condición para cada uno de los pares obtenidos. En este proceso de comprobación juegan un papel fundamental las propiedades de los polinomios semiclásicos determinadas en el capítulo anterior, especialmente la condición de cuasi–ortogonalidad de las derivadas.

La primera parte del Capítulo 4 sigue un esquema paralelo al Capítulo 3, aunque en este caso tratamos funcionales simétricos. Concretamente, generalizamos el concepto de coherencia simétrica introducido por A. Iserles *et al.* en [35]. Bajo ciertas hipótesis adicionales, probamos un resultado análogo al obtenido en el capítulo anterior. En tal caso, el funcional lineal correspondiente al término con derivadas en el producto escalar de Sobolev, es un funcional semiclásico de clase menor o igual que 2. En la descripción de tales pares es donde entran en juego los resultados del Capítulo 2. En la última parte del capítulo se realiza un estudio sobre los coeficientes de recurrencia de las sucesiones de polinomios ortogonales asociadas a un par coherente simétrico generalizado, bajo la hipótesis de que el primer funcional es clásico. En particular, probamos que los parámetros que determinan la condición de coherencia simétrica generalizada se pueden representar como una función racional, donde los polinomios involucrados son, a su vez, familias de polinomios ortogonales, que están relacionados, en cierta manera, con el funcional clásico de partida.

En los Capítulos 5 y 6 se desarrolla una teoría de polinomios ortogonales en dos variables. Aunque en la mayor parte de la literatura de polinomios ortogonales en dos variables se usa el orden del grado total para establecer la base de los monomios principales, en esta memoria presentamos la teoría correspondiente al proceso de ortogonalización teniendo en cuenta los órdenes lexicográfico y lexicográfico inverso. La ventaja de usar estos órdenes es que las matrices de momentos correspondientes tienen una estructura especial, a saber, una doble estructura Hankel. De esta manera, dado un funcional lineal definido positivo sobre el espacio vectorial de los polinomios en dos variables, consideramos dos familias de polinomios ortogonales asociadas a cada uno de los órdenes anteriores. Cuando estos polinomios se estructuran adecuadamente en forma vectorial, se puede establecer una conexión con la teoría de polinomios ortogonales matriciales. Esta conexión, así como las propiedades de ortogonalidad, nos permiten establecer ciertas relaciones de recurrencia que entrelazan los sistemas de polinomios en los dos órdenes. Dichas relaciones son suficientes para determinar el funcional lineal definido positivo y la estructura de dichos sistemas de polinomios. Concretamente, los coeficientes matriciales que aparecen en las fórmulas de recurrencia mencionadas anteriormente, están relacionados entre sí de tal forma que se puede desarrollar un algoritmo que permite, dado un número necesario de incógnitas, construir los elementos de cierto nivel (n, m) usando los datos conocidos en los niveles anteriores. Dicho número de incógnitas está en correspondencia biunívoca con el número de nuevos momentos que se necesitan para determinar dicho nivel.

Finalmente, en el Capítulo 7, exponemos las conclusiones de esta memoria, incluyendo una sección donde planteamos algunos problemas abiertos que han surgido durante su elaboración.

Capítulo 1

Teoría general de polinomios ortogonales

Introducción

En este capítulo presentamos una breve introducción a la teoría general de polinomios ortogonales, incluyendo, sin demostración, algunos resultados básicos acerca de los polinomios ortogonales estándar y de Sobolev y estableciendo la notación necesaria que seguiremos a lo largo de la memoria.

El origen de la teoría de polinomios ortogonales se puede situar en la segunda mitad del siglo XVIII. La primera familia de polinomios ortogonales aparece en los primeros trabajos de A. M. Legendre sobre el movimiento planetario en 1784, quien probó para dicha familia de polinomios muchas de las propiedades que son comunes a todas las familias clásicas de polinomios, tales como la ecuación diferencial de segundo orden y las propiedades de sus ceros. La siguiente familia en aparecer, en 1864, fue la de los polinomios de Hermite, en el marco del desarrollo en series de funciones en $\mathbb{R}$. Aunque ya antes habían sido considerados por otros autores (N. H. Abel, V. L. Lagrange o P. L. Chebyshev), es en 1879 cuando E. N. Laguerre introduce los polinomios que hoy llevan su nombre en un trabajo en el que los relaciona con la teoría de las fracciones continuas. Fue también en el siglo XIX cuando J. Jacobi introduce una nueva familia de polinomios ortogonales que generaliza los polinomios de Legendre. Son los conocidos como polinomios de Jacobi. Hoy día, a estas tres familias de polinomios ortogonales, Jacobi, Laguerre y Hermite, se les conoce como Familias de Polinomios Ortogonales Clásicos.

Así, desde su origen, la teoría de polinomios ortogonales aparece vinculada con la teoría de aproximación y con las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, a pesar de que muchos autores estudiaron algunos casos especiales, fueron T. J. Stieltjes, en sus trabajos sobre fracciones continuas y el problema de momentos, y P. L. Chebyshev, con sus consideraciones sobre el problema de la mejor aproximación polinómica uniforme de una función continua, los primeros en dar un tratamiento general de la teoría de polinomios ortogonales. Más tarde, en 1939, G. Szegö consolida esta teoría con la publicación de la monografía *"Orthogonal Polynomials"* [80], donde se presenta un exhaustivo compendio de los resultados conocidos hasta entonces, y que hoy en día sigue siendo un texto de referencia obligada para todo aquel que se adentra en el apasionante mundo de los polinomios ortogonales.

Comenzaremos en la Sección 1.1 definiendo las principales operaciones algebraicas y diferenciales sobre el espacio vectorial de los funcionales lineales sobre el espacio vectorial de los polinomios en una variable con coeficientes reales, introduciendo a continuación el concepto de sucesión de polinomios ortogonales asociada a un funcional lineal regular dado. Si dicho funcional es definido positivo, entonces tiene asociado un producto escalar denominado *producto escalar estándar*. Como alternativa a este tipo de productos escalares, introducimos en la Sección 1.2 el concepto de *producto escalar de Sobolev* y hacemos un breve repaso sobre los conceptos de coherencia y coherencia simétrica.

1.1 Funcionales lineales y polinomios ortogonales

1.1.1 El espacio dual

Sea $\mathbb{P}$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable con coeficientes reales y consideremos $\mathbb{P}'$ su dual algebraico, esto es, el espacio vectorial de los funcionales lineales definidos sobre $\mathbb{P}$ con valores reales. Sea $\mathbb{P}_n$ el subespacio vectorial de $\mathbb{P}$ formado por los polinomios de grado menor o igual que n. Dado $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$, denotamos por $\langle \mathbf{u}, p \rangle$ la imagen del polinomio p por el funcional lineal $\mathbf{u}$.

Definición 1.1.1. *Sea $c \in \mathbb{C}$ un número complejo. El funcional lineal δ_c, llamado Delta de Dirac en c, está definido por $\langle \delta_c, p \rangle = p(c)$ para cada $p \in \mathbb{P}$.*

Definición 1.1.2. *Dado un número complejo $a \in \mathbb{C}$, definimos la aplicación lineal θ_a en el espacio vectorial $\mathbb{P}$ mediante*

$$\theta_a : \mathbb{P} \to \mathbb{P}, \quad (\theta_a p)(x) = \frac{p(x) - p(a)}{x - a}, \tag{1.1}$$

para cada polinomio $p \in \mathbb{P}$.

En $\mathbb{P}'$ consideramos las siguientes operaciones [65]:

Definición 1.1.3. *Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$. Definimos la homotecia de razón "a" asociada a $\mathbf{u}$, que denotamos mediante $h_a\mathbf{u}$, y la traslación de paso "b" de $\mathbf{u}$, que denotamos $\tau_b\mathbf{u}$, como*

$$\langle h_a\mathbf{u}, p\rangle = \langle \mathbf{u}, h_a p\rangle, \quad \langle \tau_b\mathbf{u}, p\rangle = \langle \mathbf{u}, \tau_{-b} p\rangle, \quad p \in \mathbb{P},$$

donde h_a y τ_b son las aplicaciones lineales en $\mathbb{P}$ dadas por

$$\begin{aligned} h_a : \mathbb{P} &\to \mathbb{P} & \qquad \tau_b : \mathbb{P} &\to \mathbb{P} \\ p &\mapsto (h_a\, p)(x) = p(ax), & p &\mapsto (\tau_b\, p)(x) = p(x-b). \end{aligned}$$

Definición 1.1.4. *Dados un funcional lineal $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ y un polinomio $\phi \in \mathbb{P}$, definimos el producto por la izquierda del funcional $\mathbf{u}$ por el polinomio ϕ como el funcional que denotaremos $\phi\,\mathbf{u}$ y que viene dado por,*

$$\langle \phi\mathbf{u},\, p\rangle = \langle \mathbf{u},\, \phi\, p\rangle, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Definición 1.1.5. *Definimos la derivada de un funcional lineal $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ como un nuevo funcional lineal $D\mathbf{u}$ tal que,*

$$\langle D\mathbf{u}, p\rangle = -\langle \mathbf{u}, p'\rangle, \quad p \in \mathbb{P},$$

donde p' denota la primera derivada del polinomio p.

Nota 1.1.6. Hacemos notar que, con esta definición, la regla de derivación usual para el producto sigue siendo válida para el producto por la izquierda de un funcional lineal por un polinomio, es decir,

$$D[\phi\,\mathbf{u}] = \phi'\mathbf{u} + \phi\, D\mathbf{u}.$$

Definición 1.1.7. *Sean $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ y $\phi \in \mathbb{P}$. Entonces $\phi^{-1}\,\mathbf{u}$ es el funcional lineal definido por*

$$\langle \phi^{-1}\,\mathbf{u},\, p\rangle = \left\langle \mathbf{u}, \frac{p(x) - L_\phi(x;p)}{\phi(x)} \right\rangle, \quad p \in \mathbb{P},$$

donde $L_\phi(x;p)$ denota el polinomio que interpola a p en los ceros de ϕ, interpolando también tantas derivadas de p en dichos ceros como indique la multiplicidad de los mismos.

Nota 1.1.8. Por ejemplo, para $\phi(x) = x - a$, se tiene $L_\phi(x;p) = p(a)$ y

$$\langle (x-a)^{-1}\mathbf{u}, p\rangle = \left\langle \mathbf{u}, \frac{p(x) - p(a)}{x - a} \right\rangle = \langle \mathbf{u}, \theta_a p\rangle, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Si $\phi(x) = (x-a)^2$, entonces $L_\phi(x;p) = p(a) + p'(a)(x-a)$ y

$$\langle (x-a)^{-2}\,\mathbf{u},\, p\rangle = \left\langle \mathbf{u},\, \frac{p(x) - p(a) - p'(a)\,(x-a)}{(x-a)^2} \right\rangle = \langle \mathbf{u},\, \theta_a^2 p\rangle, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Nota 1.1.9. Observamos aquí que las operaciones descritas en las Definiciones 1.1.4 y 1.1.7 no son conmutativas. Por ejemplo, para $\phi(x) = x - a$ se tiene

$$(x-a)\,(x-a)^{-1}\,\mathbf{u} = \mathbf{u},$$

mientras que

$$(x-a)^{-1}\,(x-a)\,\mathbf{u} = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, 1\rangle\,\delta_a. \tag{1.2}$$

Además, en general, podemos ver para $n \geq 2$,

$$((x-a)^n)^{-1}\,(x-a)^n\,\mathbf{u} \;=\; \mathbf{u} + \sum_{k=1}^{n-1} M_k\, D^k \delta_a,$$

donde $D^k\delta_a$ denota la derivada k–ésima del funcional lineal δ_a.

1.1.2 Momentos y polinomios ortogonales

Definición 1.1.10. *Definimos el momento de orden n correspondiente al funcional* $\mathbf{u}$ *como,*

$$\mu_n = \langle \mathbf{u},\, x^n\rangle, \quad n \geq 0.$$

$\mathbf{u}$ *se denomina funcional de momentos asociado a la sucesión* $\{\mu_n\}_n$.

A partir de un funcional lineal $\mathbf{u}$, podemos introducir una forma bilineal sobre $\mathbb{P}$, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot\rangle$, dada por

$$\langle p,\, q\rangle = \langle \mathbf{u},\, p\,q\rangle, \quad p, q \in \mathbb{P}.$$

Usando esta forma bilineal podemos reescribir el momento de orden $n = k + j$ del funcional $\mathbf{u}$ como

$$\mu_n = \langle x^k,\, x^j\rangle, \quad k,\, j \geq 0.$$

Entonces, la matriz de Gram asociada a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot\rangle$ en términos de la base canónica $\{x^n\}_n$ tiene una estructura especial: es una matriz de Hankel,

$$G = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Denotaremos por Δ_n al determinante de la submatriz principal de G de dimensión $(n+1)\times(n+1)$, esto es, el determinante de Hankel de orden $n+1$ asociado a la sucesión formada por los $2n+1$ primeros momentos,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

Definición 1.1.11. *[12] Diremos que un funcional lineal* $\mathbf{u}$ *es regular o cuasi–definido si* $\Delta_n \neq 0$ *para todo* $n \geq 0$*. Si, además, se verifica* $\Delta_n > 0$ *para todo* $n \geq 0$*, diremos que* $\mathbf{u}$ *es un funcional definido positivo.*

En particular, si $\mathbf{u}$ es definido positivo, entonces la forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ define un producto escalar en $\mathbb{P}$.

Definición 1.1.12. *Dados un funcional lineal* $\mathbf{u}$ *y una familia de polinomios* $\{P_n\}_n$*, decimos que* $\{P_n\}_n$ *es una sucesión de polinomios ortogonales (SPO) con respecto al funcional lineal* $\mathbf{u}$ *si se verifican las dos siguientes condiciones:*

1. $\deg P_n = n$*, para todo* $n \geq 0$*,*

2. $\langle \mathbf{u}, P_n\, P_m\rangle = k_n\, \delta_{n,m}$*, con* $k_n \neq 0$ *para todo* $n \geq 0$*,*

donde $\delta_{n,m}$ *denota la función Delta de Kronecker, cuyo valor es* 1 *si* $n=m$ *y cero en otro caso.*

Si el funcional lineal $\mathbf{u}$ es regular, las dos condiciones anteriores determinan de forma única la sucesión $\{P_n\}_n$ salvo constantes multiplicativas. Así, considerando una normalización apropiada, la sucesión $\{P_n\}_n$ queda completamente determinada. En particular, si se impone la condición de que todos los polinomios de dicha sucesión sean mónicos, entonces diremos que $\{P_n\}_n$ es una SPO mónicos (SPOM).

Aunque, a priori, la existencia de una SPO con respecto al funcional lineal $\mathbf{u}$ no requiere que este sea regular, se puede probar fácilmente (véase [12, 80]) que la existencia de SPO y el carácter regular del funcional lineal correspondiente están relacionados, como muestra el siguiente resultado.

Lema 1.1.13. *[80] Un funcional lineal* $\mathbf{u}$ *es regular si y sólo si existe una SPO con respecto a* $\mathbf{u}$*.*

Además, la SPOM $\{P_n\}_n$ asociada a $\mathbf{u}$ se puede expresar de forma explícita en función de los momentos definidos anteriormente.

Lema 1.1.14. *Sean* $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ *regular y* $\{P_n\}_n$ *la SPOM asociada. Entonces,*

$$P_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Una de las propiedades más importantes de los polinomios ortogonales con respecto a un funcional lineal es que satisfacen una *Relación de Recurrencia a Tres Términos* (a partir de ahora RRTT).

Lema 1.1.15. *Sea* $\{P_n\}_n$ *la SPOM asociada a un funcional lineal regular* $\mathbf{u}$. *Entonces se verifica la siguiente RRTT:*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0. \tag{1.3}$$

Los coeficientes β_n *y* γ_n *quedan determinados mediante*

$$\beta_n = \frac{\langle \mathbf{u}, x\, P_n^2(x) \rangle}{\langle \mathbf{u}, P_n^2(x) \rangle}, \quad n \geq 0 \quad y \quad \gamma_n = \frac{\langle \mathbf{u}, P_n^2(x) \rangle}{\langle \mathbf{u}, P_{n-1}^2(x) \rangle} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Normalmente, se suelen imponer las condiciones iniciales $P_{-1}(x) = 0$ *y* $P_0(x) = 1$, *con lo que la SPOM* $\{P_n\}_n$ *queda determinada por las sucesiones* $\{\beta_n\}_n$ *y* $\{\gamma_n\}_n$, *tomando* γ_0 *cualquier valor arbitrario. Además, si* $\mathbf{u}$ *es definido positivo, entonces claramente se tiene que* $\gamma_n > 0$ *para todo* $n \geq 1$.

Nota 1.1.16. En la demostración de este resultado es esencial el hecho de que el operador de multiplicación

$$M : \mathbb{P} \to \mathbb{P}, \quad (Mp)(x) = xp(x) \tag{1.4}$$

sea simétrico con respecto a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ determinada por el funcional $\mathbf{u}$. Esto es, $\langle x\, p(x),\, q(x) \rangle = \langle p(x),\, x\, q(x) \rangle$.

En general, a los productos escalares que tienen esta propiedad los llamaremos *productos escalares estándar* y a las correspondientes SPO las llamaremos *SPO estándar.*

En la siguiente sección veremos que hay productos escalares no estándar que originan una teoría de polinomios ortogonales muy interesante.

Además, el Teorema de Favard [12, 22] indica que la RRTT (1.3) caracteriza las SPOM.

Teorema 1.1.17 (Teorema de Favard [24]). *Sean* $\{\beta_n\}_n$ *y* $\{\gamma_n\}_n$ *dos sucesiones de números reales y sea* $\{P_n\}_n$ *una sucesión de polinomios mónicos que verifican la siguiente RRTT,*

$$\begin{aligned} &xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \\ &P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1. \end{aligned}$$

Entonces existe un funcional de momentos $\mathbf{u}$ *tal que*

$$\langle \mathbf{u}, P_n\, P_m \rangle = 0, \quad n \neq m.$$

Además, $\mathbf{u}$ *es regular (resp. definido positivo) y* $\{P_n\}_n$ *es la correspondiente SPOM si y sólo si* $\gamma_n \neq 0$ *(resp.* $\gamma_n > 0$*) para todo* $n \geq 1$.

Esta relación de recurrencia tiene un papel fundamental en el estudio de las propiedades analíticas de SPO, tales como propiedades asintóticas y de distribución de sus ceros.

Una de las consecuencias más relevantes de la RRTT es la conocida como fórmula de Christoffel–Darboux.

Teorema 1.1.18 (Fórmula de Christoffel–Darboux [80]). *Si* $\{P_n\}_n$ *es la SPOM asociada a un funcional lineal regular* $\mathbf{u}$ *que verifica la RRTT* (1.3)*, entonces se cumple*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\langle \mathbf{u}, P_k^2 \rangle} = \frac{1}{x-y} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle}, \quad n \geq 1.$$

Si tomamos límite cuando $y \to x$*, se sigue la fórmula confluente,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)^2}{\langle \mathbf{u}, P_k^2 \rangle} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle}, \quad n \geq 1.$$

Además, se verifica la siguiente propiedad reproductora,

Lema 1.1.19. *Para todo polinomio* $p \in \mathbb{P}_n$ *se satisface la igualdad*

$$\left\langle \mathbf{u}, \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\langle \mathbf{u}, P_k^2 \rangle} p(x) \right\rangle = p(y).$$

Es por ello que el polinomio de dos variables

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{\langle \mathbf{u}, P_k^2 \rangle}$$

se denomina n–ésimo núcleo reproductor asociado a la SPOM $\{P_n\}_n$.

1.1.3 Polinomios ortogonales clásicos

Los ejemplos de SPO con una mayor presencia en la literatura científica son las Familias de Polinomios Ortogonales Clásicos de Jacobi, Laguerre y Hermite que hemos comentado anteriormente en la introducción, y que se corresponden con los denominados funcionales lineales clásicos definidos positivos,

$$\langle \mathcal{J}^{(\alpha,\beta)}, p\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} p(x)dx, \quad \alpha, \beta > -1, \tag{1.5}$$

$$\langle \mathcal{L}^{(\alpha)}, p\rangle = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} p(x)dx, \quad \alpha > -1, \tag{1.6}$$

$$\langle \mathcal{H}, p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} p(x)dx, \tag{1.7}$$

conocidos como funcionales de Jacobi, Laguerre y Hermite, respectivamente.

Además, hay otros casos de funcionales lineales clásicos, por ejemplo, el llamado funcional de Bessel, que tiene la particularidad de no ser definido positivo, y por tanto, no admite una representación integral sobre la recta real. Viene dado por,

$$\langle \mathcal{B}^{(\alpha)}, p\rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) z^{\alpha} e^{-2/z} dz, \quad \alpha \neq -2, -3, ..., \tag{1.8}$$

donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

De manera general, denominamos funcionales lineales clásicos a todos aquellos que se ajustan a la siguiente definición:

Definición 1.1.20. *Un funcional lineal regular* $\mathbf{u}$ *se dice que es clásico si existen dos polinomios* Φ *y* Ψ*, con* $\Phi \in \mathbb{P}_2$ *mónico y* $\deg \Psi = 1$*, tales que se verifica la ecuación diferencial* $D[\Phi\mathbf{u}] + \Psi\mathbf{u} = 0$*. Dicha ecuación se denomina ecuación de Pearson asociada al funcional clásico* $\mathbf{u}$.

En el siguiente teorema mostramos algunas caracterizaciones de las familias de polinomios ortogonales clásicos.

Teorema 1.1.21. *Sea* $\mathbf{u}$ *un funcional lineal regular y denotemos por* $\{P_n\}_n$ *la SPOM asociada. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) $\mathbf{u}$ *es un funcional lineal clásico.*

ii) [31] Existe un polinomio $\Phi \in \mathbb{P}_2$ *tal que la familia de polinomios* $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}_n$ *es una SPOM asociada al funcional lineal* $\Phi\mathbf{u}$.

iii) [1, 12] Existen un polinomio $\Phi \in \mathbb{P}_2$ *y constantes* $d_{0,n}, d_{1,n}, d_{2,n}$*, con* $d_{2,n} \neq 0$*, tales que se verifica la relación de estructura*

$$\Phi(x)P'_n(x) = d_{0,n}P_{n+1}(x) + d_{1,n}P_n(x) + d_{2,n}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

iv) [57] Existen constantes reales $e_{1,n}, e_{2,n}$ *tales que*

$$P_{n+1}(x) = \frac{P'_{n+2}(x)}{n+2} + e_{1,n}\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + e_{2,n}\frac{P'_{n}(x)}{n}, \quad n \geq 1.$$

v) [11] Existen una sucesión de elementos no nulos, $\{\lambda_n\}_n$*, y polinomios* Φ *y* Ψ*, con* $\deg \Phi \leq 2$ *y* $\deg \Psi = 1$*, tales que, para cada polinomio* P_n*, se verifica la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden,*

$$\Phi(x)P''_n(x) + \Psi(x)P'_n(x) = \lambda_n P_n(x), \quad n \geq 0.$$

Es fácil ver que el carácter clásico de un funcional lineal se mantiene por transformaciones lineales de variable.

Lema 1.1.22. *[65] Sea* $\mathbf{u}$ *un funcional lineal clásico. Entonces el funcional lineal* $(\tau_b \circ h_a)\mathbf{u}$ *también es clásico.*

Salvo una transformación afín de variable, los cuatro casos siguientes son los únicos funcionales lineales clásicos, que corresponden a las diferentes situaciones canónicas que se pueden dar para el polinomio Φ de la Definición 1.1.20. Concretamente,

1. El funcional de Jacobi (1.5) corresponde al polinomio $\Phi(x) = x^2 - 1$. En tal caso, $\Psi(x) = (\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta$.

2. El funcional de Laguerre (1.6) corresponde al polinomio $\Phi(x) = x$. En tal caso, $\Psi(x) = x - (\alpha + 1)$.

3. El funcional de Hermite (1.7) corresponde al polinomio $\Phi(x) = 1$. En tal caso, $\Psi(x) = 2x$.

4. El funcional de Bessel (1.8) corresponde al polinomio $\Phi(x) = x^2$. En tal caso, $\Psi(x) = -(\alpha + 2)x - 2$.

Hacemos notar que, en los casos 1 y 2, se tienen funcionales lineales regulares, aunque no definidos positivos, para ciertos valores negativos de los parámetros. Concretamente, $-\alpha, -\beta \notin \mathbb{N}$ en el caso Jacobi y $-\alpha \notin \mathbb{N}$ en el caso Laguerre. Por lo tanto, la representación integral de los funcionales dada en (1.5) y (1.6) sólo es válida en los casos definidos positivos.

Si en la Definición 1.1.20 debilitamos las restricciones sobre los grados de los polinomios involucrados en la ecuación de Pearson, obtenemos una generalización del concepto de funcional clásico que denominamos *funcional semiclásico*.

Definición 1.1.23. *Sean*

$$\phi(x) = a_k x^k + \dots$$
$$\psi(x) = b_l x^l + \dots$$

dos polinomios de grados $k \geq 0$ y $l \geq 1$ respectivamente. Diremos entonces que (ϕ, ψ) es un par admisible si se verifica alguna de las dos siguientes condiciones,

i) $k - 1 \neq l$,

ii) si $k - 1 = l$, *entonces* $na_k \neq b_l$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1.24. *Sea* $\mathbf{u}$ *un funcional lineal regular definido en* $\mathbb{P}$. *Diremos que* $\mathbf{u}$ *es semiclásico si existe un par admisible de polinomios* (Φ, Ψ) *con* Φ *mónico y* $\deg \Psi \geq 1$, *tales que se verifica la siguiente ecuación diferencial distribucional de tipo Pearson,*

$$D[\Phi \mathbf{u}] + \Psi \mathbf{u} = 0.$$

En el Capítulo 2 haremos un estudio más detallado sobre este tipo de funcionales.

Por último, recordemos algunos conceptos y propiedades que relacionan las SPO con bases en el espacio dual $\mathbb{P}'$.

Dada una base algebraica del espacio $\mathbb{P}$, le podemos asociar una base del espacio dual $\mathbb{P}'$ que definimos a continuación. La llamaremos base dual.

Definición 1.1.25. *Sea* $\{P_n\}_n$ *una familia de polinomios tales que para todo* $n \geq 0$ *se tiene* $\deg P_n = n$. *La sucesión de funcionales lineales* $\{\mathbf{u}_n\}_n \subset \mathbb{P}'$ *se dice que es la base dual asociada a* $\{P_n\}_n$ *si se verifica*

$$\langle \mathbf{u}_n, P_m \rangle = \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0.$$

De este modo, cualquier funcional $\mathbf{v} \in \mathbb{P}'$ se puede expresar en términos de la base $\{\mathbf{u}_n\}_n$ mediante

$$\mathbf{v} = \sum_{n \geq 0} \langle \mathbf{v}, P_n \rangle \mathbf{u}_n.$$

En particular, si $\{P_n\}_n$ es una SPOM asociada a cierto funcional $\mathbf{u}$, entonces se puede dar una expresión explícita para los funcionales lineales que forman su base dual. Concretamente, se obtienen como una modificación polinomial del funcional $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{u}_n = \frac{P_n(x)}{\langle \mathbf{u}, P_n^2 \rangle} \mathbf{u}, \quad n \geq 0. \tag{1.9}$$

Además, en este caso, las bases duales de $\{P_n\}_n$ y de la familia de polinomios formada por sus derivadas mónicas están relacionadas del modo siguiente:

Lema 1.1.26. *Sea $\{P_n\}_n$ una SPOM asociada a un funcional lineal $\mathbf{u}$ y denotemos por $\{\mathbf{u}_n\}_n$ y $\{\hat{\mathbf{u}}_n\}_n$ las bases duales de $\{P_n\}_n$ y $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}_n$ respectivamente. Entonces,*

$$D\hat{\mathbf{u}}_n = -(n+1)\mathbf{u}_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

1.2 Productos escalares de Sobolev

Hemos visto en la sección anterior que la forma bilineal asociada a un funcional lineal definido positivo es un producto escalar en $\mathbb{P}$. Además, este producto escalar tiene la propiedad de que el operador de multiplicación M definido en (1.4) es simétrico, $\langle Mp, q\rangle = \langle p, Mq\rangle$ para todo $p, q \in \mathbb{P}$ (es decir, es un producto escalar estándar). Recíprocamente, si consideramos $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar estándar en $\mathbb{P}$, entonces este producto escalar está asociado a un funcional lineal definido positivo. Además, vimos que el hecho de que el operador de multiplicación fuese simétrico era clave en la demostración de la RRTT que verifica la SPOM asociada y, por tanto, esencial para el desarrollo de la teoría de SPO estándar.

Sin embargo, existen productos escalares no estándar que en las dos últimas décadas han despertado gran interés: los productos escalares de Sobolev. Se trata de productos escalares que, en su forma más general, adoptan la siguiente expresión,

$$\langle p, q\rangle_S = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \langle p^{(k)}, q^{(k)}\rangle_k,$$

donde $\lambda_k \geq 0$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ son productos escalares estándar para todo $k = 0, 1, \ldots, N$. Por $p^{(k)}$ denotamos la derivada k–ésima del polinomio p. A la SPO asociada al producto escalar anterior se le denomina SPO de Sobolev.

No obstante, la mayoría de los trabajos sobre el tema tratan con dos modelos sencillos de productos escalares de Sobolev de la forma

$$\langle p, q\rangle_S = \langle \mathbf{u}, pq\rangle + \lambda\langle \mathbf{v}, p'q'\rangle,$$

o, tomando $\mathbf{v} = \delta_c$,

$$\langle p, q\rangle_S = \langle \mathbf{u}, pq\rangle + \lambda f'(c)g'(c).$$

El último caso es un ejemplo canónico de un producto escalar que se denomina en la literatura de tipo Sobolev. En [56, 73] se presenta una compilación de resultados sobre polinomios ortogonales respecto a productos escalares de Sobolev.

Como el operador de multiplicación M no es simétrico con respecto a este producto escalar, la SPOM asociada no satisface la RRTT (1.3) y aparecen nuevos modelos de relaciones de recurrencia, que permiten obtener resultados no triviales para los polinomios de Sobolev, distintos de los que se obtenían en la teoría de polinomios ortogonales estándar. Una parte de esta memoria estará dedicada al análisis de productos escalares de Sobolev, bajo la hipótesis de que los funcionales involucrados en el producto escalar de Sobolev satisfacen ciertas relaciones.

1.2.1 Pares coherentes de funcionales lineales

En [35], A. Iserles *et al.* introducen la noción de par coherente y par coherente simétrico de funcionales. El concepto de coherencia establece ciertas condiciones sobre los funcionales lineales definidos positivos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para que los polinomios de Sobolev asociados al producto escalar

$$\langle p, q\rangle_S = \langle \mathbf{u}, pq\rangle + \lambda\langle \mathbf{v}, p'q'\rangle, \quad p, q \in \mathbb{P}, \quad \lambda > 0,$$

satisfagan ciertas propiedades.

Definición 1.2.1. *Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{P}'$ definidos positivos y denotemos por $\{P_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$ las SPOM asociadas. Se dice que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente si existe una sucesión de elementos no nulos $\{b_n\}_n$ tal que*

$$R_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + b_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1. \tag{1.10}$$

En ese mismo trabajo, los autores prueban que, en estas condiciones, se verifica una relación algebraica entre los polinomios de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$ que son ortogonales respecto al producto escalar anterior y la SPOM asociada al primer funcional. Concretamente,

Teorema 1.2.2. *Sea $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ un par coherente, y sea $\{Q_n^\lambda\}_n$ la SPOM de Sobolev asociada al producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Entonces,*

$$Q_{n+1}^\lambda(x) + c_{n-1}^\lambda Q_n^\lambda(x) = P_n(x) + \frac{n+1}{n} b_{n-1}P_n(x), \quad n \geq 1. \tag{1.11}$$

En el Capítulo 3 deduciremos (1.11) a partir de (1.10), y mostraremos que el recíproco permite extender el concepto de pares coherentes.

La relación (1.11) permite obtener propiedades asintóticas de la sucesión $\{Q_n^\lambda\}_n$ en términos del comportamiento asintótico de $\{P_n\}_n$, siempre que se tenga información sobre el comportamiento de las sucesiones $\{c_n^\lambda\}_n$ y $\{b_n\}_n$. En [36] los autores muestran el interés de este concepto para desarrollar un algoritmo eficiente para el cálculo de los coeficientes del desarrollo en series de Fourier–Sobolev.

Cuando los funcionales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son simétricos, el concepto de coherencia carece de sentido. Se introduce entonces el concepto de coherencia simétrica.

Definición 1.2.3. *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *funcionales lineales definidos positivos y simétricos. Denotemos por* $\{P_n\}_n$ *y* $\{R_n\}_n$*, respectivamente, las SPOM asociadas. Se dice que* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *es un par coherente simétrico si*

$$R_{n+1}(x) = \frac{P'_{n+2}(x)}{n+2} + u_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1,$$

siendo $\{u_n\}_n$ *una sucesión con elementos no nulos.*

Para los pares coherentes simétricos se pueden deducir propiedades similares a las de los pares coherentes.

Después del trabajo de A. Iserles *et al.*, el concepto de coherencia ha sido muy fructífero, dando lugar a una gran cantidad de trabajos desde una perspectiva constructiva de polinomios de Sobolev en los que muchos autores han trabajado desde diferentes puntos de vista [14, 74, 72, 60]. En particular, H. G. Meijer en [74] presenta una caracterización para los pares coherentes y los pares coherentes simétricos. Concretamente, prueba que si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente, o un par coherente simétrico, entonces al menos uno de los funcionales es un funcional clásico. Además, da una descripción de todos los posibles ejemplos de pares coherentes asociados a funcionales definidos positivos.

En [14], los autores introducen el concepto de par coherente generalizado considerando que en la relación (1.10) aparecen tres sumandos en el término de la derecha. K. H. Kwon *et al.* en [52] hacen un análisis más detallado de esta situación de coherencia generalizada. Algunas extensiones de estas cuestiones han sido estudiadas también en [65, 68, 69].

Sin embargo, en los Capítulos 3 y 4 de esta memoria consideramos un concepto de coherencia generalizada desde un punto de vista diferente, de forma que este concepto es equivalente a la relación (1.11) entre los polinomios de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$ y la sucesión $\{P_n\}_n$.

Capítulo 2

Funcionales lineales semiclásicos

Introducción

En este capítulo trataremos sobre funcionales lineales semiclásicos (véase la Definición 1.1.24), estableciendo sus propiedades fundamentales que utilizaremos a lo largo de la memoria.

Los funcionales lineales semiclásicos asociados con funciones peso fueron considerados por J. Shohat [78] en el marco del análisis de polinomios ortogonales que satisfacen las denominadas ecuaciones holonómicas[1]. Desde entonces se han publicado numerosos trabajos sobre estas familias de polinomios, véanse por ejemplo [34, 61, 62, 77]. En particular, P. Maroni ha estudiado ampliamente este tipo de funcionales lineales, profundizando especialmente en las propiedades estructurales de las correspondientes familias de polinomios ortogonales. A modo de ejemplo, en [65] se presenta un compendio del tema. La clasificación de funcionales lineales semiclásicos teniendo en cuenta la información proporcionada por la ecuación diferencial de tipo Pearson que satisface el funcional lineal en cuestión, juega un papel central en la teoría constructiva de este tipo de funcionales. S. Belmehdi presenta en [6] una descripción completa de todos los funcionales lineales semiclásicos regulares de clase 1 utilizando este enfoque y teniendo en cuenta que la clase del funcional lineal semiclásico proporciona cotas superiores para los grados de los coeficientes polinómicos de la ecuación diferencial holonómica mencionada anteriormente.

En la Sección 2.1 retomamos el concepto de funcional semiclásico estableciendo la noción de *clase* de un funcional semiclásico y dando un criterio para determinar la clase de dichos funcionales. Además, enunciamos las propiedades fundamentales de las SPO semiclásicos. En la segunda parte del capítulo, nos centraremos en

[1] Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes polinómicos

el problema de simetrización de funcionales semiclásicos y describiremos de forma explícita los funcionales semiclásicos simétricos de clase 2, que obtendremos como simetrizados de semiclásicos de clase 1. Los resultados de este capítulo se recogen en [18].

2.1 Problema general

Recordemos el concepto de funcional semiclásico introducido en el capítulo anterior en la Definición 1.1.24.

Un funcional lineal regular $\mathbf{u}$ es semiclásico si se verifica

$$D[\Phi\mathbf{u}] + \Psi\mathbf{u} = 0, \tag{2.1}$$

siendo (Φ, Ψ) un par admisible de polinomios (véase la Definición 1.1.23) con Φ mónico y $\deg\Psi \geq 1$. Además, definimos la clase de un funcional semiclásico de la siguiente forma:

Definición 2.1.1. *Diremos que un funcional semciclásico* $\mathbf{u}$ *es de clase* s *si*

$$s = \text{mín}\{t \in \mathbb{N} \,:\, \exists\,(\phi, \psi) \in X_{\mathbf{u}} \,:\, t = \text{máx}\{\deg\phi - 2, \deg\psi - 1\}\}, \tag{2.2}$$

siendo $X_{\mathbf{u}} = \{(\phi, \psi)$ *par admisible con* ϕ *mónico* : $D[\phi\,\mathbf{u}] + \psi\,\mathbf{u} = 0\}$.

Se puede probar fácilmente que el par admisible (Φ, Ψ) que determina la clase de $\mathbf{u}$, asumiendo que Φ es mónico, es único.

Definición 2.1.2. *A la SPO asociada a un funcional semiclásico de clase* s *se le llama SPO semiclásica de clase* s.

Nota 2.1.3. Observamos que $\Phi(x) = 0$ ó $\deg\Psi = 0$, junto con la ecuación de tipo Pearson (2.1), contradice la regularidad de $\mathbf{u}$, por lo que podemos exigir que Φ sea un polinomio mónico y, además, aseguramos que el valor $\text{máx}\{\deg\Phi-2, \deg\Psi-1\}$ debe ser un número no negativo.

En este punto, podemos plantear la siguiente pregunta: ¿cómo asegurar si el entero definido por $s = \text{máx}\{\deg\Phi - 2, \deg\Psi - 1\}$ es, efectivamente, la clase de $\mathbf{u}$? Presentamos a continuación un criterio establecido por P. Maroni en [65] sobre la determinación de la clase de un funcional semiclásico.

Proposición 2.1.4. *Sea* $\mathbf{u}$ *un funcional semiclásico que satisface la ecuación* (2.1). *Denotemos por* $\mathcal{Z}_\Phi = \{\alpha \in \mathbb{C} \,:\, \Phi(\alpha) = 0\}$ *el conjunto de los ceros del polinomio* Φ *y, para* $\alpha \in \mathcal{Z}_\Phi$, *sean* ϕ_α, ψ_α *y* r_α *polinomios tales que*

$$\Phi(x) = (x-\alpha)\phi_\alpha(x) \;\; y \;\; \Psi(x) + \Phi'(x) = (x-\alpha)\psi_\alpha(x) + r_\alpha(x).$$

Entonces, la clase de $\mathbf{u}$ *está dada por el entero* $s = \text{máx}\{\deg \Phi - 2, \deg \Psi - 1\}$ *si y sólo si se verifica alguna de las siguientes afirmaciones:*

i) Los polinomios $\Phi(x)$ *y* $(\Psi + \Phi')(x)$ *son coprimos.*

ii) Si $\alpha \in \mathcal{Z}_\Phi$ *es tal que* $\Psi(\alpha) + \Phi'(\alpha) = 0$*, entonces* $\langle \mathbf{u}, \psi_\alpha - \phi'_\alpha \rangle \neq 0$*.*

Las dos condiciones anteriores se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{Z}_\phi} \left(|\Psi(\alpha) + \Phi'(\alpha)| + |\langle \mathbf{u}, \psi_\alpha - \phi'_\alpha \rangle| \right) > 0. \tag{2.3}$$

También se puede introducir el concepto de funcional semiclásico mediante cualquiera de las caracterizaciones que resumimos en el siguiente lema.

Teorema 2.1.5. *Sea* $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ *un funcional lineal regular y denotemos por* $\{P_n\}_n$ *la SPOM asociada. Entonces,* $\mathbf{u}$ *es un funcional semiclásico, de clase* s*, verificando* (2.1) *para el par admisible* (Φ, Ψ) *y* $s = \text{máx}\{\deg \Phi - 2, \deg \Psi - 1\}$*, si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

C1. [65] Existen un polinomio Φ *de grado* k *y un número entero* $s \geq 0$*, con* $0 \leq k \leq s + 2$*, tales que la familia* $\{P_n\}_n$ *satisface la siguiente relación de estructura,*

$$\Phi(x) P'_{n+1}(x) = \sum_{j=n-s}^{n+k} a_{n,j} P_j(x), \quad n \geq s,$$

con $a_{n,n-s} \neq 0$*.*

C2. [65] Existe un polinomio Φ *tal que la familia de polinomios mónicos* $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}_n$ *es cuasi–ortogonal de orden* s *con respecto al funcional lineal* $\Phi\,\mathbf{u}$*, esto es,*

$$\begin{aligned} &\langle \Phi\,\mathbf{u},\, x^j P'_{n+1}(x) \rangle = 0, \quad j < n - s, \\ &\langle \Phi\,\mathbf{u},\, x^{n-s} P'_{n+1}(x) \rangle \neq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

C3. [32, 33] Existen polinomios $K(x;n)$*,* $M(x;n)$ *y* $N(x;n)$*, cuyos grados son independientes de* n*, con* $\deg K \leq 2s+2$*,* $\deg M \leq 2s+1$ *y* $\deg N \leq 2s$*, tales que*

$$K(x;n) P''_n(x) + M(x;n) P'_n(x) + N(x;n) P_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Por conveniencia para los objetivos de esta memoria, extraemos la caracterización *C2* en el caso $s = 1$, reescribiendo las relaciones de cuasi–ortogonalidad de las derivadas.

Lema 2.1.6. *Sea $\{P_n\}_n$ la SPOM asociada a $\mathbf{u}$, semiclásico de clase 1 que verifica la ecuación de tipo Pearson $D[\Phi\mathbf{u}] + \Psi\mathbf{u} = 0$, con $\deg\Phi \leq 3$ y $\deg\Psi \leq 2$. Supongamos que el funcional $\mathbf{w}$ definido por $\mathbf{w} = \Phi\mathbf{u}$ es regular y sea $\{S_n\}_n$ la correspondiente SPOM. Entonces, la sucesión de derivadas $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}_n$ es cuasi–ortogonal de orden 1 con respecto al funcional $\mathbf{w}$, es decir,*

$$\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} = S_n(x) + \eta_n S_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{2.5}$$

con $\eta_n \neq 0$.

Demostración. Es evidente que, bajo la hipótesis de regularidad del funcional $\mathbf{w}$, las condiciones (2.4) y (2.5) son equivalentes. Para comprobar que se verifica (2.5), basta considerar el desarrollo

$$\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} = S_n(x) + \eta_n S_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} \eta_{n,j} S_j(x),$$

donde, por ortogonalidad, los coeficientes $\eta_{n,j}$ vienen dados por

$$\eta_{n,j} = \frac{\langle \mathbf{w}, S_j \frac{P'_{n+1}}{n+1} \rangle}{\langle \mathbf{w}, S_j^2 \rangle} = \frac{\langle \Phi\mathbf{u}, S_j \frac{P'_{n+1}}{n+1} \rangle}{\langle \mathbf{w}, S_j^2 \rangle}.$$

Entonces, la condición (2.4) con $s = 1$ es equivalente a que $\eta_{n,j} = 0$ para todo $j \leq n-2$, con lo que el enunciado queda probado. □

En la sección siguiente pondremos de manifiesto que la hipótesis adicional de regularidad sobre el funcional $\mathbf{w} = \Phi\mathbf{u}$ no es redundante y que hay ejemplos en los que este funcional no es regular. En estos casos tendremos que proceder de forma diferente para obtener para las derivadas una expresión del tipo (2.5).

2.2 Funcionales semiclásicos simétricos

2.2.1 El proceso de simetrización

Definición 2.2.1. *Sea $\mathbf{u}$ un funcional lineal en $\mathbb{P}$. Decimos que $\mathbf{u}$ es simétrico si todos los momentos de orden impar son nulos. Esto es,*

$$\langle \mathbf{u}, x^{2n+1} \rangle = 0, \quad n \geq 0.$$

Además, es un resultado conocido (ver [80]) que la simetría del funcional lineal $\mathbf{u}$ se refleja en propiedades de paridad para la correspondiente SPO.

Teorema 2.2.2. *Sea* $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ *regular y denotemos por* $\{P_n\}_n$ *la SPOM asociada. Entonces, son equivalentes,*

i) $\mathbf{u}$ *es simétrico.*

ii) $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$ *para todo* $n \geq 0$.

En consecuencia, los parámetros $\{\beta_n\}_n$ *de la RRTT* (1.3) *son todos nulos.*

A continuación, analizamos el proceso de simetrización de un funcional.

Definición 2.2.3. *Dado* $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{P}'$*, definimos un funcional simétrico* $\mathbf{u}$ *mediante*

$$\langle \mathbf{u}, x^{2n} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{u}}, x^n \rangle,$$
$$\langle \mathbf{u}, x^{2n+1} \rangle = 0,$$

para cada $n \geq 0$. *En tal caso decimos que* $\mathbf{u}$ *es el funcional simetrizado de* $\tilde{\mathbf{u}}$ *y lo denotaremos* $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$.

Recíprocamente, dado $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ *simétrico, siempre podemos construir* $\tilde{\mathbf{u}}$ *tal que* $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$ *en la forma,*

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}, x^n \rangle = \langle \mathbf{u}, x^{2n} \rangle, \quad n \geq 0.$$

Observemos que, si $\mathbf{u}$ es regular y simétrico, entonces $\tilde{\mathbf{u}}$ también es regular (para más detalles se pueden consultar [63, 66]). Sin embargo el recíproco no es cierto. Concretamente, se tiene el siguiente resultado (véase [12]).

Lema 2.2.4. *Sea* $\tilde{\mathbf{u}}$ *un funcional lineal y sea* $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$ *el funcional simetrizado de* $\tilde{\mathbf{u}}$. *Entonces* $\mathbf{u}$ *es regular si y sólo si los funcionales* $\tilde{\mathbf{u}}$ *y* $x\tilde{\mathbf{u}}$ *son regulares. Además, en tal caso, si denotamos por* $\{P_n\}_n$, $\{S_n\}_n$ *y* $\{Q_n\}_n$ *las SPOM asociadas a* $\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ *y* $x\tilde{\mathbf{u}}$*, respectivamente, entonces se verifica*

$$P_{2n}(x) = S_n(x^2), \quad P_{2n+1}(x) = xQ_n(x^2), \quad n \geq 0.$$

En cuanto al proceso de simetrización de un funcional semiclásico, enunciaremos el siguiente resultado probado por J. Arvesú *et al.* en [5]. Aquí lo presentamos en términos de los coeficientes polinómicos que aparecen en la ecuación diferencial de Pearson (ver [30]), pues es más conveniente para nuestro estudio.

Lema 2.2.5. *Sea* $\tilde{\mathbf{u}}$ *un funcional lineal semiclásico de clase* $\tilde{s}$ *y sea* $D[\tilde{\Phi}\tilde{\mathbf{u}}] + \tilde{\Psi}\tilde{\mathbf{u}} = 0$ *la ecuación diferencial de Pearson asociada. Supongamos además que* $x\tilde{\mathbf{u}}$ *es un funcional regular y consideremos el funcional simetrizado* $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$*, que sabemos que es regular en virtud del Lema 2.2.4. Entonces,* $\mathbf{u}$ *es semiclásico de clase* s*, verificando la ecuación diferencial* (2.1). *Además, la clase de* $\mathbf{u}$ *y los polinomios* Φ *y* Ψ *correspondientes vienen dados en función de* $\tilde{\Phi}$ *y* $\tilde{\Psi}$ *según los siguientes casos:*

1. *Si* $\tilde{\Phi}(0) = 0$ *y* $\tilde{\Phi}'(0) + 2\tilde{\Psi}(0) = 0$, *entonces* $s = 2\tilde{s}$, *con*

$$\Phi(x) = (\theta_0\tilde{\Phi})(x^2), \quad \Psi(x) = x[(\theta_0^2\tilde{\Phi})(x^2) + 2(\theta_0\tilde{\Psi})(x^2)].$$

2. *Si* $\tilde{\Phi}(0) = 0$ *y* $\tilde{\Phi}'(0) + 2\tilde{\Psi}(0) \neq 0$, *entonces* $s = 2\tilde{s} + 1$, *con*

$$\Phi(x) = x(\theta_0\tilde{\Phi})(x^2), \quad \Psi(x) = 2\tilde{\Psi}(x^2).$$

3. *Si* $\tilde{\Phi}(0) \neq 0$, *entonces* $s = 2\tilde{s} + 3$, *con*

$$\Phi(x) = x\tilde{\Phi}(x^2), \quad \Psi(x) = 2[-\tilde{\Phi}(x^2) + x^2\tilde{\Psi}(x^2)].$$

Aquí, θ_a *es la aplicación lineal de la Definición 1.1.2.*

Como consecuencia, tenemos

a) si $\mathbf{u}$ *es de clase impar, entonces los polinomios* Φ *y* Ψ *en la ecuación diferencial* (2.1) *son funciones impar y par, respectivamente.*

b) si $\mathbf{u}$ *es de clase par, entonces los polinomios* Φ *y* Ψ *en (2.1) son funciones par e impar, respectivamente.*

Como consecuencia, si $\mathbf{u}$ es simétrico semiclásico de clase impar, observamos que, por la simetría del funcional y de los polinomios involucrados, $\Phi\mathbf{u}$ no es un funcional regular, ya que el momento de orden cero se anula. Veamos que este resultado, junto con la caracterización *C2* del Lema 2.1.5, nos permite dar un resultado análogo al Lema 2.1.6 en el caso simétrico.

Lema 2.2.6. *Sea* $\mathbf{u} \in \mathbb{P}'$ *simétrico y semiclásico de clase s impar. Sea* $D[\Phi\mathbf{u}] + \Psi\mathbf{u} = 0$ *la ecuación de Pearson asociada, con* $\Psi \in \mathbb{P}_{s+1}$ *y* $\Phi \in \mathbb{P}_{s+2}$ *polinomios par e impar, respectivamente. En tal caso,* $\mathbf{w} = x\Phi(x)\mathbf{u}$ *define un funcional lineal regular. Denotamos por* $\{P_n\}_n$ *y* $\{S_n\}_n$ *las SPOM correspondientes a* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{w}$*, respectivamente. Entonces,*

$$\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} = S_n(x) + \sum_{k=1}^{(s+1)/2} \eta_{n,n-2k}\, S_{n-2k}(x), \quad n \geq s+1,$$

con $\eta_{n,n-(s+1)} \neq 0$. *En particular, para* $s = 1$ *tenemos*

$$\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} = S_n(x) + \eta_n\, S_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

con $\eta_n \neq 0$.

Demostración. Consideramos el desarrollo de P'_{n+1} en términos de $\{S_n\}_n$,

$$\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} = S_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_{n,k}\, S_k(x),$$

donde, teniendo en cuenta la ortogonalidad de $\{S_n\}_n$ y la definición del funcional $\mathbf{w}$, los coeficientes $\eta_{n,k}$ vienen dados por

$$\eta_{n,k} = \frac{\langle \mathbf{w},\, \frac{P'_{n+1}}{n+1}\, S_k\rangle}{\langle \mathbf{w},\, S_k^2\rangle} = \frac{\langle \Phi\mathbf{u},\, x\, S_k\, \frac{P'_{n+1}}{n+1}\rangle}{\langle \mathbf{w},\, S_k^2\rangle}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Entonces, por la caracterización *C2* del Teorema 2.1.5, deducimos que los coeficientes anteriores se anulan para cada $k \leq n-s-2$. Por lo tanto,

$$\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} = S_n(x) + \sum_{k=n-s-1}^{n-1} \eta_{n,k}\, S_k(x).$$

Finalmente, por la paridad de los polinomios, sólo aparecen los términos de grado $n-2k$, con lo que deducimos el resultado. □

Antes de proseguir, observamos en el siguiente lema que si aplicamos al funcional $\mathbf{u}$ un cambio de variable de la forma $h_a\mathbf{u}$, con $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, éste no afecta al carácter simétrico de los funcionales (la aplicación h_a es la homotecia definida en la Definición 1.1.3).

Lema 2.2.7. *El funcional lineal* $\mathbf{u}$ *es simétrico si y sólo si lo es* $h_a\mathbf{u}$*. En tal caso, si* $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$*, entonces* $h_a\mathbf{u}$ *es el funcional simetrizado de* $h_{a^2}\tilde{\mathbf{u}}$*.*

Demostración. Por definición, $h_a\mathbf{u}$ es el funcional simetrizado de $h_{a^2}\tilde{\mathbf{u}}$ cuando $\langle h_a\mathbf{u}, x^{2k}\rangle = \langle h_{a^2}\tilde{\mathbf{u}}, x^k\rangle$, para todo $k \geq 0$. Entonces, teniendo en cuenta que $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$ y que $\langle h_a\mathbf{u}, x^k\rangle = a^k\langle \mathbf{u}, x^k\rangle$, obtenemos

$$\langle h_a\mathbf{u}, x^{2k}\rangle = a^{2k}\langle \mathbf{u}, x^{2k}\rangle = a^{2k}\langle \tilde{\mathbf{u}}, x^k\rangle = \langle h_{a^2}\tilde{\mathbf{u}}, x^k\rangle,$$

con lo que el enunciado queda probado. □

La misma situación aparece en relación con el carácter semiclásico de los funcionales.

Lema 2.2.8. *El funcional lineal* $\mathbf{u}$ *es semiclásico si y sólo si lo es* $h_a\mathbf{u}$*. Además, si* (2.1) *es la ecuación diferencial distribucional de Pearson para* $\mathbf{u}$*, entonces* $\mathbf{u}_a = h_a\mathbf{u}$ *satisface* $D[\Phi_a\mathbf{u}_a] + \Psi_a\mathbf{u}_a = 0$ *con*

$$\Phi_a(x) = a^k h_{a^{-1}}\Phi(x), \quad \Psi_a(x) = a^{k-1} h_{a^{-1}}\Psi(x),$$

siendo $k = \deg\Phi$*.*

Analicemos a continuación el proceso de simetrización para un funcional de la forma $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{u}} + 2M\delta_{c^2}$, donde M es una constante y δ_{c^2} es la Delta de Dirac introducida en la Definición 1.1.1. El problema general de la adicción de masas de Dirac a un funcional regular se ha estudiado, por ejemplo, en [13] y [58]. Véase también [64].

Lema 2.2.9. *Sean $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}$ dos funcionales lineales regulares tales que $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{u}} + 2M\delta_{c^2}$, con $c \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbf{v} = \mathbf{u} + M[\delta_c + \delta_{-c}]$, siendo $\mathbf{v} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{v}}$ y $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$.*

Demostración. Para verlo, basta comprobar que los funcionales $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} + M[\delta_c + \delta_{-c}]$ coinciden cuando actúan sobre polinomios de la forma $p(x^2)$.

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}, p(x^2)\rangle &= \langle \tilde{\mathbf{v}}, p(x)\rangle = \langle \tilde{\mathbf{u}}, p(x)\rangle + 2Mp(c^2) = \langle \mathbf{u}, p(x^2)\rangle + M[p(c^2) + p((-c)^2)] \\ &= \langle \mathbf{u} + M[\delta_c + \delta_{-c}], p(x^2)\rangle,\end{aligned}$$

con lo que concluimos la demostración. □

2.2.2 Funcionales semiclásicos simétricos de clase 1

En el trabajo de J. Arvesú *et al.* [5] podemos encontrar la descripción de los funcionales simétricos semiclásicos de clase 1 en términos de las sucesiones de momentos correspondientes. En [2] encontramos, en un marco más general, la descripción de los funcionales lineales de Laguerre–Hahn simétricos de clase 1. En particular, los autores obtienen las situaciones canónicas de los funcionales semiclásicos de clase 1. A continuación resumimos dicha clasificación. Observamos que, en virtud del Lema 2.2.5, estos funcionales han de ser simetrizados de funcionales lineales clásicos.

1. En primer lugar, como simetrizado del funcional clásico de Jacobi trasladado al intervalo $[0, 1]$, tenemos el funcional de Gegenbauer generalizado,

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)|x|^{\alpha}(1 - x^2)^{\lambda - 1/2}dx,$$

con $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ y $\lambda > -1/2$. Además, $\mathbf{u}$ satisface la ecuación diferencial de Pearson (2.1) con

$$\Phi(x) = x(x^2 - 1), \quad \Psi(x) = -(\alpha + 2\lambda + 2)x^2 + \alpha + 1.$$

2. Como simetrizado del funcional clásico de Bessel, tenemos el funcional que es solución de la ecuación diferencial

$$D[x^3\mathbf{u}] - ((\alpha + 3)x^2 + 4)\mathbf{u} = 0.$$

3. Por último, como simetrizado del funcional clásico de Laguerre, tenemos el funcional de Hermite–Chihara (véase [12]),

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)|x|^{\alpha} e^{-x^2} dx,$$

con $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$. Además, los coeficientes polinómicos en la ecuación diferencial (2.1) asociada a $\mathbf{u}$ son,

$$\Phi(x) = x, \quad \Psi(x) = 2x^2 - (\alpha + 1).$$

2.2.3 Funcionales semiclásicos simétricos de clase 2

El resto del capítulo lo dedicaremos al análisis y descripción de los funcionales lineales simétricos semiclásicos de clase 2.

Teniendo en cuenta la casuística presentada en el Lema 2.2.5, nos situamos en los casos *1* y *b)* con $s = 2$. Entonces, los funcionales buscados serán simetrizados de funcionales semiclásicos de clase 1, ya que si u es de clase s par, entonces es simetrizado de funcionales de clase $\tilde{s}$, siendo $s = 2\tilde{s}$.

Tres situaciones diferentes pueden aparecer según las posibilidades para los polinomios involucrados en la ecuación diferencial de Pearson (2.1) asociada al funcional lineal $\mathbf{u}$.

1. $\Phi(x) = x^4 + Ax^2 + B$, $\Psi(x) = Cx^3 + Dx$, con $|C| + |D| \neq 0$.
2. $\Phi(x) = x^2 + B$, $\Psi(x) = Cx^3 + Dx$, con $C \neq 0$.
3. $\Phi(x) = 1$, $\Psi(x) = Cx^3 + Dx$, con $C \neq 0$.

Además, si $\tilde{\mathbf{u}}$ es el funcional lineal semiclásico de clase 1 tal que $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$ entonces, por el Lema 2.2.5 tenemos, en cada caso, las siguientes expresiones para los polinomios involucrados en la ecuación diferencial de Pearson para el funcional $\tilde{\mathbf{u}}$.

1. $\tilde{\Phi}(x) = x^3 + Ax^2 + Bx$, $\tilde{\Psi}(x) = \frac{C-1}{2}x^2 + \frac{D-A}{2}x - \frac{B}{2}$, con $|C| + |D| \neq 0$.
2. $\tilde{\Phi}(x) = x^2 + Bx$, $\tilde{\Psi}(x) = \frac{C}{2}x^2 + \frac{D-1}{2}x - \frac{B}{2}$, con $|C| \neq 0$.
3. $\tilde{\Phi}(x) = x$, $\tilde{\Psi}(x) = \frac{C}{2}x^2 + \frac{D}{2}x - \frac{1}{2}$, con $|C| \neq 0$.

Estudiaremos cada caso teniendo en cuenta los ceros del polinomio $\tilde{\Phi}$. Procederemos como mostramos a continuación. En primer lugar determinaremos el funcional $\tilde{\mathbf{u}}$ dando una representación integral del mismo de la forma

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}, p\rangle = \int_{0}^{x_0^2} p(x)\omega(x) dx,$$

siendo $\omega(x)$ una función peso, continua y no negativa en $[0, x_0^2]$, que es solución de la ecuación diferencial $(\tilde{\Phi}(x)\omega(x))' + \tilde{\Psi}(x)\omega(x) = 0$, y la constante x_0 es tal que se verifican las condiciones

$$\lim_{x\to 0} x^n\omega(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0^2} x^n\omega(x) = 0, \quad \forall n \geq 0. \tag{2.6}$$

Seguidamente determinaremos, teniendo en cuenta los resultados descritos anteriormente, el funcional $\mathbf{u}$ por simetrización de $\tilde{\mathbf{u}}$.

Nota 2.2.10. La ventaja de esta representación es que el funcional simetrizado $\mathbf{u} = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{u}}$ puede ser descrito a través de la siguiente representación integral,

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-x_0}^{x_0} p(x)|x|\omega(x^2)dx.$$

Pasemos a analizar cada caso en concreto.

1. Escribamos $\tilde{\Phi}(x) = x(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ y $\tilde{\Psi}(x) = \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0$, con $\gamma_0 = -\alpha_1\alpha_2/2$. Si definimos el funcional $\tilde{\mathbf{u}}_a := h_{a^{-1}}\tilde{\mathbf{u}}$ entonces, por el Lema 2.2.8 se verifica $D[\tilde{\Phi}_a\tilde{\mathbf{u}}_a] + \tilde{\Psi}_a\tilde{\mathbf{u}}_a = 0$ con

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_a(x) &= a^{-3}\tilde{\Phi}(ax) = x(x-a^{-1}\alpha_1)(x-a^{-1}\alpha_2), \\ \tilde{\Psi}_a(x) &= a^{-2}\tilde{\Psi}(ax) = \gamma_2 x^2 + \gamma_1 a^{-1}x + \gamma_0 a^{-2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

1.a. Supongamos que $\tilde{\Phi}$ tiene ceros simples, esto es, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $|\alpha_1| \leq |\alpha_2|$. Entonces, tomando $a = \alpha_1$ y renombrando los coeficientes γ_0, γ_1 y γ_2, (2.7) se escribe como

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_a(x) &= x(x-1)(x-\lambda), \\ \tilde{\Psi}_a(x) &= -(\beta+\gamma+5/2)x^2 + (\gamma+3/2+\lambda(\beta+3/2))x - \lambda/2, \end{aligned}$$

con $|\lambda| \geq 1$. Por tanto, integrando la correspondiente ecuación diferencial para la función peso, $[\tilde{\Phi}_a\omega]' + \tilde{\Psi}_a\omega = 0$, tenemos

$$\frac{(\tilde{\Phi}_a(x)\omega(x))'}{\tilde{\Phi}_a(x)\omega(x)} = -\frac{\tilde{\Psi}_a(x)}{\tilde{\Phi}_a(x)} = \frac{(\beta+\gamma+5/2)x^2 - (\gamma+3/2+\lambda(\beta+3/2))x + \lambda/2}{x(x-1)(x-\lambda)},$$

de donde descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{(\tilde{\Phi}_a(x)\omega(x))'}{\tilde{\Phi}_a(x)\omega(x)} = \frac{1/2}{x} + \frac{\beta+1}{x-1} + \frac{\gamma+1}{x-\lambda}.$$

Entonces, la función peso es

$$\omega(x) = x^{-1/2}(1-x)^{\beta}(\lambda-x)^{\gamma}.$$

Finalmente, para $x_0 = 1$ se verifican las condiciones (2.6), con lo que obtenemos la siguiente representación integral para el funcional $\tilde{\mathbf{u}}_a$,

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_a, p \rangle = \int_0^1 p(x) x^{-1/2} (1-x)^\beta |\lambda - x|^\gamma dx,$$

con $\beta > -1$, $\gamma \neq 0$ y $|\lambda| > 1$. Por simetrización del funcional anterior, tenemos que $\mathbf{u}$ es, salvo cambio de variable, el funcional lineal dado por

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x^2)^\beta |\lambda - x^2|^\gamma dx,$$

con $\gamma \neq 0$, $\beta > -1$ y $|\lambda| > 1$. Además, por el Lema 2.2.5, los polinomios de la ecuación diferencial (2.1) para $\mathbf{u}$ son

$$\Phi(x) = (x^2-1)(x^2-\lambda), \quad \Psi(x) = -2x(1+\gamma+\lambda(1+\beta)-(2+\beta+\gamma)x^2).$$

Este funcional, conocido como funcional generalizado de Gegenbauer, aparece, entre otros, en el trabajo de V. P. Konoplev [43] en el año 1961.

1.b. Consideramos ahora el caso en el que $\tilde{\Phi}$ tiene un cero doble en el origen. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 \neq 0$. Tomamos $a = \alpha_2$ para obtener los siguientes polinomios en (2.7):

$$\tilde{\Phi}_a(x) = x^2(x-1), \ \tilde{\Psi}_a(x) = -(\alpha+\beta+3)x^2 + (\beta+2)x.$$

Entonces, por analogía con el funcional clásico de Jacobi $\mathcal{J}^{(\alpha,\beta+1)}$ trasladado al intervalo $[0,1]$,

$$\langle \mathcal{J}^{(\alpha,\beta+1)}, p \rangle = \int_0^1 p(x) x^{\beta+1}(1-x)^\alpha dx,$$

que verifica la ecuación de Pearson

$$D[x(x-1)\mathcal{J}^{(\alpha,\beta+1)}] + [\beta+2-(\alpha+\beta+3)x]\mathcal{J}^{(\alpha,\beta+1)} = 0,$$

deducimos que $x\tilde{\mathbf{u}}_a = \mathcal{J}^{(\alpha,\beta+1)}$, o lo que es lo mismo, $\tilde{\mathbf{u}}_a = x^{-1}\mathcal{J}^{(\alpha,\beta+1)} + M\delta_0$.

Por tanto, se tiene la siguiente representación integral para el funcional $\tilde{\mathbf{u}}_a$,

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_a, p \rangle = \int_0^1 p(x) x^\beta (1-x)^\alpha dx + Np(0),$$

con $\alpha, \beta > -1$. Entonces, en virtud del Lema 2.2.9 con $c = 0$, el funcional simétrico $\mathbf{u}$, salvo cambio lineal de variable, viene dado por

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle = \int_{-1}^1 p(x)|x|^{2\beta+1}(1-x^2)^\alpha dx + Np(0), \tag{2.8}$$

siendo $\alpha, \beta > -1$. Finalmente, los coeficientes polinómicos de la ecuación (2.1) que satisface $\mathbf{u}$ son, teniendo en cuenta el apartado 1 del Lema 2.2.5,

$$\Phi(x) = x^2(x^2-1), \quad \Psi(x) = x(3+2\beta-(2\alpha+2\beta+5)x^2).$$

Este funcional simetrizado de uno de tipo Jacobi, que es un caso particular de los llamados funcionales lineales de Koornwinder [46], aparece en trabajos anteriores. Véase, por ejemplo, el tratamiento de L. L. Littlejohn [54].

1.c. Supongamos ahora que el polinomio $\tilde{\Phi}$ tiene una raíz doble distinta de cero. Esto es, $\alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si tomamos $a = \alpha_1$, renombrando adecuadamente los coeficientes de los polinomios en la ecuación (2.7), tenemos

$$\tilde{\Phi}_a(x) = x(x-1)^2,\ \tilde{\Psi}_a(x) = -(\beta+5/2)x^2 + (\beta-\gamma+3)x - 1/2.$$

Por tanto, la función peso ω asociada al funcional $\tilde{\mathbf{u}}_a$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{(\tilde{\Phi}_a(x)\omega(x))'}{\tilde{\Phi}_a(x)\omega(x)} = -\frac{\tilde{\Psi}_a(x)}{\tilde{\Phi}_a(x)} = \frac{1/2}{x} + \frac{\beta+2}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2}. \tag{2.9}$$

- Si $\gamma > 0$, seguimos un proceso análogo al del caso **1.a.** y deducimos para $\tilde{\mathbf{u}}_a$ la siguiente representación integral,

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_a, p \rangle = \int_0^1 p(x) x^{-1/2} (1-x)^{\beta} e^{-\gamma/(1-x)} dx,$$

y el correspondiente funcional simetrizado $\mathbf{u}$ se puede representar como

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x^2)^{\beta} e^{-\gamma/(1-x^2)} dx.$$

Finalmente, los polinomios Φ, Ψ para $\mathbf{u}$ en (2.1) son, en virtud del apartado 1 del Lema 2.2.5,

$$\Phi(x) = (x^2-1)^2, \quad \Psi(x) = 2x(2+\beta+\gamma-(2+\beta)x^2).$$

- Si $\gamma = 0$, entonces la ecuación de Pearson para $\tilde{\mathbf{u}}_a$ es

$$D[x(x-1)^2\tilde{\mathbf{u}}_a] - ((\beta+5/2)x - 1/2)(x-1)\tilde{\mathbf{u}}_a = 0.$$

Entonces, por analogía con el funcional de Jacobi $\mathcal{J}^{(\beta+1,-1/2)}$ trasladado al intervalo $[0,1]$,

$$\langle \mathcal{J}^{(\beta+1,-1/2)}, p \rangle = \int_0^1 p(x) x^{-1/2} (1-x)^{\beta+1} dx,$$

que satisface la ecuación de Pearson

$$D[x(x-1)\mathcal{J}^{\beta+1,-1/2}] - ((\beta+5/2)x - 1/2)\mathcal{J}^{\beta+1,-1/2} = 0,$$

deducimos que $\tilde{\mathbf{u}}_a = (x-1)^{-1}\mathcal{J}^{\beta+1,-1/2} + 2M\delta_1$, por lo que

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_a, p\rangle = \int_0^1 p(x)x^{-1/2}(1-x)^\beta dx + 2Mp(1).$$

En tal caso, en virtud del Lema 2.2.9, el funcional simetrizado está dado por

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x^2)^\beta dx + M[p(1)+p(-1)].$$

Los polinomios de la ecuación de Pearson correspondiente son,

$$\Phi(x) = (x^2-1)^2, \quad \Psi(x) = 2(2+\beta)x(1-x^2).$$

Los polinomios asociados a este funcional son conocidos como los polinomios de Koornwinder simétricos [46].

1.d. Supongamos, por último, que el polinomio $\tilde{\Phi}$ tiene un cero triple en el origen, esto es, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Entonces, tomando $a = -\gamma_1/2$, escribimos (2.7) como

$$\tilde{\Phi}_a(x) = x^3, \ \tilde{\Psi}_a(x) = -2x(\alpha x + 1).$$

Deducimos por tanto que $\tilde{\mathbf{u}}_a = x^{-1}\mathcal{B}^{(\alpha)} + M\delta_0$, donde $\mathcal{B}^{(\alpha)}$ es el funcional clásico de Bessel, solución de la ecuación diferencial $D[x^2\mathcal{B}^{(\alpha)}] - 2(\alpha x+1)\mathcal{B}^{(\alpha)} = 0$. En este caso, el polinomio semiclásico simétrico $\mathbf{u}$ sería solución de (2.1) con

$$\Phi(x) = x^4, \quad \Psi(x) = (1-4\alpha)x^3 - 4x.$$

Este es un funcional que no es definido positivo. Por tanto no existe una representación integral mediante una medida positiva que esté soportada sobre la recta real. Para más detalles sobre este funcional véase [67].

Finalizado el análisis del caso 1, pasemos a describir los funcionales correspondientes al caso 2, en el que $\tilde{\Phi}$ es un polinomio de grado 2.

2. Escribimos los polinomios de la ecuación de Pearson correspondiente al caso 2 en la forma $\tilde{\Phi}(x) = x(x+B)$ y $\tilde{\Psi}(x) = \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0$, con $\gamma_0 = -B/2$. Consideramos un cambio de variable adecuado y definimos el funcional $\tilde{\mathbf{u}}_a := h_{a^{-1}}\tilde{\mathbf{u}}$. Entonces, por el Lema 2.2.8 se verifica $D[\tilde{\Phi}_a\tilde{\mathbf{u}}_a] + \tilde{\Psi}_a\tilde{\mathbf{u}}_a = 0$, con

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_a(x) &= a^{-2}\tilde{\Phi}(ax) = x(x+a^{-1}B), \\ \tilde{\Psi}_a(x) &= a^{-1}\tilde{\Psi}(ax) = \gamma_2 a x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 a^{-1}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.a. Supongamos, en primer lugar, que $B \neq 0$. En tal caso tomamos $a = -B$ en (2.10), con lo que, renombrando los coeficientes del polinomio $\tilde{\Psi}_a$ podemos escribir,

$$\tilde{\Phi}_a(x) = x(x-1),\ \tilde{\Psi}_a(x) = \lambda x^2 - (\lambda + \beta + 3/2)x + 1/2,$$

con $\lambda \neq 0$. Por lo tanto, integrando la correspondiente ecuación diferencial para la función peso, obtenemos la siguiente representación integral para $\tilde{\mathbf{u}}_a$:

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_a, p\rangle = \int_0^1 p(x) x^{-1/2}(1-x)^{\beta} e^{-\lambda x} dx,$$

con $\beta > -1$, y para el funcional simetrizado:

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x^2)^{\beta} e^{-\lambda x^2} dx.$$

Los polinomios involucrados en la ecuación diferencial de Pearson (2.1) para $\mathbf{u}$ son

$$\Phi(x) = x^2 - 1, \quad \Psi(x) = 2x(\lambda x^2 - \lambda - \beta - 1).$$

Como caso particular de estos funcionales se tienen los polinomios asociados a la función peso $\omega(x) = e^{-x^2}\chi_{[-N,N]}$, conocidos como polinomios de Hermite truncados. Un análisis más detallado de dichos polinomios se puede encontrar en [42].

2.b. Consideremos, por último, el caso $B = 0$. Entonces, tomando $a = \gamma_2^{-1}$ y renombrando los coeficientes, escribimos (2.10) en la forma,

$$\tilde{\Phi}_a(x) = x^2,\ \tilde{\Psi}_a(x) = x^2 - (\alpha + 2)x.$$

Por analogía con el funcional clásico de Laguerre $\mathcal{L}^{(\alpha+1)}$, cuya cuya ecuación diferencial de Pearson asociada es

$$D[x\mathcal{L}^{(\alpha+1)}] + [x - (\alpha+2)]\mathcal{L}^{(\alpha+1)} = 0,$$

y procediendo de forma similar al caso 1.b, obtenemos $\tilde{\mathbf{u}}_a = x^{-1}\mathcal{L}^{(\alpha+1)} + M\delta_0$. Entonces, tenemos la siguiente representación integral para el funcional $\tilde{\mathbf{u}}_a$,

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_a, p\rangle = \int_0^{\infty} p(x) x^{\alpha} e^{-x} dx + Np(0),$$

con $\alpha > -1$. Finalmente, por el Lema 2.2.9 con $c = 0$, el funcional lineal simetrizado está definido como

$$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)|x|^{2\alpha+1} e^{-x^2} dx + Np(0),$$

con $\alpha > -1$, y los polinomios Φ y Ψ en la ecuación diferencial (2.1) correspondiente a $\mathbf{u}$ son

$$\Phi(x) = x^2, \quad \Psi(x) = x(2x^2 - 2\alpha - 3).$$

Este es un funcional de tipo Hermite generalizado, del que se puede encontrar un estudio más completo en [58].

3. En último lugar, analicemos el caso en el que $\tilde{\Phi}(x) = x$. Tomamos entonces $\tilde{\mathbf{u}}_a := h_{a^{-1}}\tilde{\mathbf{u}}$ y tenemos, por el Lema 2.2.8, que este funcional verifica la ecuación diferencial $D[\tilde{\Phi}_a\tilde{\mathbf{u}}_a] + \tilde{\Psi}_a\tilde{\mathbf{u}}_a = 0$ siendo

$$\tilde{\Phi}_a(x) = a^{-1}\tilde{\Phi}(ax) = x, \quad \tilde{\Psi}_a(x) = \tilde{\Psi}(ax) = \gamma_2 a^2 x^2 + \gamma_1 ax - 1/2.$$

Si elegimos la constante a tal que $\gamma_2 a^2 = 2$, entonces se tiene $\tilde{\Psi}_a(x) = 2x^2 + \lambda x - 1/2$, con lo que deducimos

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_a, p \rangle = \int_0^\infty p(x) x^{-1/2} e^{-(x^2+\lambda x)} dx.$$

El funcional simétrico correspondiente es un funcional lineal de Freud (ver por ejemplo [76]), y viene dado por

$$\langle \mathbf{u}, p \rangle = \int_{-\infty}^\infty p(x) e^{-(x^4+\lambda x^2)} dx,$$

que es solución de la ecuación diferencial (2.1) con

$$\Phi(x) = 1, \quad \Psi(x) = 4x^3 + 2\lambda x.$$

La siguiente tabla resume la clasificación de los funcionales lineales definidos positivos semiclásicos de clase 2 simétricos analizados previamente.

Tabla 2.1: Funcionales definidos positivos semiclásicos simétricos de clase 2

nombre	representación integral	polinomios en la ecuación de Pearson
Gegenbauer generalizado	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x^2)^{\beta}\lvert\lambda - x^2\rvert^{\gamma} dx$ $\beta > -1,\ \lvert\lambda\rvert > 1$	$\Phi(x) = (x^2-1)(x^2-\lambda)$, $\Psi(x) = -2x(1+\gamma+\lambda(1+\beta)\ -(2+\beta+\gamma)x^2)$
Jacobi–type simetrizado	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\lvert x\rvert^{2\beta+1}(1-x^2)^{\alpha} dx + Np(0)$ $\alpha, \beta > -1,\ N > 0$	$\Phi(x) = x^2(x^2-1)$ $\Psi(x) = x(3+2\beta-\ (2\alpha+2\beta+5)x^2)$
	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x^2)^{\beta} e^{-\gamma/(1-x^2)} dx$ $\gamma > 0$	$\Phi(x) = (x^2-1)^2$ $\Psi(x) = 2x(2+\beta+\gamma\ -(2+\beta)x^2)$
Koornwinder	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x^2)^{\beta} dx + M[p(1)+p(-1)]$ $\beta > -1$	$\Phi(x) = (x^2-1)^2$ $\Psi(x) = 2x(2+\beta-(2+\beta)x^2)$
	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x^2)^{\beta} e^{-\lambda x^2} dx$ $\beta > -1$	$\Phi(x) = x^2-1$ $\Psi(x) = 2x(\lambda x^2-\lambda-\beta-1)$
Hermite–type generalizado	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\lvert x\rvert^{2\alpha+1} e^{-x^2} dx + Np(0)$ $\alpha > -1, N > 0$	$\Phi(x) = x^2$ $\Psi(x) = x(2x^2-2\alpha-3)$
Freud	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-(x^4+\lambda x^2)} dx$	$\Phi(x) = 1$ $\Psi(x) = 4x^3+2\lambda x$

Capítulo 3

Pares coherentes generalizados

Introducción

Dedicaremos este capítulo al estudio de lo que llamaremos pares coherentes generalizados. Un par coherente generalizado será una pareja de funcionales definidos positivos $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ para los cuales, las respectivas SPOM, $\{P_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$, están relacionadas mediante la siguiente expresión algebraico–diferencial,

$$R_n(x) + a_{n-1}R_{n-1}(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + b_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1, \tag{3.1}$$

siendo $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como hemos mencionado en el Capítulo 1 (véase la Definición 1.2.1 y el Teorema 1.2.2), el concepto de par coherente fue introducido por A. Iserles *et al.* en [35], como una condición especial sobre los funcionales de forma que dicha propiedad es suficiente para que los polinomios ortogonales de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$, asociados al producto escalar

$$\langle p, q\rangle_S = \langle \mathbf{u}, pq\rangle + \lambda\langle \mathbf{v}, p'q'\rangle,$$

estén relacionados de cierta manera con la SPOM $\{P_n\}_n$ asociada al funcional $\mathbf{u}$. Describiremos estas relaciones en la siguiente sección.

En la Sección 3.1 establecemos que la relación (3.1) (que es más general que la condición de coherencia (1.10) introducida por Iserles *et al.*) no sólo permite deducir la relación (1.11), sino que es equivalente a la misma, lo que no ocurre con la relación (1.10). En la Sección 3.2, damos condiciones necesarias para que un par de funcionales lineales $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ verifiquen la propiedad (3.1). Probamos que, bajo estas condiciones, al menos uno de los funcionales ha de ser semiclásico de clase menor o igual que 1, y en la Sección 3.3 estudiamos los funcionales compañeros para **u** y **v** basándonos en los resultados previos. En particular, veremos cómo recuperamos los pares coherentes clásicos descritos por H. G. Meijer en [74]. Los resultados de este capítulo se encuentran publicados en [16].

3.1 Coherencia generalizada y polinomios ortogonales de Sobolev

Comenzamos la sección estableciendo la relación (1.11) a partir de la condición de coherencia (1.10).

Sean **u** y **v** funcionales lineales definidos positivos tales que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente (véase la Definición 1.2.1). Consideremos las correspondientes sucesiones de polinomios mónicos, $\{P_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$ ortogonales con respecto a **u** y **v**, respectivamente. En estas condiciones, se define el producto escalar de Sobolev,

$$\langle p, q\rangle_S = \langle \mathbf{u}, pq\rangle + \lambda\langle \mathbf{v}, p'q'\rangle, \tag{3.2}$$

siendo $\lambda \in \mathbb{R}^+$, y consideramos la SPOM de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$ asociada a (3.2). Para los polinomios de Sobolev, podemos probar el siguiente lema.

Lema 3.1.1. *Los coeficientes de $Q_n^\lambda(x)$ son funciones racionales en λ, con grado del numerador menor o igual que el grado del denominador.*

Demostración. Denotemos por $\Delta_n(\lambda)$, $\Delta_n(\mathbf{u})$ y $\Delta_n(\mathbf{v})$ los determinantes de las submatrices principales de dimensión $n+1$ de las matrices de momentos de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, **u** y **v**, respectivamente. Esto es,

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\lambda) &= \det\left[[\langle x^i, x^j\rangle_S]_{i,j=0}^n\right],\\
\Delta_n(\mathbf{u}) &= \det\left[[\langle \mathbf{u}, x^{i+j}\rangle]_{i,j=0}^n\right],\\
\Delta_n(\mathbf{v}) &= \det\left[[\langle \mathbf{v}, x^{i+j}\rangle]_{i,j=0}^n\right].
\end{aligned}$$

Por la definición del producto de Sobolev, podemos comprobar que

$$\langle x^i, x^j\rangle_S = \langle \mathbf{u}, x^{i+j}\rangle + \lambda ij\langle \mathbf{v}, x^{i+j-2}\rangle.$$

Entonces, teniendo en cuenta propiedades básicas de los determinantes, podemos deducir

$$\Delta_n(\lambda) = (n!)^2\Delta_{n-1}(\mathbf{v})\lambda^n + \text{términos de grado inferior en } \lambda.$$

Por otro lado, aplicando técnicas usuales, tenemos que

$$Q_n^{\lambda}(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta_{n-1}^{k}(\lambda)}{\Delta_{n-1}(\lambda)} x^k,$$

donde $\Delta_{n-1}^{k}(\lambda)$ se obtiene sustituyendo la j–ésima columna de $\Delta_{n-1}(\lambda)$ por el vector $[\langle x^n, x^k \rangle_S]_{k=0}^{n-1}$. Por lo tanto, cada coeficiente de Q_n^{λ} es una función racional en λ, con grado del numerador menor o igual que $n-1$ y grado del denominador igual a $n-1$. $\square$

Teniendo en cuenta este lema, podemos definir $W_n(x)$ un polinomio mónico de grado n tal que

$$W_n(x) = \lim_{\lambda \to \infty} Q_n^{\lambda}(x).$$

Aplicamos (3.2) a $p(x) = Q_{n+1}^{\lambda}(x)$ y $q \in \mathbb{P}_n$ cualquiera y, por las propiedades de ortogonalidad, obtenemos

$$0 = \frac{1}{\lambda} \langle Q_{n+1}^{\lambda}, q \rangle_S = \frac{1}{\lambda} \langle \mathbf{u}, Q_{n+1}^{\lambda} q \rangle + \langle \mathbf{v}, (Q_{n+1}^{\lambda})' q' \rangle,$$

de donde, tomando límite $\lambda \to \infty$ deducimos que

$$\langle \mathbf{v}, W_{n+1}' q' \rangle = 0, \quad \forall q \in \mathbb{P}_n, \quad n \geq 0. \tag{3.3}$$

Entonces, la unicidad de la SPOM asociada al funcional lineal $\mathbf{v}$ nos permite concluir $W_{n+1}'(x) = (n+1) R_n(x)$.

Por otro lado, tomando $p(x) = Q_{n+1}^{\lambda}(x)$ y $q(x) = 1$ en (3.2), por las propiedades de ortogonalidad obtenemos, tomando límite $\lambda \to \infty$,

$$\langle \mathbf{u}, W_{n+1} \rangle = 0, \quad n \geq 0. \tag{3.4}$$

Supongamos que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente (véase la Definición 1.2.1), esto es, se verifica la relación (1.10),

$$R_n(x) = \frac{P_{n+1}'(x)}{n+1} + b_{n-1} \frac{P_n'(x)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Si integramos en ambos miembros de la ecuación anterior y tenemos en cuenta (3.4), podemos asegurar que la constante de integración se anula y tenemos que

$$\frac{W_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{P_{n+1}(x)}{n+1} + b_{n-1} \frac{P_n(x)}{n}, \quad n \geq 1. \tag{3.5}$$

Consideremos ahora el desarrollo del polinomio W_{n+1} en términos de los polinomios de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$,

$$W_{n+1}(x) = Q_{n+1}^\lambda(x) + \sum_{j=0}^{n} c_{n,j}^\lambda \, Q_j^\lambda(x), \quad n \geq 0.$$

Teniendo en cuenta (3.3) y (3.5), deducimos que para cada $0 \leq j \leq n-1$ se verifica

$$c_{n,j}^\lambda = \frac{\langle W_{n+1}, Q_j^\lambda \rangle_S}{\langle Q_j^\lambda, Q_j^\lambda \rangle_S} = \frac{\langle \mathbf{u}, W_{n+1} Q_j^\lambda \rangle + \lambda \langle \mathbf{v}, W_{n+1}' Q_j^{\lambda\prime} \rangle}{\langle Q_j^\lambda, Q_j^\lambda \rangle_S} = 0.$$

Entonces, el único coeficiente no nulo es $c_{n,n}^\lambda$. Renombrando $c_{n,n}^\lambda \equiv c_{n-1}^\lambda$, tenemos

$$W_{n+1}(x) = Q_{n+1}^\lambda(x) + c_{n-1}^\lambda Q_n^\lambda(x).$$

Combinando esta igualdad con (3.5), obtenemos finalmente la anunciada relación (1.11) entre $\{Q_n^\lambda\}_n$ y $\{P_n\}_n$,

$$Q_{n+1}^\lambda(x) + c_{n-1}^\lambda Q_n^\lambda(x) = P_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n} b_{n-1} P_n(x), \quad n \geq 1.$$

Esta relación es una de las herramientas básicas en el análisis de las propiedades asintóticas de los polinomios de Sobolev asociados a pares coherentes (véanse, por ejemplo, [59, 70, 71, 75]).

En resumen, hemos demostrado que si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente, entonces se verifica la relación (1.11); sin embargo el recíproco no es cierto. Concretamente, vamos a ver que (1.11) implica muestra condición de coherencia generalizada (3.1), pero no necesariamente la condición clásica de coherencia (1.10).

Por un lado, si multiplicamos según $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la ecuación (1.11) por un polinomio arbitrario $p \in \mathbb{P}_{n-1}$, por la ortogonalidad de $\{Q_n^\lambda\}$ respecto del producto de Sobolev y $\{P_n\}_n$ respecto de $\mathbf{u}$, deducimos que

$$\left\langle \mathbf{v}, \left(\frac{P_{n+1}'}{n+1} + b_{n-1} \frac{P_n'}{n} \right) p' \right\rangle = 0, \quad n \geq 1, \tag{3.6}$$

para todo $p \in \mathbb{P}_{n-1}$. Por lo tanto, el desarrollo del polinomio $\frac{P_{n+1}'}{n+1} + b_{n-1}\frac{P_n'}{n}$ en términos de $\{R_n\}_n$ sólo puede contener los términos de grados n y $n-1$, quedando en la forma

$$\frac{P_{n+1}'(x)}{n+1} + b_{n-1} \frac{P_n'(x)}{n} = R_n(x) + a_{n-1} R_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

que es precisamente la condición (3.1).

Nota 3.1.2. Observamos que, en esta situación, sólo recuperamos el caso coherente cuando $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que en general no ocurre, como ponen de manifiesto los ejemplos estudiados por A. Berti *et al.* en [10] y [9]. En dichos trabajos, los autores estudian algunos ejemplos particulares de (1.11) cuando $\mathbf{u}$ es una modificación polinomial de grado 1 de los funcionales de Laguerre o Jacobi. Estos importantes ejemplos prueban que (1.11) es cierto aunque $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ no sea un par coherente.

Finalmente, veamos que esta última relación obtenida basta para demostrar la relación (1.11) entre $\{Q_n^\lambda\}$ y $\{P_n\}_n$. Efectivamente, si se verifica (3.1), entonces

$$\left\langle \mathbf{v}, \left(\frac{P'_{n+1}}{n+1} + b_{n-1} \frac{P'_n}{n} \right) p \right\rangle = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-2}.$$

De la misma forma, es claro que para todo $n \geq 1$ se satisface

$$\left\langle \mathbf{u}, \left(\frac{P_{n+1}}{n+1} + b_{n-1} \frac{P_n}{n} \right) p \right\rangle = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1},$$

con lo que podemos concluir que $\frac{P_{n+1}(x)}{n+1} + b_{n-1} \frac{P_n(x)}{n}$ es un polinomio mónico de grado $n+1$ ortogonal a $\mathbb{P}_{n-1}$ con respecto al producto escalar de Sobolev (3.2) y, por lo tanto, su desarrollo en función de $\{Q_n^\lambda\}$ se ve reducido a los términos de grado $n+1$ y n. Consecuentemente, se verifica (1.11).

En definitiva, hemos probado que una de las consecuencias más importantes de los pares coherentes, la relación (1.11), es equivalente a nuestra relación (3.1), menos restrictiva que el concepto de par coherente clásico. Esta es nuestra motivación para introducir el concepto de *par coherente generalizado* de la siguiente manera:

Definición 3.1.3. *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v} \in \mathbb{P}'$ *definidos positivos y denotemos por* $\{P_n\}_n$ *y* $\{R_n\}_n$ *las SPOM asociadas. Diremos que* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *es un par coherente generalizado si se verifica la relación* (3.1),

$$R_n(x) + a_{n-1} R_{n-1}(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + b_{n-1} \frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1,$$

con $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Los resultados anteriores pueden ahora ser enunciados en el siguiente

Teorema 3.1.4. $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *es un par coherente generalizado si y sólo si se verifica la relación* (1.11).

Nota 3.1.5. Si escribimos $T_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}$, entonces la relación (3.1) se puede expresar como

$$T_n(x) + b_{n-1}T_{n-1}(x) = R_n(x) + a_{n-1}R_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{3.7}$$

Observamos que, en el caso en que $\mathbf{u}$ es un funcional lineal clásico (Hermite, Laguerre o Jacobi), entonces $\{T_n\}_n$ es, de nuevo, una familia clásica de polinomios ortogonales. La relación (3.7) fue estudiada por M. Alfaro *et al.* en [3] y [4] en el marco de problemas inversos de polinomios ortogonales. Concretamente, los autores prueban que (3.7) es equivalente a que los funcionales lineales $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ correspondientes a $\{T_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$ verifiquen una ecuación del tipo

$$(x-a)\mathbf{w} = (x-b)\mathbf{v}.$$

Como muestra el siguiente lema, para evitar casos triviales, en lo que sigue del capítulo vamos a suponer que $a_0 \neq b_0$.

Lema 3.1.6. *Sea* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *un par coherente generalizado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

i) $a_0 \neq b_0$.

ii) $R_n(x) \neq \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$.

Demostración. Si aplicamos $\mathbf{v}$ en la ecuación (3.1), obtenemos una expresión recurrente para $\langle \mathbf{v}, \frac{P'_{n+1}}{n+1} \rangle$, en la forma,

$$\left\langle \mathbf{v}, \frac{P'_{n+1}}{n+1} \right\rangle = -b_{n-1} \left\langle \mathbf{v}, \frac{P'_n}{n} \right\rangle, \quad n \geq 2.$$

Además, como suponemos que el funcional $\mathbf{v}$ está normalizado de forma que el momento de orden cero vale 1, entonces $\langle \mathbf{v}, \frac{P'_2}{2} \rangle = a_0 - b_0$.

Probaremos la implicación $i) \Rightarrow ii)$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe un número natural $n_0 \geq 1$ tal que $R_{n_0}(x) = \frac{P'_{n_0+1}(x)}{n_0+1}$. Entonces, de (3.1) podemos deducir, dado el carácter mónico de los polinomios, que

$$a_{n_0-1} = b_{n_0-1}, \quad R_{n_0-1}(x) = \frac{P'_{n_0}(x)}{n_0}.$$

Repitiendo el procedimiento para $n_0 - 1$, y así sucesivamente, tenemos

$$a_n = b_n, \quad R_{n-1}(x) = \frac{P'_n(x)}{n}, \quad n = 0, \ldots, n_0 - 1,$$

lo que contradice la hipótesis *i)*.

La implicación recíproca $ii) \Rightarrow i)$ se deduce trivialmente de (3.1) para $n = 1$. $\square$

3.2 El problema inverso: condiciones necesarias de coherencia generalizada

En esta sección vamos a analizar los pares coherentes generalizados de funcionales, donde obtendremos diferentes relaciones que se verifican entre dichos funcionales y que nos permitirán deducir condiciones necesarias en los Teoremas 3.2.4 y 3.2.8.

Lema 3.2.1. *Sea* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *un par coherente generalizado. Entonces, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, podemos encontrar un polinomio* r_n*, mónico de grado* n*, para el que se verifica* $\langle r_n \mathbf{v}, \frac{P'_{m+1}}{m+1} \rangle = 0$ *para todo* $m \geq n+1$*.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_0 \neq b_0$, podemos definir el polinomio $r_n(x) = R_n(x) + A_n$, con A_n una constante real dada por

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1}(a_n - b_n)\langle \mathbf{v}, R_n^2 \rangle}{b_n b_{n-1} \cdot \dots \cdot b_1(a_0 - b_0)}.$$

Usando (3.1), podemos deducir fácilmente la relación recurrente

$$\left\langle r_n \mathbf{v}, \frac{P'_{m+1}}{m+1} \right\rangle = -b_{m-1} \left\langle r_n \mathbf{v}, \frac{P'_m}{m} \right\rangle, \quad m \geq n+2.$$

Por tanto, para probar el enunciado del lema, bastará ver que $\langle r_n \mathbf{v}, \frac{P'_{n+2}}{n+2} \rangle = 0$.

De (3.1) se sigue que P'_{n+2} se puede expresar como combinación lineal de los polinomios $\{R_n\}_n$ en la forma,

$$\frac{P'_{n+2}}{n+2} = R_{n+1} + (a_n - b_n)R_n + \dots + (-1)^n b_n b_{n-1} \cdot \dots \cdot b_1(a_0 - b_0)R_0.$$

Entonces, por la ortogonalidad de $\{R_n\}_n$ con respecto al funcional lineal $\mathbf{v}$,

$$\begin{aligned}
\langle r_n \mathbf{v}, \frac{P'_{n+2}}{n+2} \rangle &= \left\langle \mathbf{v}, (R_n(x) + A_n)\frac{P'_{n+2}}{n+2} \right\rangle \\
&= (a_n - b_n)\langle \mathbf{u}, R_n^2 \rangle + (-1)^n b_n b_{n-1} \cdot \dots \cdot b_1(a_0 - b_0)A_n \\
&= 0,
\end{aligned}$$

que se deduce teniendo en cuenta la definición de A_n. □

Como consecuencia del lema precedente, probamos el siguiente resultado.

Lema 3.2.2. *En las condiciones del lema anterior, se verifica la siguiente relación diferencial entre los funcionales* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$*,*

$$D[r_n\mathbf{v}] + \varphi_{n+1}\mathbf{u} = 0, \quad n \geq 1, \tag{3.8}$$

siendo r_n *el polinomio dado en el Lema 3.2.1 y* φ_{n+1} *un polinomio de grado* $n+1$*.*

Demostración. Sea r_n el polinomio del lema anterior. Consideramos el funcional lineal $r_n\mathbf{v}$ y lo expresamos en función de la base dual $\{\hat{\mathbf{u}}_n\}_n$ de la familia de polinomios $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}_n$,

$$r_n\mathbf{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{n,k}\hat{\mathbf{u}}_k.$$

La suma anterior es finita en virtud del Lema 3.2.1, dado que los coeficientes $\lambda_{n,k} = \langle r_n\mathbf{v}, \frac{P'_{k+1}}{k+1}\rangle$ se anulan para $k \geq n+1$. Entonces, tomando derivadas en la igualdad anterior y teniendo en cuenta los resultados del Lema 1.1.26, deducimos

$$D[r_n\mathbf{v}] = -\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}(k+1)\mathbf{u}_{k+1},$$

siendo $\{\mathbf{u}_n\}_n$ la base dual de $\{P_n\}_n$. Finalmente, usando la expresión (1.9) para $\mathbf{u}_n$ obtenemos (3.8), con

$$\varphi_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)\lambda_{n,k}}{\langle \mathbf{v}, P_{k+1}^2\rangle} P_{k+1}(x) \in \mathbb{P}_{n+1}.$$

□

Como consecuencia inmediata del lema anterior, deducimos la siguiente

Proposición 3.2.3. *Dado un par coherente generalizado* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$*, existen tres polinomios* $A(x)$*,* $B(x)$ *y* $C(x)$*, con* $\deg A = 2$, $\deg B \leq 4$ *y* $\deg C \leq 3$*, tales que*

$$A(x)\mathbf{v} = B(x)\mathbf{u}, \tag{3.9}$$

$$C(x)\mathbf{v} = B(x)D\mathbf{v}, \tag{3.10}$$

$$A(x)D\mathbf{v} = C(x)\mathbf{u}. \tag{3.11}$$

De hecho, $A(x)$*,* $B(x)$ *y* $C(x)$ *vienen dados en función de los polinomios* r_n *y* φ_n*, que aparecen en el Lema 3.2.2, por las expresiones,*

$$\begin{aligned} A(x) &= r_1(x)r_2'(x) - r_2(x), \\ B(x) &= r_2(x)\varphi_2(x) - r_1(x)\varphi_3(x), \\ C(x) &= \varphi_3(x) - r_2'(x)\varphi_2(x). \end{aligned}$$

Demostración. El Lema 3.2.2 para $n = 1$ y $n = 2$ nos proporciona el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + r_1 D\mathbf{v} &= -\varphi_2 \mathbf{u}, \\ r_2' \mathbf{v} + r_2 D\mathbf{v} &= -\varphi_3 \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Entonces, eliminando sucesivamente $D\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ obtenemos, respectivamente, (3.9), (3.10) y (3.11). □

Vamos a caracterizar los pares de funcionales $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ que verifican las condiciones descritas anteriormente, considerando las distintas posibilidades para los dos ceros del polinomio $A(x)$.

Primero estudiamos el caso en el que el polinomio $A(x)$ tiene un cero doble. De hecho, vamos a probar que si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente generalizado y el polinomio $A(x)$ de la Proposición 3.2.3 tiene un cero doble, entonces $\mathbf{u}$ es un funcional lineal semiclásico de clase menor o igual que 1. Además, caracterizamos su funcional lineal compañero, $\mathbf{v}$, como una transformación racional de $\mathbf{u}$.

Teorema 3.2.4. *Sean $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ un par coherente generalizado y $A(x)$ el polinomio dado en la Proposición 3.2.3. Si $A(x)$ tiene un cero doble $\xi \in \mathbb{R}$, entonces existen dos polinomios $\phi \in \mathbb{P}_3$ y $\psi \in \mathbb{P}_2$ tales que*

$$D[\phi \mathbf{u}] + \psi \mathbf{u} = 0. \tag{3.13}$$

Como consecuencia, $\mathbf{u}$ es semiclásico de clase menor o igual que 1. Además, el funcional $\mathbf{v}$ viene dado por

$$(x - \xi)\mathbf{v} = \phi(x)\mathbf{u}. \tag{3.14}$$

Demostración. Teniendo en cuenta la definición del polinomio $A(x)$ dada en la Proposición 3.2.3, tomamos derivadas y, por ser r_1 y r_2 polinomios mónicos de grados 1 y 2, respectivamente, obtenemos $A'(x) = 2r_1(x)$. Como ξ es un cero doble de $A(x)$, entonces también es cero de $r_1(x)$. Por lo tanto, sustituyendo en la definición de $A(x)$ concluimos que $r_2(\xi) = 0$, luego podemos escribir $r_2(x) = r_1(x)s_1(x)$, siendo s_1 un polinomio mónico de grado 1. Por otro lado, también podemos deducir, por su definición, que ξ es un cero del polinomio $B(x)$, luego podemos escribir $B(x) = r_1(x)\phi(x)$, donde $\phi(x) = s_1(x)\varphi_2(x) - \varphi_3(x) \in \mathbb{P}_3$.

En esta situación, las ecuaciones (3.12) se pueden simplificar en la forma

$$\begin{aligned} s_1 \mathbf{v} + r_2 D\mathbf{v} &= -s_1 \varphi_2 \mathbf{u}, \\ (r_1 + s_1)\mathbf{v} + r_2 D\mathbf{v} &= -\varphi_3 \mathbf{u}, \end{aligned}$$

y de aquí, restando las ecuaciones, obtenemos $r_1\mathbf{v} = (s_1\varphi_2 - \varphi_3)\mathbf{u}$, que es exactamente (3.14).

Para probar (3.13), tomamos derivadas en (3.14) y usamos (3.8) con $n = 1$,

$$D[\phi\mathbf{u}] = D[(x-\xi)\mathbf{v}] = D[r_1\mathbf{v}] = -\varphi_2\mathbf{u},$$

que es exactamente (3.13) tomando $\psi(x) = \varphi_2(x)$. Finalmente, como $\phi \in \mathbb{P}_3$ y $\psi \in \mathbb{P}_2$, se sigue que $\mathbf{u}$ es un funcional lineal semiclásico de clase menor o igual que 1. □

Seguidamente estudiaremos el caso en el que el polinomio $A(x)$ definido en la Proposición 3.2.3 tiene dos ceros simples. Concretamente, veremos que, en este caso, $\mathbf{v}$ es un funcional lineal semiclásico de clase menor o igual que 1 y, además, el funcional compañero $\mathbf{u}$ está determinado como una modificación racional de $\mathbf{v}$.

Antes de abordar esta cuestión, veamos algunos lemas técnicos que harán más clara la demostración del teorema principal. En todos ellos suponemos que $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ es un par coherente generalizado y los polinomios $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$, $r_n(x)$ son los que aparecen en los resultados precedentes.

Lema 3.2.5. *Si los dos ceros de $A(x)$ son simples y $B(x)$ tiene al menos un cero en común con $A(x)$, $B(\xi) = A(\xi) = 0$, entonces $C(\xi) = 0$ y $r_1(\xi) \neq 0$.*

Demostración. Como ξ es un cero simple de $A(x)$, deducimos $A'(\xi) = 2r_1(\xi) \neq 0$, con lo que $r_1(\xi) \neq 0$. Por otro lado, multiplicando por el polinomio $B(x)$ en la primera ecuación de (3.12) y, teniendo en cuenta (3.9) y (3.10), obtenemos $r_1(x)C(x) = -B(x) - \varphi_2(x)A(x)$. Entonces $r_1(\xi)C(\xi) = 0$, y como $r_1(\xi) \neq 0$, finalmente deducimos $C(\xi) = 0$. □

Lema 3.2.6. *Sea $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $A(\xi) = 0$ y $B(\xi) \neq 0$. Entonces, existe una constante $K \neq 0$, independiente de n, tal que $r_n(\xi) + Kr_n'(\xi) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Multiplicamos por $B(x)$ en (3.8). Usando (3.9) y (3.10) obtenemos

$$C(x)r_n(x) + B(x)r_n'(x) = -\varphi_{n+1}(x)A(x), \quad n \geq 1.$$

Entonces, evaluando en ξ se sigue

$$C(\xi)r_n(\xi) + B(\xi)r_n'(\xi) = 0, \quad n \geq 1.$$

En particular, para $n = 1$ tenemos $C(\xi)r_1(\xi) + B(\xi) = 0$ y, puesto que $B(\xi) \neq 0$, entonces $C(\xi) \neq 0$. Por tanto, considerando $K = B(\xi)/C(\xi) \neq 0$, se sigue la igualdad anunciada. □

Lema 3.2.7. *Si existen ξ_1, ξ_2, K_1, $K_2 \in \mathbb{R}$ tales que para los polinomios r_n del Lema 3.2.1 se verifica*

$$r_n(\xi_j) + K_j\, r_n'(\xi_j) = 0, \quad n \geq 1, \tag{3.15}$$

para $j = 1, 2$, entonces $\xi_1 = \xi_2$ y $K_1 = K_2$.

Demostración. Como $r_n(x) = R_n(x)+A_n$, entonces podemos reescribir (3.15) como

$$R_n(\xi_j) + K_j\, R_n'(\xi_j) = -A_n, \quad n \geq 1,$$

para $j = 1, 2$. Por tanto,

$$R_n(\xi_1) + K_1\, R_n'(\xi_1) = R_n(\xi_2) + K_2\, R_n'(\xi_2), \quad n \geq 1.$$

Además, la igualdad anterior se verifica trivialmente para $n = 0$, por lo que para todo polinomio $p \in \mathbb{P}$ se tiene

$$p(\xi_1) + K_1\, p'(\xi_1) = p(\xi_2) + K_2\, p'(\xi_2). \tag{3.16}$$

En particular, si tomamos $p(x) = (x - \xi_2)^n$, tenemos que

$$(\xi_1 - \xi_2)^n + K_1\, n(\xi_1 - \xi_2)^{n-1} = 0, \quad n \geq 1,$$

de donde $\xi_1 = \xi_2$ y, finalmente, de (3.16) concluimos $K_1 = K_2$. □

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para probar el siguiente

Teorema 3.2.8. *Sea $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ un par coherente generalizado. Si el polinomio $A(x)$ tiene sendos ceros simples, entonces existen dos polinomios $\phi \in \mathbb{P}_3$ y $\psi \in \mathbb{P}_2$ tales que*

$$D[\phi\, \mathbf{v}] + \psi \mathbf{v} = 0. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, $\mathbf{v}$ es un funcional lineal semiclásico de clase menor o igual que 1.

Además, el funcional compañero $\mathbf{u}$ está determinado por la igualdad

$$\phi(x)\mathbf{u} = (x - \xi)\mathbf{v}. \tag{3.18}$$

Demostración. Denotemos por ξ_1, ξ_2 los ceros simples de $A(x)$. Entonces, de los Lemas 3.2.6 y 3.2.7 deducimos que al menos uno de ellos tiene que ser una raíz del polinomio $B(x)$ (supongamos que es ξ_1). En tal caso podemos escribir $A(x) = (x-\xi_1)\tilde{A}(x)$, con $\tilde{A}(x) = (x-\xi_2)$ y $B(x) = (x-\xi_1)\phi(x)$, siendo $\deg \phi \leq 3$. Además, por el Lema 3.2.5, ξ_1 tiene que ser cero del polinomio $C(x)$. Por lo tanto, tenemos

$C(x) = (x - \xi_1)\tilde{C}(x)$, con $\deg \tilde{C} \leq 2$. En estas condiciones, usando la propiedad (1.2) podemos simplificar las ecuaciones de la Proposición 3.2.3 en la forma

$$\tilde{A}(x)\mathbf{v} = \phi(x)\mathbf{u} + M\delta_{\xi_1}, \tag{3.19}$$
$$\tilde{C}(x)\mathbf{v} = \phi(x)D\mathbf{v} + N\delta_{\xi_1}, \tag{3.20}$$
$$\tilde{A}(x)D\mathbf{v} = \tilde{C}(x)\mathbf{u} + K\delta_{\xi_1}. \tag{3.21}$$

Vamos a ver que las tres constantes M, N y K son nulas.

Como ya vimos en la demostración del Lema 3.2.6, sabemos que se verifica la igualdad $C(x)r_n(x) + B(x)r_n'(x) = -\varphi_{n+1}(x)A(x)$ para todo $n \geq 1$. Por tanto, teniendo en cuenta que ξ_1 es cero común de los polinomios $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$, deducimos

$$\tilde{C}(x)r_n(x) + \phi(x)r_n'(x) = -\varphi_{n+1}(x)\tilde{A}(x), \quad n \geq 1. \tag{3.22}$$

Combinando esta igualdad con la ecuación (3.8) obtenemos

$$[\tilde{C}(x)r_n(x) + \phi(x)r_n'(x)]\mathbf{u} = \tilde{A}(x)[r_n'(x)\mathbf{v} + r_n(x)D\mathbf{v}],$$

y reagrupando términos podemos escribir

$$r_n(x)[\tilde{C}(x)\mathbf{u} - \tilde{A}(x)D\mathbf{v}] = r_n'(x)[\tilde{A}(x)\mathbf{v} - \phi(x)\mathbf{u}].$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (3.19) y (3.21), obtenemos

$$Kr_n(\xi_1) = -Mr_n'(\xi_1), \quad n \geq 1. \tag{3.23}$$

Además, por el Lema 3.2.5 sabemos que $r_1(\xi_1) \neq 0$, por lo que de (3.23) para $n = 1$ podemos afirmar que $K = 0$ si y solo si $M = 0$.

Por otro lado, para ξ_2 hay dos posibilidades: que $\phi(\xi_2) \neq 0$ ó $\phi(\xi_2) = 0$.

En primer lugar, supongamos que $\phi(\xi_2) \neq 0$. Por el Lema 3.2.6 sabemos que existe una constante $K_1 \neq 0$ tal que $r_n(\xi_2) + K_1\, r_n'(\xi_2) = 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces, como $\xi_1 \neq \xi_2$, si M y K fuesen no nulos, estaríamos en contradicción con el Lema 3.2.7, ya que tendríamos dos ecuaciones del tipo (3.15) no triviales. Por tanto, ha de ser $K = M = 0$.

En segundo lugar, supongamos que $\phi(\xi_2) = 0$. Estamos en la misma situación que hemos tratado antes para ξ_1. Por tanto, siguiendo el mismo procedimiento llegamos a una igualdad análoga a (3.23), de la forma

$$\tilde{K}r_n(\xi_2) = -\tilde{M}r_n'(\xi_2), \quad n \geq 1. \tag{3.24}$$

Además, por el Lema 3.2.5 tenemos $r_1(\xi_2) \neq 0$ y, por tanto, $\tilde{K} = 0$ si y solo si $\tilde{M} = 0$. De nuevo el Lema 3.2.7 nos garantiza que $K = M = 0$ ó $\tilde{K} = \tilde{M} = 0$, puesto que, al menos, una de las dos relaciones (3.23) o (3.24) ha de ser trivial.

Podemos por tanto, sin pérdida de generalidad, suponer que $K = M = 0$. En particular, la ecuación (3.19) con $M = 0$ es la segunda parte del enunciado del teorema, tomando ξ como la raíz del polinomio $A(x)$.

Finalmente, veamos que $N = 0$ en (3.20). De la primera ecuación en (3.12) y (3.22) para $n = 1$, deducimos

$$-\varphi_2\phi\,\mathbf{u} = \phi\,\mathbf{v} + r_1\phi D\mathbf{v} = -(\varphi_2\tilde{A} + r_1\tilde{C})\,\mathbf{v} + r_1\phi\,D\mathbf{v},$$

y, teniendo en cuenta (3.20), tenemos $Nr_1(\xi_1) = 0$. Por el Lema 3.2.5 sabemos que $r_1(\xi_1) \neq 0$, con lo que $N = 0$ y, por tanto, se tiene (3.17) tomando $\psi(x) = -(\tilde{C}(x) + \phi'(x)) \in \mathbb{P}_2$. $\square$

3.3 Descripción de los pares coherentes generalizados

En esta sección describiremos los pares de funcionales $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ que corresponden a las condiciones descritas en los Teoremas 3.2.4 y 3.2.8. *A priori*, las tesis de dichos teoremas sólo son condiciones necesarias de coherencia generalizada y, por tanto, aún no estamos legitimados a denominar *pares coherentes generalizados* a los pares de funcionales que describiremos a continuación. Sin embargo, en la Sección 3.3 veremos que todos ellos verifican la condición de coherencia generalizada, por lo que desde ahora les daremos ese nombre.

En los casos correspondientes al Teorema 3.2.4, $\mathbf{u}$ es un funcional semiclásico de clase menor o igual que 1, y el funcional compañero $\mathbf{v}$ está descrito en función de $\mathbf{u}$ a través de la relación (3.14). A estos pares los llamaremos *pares coherentes generalizados de tipo I.*

En los casos correspondientes al Teorema 3.2.8, es el segundo funcional, $\mathbf{v}$, el que es semiclásico de clase menor o igual que 1, y el correspondiente funcional compañero $\mathbf{u}$ se describe a través de la relación (3.18). A estos pares los denominaremos *pares coherentes generalizados de tipo II.*

3.3.1 Pares coherentes generalizados de tipo I

En las condiciones del Teorema 3.2.4, tenemos que $\mathbf{u}$ es un funcional lineal semiclásico de clase menor o igual que 1, verificando la ecuación diferencial (3.13),

$$D[\phi\,\mathbf{u}] + \psi\,\mathbf{u} = 0,$$

con $\phi \in \mathbb{P}_3$, $\psi \in \mathbb{P}_2$ y, además, se tiene (3.14),

$$(x - a)\,\mathbf{v} = \phi(x)\,\mathbf{u},$$

lo que nos permitirá determinar el funcional compañero $\mathbf{v}$ a partir de $\mathbf{u}$.

Según sean los polinomios en (3.13), tendremos que $\mathbf{u}$ es un funcional clásico cuando dicha ecuación sea clásica con $\phi \in \mathbb{P}_2$ y ψ es de grado 1, o cuando ésta se pueda reducir un grado; esto es, si los polinomios ϕ y $(\phi' + \psi)$ tienen un factor común, entonces en la ecuación (3.13),

$$\phi\, D[\mathbf{u}] + (\phi' + \psi)\, \mathbf{u} = 0,$$

dicho factor común se puede simplificar usando la propiedad (1.2) y la Delta de Dirac que aparece tiene masa nula.

• Supongamos, en primer lugar, que la ecuación (3.13) se puede reducir a una ecuación diferencial de la forma $D[\Phi\mathbf{u}] + \Psi\mathbf{u} = 0$, siendo

$$\phi(x) = (x-b)\Phi(x) \quad \text{y} \quad (\phi' + \psi)(x) = (x-b)(\Psi + \Phi')(x),$$

con $\Phi \in \mathbb{P}_2$ y Ψ un polinomio de grado 1. Supondremos que, salvo cambio lineal de variable, el polinomio Φ está expresado en forma canónica, esto es,

- Si Φ tiene dos ceros simples, entonces $\Phi(x) = x^2 - 1$.
- Si Φ tiene un cero doble, entonces $\Phi(x) = x^2$.
- Si Φ es de grado uno, entonces $\Phi(x) = x$.
- Si Φ es constante, entonces $\Phi(x) = 1$.

Analicemos, por tanto, los casos que pueden ocurrir cuando $\mathbf{u}$ es clásico.

Si $\mathbf{u}$ es el funcional clásico de Jacobi (1.5), entonces $\Phi(x) = x^2 - 1$ y como $(x-a)\mathbf{v} = (x-b)\Phi(x)\mathbf{u}$, tenemos el par

$$\text{P.1}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx, \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|x-b|}{|x-a|}p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $\alpha, \beta > -1$ y $M \geq 0$. Una de las siguientes condiciones ha de verificarse para asegurar la convergencia de la integral que define el funcional $\mathbf{v}$: $|a| > 1$ y $|b| > 1$ ó $a = b$ si $|a| < 1$.

Cuando $\mathbf{u}$ es el funcional clásico de Laguerre (1.6), entonces $\Phi(x) = x$ y como se verifica $(x-a)\mathbf{v} = (x-b)\Phi(x)\mathbf{u}$, el par correspondiente está dado por,

$$\text{P.2}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} p(x)x^{\alpha}e^{-x}dx, \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x-b}{x-a}p(x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $\alpha > -1$, $a, b < 0$ ó $a = b > 0$ y $M \geq 0$.

• Supongamos ahora que en la ecuación (3.13) se tiene $\phi \in \mathbb{P}_2$ y ψ es de grado uno. Es decir, el funcional $\mathbf{u}$ es clásico y (3.13) es la ecuación de Pearson asociada. Igualmente, supondremos que, salvo cambio lineal de variable, el polinomio ϕ está expresado en una de las formas canónicas descritas anteriormente.

Cuando $\mathbf{u}$ es el funcional de Jacobi (1.5) con $\phi(x) = x^2 - 1$, dado que $(x-a)\mathbf{v} = \phi(x)\mathbf{u}$, obtenemos el par,

$$\text{P.3} \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} dx, \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x-a|} p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $\alpha, \beta > -1$, $|a| > 1$ y $M \geq 0$.

Si $\mathbf{u}$ es el funcional de Laguerre (1.6), a partir de $\phi(x) = x$ y $(x-a)\mathbf{v} = \phi(x)\mathbf{u}$, deducimos el par correspondiente, dado por

$$\text{P.4} \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} p(x) x^{\alpha} e^{-x} dx, \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x-a} p(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $\alpha > -1$, $a < 0$ y $M \geq 0$.

• Finalmente, estudiamos los casos en los que $\mathbf{u}$ es semiclásico de clase 1. Es decir, o bien $\deg \phi = 3$, o bien $\phi \in \mathbb{P}_2$ y $\deg \psi = 2$. Salvo cambio lineal de variable, supondremos que el polinomio ϕ está expresado en forma canónica, esto es,

- ϕ tiene tres ceros simples: $\phi(x) = (x^2 - 1)(x - c)$, con $|c| > 1$.
- ϕ tiene un cero simple y uno doble: $\phi(x) = x^2(x - 1)$.
- ϕ tiene un cero de multiplicidad tres: $\phi(x) = x^3$.

Para $\deg \phi \leq 2$, tendremos las situaciones canónicas descritas anteriormente.

Para analizar las distintas situaciones, nos basaremos en la clasificación de funcionales semiclásicos de clase 1 dada por S. Belmehdi en [6].

Si $\phi(x) = (x^2 - 1)(x - c)$ con $|c| > 1$, entonces $\mathbf{u}$ es el funcional descrito en el caso A_1 de [6], y deducimos el par

$$\text{P.5} \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} |x-c|^{\gamma} dx, \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x-a|} p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} |x-c|^{\gamma+1} dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma > -1$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $|a| > 1$ y $M \geq 0$.

Si $\phi(x) = x^2(x-1)$, el funcional $\mathbf{u}$ corresponde al caso A_2 de [6], y el par correspondiente de funcionales lineales es

$$\text{P.6}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)(1-x)^\alpha x^\beta e^{\frac{-\gamma}{x}}dx \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{|x-a|}p(x)(1-x)^{\alpha+1}x^{\beta+2}e^{\frac{-\gamma}{x}}dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $\gamma > 0$, $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, $a \notin [0,1]$ y $M \geq 0$.

Si ϕ tiene un cero de multiplicidad 3, estamos en un caso que no es definido positivo. Es el análogo del funcional de Bessel en el caso clásico.

Si ϕ tiene dos ceros simples, salvo cambio lineal de variable es de la forma $\phi(x) = x^2 - 1$. Entonces estamos en el caso B_1 de [6] y tenemos el par

$$\text{P.7}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 p(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta e^{-\lambda x}dx \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{|x-a|}p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}e^{-\lambda x}dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $\alpha, \beta > -1$, $\alpha, \beta, \lambda \neq 0$, $|a| > 1$ y $M \geq 0$.

Cuando ϕ tiene un cero doble, $\phi(x) = x^2$ y estamos en el caso B_2 de [6], con lo que

$$\text{P.8}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty p(x)x^\alpha e^{-x+\frac{\beta}{x}}dx \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{|x-a|}p(x)x^{\alpha+2}e^{-x+\frac{\beta}{x}}dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $a < 0$, $\beta < 0$ y $M \geq 0$.

Si ϕ es de grado 1, entonces $\phi(x) = x$ y estamos en el caso B_3 de [6],

$$\text{P.9}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty p(x)x^{2\mu}e^{-x^2-\lambda x}dx \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{|x-a|}p(x)x^{2\mu+1}e^{-x^2-\lambda x}dx + Mp(a), \end{cases}$$

con $\mu > -1/2$, $a < 0$ y $M \geq 0$.

Por último, si ϕ es constante, aparece un caso que no es definido positivo, por lo que omitiremos su descripción.

3.3.2 Pares coherentes generalizados de tipo II

Para concluir esta sección, vamos a estudiar el caso en que $\mathbf{v}$ es semiclásico, teniendo en cuenta los resultados del Teorema 3.2.8. Concretamente, sabemos que $\mathbf{v}$ satisface la ecuación diferencial (3.17),

$$D[\phi\,\mathbf{v}] + \psi\,\mathbf{v} = 0,$$

con $\phi \in \mathbb{P}_3$ y $\psi \in \mathbb{P}_2$. Además, el funcional compañero $\mathbf{u}$ viene descrito a través de la ecuación (3.18),

$$\phi(x)\mathbf{u} = (x-b)\mathbf{v}.$$

También tenemos, según vimos en la demostración del teorema, que se verifica la ecuación (3.21) con $K=0$,

$$(x-b)\,D\mathbf{v} = \tilde{C}(x)\mathbf{u}, \tag{3.25}$$

donde $\tilde{C}(x) = -(\phi'(x)+\psi(x))$.

De igual forma a como analizamos el caso anterior, tenemos dos situaciones en las que $\mathbf{v}$ es clásico: o bien la ecuación diferencial (3.17) que satisface $\mathbf{v}$ se puede reducir a una ecuación clásica (en el sentido que explicamos anteriormente), o bien que (3.17) es una ecuación de orden 0, esto es, $\phi \in \mathbb{P}_2$ y ψ es de grado 1.

• Supongamos, en principio, que podemos simplificar la ecuación (3.17) a una ecuación diferencial de la forma $D[\Phi\mathbf{v}] + \Psi\mathbf{v} = 0$, siendo

$$\phi(x) = (x-a)\Phi(x) \quad \text{ y } \quad (\phi'+\psi)(x) = (x-a)(\Psi+\Phi')(x),$$

con $\Phi \in \mathbb{P}_2$ y Ψ un polinomio de grado 1. Como siempre, supondremos que, salvo cambio lineal de variable, el polinomio Φ se encuentra expresado en forma canónica.

Entonces, para $\Phi(x) = x^2-1$, $\mathbf{v}$ es el funcional clásico de Jacobi (1.5), asociado a la función peso $\omega(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$ en el intervalo $[-1,1]$. Tenemos entonces, esencialmente, dos pares diferentes, dependiendo del valor de los parámetros del funcional.

En primer lugar, para $\alpha, \beta > -1$ tenemos el par

$$\text{P.10}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|x-b|}{|x-a|} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx + Mp(a), \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx, \end{cases}$$

con $|a|, |b| > 1$, ó $a = b \in [-1,1]$, y $M \geq 0$. Observamos que, *a priori*, en el funcional $\mathbf{v}$ podrían aparecer masas de Dirac en los extremos del intervalo de integración, puesto que estamos multiplicando el funcional **u** por $\Phi(x)^{-1}$. Sin embargo, estas masas se anulan porque ha de verificarse la ecuación (3.25). Para comprobarlo basta hacer actuar ambos miembros de la igualdad (3.25) sobre un polinomio arbitrario, integrar por partes y usar la ecuación diferencial de Pearson que verifica el funcional **u**.

En el caso en que sólo aparezca uno de los factores en la función peso $\omega(x)$ para el funcional **v**, esto es, $\alpha = -1$ ó $\beta = -1$, entonces el funcional compañero **u** tendrá masas de Dirac en uno de los extremos del intervalo de ortogonalidad. Estas dos situaciones son análogas, por lo que sólo describimos una ellas. Por ejemplo, cuando $\alpha = -1$, la función peso para el funcional **v** es $\omega(x) = (1+x)^{\beta+1}$ y el par correspondiente es

$$\text{P.11}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{|x-a|}(1+x)^{\beta}dx + Mp(a) + Np(1), \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(1+x)^{\beta+1}dx, \end{cases}$$

con $\beta > -1$, $|a| > 1$ y $M, N \geq 0$. Observamos que, en este caso, tiene que ser $b = 1$ para evitar la singularidad que aparece al multiplicar por el factor $(x-1)^{-1}$. Además, al igual que en el par anterior P.10, la posible masa en el punto -1 se anula porque ha de verificarse la condición (3.25).

Para $\Phi(x) = x$, **v** es el funcional clásico de Laguerre correspondiente con la función peso $\omega(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$. De nuevo en este caso encontramos dos pares diferentes, dependiendo del valor del parámetro α.

Si $\alpha > -1$,

$$\text{P.12}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{|x-b|}{|x-a|}p(x)x^{\alpha}e^{-x}dx + Mp(a), \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} p(x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx, \end{cases}$$

siendo $M \geq 0$ y $a, b < 0$ ó $a = b > 0$. En este caso también podemos comprobar que la eventual masa en el origen se anula porque ha de verificarse la ecuación (3.25).

En el caso en el que no aparezca el factor x en la función peso ω para el funcional **v**, esto es $\alpha = -1$. Entonces, en la representación del funcional compañero **u** no se anula la masa en el origen, con lo que tenemos el par

$$\text{P.13}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{p(x)}{|x-a|}e^{-x}dx + Mp(a) + Np(0), \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} p(x)e^{-x}dx, \end{cases}$$

con $a < 0$ y $M, N \geq 0$. Observamos que en este caso ha de ser $b = 0$ para evitar la singularidad que aparece al multiplicar por $\Phi(x)^{-1} = x^{-1}$.

• Supongamos ahora que (3.17) es una ecuación de Pearson clásica, es decir, $\phi \in \mathbb{P}_2$ y ψ es un polinomio de grado 1.

Entonces, para $\phi(x) = x^2 - 1$, $\mathbf{v}$ es el funcional clásico de Jacobi y, al igual que en la discusión de los casos anteriores, aparecen dos pares esencialmente diferentes, dependiendo del valor en los parámetros de la función peso $\omega(x)$ para $\mathbf{v}$.

En primer lugar, si $\omega(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$, con $\alpha, \beta > -1$, entonces, teniendo en cuenta (3.18), tenemos el par

$$\text{P.14} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} |x-b| p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} dx, \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1} dx, \end{cases}$$

con $|b| > 1$. Observamos que, en este caso, también desaparecen las masas de Dirac en los extremos del intervalo de integración (que son los ceros del polinomio ϕ).

En segundo lugar, si en el funcional $\mathbf{v}$ no aparece uno de los factores, esto es, $\omega(x) = (1-x)^{\alpha+1}$ ó $\omega(x) = (1+x)^{\beta+1}$ entonces la masa correspondiente al factor que no aparece no se anula en el funcional compañero $\mathbf{u}$. Ambas situaciones conducen a pares análogos, por lo que describimos sólo uno de ellos. Por ejemplo, para $\omega(x) = (1+x)^{\beta+1}$ tenemos

$$\text{P.15} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(1+x)^{\beta} dx + Mp(1), \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(1+x)^{\beta+1} dx, \end{cases}$$

con $\beta > -1$ y $M \geq 0$. De nuevo observamos que tiene que ser $b = 1$ para evitar la singularidad que se produce al multiplicar por el factor $(x-1)^{-1}$ en el cálculo de $\mathbf{u}$ a partir de $\mathbf{v}$.

Si $\mathbf{v}$ es el funcional clásico de Laguerre, cuando $\phi(x) = x$, deducimos dos pares de funcionales, dependiendo del valor que tome el parámetro α en la función peso $\omega(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$ correspondiente al funcional $\mathbf{v}$.

Si $\alpha > -1$, entonces

$$\text{P.16} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} (x-b) p(x) x^{\alpha} e^{-x} dx, \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{0}^{\infty} p(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx, \end{cases}$$

con $b < 0$. De nuevo en este caso la eventual masa en el origen se anula porque ha de verificarse la condición (3.25).

Si en el funcional $\mathbf{v}$ no aparece el factor $x^{\alpha+1}$, esto es, $\omega(x) = e^{-x}$, entonces en el funcional compañero $\mathbf{u}$ la masa en el origen no desaparece y por tanto tenemos el par

$$\text{P.17} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_0^\infty p(x) e^{-x} dx + M p(0), \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_0^\infty p(x) e^{-x} dx, \end{cases}$$

con $M \geq 0$. Aquí de nuevo ha de ser $b = 0$ para evitar la singularidad que resulta al multiplicar el funcional $\mathbf{v}$ por $\phi(x)^{-1} = x^{-1}$.

• Por último, analizamos los casos en los que $\mathbf{v}$ es un funcional lineal semiclásico de clase 1, siendo (3.17) la ecuación de Pearson asociada. Recordemos que calculamos el funcional compañero $\mathbf{u}$ a partir de la relación (3.18),

$$\phi(x)\mathbf{u} = (x - b)\mathbf{v}.$$

Cuando $\phi(x) = (x^2 - 1)(x - c)$ con $|c| > 1$, entonces,

$$\text{P.18} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 |x - b| p(x) (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta |x - c|^\gamma dx, \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 p(x) (1 - x)^{\alpha+1} (1 + x)^{\beta+1} |x - c|^{\gamma+1} dx, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma > -1$ y $|b| > 1$. Las eventuales masas que podrían aparecer al multiplicar por $\phi(x)^{-1}$ se anulan en virtud de la relación (3.25).

Para $\phi(x) = x^2(x - 1)$, el funcional $\mathbf{v}$ está representado por la función peso $\omega(x) = (1 - x)^{\alpha+1} x^{\beta+2} e^{-\gamma/x}$, que dará lugar a dos pares de funcionales según los valores del parámetro α.

En primer lugar, si $\alpha > -1$ tenemos el par

$$\text{P.19} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_0^1 |x - b| p(x) (1 - x)^\alpha x^\beta e^{-\gamma/x} dx, \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x) (1 - x)^{\alpha+1} x^{\beta+2} e^{-\gamma/x} dx, \end{cases}$$

con $\gamma > 0$. Por el mismo motivo que en casos anteriores, las eventuales masas en el origen y en el punto 1 se anulan.

Sin embargo, si en el funcional $\mathbf{v}$ no aparece el factor $(1 - x)^{\alpha+1}$, entonces la masa en el punto 1 no se anula, y el par correspondiente sería

$$\text{P.20}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)x^{\beta}e^{-\gamma/x}dx + Mp(1), \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)x^{\beta+2}e^{-\gamma/x}dx, \end{cases}$$

con $M > 0$.

Para $\phi(x) = x^2 - 1$, tenemos el par

$$\text{P.21}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 |x-b|p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}e^{-\lambda x}dx, \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}e^{-\lambda x}dx, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta > -1$, $\lambda \neq 0$. Observamos que, en este caso, en la representación del funcional compañero $\mathbf{u}$ también se anulan las eventuales masas en los extremos del intervalo de integración que aparecerían al multiplicar el funcional $\mathbf{v}$ por $\phi(x)^{-1}$.

Si $\phi(x) = x^2$,

$$\text{P.22}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty |x-b|p(x)x^{\alpha}e^{-x+\frac{\beta}{x}}dx, \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty p(x)x^{\alpha+2}e^{-x+\frac{\beta}{x}}dx, \end{cases}$$

con $\beta < 0$. En este caso, como obtenemos el funcional compañero $\mathbf{u}$ multiplicando $\mathbf{v}$ por $\phi(x)^{-1} = x^{-2}$, entonces para $\mathbf{u}$ aparecerían una Delta de Dirac y una derivada de la Delta de Dirac en el origen. Sin embargo, usando (3.25) se puede probar que ambas masas siempre se anulan.

Por último, si $\phi(x) = x$, entonces el funcional $\mathbf{v}$ admite una representación integral en el intervalo $[0, \infty)$ asociada a la función peso $\omega(x) = x^{2\mu+1}e^{-x^2-\lambda x}$. En tal caso, aparecen dos pares diferentes, según los valores del parámetro μ.

Por un lado, si $\mu > -1/2$, se tiene

$$\text{P.23}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty (x-b)p(x)x^{2\mu}e^{-x^2-\lambda x}dx, \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty p(x)x^{2\mu+1}e^{-x^2-\lambda x}dx, \end{cases}$$

con $b < 0$.

Por otro lado, si $\mu = -1/2$ en la función peso $\omega(x)$ correspondiente al funcional $\mathbf{v}$, entonces el par asociado es

$$\text{P.24}\quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty p(x)e^{-x^2-\lambda x}dx + Mp(0), \\ \langle \mathbf{v}, p\rangle = \displaystyle\int_0^\infty p(x)e^{-x^2-\lambda x}dx, \end{cases}$$

con $M > 0$.

El caso en que ϕ es constante corresponde a un funcional lineal que no es definido positivo y no lo trataremos en este análisis.

Con esto concluimos la descripción de los pares de funcionales que verifican las condiciones descritas en las tesis de los Teoremas 3.2.4 y 3.2.8.

3.4 Problema directo: condiciones suficientes de coherencia generalizada

En la sección anterior hemos clasificado los pares de funcionales $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a partir de las condiciones necesarias deducidas en los Teoremas 3.2.4 y 3.2.8, pero, como ya apuntamos en comienzo de la sección anterior, *a priori* no está garantizado que algunos de los pares descritos en P.1–P.24 sea coherente generalizado.

Vamos a comprobar que, efectivamente, las SPOM asociadas a todos los pares de funcionales construidos en la sección anterior verifican la relación de coherencia generalizada (3.1) y, por lo tanto, podremos afirmar que hemos construido todos los pares coherentes generalizados.

3.4.1 Comprobación de la condición de coherencia generalizada para los pares de tipo I

- Comprobación de los pares P.1 – P.2.

Para ver que los pares P.1 y P.2 verifican la relación (3.1) basta tener en cuenta que $\mathbf{u}$ es clásico y aplicar los resultados obtenidos en [3] (véase la Nota 3.1.5). Efectivamente, en estos dos casos tenemos $\mathbf{u}$ clásico verificando $D[\Phi\mathbf{u}] + \Psi\mathbf{u} = 0$, con $(x-a)\mathbf{v} = (x-b)\Phi\mathbf{u}$. Consideramos el funcional regular y clásico $\mathbf{w} = \Phi\mathbf{u}$ y denotamos por $\{T_n\}_n$ la SPOM asociada.

Por un lado, sabemos que, por ser $\mathbf{u}$ clásico, se verifica

$$T_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}.$$

Por otro lado, como $(x-a)\mathbf{v} = (x-b)\mathbf{w}$ entonces, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en [3], existen sucesiones de números no nulos, $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$, tales que

$$P_n(x) + a_{n-1}\, R_{n-1}(x) = T_n(x) + b_{n-1}\, T_{n-1}(x).$$

Finalmente, de las dos relaciones obtenidas deducimos directamente (3.1).

- Comprobación de los pares P.3 – P.4.

Basta observar que los pares definidos en P.3 y P.4 corresponden a los pares coherentes clásicos descritos por H. G. Meijer en [74], esto es, verifican la condición (3.1) con $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

- Comprobación de los pares P.5 – P.9.

Para concluir, analizaremos los pares correspondientes a los casos en los que $\mathbf{u}$ es de clase 1.

En estos casos tenemos $D[\Phi\mathbf{u}] + \Psi\mathbf{u} = 0$, con $(x-a)\mathbf{v} = \Phi\mathbf{u}$. Consideramos el funcional lineal definido por $\mathbf{w} = \Phi\mathbf{u}$ y que, en dichos casos, es regular. Denotemos por $\{S_n\}_n$ la SPOM asociada. Por el Lema 2.1.6 tenemos

$$\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} = S_n(x) + \eta_n S_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

con $\eta_n \neq 0$. Por otro lado, como $(x-a)\mathbf{v} = \mathbf{w}$ entonces,

$$R_n(x) = S_n(x) + \tilde{\eta}_n\, S_{n-1}(x),$$

con $\tilde{\eta}_n \neq 0$. Además, por ser $(n+1)R_n(x) \neq P'_{n+1}(x)$ se tiene $\eta_n \neq \tilde{\eta}_n$ para todo $n \geq 1$. Por tanto, eliminando de estas dos ecuaciones S_n y S_{n-1}, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}
(\tilde{\eta}_n - \eta_n)\, S_{n-1}(x) &= \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} - R_n(x),\\
(\tilde{\eta}_n - \eta_n)\, S_n(x) &= \eta_n \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} - \tilde{\eta}_n\, R_n(x).
\end{aligned}$$

Escribiendo las dos expresiones anteriores para S_{n-1} e igualando, deducimos directamente la relación (3.1) con

$$a_n = -\,\tilde{\eta}_n \frac{\tilde{\eta}_{n+1} - \eta_{n+1}}{\tilde{\eta}_n - \eta_n}, \qquad b_n = -\,\eta_n \frac{\tilde{\eta}_{n+1} - \eta_{n+1}}{\tilde{\eta}_n - \eta_n}.$$

3.4.2 Comprobación de la condición de coherencia generalizada para los pares de tipo II

- Comprobación de los pares P.10 y P.12.

En ambos casos tenemos $\mathbf{v}$ un funcional lineal clásico verificando $D[\Phi\mathbf{v}] + \Psi\mathbf{v} = 0$. Además, existe un funcional clásico $\mathbf{w}$, del mismo tipo que $\mathbf{v}$, tal que $\Phi\mathbf{w} = \mathbf{v}$, que es solución de la ecuación diferencial de Pearson $D[\Phi\mathbf{w}] + \varphi\mathbf{w} = 0$. Entonces, si denotamos por $\{S_n\}_n$ la correspondiente SPOM, sabemos que

$$R_n(x) = \frac{S'_{n+1}(x)}{n+1},$$

puesto que $\Phi\mathbf{w} = \mathbf{v}$. Por otro lado se verifica $(x-a)\mathbf{u} = (x-b)\mathbf{w}$, y teniendo en cuenta los resultados de [3], existen sendas sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que

$$P_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n}\, b_{n-1}\, P_n(x) = S_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n}\, a_{n-1}\, S_n(x).$$

Finalmente, derivando esta igualdad y usando la relación anterior se sigue (3.1).

- Comprobación de los pares P.11 y P.13.

La demostración de los casos P.11 y P.13 es análoga pero las llevaremos a cabo por separado.

Para estudiar el par P.11, consideremos el funcional $\mathbf{w}$ definido por

$$\langle \mathbf{w}, p \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{|x-a|}(1+x)^\beta dx + Mp(a),$$

con $|a| > 1$, y denotemos por $\{S_n\}_n$ la correspondiente SPOM. Entonces, como $\mathbf{u} = \mathbf{w} + N\delta_1$, se puede comprobar que para $c_n = -S_{n+1}(1)/S_n(1)$ se verifica

$$\langle \mathbf{u}, x^k(S_{n+1} + c_n S_n)\rangle = 0, \quad k \leq n-1,$$

de donde se deduce

$$P_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n}\, b_n\, P_n(x) = S_{n+1}(x) + c_n S_n(x), \quad n \geq 0.$$

Por otro lado, integrando por partes tenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, x^k(S_{n+1} + c_n S_n)'(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} x^k (1+x)^{\beta+1}(S_{n+1} + c_n S_n)'(x) dx \\
&= x^k(1+x)^{\beta+1}(S_{n+1} + c_n S_n)(x)\Big|_{-1}^{1} \\
&\quad - \int_{-1}^{1} [(\beta+k+1)x^k + kx^{k-1}](1+x)^\beta (S_{n+1} + c_n S_n)(x) dx.
\end{aligned}$$

Puesto que $c_n = -S_{n+1}(1)/S_n(1)$, la parte integrada se anula y, por ortogonalidad, deducimos

$$\langle \mathbf{v}, x^k(S_{n+1} + c_n S_n)'\rangle = 0, \quad k \leq n-2.$$

En consecuencia

$$S'_{n+1}(x) + c_n S'_n(x) = R_{n+1}(x) + a_n R_n(x).$$

Así, la relación (3.1) queda probada.

De forma análoga, podemos proceder para el par P.13 considerando en este caso el funcional auxiliar

$$\langle \mathbf{w}, p \rangle = \int_0^\infty \frac{p(x)}{x-a}\, e^{-x} dx + M p(a),$$

con $a < 0$.

- Comprobación de los pares P.14 – P.17.

Basta observar que los pares descritos en P.14 – P.17 corresponden a los pares coherentes clásicos descritos por H. G. Meijer en [74]. Por lo tanto, verifican la condición de coherencia generalizada (3.1) con $a_n = 0$ para cada $n \geq 1$.

De esta forma quedan completamente determinados los pares asociados a un funcional clásico $\mathbf{v}$. Pasemos ahora a estudiar los casos de los pares correspondientes a $\mathbf{v}$ semiclásicos de clase 1.

- Comprobación de los pares P.18 – P.23 salvo P.20.

En todos estos pares tenemos la misma situación. El funcional $\mathbf{v}$ es semiclásico con ecuación de Pearson asociada $D[\Phi\mathbf{v}] + \Psi\mathbf{v} = 0$. Consideramos el funcional regular $\mathbf{w}$ tal que $\Phi\mathbf{w} = \mathbf{v}$, que es semiclásico de clase 1 y verifica $D[\Phi\mathbf{w}] + \varphi\mathbf{w} = 0$. Denotemos por $\{S_n\}_n$ la SPOM asociada a $\mathbf{w}$. Entonces, por el Lema 2.1.6 sabemos que sus derivadas son cuasi–ortogonales con respecto a $\mathbf{v}$, de donde

$$\frac{S'_{n+1}(x)}{n+1} = R_n(x) + a_{n-1} R_{n-1}(x).$$

Por otro lado, $\mathbf{w}$ está relacionado con $\mathbf{u}$ mediante $\mathbf{u} = (x-b)\mathbf{w}$, por lo que

$$S_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) + \frac{n+1}{n}\, b_n\, P_n(x).$$

De estas dos igualdades obtenemos directamente (3.1).

- Comprobación de los pares P.20 y P.24.

En estos casos podemos proceder de forma análoga a como se hacía para los pares P.11 y P.13, considerando en cada caso los siguientes funcionales auxiliares:

$$\langle \mathbf{w}, p \rangle = \int_0^1 p(x) x^\beta e^{-\gamma/x}.$$

para el par P.20, y

$$\langle \mathbf{w}, p \rangle = \int_0^\infty p(x) e^{-x^2 - \lambda x} dx$$

para el par P.24.

Como conclusión, el siguiente teorema sintetiza los resultados precedentes.

Teorema 3.4.1. *Sean* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{P}'$ *dos funcionales definidos positivos. Entonces,* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *es un par coherente generalizado si y sólo si corresponde a alguno de los casos P.1–P.24 descritos en las tablas siguiente:*

Tabla 3.1: Pares coherentes generalizados de tipo I

P.1	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\lvert x-b\rvert}{\lvert x-a\rvert} p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + Mp(a)$
P.2	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{0}^{\infty} p(x)x^{\alpha}e^{-x}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{0}^{\infty} \frac{x-b}{x-a} p(x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx + Mp(a)$
P.3	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\lvert x-a\rvert} p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + Mp(a)$
P.4	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{0}^{\infty} p(x)x^{\alpha}e^{-x}dx,$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x-a} p(x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx + Mp(a),$
P.5	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\lvert x-c\rvert^{\gamma}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\lvert x-a\rvert} p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\lvert x-c\rvert^{\gamma+1}dx + Mp(a)$
P.6	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{0}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}x^{\beta}e^{\frac{-\gamma}{x}}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{0}^{1} \frac{1}{\lvert x-a\rvert} p(x)(1-x)^{\alpha+1}x^{\beta+2}e^{\frac{-\gamma}{x}}dx + Mp(a)$
P.7	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}e^{-\lambda x}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\lvert x-a\rvert} p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}e^{-\lambda x}dx + Mp(a)$
P.8	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{0}^{\infty} p(x)x^{\alpha}e^{-x+\frac{\beta}{x}}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\lvert x-a\rvert} p(x)x^{\alpha+2}e^{-x+\frac{\beta}{x}}dx + Mp(a)$

P.9	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)x^{2\mu}e^{-x^2-\lambda x}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{\|x-a\|}p(x)x^{2\mu+1}e^{-x^2-\lambda x}dx + Mp(a)$

Tabla 3.2: Pares coherentes generalizados de tipo II

P.10	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^1 \frac{\|x-b\|}{\|x-a\|}p(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(a)$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx$
P.11	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{\|x-a\|}(1+x)^\beta dx + Mp(a) + Np(1)$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1+x)^{\beta+1}dx$
P.12	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^\infty \frac{\|x-b\|}{\|x-a\|}p(x)x^\alpha e^{-x}dx + Mp(a)$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx$
P.13	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^\infty \frac{p(x)}{\|x-a\|}e^{-x}dx + Mp(a) + Np(0)$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)e^{-x}dx$
P.14	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^1 \|x-b\|p(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx$
P.15	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1+x)^\beta dx + Mp(1)$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1+x)^{\beta+1}dx$
P.16	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^\infty (x-b)p(x)x^\alpha e^{-x}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)x^{\alpha+1}e^{-x}dx$

P.17	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)e^{-x}dx + Mp(0)$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)e^{-x}dx$
P.18	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^1 \lvert x-b\rvert p(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \lvert x-c\rvert^\gamma dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\lvert x-c\rvert^{\gamma+1}dx$
P.19	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^1 \lvert x-b\rvert p(x)(1-x)^\alpha x^\beta e^{-\gamma/x}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^1 p(x)(1-x)^{\alpha+1}x^{\beta+2}e^{-\gamma/x}dx$
P.20	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^1 p(x)x^\beta e^{-\gamma/x}dx + Mp(1)$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^1 p(x)x^{\beta+2}e^{-\gamma/x}dx$
P.21	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_{-1}^1 \lvert x-b\rvert p(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta e^{-\lambda x}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_{-1}^1 p(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}e^{-\lambda x}dx$
P.22	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^\infty (x-b)p(x)x^\alpha e^{-x+\frac{\beta}{x}}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)x^{\alpha+2}e^{-x+\frac{\beta}{x}}dx$
P.23	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^\infty (x-b)p(x)x^{2\mu}e^{-x^2-\lambda x}dx$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)x^{2\mu+1}e^{-x^2-\lambda x}dx$
P.24	$\langle \mathbf{u}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)e^{-x^2-\lambda x}dx + Mp(0)$ $\langle \mathbf{v}, p\rangle = \int_0^\infty p(x)e^{-x^2-\lambda x}dx$

Capítulo 4

Una extensión de pares coherentes simétricos

Introducción

En este capítulo analizamos un problema inverso en la teoría de polinomios ortogonales. El objetivo es estudiar las propiedades de los pares de funcionales lineales simétricos $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bajo la hipótesis de que las SPOM asociadas verifican una relación especial. En tal situación se dirá que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un *par coherente simétrico generalizado*. Hacemos notar que en la clasificación del capítulo anterior, ninguno de los pares coherentes generalizados descritos resulta ser simétrico, por lo que, para este estudio, la relación entre las SPOM deberá de ser diferente.

Como comentamos en el Capítulo 1, en el trabajo de A. Iserles *et al.* [35] se introduce el concepto de coherencia simétrica, que resulta ser una útil herramienta en el estudio de propiedades algebraicas y analíticas de los polinomios de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$ asociados al producto escalar

$$\langle p, q \rangle_S = \langle \mathbf{u}, pq \rangle + \lambda \langle \mathbf{v}, p'q' \rangle,$$

ya que existe una relación *"dos a dos"* entre los polinomios de Sobolev y la SPOM $\{P_n\}_n$ asociada al funcional $\mathbf{u}$, que es análoga a (1.11) en el caso no simétrico.

En este capítulo generalizamos este concepto, dando una condición que es equivalente a la citada relación entre $\{Q_n^\lambda\}_n$ y $\{P_n\}_n$.

El desglose en secciones del capítulo es el siguiente. En la Sección 4.1 establecemos la definición de coherencia simétrica generalizada, como extensión natural del concepto original de coherencia simétrica establecido en [35]. Además, vemos que, en esta situación de coherencia simétrica generalizada, existe una relación algebraica entre dos polinomios consecutivos de igual paridad, asociados al funcional

$\mathbf{u}$, con dos polinomios consecutivos de iguales índices de los polinomios de Sobolev ortogonales con respecto al producto escalar de Sobolev definido anteriormente. En la Sección 4.2 haremos un análisis similar al realizado en el Capítulo 3. Deduciremos ciertas relaciones que se verifican entre los funcionales que forman un par coherente simétrico generalizado. A partir de estas y bajo ciertas hipótesis adicionales, probaremos que el segundo funcional ha de ser semiclásico de clase menor o igual que 2. A continuación, daremos varios ejemplos, describiendo los pares correspondientes al caso semiclásico de clase 1. Por último, en la Sección 4.3 consideramos dos funcionales de momentos simétricos definidos positivos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y, suponiendo que uno de ellos es clásico (es el funcional clásico de Hermite o el de Gegenbauer), estudiamos los coeficientes de la RRTT para los polinomios ortogonales mónicos asociados al funcional no clásico a partir de los coeficientes de recurrencia del funcional de momentos clásico, siempre bajo la hipótesis de que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente simétrico generalizado. En estas condiciones, determinamos el segundo funcional de momentos como una transformación racional del funcional de momentos clásico. Por último, destacar que los resultados aportados en la Sección 4.3 han sido publicados en [17]. En [19] se recogen los resultados de la Sección 4.2.

4.1 Coherencia simétrica generalizada y polinomios ortogonales de Sobolev

Dados dos funcionales de momentos simétricos definidos positivos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, normalizados de forma que $\langle \mathbf{u}, 1\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{v}, 1\rangle = 1$, definimos la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ mediante

$$\langle p, q\rangle_S = \langle \mathbf{u}, pq\rangle + \lambda \langle \mathbf{v}, p'q'\rangle, \quad p,\, q \in \mathbb{P}, \tag{4.1}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Denotemos por $\{P_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$ las SPOM asociadas a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, respectivamente, y denotemos por $\{Q_n^\lambda\}_n$ la SPOM de Sobolev asociada a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$. Seguidamente recordaremos la definición de par coherente simétrico dada en [35].

Definición 4.1.1. *Decimos que* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *es un par coherente simétrico si existe una sucesión* $\{u_n\}_n$*, con elementos no nulos, tal que se verifica*

$$R_{n+1}(x) = \frac{P'_{n+2}(x)}{n+2} + u_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1. \tag{4.2}$$

Como establecimos en el Capítulo 1, en [74] podemos encontrar una descripción completa de todos los pares de funcionales que verifican tales condiciones.

Veamos que el concepto de coherencia simétrica, al igual que el de coherencia generalizada en el capítulo anterior, implica ciertas condiciones sobre los coeficientes de los polinomios de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$.

Lema 4.1.2. *Si escribimos*

$$Q_n^\lambda(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_{n,j} x^j, \tag{4.3}$$

entonces cada coeficiente $c_{n,j}$ es una función racional en λ, con grado del numerador menor o igual que $n-1$ y grado del denominador exactamente igual a $n-1$. Por tanto existe el límite de Q_n^λ cuando $\lambda \to +\infty$. Al polinomio límite lo denotaremos

$$W_n(x) = \lim_{\lambda\to\infty} Q_n^\lambda(x).$$

Además, W_n es una función par (resp. impar) si n es par (resp. impar).

Omitiremos la demostración de este resultado por ser análoga a la realizada en el capítulo anterior (véase [38]). Sólo comentar que la paridad del polinomio límite W_n se deduce directamente de la paridad de los polinomios de Sobolev Q_n^λ.

Este resultado nos permite probar que, en una situación de coherencia simétrica, una combinación de dos polinomios de Sobolev se puede expresar como combinación de dos polinomios de la familia ortogonal con respecto al primer funcional de momentos.

Teorema 4.1.3. *Si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente simétrico, entonces existen dos sucesiones de constantes no nulas $\{c_n^\lambda\}_n$ y $\{u_n\}_n$, tales que los polinomios de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$ están relacionados con la SPOM $\{P_n\}_n$ en la forma*

$$Q_{n+2}^\lambda(x) + c_{n-1}^\lambda Q_n^\lambda(x) = P_{n+2}(x) + \frac{n+2}{n} u_{n-1} P_n(x), \quad n \geq 1, \tag{4.4}$$

donde $c_n^\lambda = \frac{n+3}{n+1} \frac{u_n\langle \mathbf{u}, P_{n+1}^2\rangle}{\langle Q_{n+1}^\lambda, Q_{n+1}^\lambda\rangle_S}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que para el polinomio límite definido en el lema anterior se verifica $W_n'(x) = nR_{n-1}(x)$. En efecto, por ortogonalidad se tiene

$$0 = \langle Q_n^\lambda, x^k\rangle_S = \langle \mathbf{u}, x^k Q_n^\lambda\rangle + \lambda\langle \mathbf{v}, kx^{k-1}(Q_n^\lambda)'\rangle,$$

para cada $k \leq n-1$ o, equivalentemente,

$$0 = \frac{1}{\lambda}\langle \mathbf{u}, x^k Q_n^\lambda\rangle + \langle \mathbf{v}, kx^{k-1}(Q_n^\lambda)'\rangle, \quad k \leq n-1.$$

Así, tomando límite cuando $\lambda \to +\infty$ deducimos que $\langle \mathbf{v}, x^{k-1}(W_n)' \rangle = 0$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$. Por lo tanto, de la unicidad de la SPOM, deducimos

$$W_n'(x) = nR_{n-1}(x).$$

Además, trivialmente se tiene $0 = \langle Q_n^\lambda, 1 \rangle_S = \langle \mathbf{u}, Q_n^\lambda \rangle$, de donde tomando límite llegamos a la igualdad $\langle \mathbf{u}, W_n \rangle = 0$ para todo $n \geq 1$.

Entonces, como $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente simétrico, sustituyendo la igualdad $W_n'(x) = nR_{n-1}(x)$ en (4.2) e integrando, obtenemos

$$\frac{W_{n+2}(x)}{n+2} = \frac{P_{n+2}(x)}{n+2} + u_{n-1}\frac{P_n(x)}{n} + \sigma_n, \quad n \geq 1. \tag{4.5}$$

Por otro lado, aplicamos $\mathbf{u}$ en (4.5) y deducimos que $\langle \mathbf{u}, W_{n+2} \rangle = \sigma_n$ para $n \geq 1$. Por tanto, como vimos que $\langle \mathbf{u}, W_n \rangle = 0$, la constante de integración σ_n es nula para todo $n \geq 1$. Entonces,

$$W_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + \frac{n+2}{n} u_{n-1} P_n(x), \quad n \geq 1. \tag{4.6}$$

Además, para $n = 0$ la igualdad (4.6) es trivial porque ambos polinomios son funciones pares. Por tanto, (4.6) se verifica para todo $n \geq 0$.

Consideremos ahora el desarrollo de W_n, para $n \geq 3$, como combinación lineal de los polinomios de Sobolev $\{Q_n^\lambda\}_n$,

$$W_n(x) = Q_n^\lambda(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}^\lambda Q_k^\lambda(x),$$

donde, por ortogonalidad, los coeficientes se pueden expresar como $a_{n,k}^\lambda = \frac{\langle W_n, Q_k^\lambda \rangle_S}{\langle Q_k^\lambda, Q_k^\lambda \rangle_S}$. Teniendo en cuenta (4.6), así como la identidad $W_n'(x) = nR_{n-1}(x)$, podemos calcular dichos coeficientes en la forma:

$$a_{n,k}^\lambda = \frac{\langle \mathbf{u}, W_n Q_k^\lambda \rangle + \lambda \langle \mathbf{v}, W_n'(Q_k^\lambda)' \rangle}{\langle Q_k^\lambda, Q_k^\lambda \rangle_S} = \frac{n}{n-2} \frac{u_{n-3} \langle \mathbf{u}, P_{n-2} Q_k^\lambda \rangle}{\langle Q_k^\lambda, Q_k^\lambda \rangle_S}.$$

Entonces, $a_{n,k}^\lambda = 0$ para $0 \leq k \leq n-3$ y $a_{n,n-2}^\lambda \neq 0$. Por tanto,

$$W_n(x) = Q_n^\lambda(x) + a_{n,n-1}^\lambda Q_{n-1}^\lambda(x) + a_{n,n-2}^\lambda Q_{n-2}^\lambda(x).$$

Puesto que, tanto W_n como Q_n^λ son funciones pares si n es par, y funciones impares si n es impar, ha de ser $a_{n,n-1}^\lambda = 0$. Finalmente, sustituyendo en (4.6) llegamos a la igualdad (4.4), donde

$$c_{n-3}^\lambda \equiv a_{n,n-2}^\lambda = \frac{n}{n-2} \frac{u_{n-3} \langle \mathbf{u}, P_{n-2} Q_{n-2}^\lambda \rangle}{\langle Q_{n-2}^\lambda, Q_{n-2}^\lambda \rangle_S} = \frac{n}{n-2} \frac{u_{n-3} \langle \mathbf{u}, P_{n-2}^2 \rangle}{\langle Q_{n-2}^\lambda, Q_{n-2}^\lambda \rangle_S}, \quad n \geq 3.$$

□

En el anterior teorema hemos visto que si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente simétrico, entonces se verifica (4.4). Sin embargo, el siguiente resultado refleja que el recíproco no es cierto.

Teorema 4.1.4. *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos funcionales lineales simétricos y definidos positivos. Consideremos la forma bilineal* $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ *dada por* (4.1)*. Supongamos que la sucesión de polinomios* $\{P_n\}_n$ *ortogonal respecto a* $\mathbf{u}$ *y los polinomios de Sobolev* $\{Q_n^\lambda\}_n$ *verifican la relación* (4.4)*,*

$$Q_{n+2}^\lambda(x) + c_{n-1}^\lambda Q_n^\lambda(x) = P_{n+2}(x) + \frac{n+2}{n} u_{n-1} P_n(x), \quad n \geq 1.$$

Entonces existe una sucesión $\{s_n\}_n$ *tal que*

$$\frac{P'_{n+2}(x)}{n+2} + u_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n} = R_{n+1}(x) + s_{n-1}R_{n-1}(x), \quad n \geq 3,$$

siendo $\{R_n\}_n$ *la SPOM asociada al funcional lineal* $\mathbf{v}$*.*

Demostración. A partir de (4.4) y teniendo en cuenta la definición del producto escalar de Sobolev, podemos deducir que para $0 \leq k \leq n-1$ se verifica

$$0 = \langle Q_{n+2}^\lambda + c_{n-1}^\lambda Q_n^\lambda, x^k \rangle_S = \lambda k \langle \mathbf{v}, x^{k-1}(P'_{n+2} + \frac{n+2}{n} u_{n-1} P'_n) \rangle.$$

Entonces se tiene

$$\langle \mathbf{v}, x^k (P'_{n+2} + \frac{n+2}{n} u_{n-1} P'_n) \rangle = 0, \quad 0 \leq k \leq n-2.$$

Esto implica que $P'_{n+2} + \frac{n+2}{n} u_{n-1} P'_n$ es cuasi–ortogonal de orden 2 respecto al funcional lineal $\mathbf{v}$, por lo que se puede escribir de la forma

$$P'_{n+2}(x) + \frac{n+2}{n} u_{n-1} P'_n(x) = (n+2)R_{n+1}(x) + \sigma_{n,n}R_n(x) + \sigma_{n,n-1}R_{n-1}(x),$$

con $\sigma_{n,n-1} \neq 0$. Además, por la paridad de los polinomios ha de ser $\sigma_{n,n} = 0$. Por tanto,

$$\frac{P'_{n+2}(x)}{n+2} + u_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n} = R_{n+1}(x) + \frac{\sigma_{n,n-1}}{(n+2)} R_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Así, deducimos el resultado tomando $s_{n-1} = \frac{\sigma_{n,n-1}}{n+2}$. □

Nota 4.1.5. Observamos que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente simétrico si y sólo si $s_n = 0$ para todo $n \geq 0$. En [10] y [9] podemos encontrar algunos ejemplos interesantes de pares de funcionales, que no forman un par coherente simétrico, para los que se verifica la relación (4.4).

A partir de esta propiedad, que es equivalente a (4.4), vamos a definir el concepto de coherencia simétrica generalizada.

Definición 4.1.6. *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *funcionales lineales simétricos y definidos positivos, diremos que* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *es un par coherente simétrico generalizado si existen sucesiones de números reales* $\{s_n\}_n$ *y* $\{u_n\}_n$*, con* $u_n \neq 0$ *para todo* $n \geq 0$*, tales que se verifica la relación*

$$R_{n+1} + s_{n-1}R_{n-1} = \frac{P'_{n+2}}{n+2} + u_{n-1}\frac{P'_n}{n}, \quad n \geq 1, \tag{4.7}$$

donde $\{P_n\}_n$ *y* $\{R_n\}_n$ *son las SPOM asociadas a* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$*, respectivamente.*

Como consecuencia, tenemos el siguiente teorema de caracterización:

Teorema 4.1.7. $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *es un par coherente simétrico generalizado si y sólo si se verifica* (4.4).

4.2 Condiciones necesarias de coherencia simétrica generalizada

En esta sección estableceremos condiciones necesarias para que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sea un par coherente simétrico generalizado. Concretamente, veremos que, bajo ciertas hipótesis adicionales, el funcional $\mathbf{v}$ tiene que ser semiclásico de clase menor o igual que 2.

Supondremos que $u_k \neq s_k$ para $k = 0, 1$. Concretamente se tiene el siguiente resultado, que se puede probar de forma análoga al Lema 3.1.6, pero en este caso, por la simetría de los funcionales y la paridad de los polinomios, hay que proceder de forma independiente para los polinomios de índice par e impar.

Lema 4.2.1. *Sea* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *un par coherente simétrico generalizado. Entonces, son equivalentes:*

i) $u_k \neq s_k$ *para* $k = 0, 1$.

ii) $(n+1)R_n \neq P'_{n-1}$ *para cada* $n \geq 2$.

Los resultados que se enuncian a continuación se pueden probar de forma similar a como se procedía en los Lemas 3.2.1 y 3.2.2 del Capítulo 3, teniendo en cuenta, en este caso, la simetría de los funcionales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, así como la paridad de los polinomios en las correspondientes SPOM.

Lema 4.2.2. *Para todo $m \geq 1$, existen constantes $A_{2m} \in \mathbb{R}$ tales que para los polinomios $r_{2m}(x) = R_{2m}(x) + A_{2m}$ se verifica $\langle r_{2m}\mathbf{v}, P'_{n+1}\rangle = 0$ para todo $n \geq 2m+1$. Como consecuencia,*

$$D[r_{2n}\mathbf{v}] + \phi_{2n+1}\mathbf{u} = 0, \quad n \geq 1, \tag{4.8}$$

con ϕ_{2n+1} un polinomio impar de grado $2n+1$.

El resultado análogo se sigue para los polinomios de grado impar.

Lema 4.2.3. *Para todo $m \geq 1$ existe una constante $A_{2m+1} \in \mathbb{R}$ tal que para el polinomio $r_{2m+1}(x) = R_{2m+1}(x) + A_{2m+1}R_1(x)$ se verifica $\langle r_{2m+1}\mathbf{v}, P'_{n+1}\rangle = 0$ para todo $n \geq 2m+2$. Como consecuencia, deducimos*

$$D[r_{2n+1}\mathbf{v}] + \phi_{2n+2}\mathbf{u} = 0, \quad n \geq 1, \tag{4.9}$$

siendo ϕ_{2n+2} un polinomio par de grado $2n+2$.

Teorema 4.2.4. *Sea $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ un par coherente simétrico generalizado. Se verifican las siguientes igualdades.*

$$A(x)D\mathbf{v} = B(x)\mathbf{u}, \quad B(x)\mathbf{v} = C(x)D\mathbf{v}, \quad xC(x)\mathbf{u} = xA(x)\mathbf{v}, \tag{4.10}$$

donde

$$A(x) = \frac{1}{x}[r'_4(x)r_2(x) - r_4(x)r'_2(x)] \tag{4.11}$$

es un polinomio par de grado 4,

$$B(x) = r'_2(x)\frac{\phi_5(x)}{x} - r'_4(x)\frac{\phi_3(x)}{x} \tag{4.12}$$

es un polinomio impar de grado menor o igual que 5,

$$C(x) = r_4(x)\frac{\phi_3(x)}{x} - r_2(x)\frac{\phi_5(x)}{x} \tag{4.13}$$

es un polinomio par de grado menor o igual que 6.

Demostración. A partir del Lema 4.2.2 con $n = 1, 2$, obtenemos el sistema de ecuaciones,

$$r'_2(x)\mathbf{v} + r_2(x)D\mathbf{v} + \phi_3(x)\mathbf{u} = 0, \qquad r'_4(x)\mathbf{v} + r_4(x)D\mathbf{v} + \phi_5(x)\mathbf{u} = 0.$$

Teniendo en cuenta la paridad de los polinomios, podemos escribir las ecuaciones anteriores en la forma,

$$x\frac{r'_2(x)}{x}\mathbf{v} + r_2(x)D\mathbf{v} + x\frac{\phi_3(x)}{x}\mathbf{u} = 0, \quad x\frac{r'_4(x)}{x}\mathbf{v} + r_4(x)D\mathbf{v} + x\frac{\phi_5(x)}{x}\mathbf{u} = 0.$$

Entonces, eliminando $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ y $D\mathbf{v}$ en las ecuaciones anteriores, obtenemos directamente las igualdades descritas en (4.10). $\square$

Dado que $A(x)$ y $C(x)$ son funciones pares y $B(x)$ es una función impar, entonces, salvo la raíz trivial $\xi = 0$ en el caso del polinomio $B(x)$, sus ceros aparecen de dos en dos, $\{-\xi, \xi\}$ con $\xi \in \mathbb{C}$.

En esta memoria analizaremos únicamente el caso en el que el polinomio $A(x)$ dado en el Teorema 4.2.4 tiene dos pares diferentes de ceros, esto es, $A(x) = 2(x^2 - \xi_1^2)(x^2 - \xi_2^2)$, con $\xi_1^2 \neq \xi_2^2$.

Probaremos en primer lugar varios lemas técnicos.

Lema 4.2.5. *Si el polinomio $r_2(x) = x^2 - a^2$ del Lema 4.2.2 divide al polinomio $A(x)$ del Teorema 4.2.4, entonces $A(x)$ tiene dos ceros dobles, $A(x) = 2(x^2 - a^2)^2$.*

Demostración. Por la paridad de los polinomios, podemos escribir $r_2(x) = x^2 - a^2$ y $r_4(x) = x^4 + b^2x^2 + c^2$. Entonces, de (4.11) tenemos,

$$A(x) = 2(x^4 - 2a^2x^2 - a^2b^2 - c^2).$$

Como por hipótesis $A(a) = 0$, entonces $a^4 + a^2b^2 + c^2 = 0$, de donde se sigue el resultado. □

Lema 4.2.6. *Para todo $n \geq 1$ se verifica*

$$\frac{r'_{2n}(x)}{x}C(x) + r_{2n}(x)\frac{B(x)}{x} + \frac{\phi_{2n+1}(x)}{x}A(x) = 0. \tag{4.14}$$

Demostración. Multiplicando por $B(x)$ en (4.8) obtenemos

$$r'_{2n}(x)B(x)\mathbf{v} + r_{2n}(x)B(x)D\mathbf{v} = -\phi_{2n+1}(x)B(x)\mathbf{u}.$$

Entonces, usando las dos primeras igualdades de (4.10) y teniendo en cuenta que $r'_{2n}(x)$, $B(x)$ y $\phi_{2n+1}(x)$ son polinomios impares, deducimos (4.14). □

Lema 4.2.7. *Sean $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$ los polinomios dados en el Teorema 4.2.4. Supongamos que existe $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $A(\xi) = 0$ y $\hat{B}(\xi) = 0$, siendo $\hat{B}(x)$ tal que $B(x) = x\hat{B}(x)$. Entonces, $C(\xi) = 0$.*

Demostración. Por ser $\phi_3(x)$ un polinomio impar, podemos escribirlo en la forma $\phi_3(x) = x\hat{\phi}_3(x)$. Además, $r'_2(x) = 2x$. Entonces, tomando $n = 1$ en (4.14),

$$2C(x) + r_2(x)\hat{B}(x) = -\hat{\phi}_3(x)A(x).$$

Finalmente, evaluando en ξ la anterior igualdad deducimos $C(\xi) = 0$. □

Lema 4.2.8. *Supongamos que* $A(x) = 2(x^2 - \xi_1^2)(x^2 - \xi_2^2)$*, con* $\xi_1^2 \neq \xi_2^2$*, y que existe* $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$ *tal que* $\hat{B}(\xi) \neq 0$*. Entonces* $C(\xi) \neq 0$ *y existe una constante* $K \neq 0$*, independiente de* n*, tal que*

$$r_{2n}(\xi) + K\frac{r'_{2n}(\xi)}{\xi} = 0, \quad n \geq 1. \tag{4.15}$$

Demostración. Observemos que, cuando $\xi = 0$, la expresión $\frac{r'_{2n}(\xi)}{\xi}$ se entiende como la evaluación del polinomio $\frac{r'_{2n}(x)}{x}$ en el punto ξ, que tiene sentido puesto que $r'_{2n}(x)$ es un polinomio impar.

Evaluando la ecuación (4.14) en ξ, obtenemos

$$\frac{r'_{2n}(\xi)}{\xi}C(\xi) + r_{2n}(\xi)\hat{B}(\xi) = 0, \quad n \geq 1.$$

En particular, para $n = 1$ tenemos que $\frac{r'_2(\xi)}{\xi}C(\xi) + r_2(\xi)\hat{B}(\xi) = 0$. Por otro lado, por el Lema 4.2.5 sabemos que ξ no puede ser un cero del polinomio r_2 y, puesto que $\frac{r'_2(x)}{x} = 2$, concluimos $C(\xi) \neq 0$. Finalmente, tomando

$$K = \frac{C(\xi)}{\hat{B}(\xi)}, \tag{4.16}$$

se sigue el resultado. □

Lema 4.2.9. *Si* $A(x) = 2(x^2 - \xi_1^2)(x^2 - \xi_2^2)$*, con* $\xi_1^2 \neq \xi_2^2$*, entonces existe* $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$ *tal que* $\hat{B}(\xi) = 0$*.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\hat{B}(\xi_j) \neq 0$ para $j = 1, 2$. Entonces, por el Lema 4.2.8 existen dos constantes $K_1, K_2 \neq 0$ tales que

$$r_{2n}(\xi_j) + K_j\frac{r'_{2n}(\xi_j)}{\xi_j} = 0, \quad j = 1, 2,$$

para todo $n \geq 1$.

Por otro lado, como R_{2n} son polinomios pares, podemos escribir $R_{2n}(x) = \tilde{R}_n(x^2)$. Entonces, teniendo en cuenta la definición de los polinomios $r_{2n}(x) = R_{2n}(x) + A_{2n}$, obtenemos

$$\tilde{R}_n(\xi_j^2) + A_{2n} + 2K_j\tilde{R}'_n(\xi_j^2) = 0, \quad j = 1, 2,$$

para todo $n \geq 1$. Por tanto,

$$\tilde{R}_n(\xi_1^2) + 2K_1\tilde{R}'_n(\xi_1^2) = \tilde{R}_n(\xi_2^2) + 2K_2\tilde{R}'_n(\xi_2^2), \quad n \geq 1.$$

y la igualdad es trivial para $n = 0$. Entonces, para todo polinomio $p \in \mathbb{P}$, se satisface

$$p(\xi_1^2) + 2K_1 p'(\xi_1^2) = p(\xi_2^2) + 2K_2 p'(\xi_2^2). \tag{4.17}$$

Para los ceros del polinomio A pueden aparecer cuatro situaciones diferentes:

1. $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$,
2. $\xi_1, \xi_2 \in i\mathbb{R}$,
3. $\xi_1 \in \mathbb{R}, \xi_2 \in i\mathbb{R}$,
4. $\xi_1 = \overline{\xi}_2 \in \mathbb{C} - \{\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}\}$.

Para los casos 1, 2 y 3 consideramos los polinomios $p(x) = (x - \xi_2^2)^n$. Entonces, la igualdad (4.17) nos da $\xi_1^2 = \xi_2^2$, que es una contradicción. Por otro lado, para el caso 4, como $\xi_2 = \overline{\xi}_1$, podemos calcular el valor de las constantes K_j según (4.16), de donde

$$K_2 = \frac{C(\xi_2)}{\hat{B}(\xi_2)} = \frac{C(\overline{\xi}_2)}{\hat{B}(\overline{\xi}_2)} = \overline{K}_1.$$

Por tanto, de (4.17) deducimos

$$p(\xi_1^2) + 2K_1 p'(\xi_1^2) \in \mathbb{R} \tag{4.18}$$

para todo polinomio $p \in \mathbb{P}$. Finalmente, consideramos los polinomios $p(x) = x^n$ en (4.18), con lo que deducimos $\xi_1^2 = 0$, que es de nuevo una contradicción.

Por tanto, la hipótesis $\hat{B}(\xi_j) \neq 0$ para $j = 1, 2$ no es válida y el lema queda probado. □

Pasemos ya a probar el teorema principal de esta sección. Estableceremos, bajo ciertas condiciones adicionales, que el segundo funcional de un par coherente simétrico generalizado tiene que ser un funcional semiclásico de clase menor o igual que 2.

Teorema 4.2.10. *Sea $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ un par coherente simétrico generalizado, esto es, las SPOM asociadas $\{P_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$ verifican la condición (4.7). Sea $A(x)$ el polinomio definido en el Teorema 4.2.4 y supongamos que tiene dos pares de ceros diferentes, $A(x) = 2(x^2 - \xi_1^2)(x^2 - \xi_2^2)$, con $\xi_1^2 \neq \xi_2^2$. Entonces, existen $\psi(x)$ un polinomio impar y $\phi(x)$ un polinomio par, con $\deg \psi \leq 3$ y $\deg \phi \leq 4$, tales que*

$$D[\phi \mathbf{v}] + \psi \mathbf{v} = 0.$$

Como consecuencia, $\mathbf{v}$ es un funcional lineal semiclásico de clase menor o igual que 2.

Además, se satisface la igualdad

$$x\phi(x)\mathbf{u} = x(x^2 - \xi^2)\mathbf{v}.$$

Demostración. Por las hipótesis sobre el polinomio $A(x)$ y teniendo en cuenta los lemas probados anteriormente, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que ξ_1 es un cero común de los polinomios $A(x), B(x)$ y $C(x)$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^2 - \xi_1^2)\tilde{A}(x), \\ B(x) &= (x^2 - \xi_1^2)\tilde{B}(x), \\ C(x) &= (x^2 - \xi_1^2)\tilde{C}(x), \end{aligned} \tag{4.19}$$

con $\deg \tilde{A} = 2$, $\deg \tilde{B} \leq 3$ y $\deg \tilde{C} \leq 4$, siendo $\tilde{A}$ y $\tilde{C}$ polinomios pares y $\tilde{B}$ un polinomio par. Entonces, podemos simplificar el factor $(x^2 - \xi_1^2)$ en (4.19) teniendo en cuenta (1.2) y, puesto que los funcionales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se anulan sobre los monomios de grado impar, se sigue

$$\tilde{A}(x)D\mathbf{v} = \tilde{B}(x)\mathbf{u} + M[\delta_{\xi_1} + \delta_{-\xi_1}], \tag{4.20}$$

$$\tilde{B}(x)\mathbf{v} = \tilde{C}(x)D\mathbf{v} + N[\delta_{\xi_1} + \delta_{-\xi_1}], \tag{4.21}$$

$$x\tilde{C}(x)\mathbf{u} = x\tilde{A}(x)\mathbf{v} + L[\delta_{\xi_1} + \delta_{-\xi_1}]. \tag{4.22}$$

Veamos que todas las masas de Dirac que aparecen en las identidades anteriores se anulan. Por un lado, como ξ_1 es cero común de los polinomios $A(x), B(x)$ y $C(x)$, podemos simplificar la ecuación (4.14) en la forma,

$$r'_{2n}(x)\tilde{C}(x) + r_{2n}(x)\tilde{B}(x) = -\phi_{2n+1}(x)\tilde{A}(x),$$

de donde, teniendo en cuenta el Lema 4.2.2, deducimos,

$$[r'_{2n}(x)\tilde{C}(x) + r_{2n}(x)\tilde{B}(x)]\mathbf{u} = [-\phi_{2n+1}(x)\tilde{A}(x)]\mathbf{u} = \tilde{A}(x)[r'_{2n}(x)\mathbf{v} + r_{2n}(x)D\mathbf{v}].$$

Reagrupando términos y tendiendo en cuenta la paridad de los polinomios podemos escribir la anterior igualdad en la forma

$$\frac{r'_{2n}(x)}{x}[x\tilde{C}(x)\mathbf{u} - x\tilde{A}(x)\mathbf{v}] = r_{2n}(x)[\tilde{A}(x)D\mathbf{v} - \tilde{B}(x)\mathbf{u}].$$

Entonces, simplificando el término de la derecha con (4.20) y el término de la izquierda con (4.22), obtenemos

$$L\frac{r'_{2n}(\xi_1)}{\xi_1} = Mr_{2n}(\xi_1). \tag{4.23}$$

En particular, para $n = 1$ tenemos $L\frac{r'_2(\xi_1)}{\xi_1} = Mr_2(\xi_1)$. Como por el Lema 4.2.5 sabemos que $\frac{r'_2(\xi_1)}{\xi_1} \neq 0$ y $r_2(\xi_1) \neq 0$, entonces de la ecuación anterior se sigue que $L = 0$ si y sólo si $M = 0$.

Por otro lado, para ξ_2 pueden ocurrir dos posibilidades: $C(\xi_2) = 0$ ó $C(\xi_2) \neq 0$.

Si $C(\xi_2) \neq 0$, por el Lema 4.2.7 podemos asegurar que estamos en las condiciones del Lema 4.2.8 y, por tanto, se verifica (4.15) para $\xi = \xi_2$. Si suponemos que $L, M \neq 0$, entonces de (4.23) se sigue (4.15) para $\xi = \xi_1$. Siguiendo el mismo procedimiento que en la demostración del Lema 4.2.9, deducimos $\xi_1^2 = \xi_2^2$, lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto, en este caso ha de ser $L = M = 0$ en (4.20) y (4.22).

En caso que $C(\xi_2) = 0$, procediendo de forma similar, obtenemos la relación análoga a (4.23) para ξ_2,

$$\tilde{L}\frac{r'_{2n}(\xi_2)}{\xi_2} = \tilde{M} r_{2n}(\xi_2),$$

siendo $\tilde{L} = 0$ si y sólo si $\tilde{M} = 0$. Análogamente a como hicimos en el Lema 4.2.9, deducimos que al menos una de las relaciones tiene que ser trivial, esto es, bien $L = M = 0$, o bien $\tilde{L} = \tilde{M} = 0$.

Podemos suponer por tanto, sin pérdida de generalidad, que $L = M = 0$ en (4.20) y (4.22). En particular, (4.22) con $L = 0$ prueba la segunda parte del teorema, tomando $\phi(x) = \tilde{C}(x)$ y $x^2 - \xi^2 = \tilde{A}(x)$.

Para ver que $N = 0$, consideremos (4.8) y (4.14) para $n = 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{C}(x)\phi_3(x)\mathbf{u} &= -\tilde{C}(x)\Big[r'_2(x)\mathbf{v} + r_2(x)D\mathbf{v}\Big] \\ &= \Big[\phi_3(x)\tilde{A}(x) + r_2(x)\tilde{B}(x)\Big]\mathbf{v} - \tilde{C}(x)r_2(x)D\mathbf{v}, \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\phi_3(x)}{x}[x\tilde{C}(x)\mathbf{u} - x\tilde{A}(x)\mathbf{v}] = r_2(x)[\tilde{B}(x)\mathbf{v} - \tilde{C}(x)D\mathbf{v}],$$

de donde, teniendo en cuenta (4.21) y (4.22) con $L = 0$, se deduce $Nr_2(\xi_1) = 0$. Finalmente, como $r_2(\xi_1) \neq 0$, tenemos $N = 0$.

Finalmente, de (4.21) con $N = 0$ se tiene

$$D[\tilde{C}\mathbf{v}] + (\tilde{C}' - \tilde{B})\mathbf{v} = 0,$$

donde $\deg \tilde{C} \leq 4$ y $\deg(\tilde{C}' - \tilde{B}) \leq 3$. Esto prueba la primera parte del teorema, con $\phi(x) = \tilde{C}(x)$, como habíamos notado antes, y $\psi(x) = \tilde{C}'(x) - \tilde{B}(x)$. □

4.2.1 Algunos ejemplos de pares coherentes simétricos generalizados

En esta parte del capítulo vamos a describir algunos ejemplos de pares coherentes simétricos generalizados. Concretamente, vamos a describir los pares que corresponden a la situación descrita en el Teorema 4.2.10, siendo $\mathbf{v}$ un funcional simétrico semiclásico de clase 1.

Recordemos que, según las condiciones de dicho teorema, $\mathbf{v}$ es un funcional simétrico, semiclásico de clase menor o igual que 2, verificando la ecuación diferencial

$$D[\phi(x)\mathbf{v}] + \psi(x)\mathbf{v} = 0, \tag{4.24}$$

siendo $\phi \in \mathbb{P}_4$ un polinomio par y $\psi \in \mathbb{P}_3$ un polinomio impar. Además, sabemos que se verifican las ecuaciones

$$(x^2 - \xi^2)D\mathbf{v} + \varphi(x)\mathbf{u} = 0, \tag{4.25}$$

$$x(x^2 - \xi^2)\mathbf{v} = x\phi(x)\mathbf{u}, \tag{4.26}$$

con $\xi^2 \in \mathbb{R}$ y donde $\varphi(x) = \psi(x) + \phi'(x) \in \mathbb{P}_3$ es un polinomio impar.

En tal caso, se pueden presentar tres situaciones diferentes.

1. Si la ecuación (4.24) no se puede simplificar, entonces, en virtud del Lema 2.2.5, el funcional $\mathbf{v}$ es clásico o semiclásico de clase 2. Observamos que sólo se pueden dar estas situaciones por la paridad de los polinomios ϕ y ψ.

2. Si $\phi(0) = 0$ y el monomio x se puede simplificar en (4.24), entonces $\mathbf{v}$ es un funcional semiclásico de clase 1.

3. Si (4.24) se puede reducir dos grados, entonces $\mathbf{v}$ es un funcional de momentos clásico.

En esta memoria vamos a estudiar, a modo de ejemplo y siguiendo un argumento similar al del capítulo anterior, el caso en el que la ecuación (4.24) se puede reducir un grado y, por tanto, el funcional lineal $\mathbf{v}$ es semiclásico de clase 1.

Supongamos que $\mathbf{v}$ es de clase 1, con ecuación de Pearson asociada

$$\Phi(x)D\mathbf{v} + \tilde{\varphi}(x)\mathbf{v} = 0, \tag{4.27}$$

siendo $\Phi \in \mathbb{P}_3$ un polinomio impar tal que $\phi(x) = x\Phi(x)$ y $\tilde{\varphi} \in \mathbb{P}_2$ un polinomio par tal que $\varphi(x) = x\tilde{\varphi}(x)$.

Vamos a ver que, en este caso, el factor x se puede simplificar en la igualdad (4.26).

Vimos en el Capítulo 2 que los funcionales lineales simétricos definidos positivos de clase 1 admiten una representación integral en la forma

$$\langle \mathbf{v}, p \rangle = \int_{-a}^{a} p(x)\omega(x)dx,$$

siendo ω una función peso simétrica y no negativa en $[-a,a]$. Además, ω verifica la ecuación diferencial $\Phi(x)\omega'(x)+\tilde{\varphi}(x)\omega(x)=0$.

Entonces, reescribimos (4.26) como $x(x^2-\xi^2)\mathbf{v}=x^2\Phi(x)\mathbf{u}$, y teniendo en cuenta la simetría podemos expresar el funcional $\mathbf{u}$ en la forma,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u},p\rangle &= \int_{-a}^{a} p(x)(x^2-\xi^2)\frac{\omega(x)}{x\Phi(x)}dx+M_1p(0)+M_2p''(0)\\ &\quad +M_3[p(z_0)+p(-z_0)],\end{aligned}$$

siendo $M_3=0$ si $\Phi(x)=x$, y $M_3\geq 0$ si $\Phi(x)=x(x^2-z_0^2)$. Observamos que la derivada segunda del funcional Delta de Dirac en el origen aparece dado que estamos multiplicando el funcional $\mathbf{v}$ por x^{-3}. La simetría hace que la masa de la primera derivada en el origen se anule.

Por otro lado, integrando por partes podemos calcular,

$$\begin{aligned}&\langle (x^2-\xi^2)D\mathbf{v},p\rangle =\\ &\quad=\int_{-a}^{a} p(x)(x^2-\xi^2)\frac{x\Phi(x)\omega'(x)}{x\Phi(x)}dx=-\int_{-a}^{a} p(x)(x^2-\xi^2)\frac{x\tilde{\varphi}(x)\omega(x)}{x\Phi(x)}dx\\ &\quad=-\langle \mathbf{u},\varphi p\rangle+M_1(\varphi p)(0)+M_2(\varphi p)''(0)+M_3[(\varphi p)(z_0)+(\varphi p)(-z_0)].\end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta (4.25) y la simetría de φ, dedudimos

$$2M_2\varphi'(0)p'(0)+M_3[\varphi(z_0)p(z_0)+\varphi(-z_0)p(-z_0)]=0,$$

para todo $p\in\mathbb{P}$.

Observamos que $M_2=0$ puesto que $\varphi'(0)\neq 0$. En efecto, si fuese $\varphi'(0)=0$, entonces sería $\tilde{\varphi}(x)=x^2$, y por la simetría, la ecuación de Pearson (4.27) se podría reducir un grado. Pero esto no es posible puesto que estamos suponiendo que $\mathbf{v}$ es de clase 1.

En definitiva, hemos puesto de manifiesto que para los pares en los que $\mathbf{v}$ es semiclásico de clase 1, en la relación (4.26) siempre se puede simplificar el factor x sin que aparezca la masa de Dirac en el origen. Además, si Φ y φ no tienen ceros comunes distintos de cero, entonces tenemos $M_3=0$.

Por tanto, teniendo en cuenta los funcionales simétricos semiclásicos de clase 1 descritos en el Capítulo 2, tenemos los siguientes pares asociados a $\mathbf{v}$ de clase 1.

- Gegenbauer generalizado:

$$\text{I.}\quad\begin{cases}\langle \mathbf{u},p\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)(x^2-\xi^2)|x|^{\alpha-2}(1-x^2)^{\lambda-3/2}dx+Mp(0),\\ \langle \mathbf{v},p\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)|x|^{\alpha}(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx,\end{cases}$$

con $\lambda > 1/2$, $\alpha > 1$ y $M \geq 0$.

$$\text{II.} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)|x|^{\alpha-2}dx + Mp(0) + N[p(1) + p(-1)], \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)|x|^{\alpha}dx, \end{cases}$$

con $\alpha > 1$ y $M, N \geq 0$. Observamos que, para evitar singularidades, en este caso tiene que ser $\xi = 1$.

- Hermite–Chihara:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}, p \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)(x^2 - \xi^2)|x|^{\alpha-2}e^{-x^2}dx + Mp(0), \\ \langle \mathbf{v}, p \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)|x|^{\alpha}e^{-x^2}dx, \end{cases}$$

con $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ y $M \geq 0$.

A continuación, comprobamos que en todos los casos tenemos, efectivamente, pares coherentes simétricos generalizados, es decir, se verifica la relación (4.7) entre las correspondientes SPOM.

Tenemos $\mathbf{u}$ un funcional lineal simétrico y semiclásico de clase 1, con $\Phi(x)$ el polinomio en la correspondiente ecuación de Pearson. Concretamente, Φ es impar de grado 1 ó 3. Además, se tiene la igualdad $x\Phi(x)\mathbf{u} = (x^2 - \xi^2)\mathbf{v}$, siendo $\xi = 1$ en el caso II. Consideramos un funcional lineal $\mathbf{w}$ tal que $\mathbf{w} = x\Phi(x)\mathbf{u} = (x^2 - \xi^2)\mathbf{v}$, que es un funcional regular y semiclásico de clase 1. Llamemos $\{S_n\}_n$ la SPOM asociada.

Por un lado, de la igualdad $\mathbf{w} = x\Phi(x)\mathbf{u}$ y teniendo en cuenta el Lema 2.2.6, podemos deducir que las derivadas de P_n son cuasi–ortogonales de orden 2 con respecto a $\mathbf{w}$, y se verifica la relación

$$\frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} = S_n(x) + \eta_{n-2}S_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

con $\eta_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Por otro lado, de la segunda igualdad, $\mathbf{w} = (x^2 - \xi^2)\mathbf{v}$, y teniendo en cuenta la paridad de los polinomios, podemos deducir

$$R_n(x) = S_n(x) + \tilde{\eta}_{n-2}S_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

con $\tilde{\eta}_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Entonces, siguiendo un procedimiento análogo al que seguíamos en la página 53 en la comprobación de la condición suficiente para P.5–P.9, podemos concluir la relación (4.7) para estos tres pares, y por tanto tenemos que son pares coherentes simétricos generalizados.

4.3 Pares coherentes simétricos generalizados de tipo I: el caso clásico

En esta última sección del capítulo estudiaremos los pares coherentes simétricos generalizados $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, cuyo primer funcional de momentos, $\mathbf{u}$, es clásico, esto es, el funcional clásico de Hermite o el de Gegenbauer. En este caso haremos un estudio de los coeficientes en la relación de recurrencia para la familia de polinomios asociados al segundo funcional, $\mathbf{v}$.

Para ello, consideremos $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ un par coherente simétrico generalizado, tal que el funcional $\mathbf{u}$ es clásico. Sea $D[\Phi\, \mathbf{u}] + \Psi\, \mathbf{u} = 0$ la ecuación de Pearson asociada a $\mathbf{u}$, con Φ un polinomio par de grado menor o igual que 2, y $\Psi(x) = x$. Además, es conocido que los polinomios

$$T_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1}, \quad n \geq 0,$$

constituyen una sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto al funcional de momentos $\mathbf{w} = \Phi(x)\, \mathbf{u}$, que es de nuevo un funcional de momentos clásico y simétrico. Entonces la relación (4.7) es equivalente a

$$T_n + u_{n-2} T_{n-2} = R_n + s_{n-2} R_{n-2}, \quad n \geq 2. \tag{4.28}$$

Observamos que, si establecemos $u_{-2} = u_{-1} = s_{-2} = s_{-1} = 0$ entonces, por la simetría de los polinomios, la igualdad anterior es trivialmente válida para todo $n \geq 0$.

Como ponemos de manifiesto en el siguiente lema, para evitar casos triviales, supondremos a partir de ahora que $u_0 \neq s_0$ y $u_1 \neq s_1$, que es una condición equivalente al hecho de que $R_n(x) \neq T_n(x)$ para todo $n \geq 2$.

Lema 4.3.1. *Sean $\{T_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$ dos sucesiones de polinomios mónicos ortogonales con respecto a funcionales simétricos $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$, respectivamente. Supongamos, además, que existen sucesiones $\{u_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$, con $u_n \neq 0$, para las que se verifica la relación* (4.28)*. Entonces,*

i) si $u_0 = s_0$ entonces, $R_n(x) = T_n(x)$ y $u_n = s_n$ para todo $n \geq 0$,

ii) si $u_0 \neq s_0$ y $u_1 \neq s_1$, entonces $R_n(x) \neq T_n(x)$ para todo $n \geq 2$,

iii) si $u_0 \neq s_0$ pero $u_1 = s_1$, entonces $R_{2n}(x) \neq T_{2n}(x)$ para cada $n \geq 1$ y $R_3(x) = T_3(x)$. Además, si existe algún $n_0 > 1$ tal que $R_{2n_0+1}(x) \neq T_{2n_0+1}(x)$, entonces $R_{2n+1}(x) \neq T_{2n+1}(x)$ para todo $n > n_0$.

Demostración. Como estamos suponiendo hasta ahora, los funcionales $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ están normalizados de forma que $\langle \mathbf{w}, 1\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{v}, 1\rangle = 1$. Entonces, aplicando ambos funcionales a la ecuación (4.28) obtenemos

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{w}, R_n\rangle = -s_{n-2}\,\langle \mathbf{w}, R_{n-2}\rangle,\ n \geq 3, && \langle \mathbf{w}, R_2\rangle = u_0 - s_0, && \langle \mathbf{w}, R_1\rangle = 0,\\ &\langle \mathbf{v}, T_n\rangle = -u_{n-2}\,\langle \mathbf{v}, T_{n-2}\rangle,\ n \geq 3, && \langle \mathbf{v}, T_2\rangle = s_0 - u_0, && \langle \mathbf{v}, T_1\rangle = 0. \end{aligned}$$

i) Si $u_0 = s_0$, de las relaciones anteriores deducimos $\langle \mathbf{w}, R_n\rangle = 0$ y $\langle \mathbf{v}, T_n\rangle = 0$ para cada $n \geq 1$. Por tanto $R_n(x) = T_n(x)$ para todo $n \geq 0$. Además, es fácil ver que en esta situación tenemos $u_n = s_n$ para cada $n \geq 0$.

ii) Supongamos que $u_0 \neq s_0$ y $u_1 \neq s_1$. En primer lugar, mostraremos que los polinomios de grado par son diferentes. Esto es, $T_{2n}(x) \neq R_{2n}(x)$ para $n \geq 1$. Si, por el contrario, existe algún $n_0 \geq 1$ tal que $R_{2n_0}(x) = T_{2n_0}(x)$, entonces (4.28) implica que $u_{2n_0-2}T_{2n_0-2}(x) = s_{2n_0-2}R_{2n_0-2}(x)$. Como $u_{2n_0-2} \neq 0$, entonces tiene que ser $u_{2n_0-2} = s_{2n_0-2}$ y $R_{2n_0-2}(x) = T_{2n_0-2}(x)$. Repitiendo de nuevo el mismo razonamiento para $n_0 - 1$, y así sucesivamente, llegaríamos a $u_0 = s_0$, lo que contradice la hipótesis, y por tanto tenemos $T_{2n}(x) \neq R_{2n}(x)$ para $n \geq 1$.

De forma análoga vemos que $T_{2n+1}(x) \neq R_{2n+1}(x)$ para todo $n \geq 1$. Si existiera $n_0 \geq 1$ tal que $R_{2n_0+1}(x) = T_{2n_0+1}(x)$, aplicando el mismo razonamiento anterior tendría que ser $u_1 = s_1$, lo que nos lleva de nuevo a una contradicción. Por tanto se tiene que $R_n(x) \neq T_n(x)$ para todo $n \geq 2$.

iii) Como por hipótesis $u_0 \neq s_0$, el mismo razonamiento anterior nos permite probar que $T_{2n}(x) \neq R_{2n}(x)$ para $n \geq 1$. Para los polinomios de orden impar, como $u_1 = s_1$, entonces por (4.28) tenemos directamente que $R_3(x) = T_3(x)$. Supongamos ahora, por reducción al absurdo, que existe un natural $n_0 > 2$ tal que $R_{2n_0-1}(x) \neq T_{2n_0-1}(x)$ y $R_{2n_0+1}(x) = T_{2n_0+1}(x)$. Entonces, por (4.28) tenemos $u_{2n_0-1}T_{2n_0-1}(x) = s_{2n_0-1}R_{2n_0-1}(x)$, y esto es una contradicción con la hipótesis de que los coeficientes u_n son no nulos. $\square$

4.3.1 Sobre los coeficientes de recurrencia para $\{R_n\}_n$

Sean $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ funcionales lineales simétricos, definidos positivos, y denotemos por $\{T_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$ las correspondientes SPOM. Supongamos que se verifica la relación (4.28) con $\{u_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$ sucesiones de números reales no nulos tales que $u_k \neq s_k$ para $k = 0, 1$.

Denotemos por γ_n y $\tilde{\gamma}_n$ los coeficientes de la RRTT para $\{T_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$, respectivamente. Esto es,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= xT_n(x) - \gamma_n T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,\\ R_{n+1}(x) &= xR_n(x) - \tilde{\gamma}_n R_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$ para la primera y $R_0(x) = 1$ y $R_1(x) = x$ para la segunda. Además, por ser $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ definidos positivos, tienen que ser $\gamma_n > 0$ y $\tilde{\gamma}_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

En el planteamiento general del problema, estamos suponiendo que $\mathbf{w}$ es un funcional clásico y simétrico. Entonces, $\{T_n\}_n$ es, o bien la SPOM clásica de Hermite o la de Gegenbauer, con lo que los coeficientes de recurrencia para estos polinomios son conocidos. En este apartado haremos un estudio de los coeficientes $\tilde{\gamma}_n$ en la RRTT para $\{R_n\}_n$. Concretamente, daremos un método para calcular éstos en términos de los coeficientes γ_n, supuestos conocidos los parámetros $\{u_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$ de la relación (4.28).

Combinando las RRTT que satisfacen $\{R_n\}_n$ y $\{T_n\}_n$ con la ecuación (4.28) y simplificando de forma apropiada obtenemos

$$\begin{aligned}(\gamma_n + u_{n-2} - u_{n-1})T_{n-1}(x) &+ u_{n-2}\gamma_{n-2}T_{n-3}(x) \\ &= (\tilde{\gamma}_n + s_{n-2} - s_{n-1})R_{n-1}(x) + s_{n-2}\tilde{\gamma}_{n-2}R_{n-3}(x), \quad n \geq 3. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Entonces, teniendo en cuenta el carácter mónico de $\{T_n\}_n$ y $\{R_n\}_n$, igualamos los coeficientes del término de mayor grado en cada miembro de la igualdad para deducir,

$$\gamma_n + u_{n-2} - u_{n-1} = \tilde{\gamma}_n + s_{n-2} - s_{n-1}, \quad n \geq 3,$$

y en virtud del Lema 4.3.1, como $T_n(x) \neq R_n(x)$ para $n \geq 2$, entonces cada miembro en la anterior igualdad ha de ser no nulo para $n \geq 5$.

Por tanto, en esta situación podemos reescribir (4.29) en la forma

$$T_{n-1}(x) + \frac{u_{n-2}\gamma_{n-2}}{\gamma_n + u_{n-2} - u_{n-1}}T_{n-3}(x) = R_{n-1}(x) + \frac{s_{n-2}\tilde{\gamma}_{n-2}}{\tilde{\gamma}_n + s_{n-2} - s_{n-1}}R_{n-3}(x),$$

para $n \geq 5$. Usamos de nuevo (4.28) para sustituir T_{n-1} y así obtenemos

$$\Big(\frac{u_{n-2}\gamma_{n-2}}{\gamma_n + u_{n-2} - u_{n-1}} - u_{n-3}\Big)T_{n-3}(x) = \Big(\frac{s_{n-2}\tilde{\gamma}_{n-2}}{\tilde{\gamma}_n + s_{n-2} - s_{n-1}} - s_{n-3}\Big)R_{n-3}(x), \; n \geq 5,$$

de donde deducimos, en virtud del Lema 4.3.1,

$$\frac{u_{n-2}\gamma_{n-2}}{\gamma_n + u_{n-2} - u_{n-1}} - u_{n-3} = \frac{s_{n-2}\tilde{\gamma}_{n-2}}{\tilde{\gamma}_n + s_{n-2} - s_{n-1}} - s_{n-3} = 0, \quad n \geq 5.$$

En resumen, hemos probado que las sucesiones de parámetros $\{u_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$ están relacionadas con los coeficientes de recurrencia $\{\gamma_n\}_n$ y $\{\tilde{\gamma}_n\}_n$ mediante

$$\gamma_n + u_{n-2} - u_{n-1} = \tilde{\gamma}_n + s_{n-2} - s_{n-1}, \quad n \geq 2, \tag{4.30}$$

$$u_{n-2}\gamma_{n-2} = u_{n-3}(\gamma_n + u_{n-2} - u_{n-1}), \quad n \geq 5, \tag{4.31}$$

$$s_{n-2}\tilde{\gamma}_{n-2} = s_{n-3}(\tilde{\gamma}_n + s_{n-2} - s_{n-1}), \quad n \geq 5. \tag{4.32}$$

Observemos que si imponemos $u_{-1} = s_{-1} = 0$ y $\gamma_0 = \tilde{\gamma}_0 = 0$, entonces (4.31) y (4.32) son trivialmente ciertas para $n = 2$. Además, si (4.30) no se anula para $n = 3, 4$, entonces (4.31) y (4.32) son ciertas para todo $n \geq 2$.

Si ahora dividimos (4.31) entre (4.32), tenemos

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{s_{n-1}}{s_n} \gamma_n, \quad n \geq 3, \tag{4.33}$$

donde hemos usado (4.30) para simplificar los cálculos.

Por otro lado, es fácil comprobar que $\gamma_1 - u_0 = \tilde{\gamma}_1 - s_0$. Entonces, usando de nuevo (4.30) podemos calcular

$$\sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k - u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{\gamma}_k - s_{n-1}$$

para $n \geq 0$.

Una vez que hemos expresado los coeficientes de recurrencia $\tilde{\gamma}_n$ en términos de $\{u_n\}_n$, $\{s_n\}_n$ y $\{\gamma_n\}_n$, ya sólo queda estudiar las propiedades de las sucesiones $\{u_n\}_n$ y $\{s_n\}_n$.

A partir de (4.31) podemos identificar la sucesión $\{u_n\}_n$ como solución de una ecuación en diferencias no lineal. El resto de la sección lo dedicaremos al estudio de propiedades de las soluciones para dicha ecuación en diferencias.

Proposición 4.3.2. *Sea $\{u_n\}_n$ una solución de la ecuación en diferencias* (4.31)*. Entonces, también es solución de la ecuación en diferencias siguiente:*

$$u_{n+1} + \frac{\gamma_n \gamma_{n+1}}{u_{n-1}} = \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} - A, \quad n \geq 3, \tag{4.34}$$

donde $A = (u_3 - \gamma_4)(\gamma_3/u_2 - 1)$.

Demostración. De (4.31) podemos escribir la diferencia $u_{n+1} - u_n$ en términos de u_n y u_{n-1},

$$u_{n+1} - u_n = \gamma_{n+2} - \frac{u_n}{u_{n-1}} \gamma_n, \quad n \geq 3.$$

Sumamos entonces desde $k = 3$ hasta $k = n$ y obtenemos

$$u_{n+1} - u_3 = \sum_{k=3}^{n} \gamma_{k+2} - \sum_{k=3}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} \gamma_k, \quad n \geq 3. \tag{4.35}$$

Por otro lado, también de (4.31) podemos expresar el cociente u_k/u_{k-1} de la forma

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{\gamma_{k+1}}{u_{k-1}} - \frac{\gamma_{k-1}}{u_{k-2}} + 1, \quad n \geq 4.$$

Por lo tanto, podemos calcular la suma (4.35) para $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_3 &= \sum_{k=3}^{n} \gamma_{k+2} - \frac{u_3\gamma_3}{u_2} - \sum_{k=4}^{n} \left[\frac{\gamma_k\gamma_{k+1}}{u_{k-1}} - \frac{\gamma_{k-1}\gamma_k}{u_{k-2}} + \gamma_k\right] \\ &= \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} - \gamma_4 - \frac{\gamma_n\gamma_{n+1}}{u_{n-1}} + \frac{\gamma_3\gamma_4}{u_2} - \frac{\gamma_3 u_3}{u_2}, \quad n \geq 4. \end{aligned}$$

Además, la anterior igualdad para $n = 3$ es exactamente (4.31) con $n = 5$. De esta manera, obtenemos la ecuación en diferencias (4.34) tomando como A el término independiente de n en la anterior igualdad, cambiado de signo,

$$A = -u_3 + \frac{\gamma_3 u_3}{u_2} - \frac{\gamma_3\gamma_4}{u_2} + \gamma_4 = (u_3 - \gamma_4)(\gamma_3/u_2 - 1).$$

□

Esta ecuación en diferencias nos permitirá obtener interesantes propiedades de la sucesión de coeficientes $\{u_n\}_n$. Concretamente, si expresamos u_n como una función racional en la variable A, entonces (4.34) se transformará en una ecuación en diferencias lineal que verifican los elementos involucrados en la expresión de u_n como función racional.

Teorema 4.3.3. *Sea $\{u_n\}_n$ una sucesión que es solución de la ecuación en diferencias* (4.34)*. Entonces existen dos sucesiones $\{r_n\}_n$ y $\{q_n\}_n$, que son soluciones de las ecuaciones en diferencias lineales siguientes,*

$$\begin{aligned} &A r_{n-1} = r_n + [\gamma_{2n+3} + \gamma_{2n+4}]\, r_{n-1} + \gamma_{2n+2}\gamma_{2n+3}\, r_{n-2}, \quad n \geq 1, \\ &\quad r_{-1} = -1/u_3, \quad r_0 = 1, \\ &A q_n = q_{n+1} + [\gamma_{2n+4} + \gamma_{2n+5}]\, q_n + \gamma_{2n+3}\gamma_{2n+4}\, q_{n-1}, \quad n \geq 0, \\ &\quad q_{-1} = -1/u_2, \quad q_0 = 1, \end{aligned} \tag{4.36}$$

tales que los coeficientes u_n se pueden expresar como cociente de dos términos consecutivos en la forma,

$$u_{2n+3} = -\frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad u_{2n+2} = -\frac{q_n}{q_{n-1}}, \quad n \geq 0.$$

Además, considerando $\{r_n\}_n$ y $\{q_n\}_n$ como funciones en la variable A, constituyen sendos sistemas de polinomios ortogonales mónicos en esta variable.

Demostración. Definimos las sucesiones $\{r_n\}_n$ y $\{q_n\}_n$ de forma recursiva mediante las ecuaciones

$$r_{n-1}u_{2n+3} = -r_n, \quad q_{n-1}u_{2n+2} = -q_n, \quad n \geq 0,$$

con condiciones iniciales $r_{-1} = -1/u_3$ y $q_{-1} = -1/u_2$.

Entonces, considerando la relación (4.34) para índices par e impar, respectivamente, vemos que las sucesiones $\{r_n\}_n$ y $\{q_n\}_n$ verifican las relaciones anunciadas (4.36).

Además, de su definición se sigue que

$$r_1 = A - \gamma_5 - \gamma_6 + \gamma_4\gamma_5/u_3, \quad q_1 = A - \gamma_4 - \gamma_5 + \gamma_3\gamma_4/u_2,$$

son polinomios mónicos en la variable A de grado 1, y como $r_0 = q_0 = 1$, de (4.36) podemos concluir que r_n y q_n son polinomios mónicos en la variable A con $\deg r_n = n$ y $\deg q_n = n$. Además, como en (4.36) tanto $\gamma_{2n+2}\gamma_{2n+3}$ como $\gamma_{2n+3}\gamma_{2n+4}$ son constantes positivas, el Teorema de Favard (Teorema 1.1.17) nos garantiza que ambas son sucesiones de polinomios en la variable A ortogonales con respecto a cierto funcional lineal, que es definido positivo. $\square$

Como consecuencia del Teorema 4.3.3, veremos que las sucesiones $\{r_n\}_n$ y $\{q_n\}_n$ son polinomios co–recursivos de los polinomios asociados de una sucesión dada de polinomios ortogonales. Antes de continuar, recordemos los conceptos de polinomios asociados y polinomios co–recursivos.

Definición 4.3.4. *Sea $\{P_n\}_n$ una SPOM verificando la RRTT*

$$\begin{aligned} &xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,\\ &P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \beta_0. \end{aligned}$$

Decimos que $\{P_n^{(k)}\}_n$ son los polinomios asociados de orden k de la familia de polinomios ortogonales $\{P_n\}_n$ si verifican la RRTT

$$\begin{aligned} &xP_n^{(k)}(x) = P_{n+1}^{(k)}(x) + \beta_{n+k} P_n^{(k)}(x) + \gamma_{n+k} P_{n-1}^{(k)}(x), \quad n \geq 1,\\ &P_0(x)^{(k)} = 1, \quad P_1^{(k)}(x) = x - \beta_k. \end{aligned}$$

Decimos que $\{P_n(x;c)\}_n$ son los polinomios co–recursivos de la familia de polinomios ortogonales $\{P_n\}_n$ si verifican la RRTT

$$\begin{aligned} &xP_n(x;c) = P_{n+1}(x;c) + \beta_n P_n(x;c) + \gamma_n P_{n-1}(x;c), \quad n \geq 1,\\ &P_0(x;c) = 1, \quad P_1(x;c) = x - (\beta_0 + c). \end{aligned}$$

Corolario 4.3.5. *Sea $\{T_n\}_n$ la SPOM asociada al funcional lineal simétrico y definido positivo* $\mathbf{w}$ *verificando la RRTT*

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - \gamma_n T_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

con condiciones iniciales $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. Sean $\{S_n\}_n$ y $\{Q_n\}_n$ las SPOM que nos da el Lema 2.2.4 tales que

$$T_{2n}(x) = S_n(x^2), \quad T_{2n+1}(x) = xQ_n(x^2), \quad n \geq 0. \tag{4.37}$$

Entonces, las sucesiones $\{q_n\}_n$ y $\{r_n\}_n$ descritas en el teorema anterior son los polinomios co–recursivos de los polinomios asociados de orden 2 de las sucesiones $\{S_n\}_n$ y $\{Q_n\}_n$, respectivamente.

Demostración. En primer lugar, consideremos las RRTT para las SPOM $\{S_n\}_n$ y $\{Q_n\}_n$,

$$xS_n(x) = S_{n+1}(x) + a_nS_n(x) + b_nS_{n-1}(x),\ n \geq 1, \tag{4.38}$$
$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + \tilde{a}_nQ_n(x) + \tilde{b}_nQ_{n-1}(x),\ n \geq 1, \tag{4.39}$$

con b_n y $\tilde{b}_n$ positivos.

Escribiendo (4.38) evaluada en x^2, sustituyendo (4.37) y teniendo en cuenta la RRTT de $\{T_n\}_n$, para los polinomios de orden par obtenemos,

$$\begin{aligned} T_{2n+2}(x) + [\gamma_{2n} + \gamma_{2n+1}]T_{2n}(x) + \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}T_{2n-2}(x) = \\ = T_{2n+2}(x) + a_nT_{2n}(x) + b_nT_{2n-2}(x), \end{aligned}$$

para $n \geq 1$. Por lo tanto, comparando coeficientes, deducimos que los coeficientes de recurrencia para $\{S_n\}_n$ se pueden poner como suma y producto de los coeficientes de recurrencia para $\{R_n\}_n$, en la forma,

$$a_n = \gamma_{2n} + \gamma_{2n+1}, \quad b_n = \gamma_{2n-1}\gamma_{2n}, \quad n \geq 1.$$

Finalmente, comparando con la segunda ecuación de (4.36) y teniendo en cuenta las condiciones iniciales para estos polinomios, deducimos que $\{q_n\}_n$ son los polinomios co–recursivos de los polinomios asociados de orden 2 de la familia $\{S_n\}_n$.

De forma análoga, escribiendo (4.39) evaluada en x^2 y multiplicando por x obtenemos

$$\begin{aligned} T_{2n+3}(x) + [\gamma_{2n+1} + \gamma_{2n+2}]T_{2n+1}(x) + \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}T_{2n-1}(x) = \\ = T_{2n+3}(x) + \tilde{a}_nT_{2n+1}(x) + \tilde{b}_nT_{2n-1}(x), \end{aligned}$$

para $n \geq 1$. Entonces, los coeficientes de recurrencia para $\{Q_n\}_n$ son

$$\tilde{a}_n = \gamma_{2n+1} + \gamma_{2n+2}, \quad \tilde{b}_n = \gamma_{2n}\gamma_{2n+1}, \quad n \geq 1.$$

Finalmente, comparando con la primera ecuación de (4.36) podemos concluir que $\{r_n\}_n$ son los polinomios co–recursivos de los polinomios asociados de orden 2 de $\{Q_n\}_n$. □

Veremos en la Sección 4.3.3 que en algunos casos particulares estas familias de polinomios ortogonales pueden ser identificadas explícitamente.

Entonces podemos calcular los coeficientes u_n para $n \geq 4$, una vez determinados los valores para u_2 y u_3 que, a su vez, vienen determinados a partir de u_0 y u_1 teniendo en cuenta (4.30) y (4.31). Concretamente, hay diferentes posibilidades según se anule o no cada miembro en la igualdad (4.30) para $n = 0, 1, 2, 3$. Así, se pueden dar las siguientes situaciones:

- $u_2 = u_1 + \gamma_3$,
  $u_3 = u_1 + \gamma_3 + \gamma_4$.
- $u_2 = u_1 + \gamma_3$,
  $u_3 = u_1 - \gamma_3\gamma_2/u_1 - \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.
- $u_2 = u_1 - \gamma_1 u_1/u_0 + \gamma_3$,
  $u_3 = u_1 - \gamma_1 u_1/u_0 + \gamma_3 + \gamma_4$.
- $u_2 = u_1 - \gamma_1 u_1/u_0 + \gamma_3$,
  $u_3 = u_1 + \gamma_1\gamma_2/u_0 - \gamma_1 u_1/u_0 + \gamma_3\gamma_2/u_1 - \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

De forma similar a como hemos hecho con la sucesión $\{u_n\}_n$, podemos analizar los coeficientes $\{s_n\}_n$. Concretamente, de (4.30), (4.31) y (4.33) se sigue que la sucesión $\{s_n\}_n$ es una solución de la ecuación en diferencias de segundo orden

$$\eta_{n+1} s_n = s_{n+1}(\eta_{n-1} - s_{n-1} + s_n), \quad n \geq 2,$$

siendo $\eta_n = \gamma_{n+2} + u_n - u_{n+1}$ para $n \geq 1$. Esta ecuación en diferencias es análoga a (4.31), verificada para los coeficientes $\{u_n\}_n$, y podría ser estudiada de forma similar.

4.3.2 Sobre el funcional compañero v

En esta sección estudiamos el funcional compañero $\mathbf{v}$ y veremos que se puede representar como una transformación racional del funcional lineal clásico $\mathbf{w}$.

Teorema 4.3.6. *Sean* $\mathbf{w}$ *y* $\mathbf{v}$ *funcionales lineales definidos positivos y simétricos, tales que las correspondientes SPOM,* $\{T_n\}_n$ *y* $\{R_n\}_n$*, respectivamente, están relacionadas según* (4.28)*, siendo* $u_k \neq s_k$ *para* $k = 0, 1$ *y* $u_n, s_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces, existen números reales* a*,* b *y* μ *tales que*

$$(x^2 + a)\,\mathbf{w} = \mu(x^2 + b)\,\mathbf{v}. \tag{4.40}$$

Demostración. Tomamos $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y estudiemos la acción del funcional $(x^2+a)\,\mathbf{w}$ sobre el polinomio R_n. Teniendo en cuenta (4.28) obtenemos

$$\langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_n\rangle = -s_n \langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_{n-2}\rangle, \quad n \geq 5.$$

Por la simetría del funcional $\mathbf{w}$ tenemos que $(x^2+a)\,\mathbf{w}$ se anula sobre los polinomios de grado impar. Además, es fácil calcular los valores que toma para los polinomios de grado par menor que 5.

$$\begin{aligned}
\langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_0\rangle &= \gamma_1 + a,\\
\langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_2\rangle &= \gamma_1\gamma_2 + (u_0 - s_0)(\gamma_1 + a),\\
\langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_4\rangle &= (u_2 - s_2)\gamma_1\gamma_2 - s_2(u_0 - s_0)(\gamma_1 + a).
\end{aligned}$$

Como $u_0 \neq s_0$ y $s_2 \neq 0$, entonces podemos elegir $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique $\langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_4\rangle = 0$, y por tanto $\langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_n\rangle = 0$ para todo $n \geq 3$.

Consideramos, por otro lado, el desarrollo del funcional $(x^2+a)\,\mathbf{w}$ en términos de la base dual de la familia de polinomios $\{R_n\}_n$, $\{\mathbf{v}_n\}_n$. Dado que $\langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_n\rangle = 0$ para todo $n \geq 3$, dicho desarrollo es una suma finita y, teniendo en cuenta que podemos expresar cada funcional $\mathbf{v}_n$ de la base dual en función de $\mathbf{v}$ según (1.9), obtenemos

$$(x^2+a)\,\mathbf{w} = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j \frac{R_j(x)}{\langle \mathbf{v}, R_j^2\rangle}\,\mathbf{v}, \tag{4.41}$$

siendo $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_j = \langle (x^2+a)\,\mathbf{w}, R_j\rangle$ para $j = 0, 2$. Ya hemos calculado anteriormente estos valores, con lo que finalmente podemos deducir la relación (4.40) con

$$a = \frac{u_2 - s_2}{s_2(u_0 - s_0)}\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1, \quad b = \frac{u_2 - s_2}{u_2(u_0 - s_0)}\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1, \quad \mu = \frac{u_2}{s_2}\frac{\gamma_1\gamma_2}{\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2}.$$

□

4.3.3 Los casos de Gegenbauer y Hermite

En esta sección analizamos los casos particulares en los que $\mathbf{w} = \mathcal{H}$ es el funcional clásico de Hermite, definido como

$$\langle \mathcal{H}, p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) e^{-x^2} dx, \quad p \in \mathbb{P}, \tag{4.42}$$

o bien $\mathbf{w} = \mathcal{G}^{(\lambda)}$ es el funcional clásico de Gegenbauer de parámetro λ,

$$\langle \mathcal{G}^{(\lambda)}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)(1-x^2)^{\lambda - 1/2}, \quad p \in \mathbb{P}, \tag{4.43}$$

con $\lambda > -1/2$.

En primer lugar, consideramos $\mathcal{H}$ el funcional clásico de Hermite, definido en (4.42), y denotamos $\{H_n\}_n$ la sucesión de polinomios ortogonales de Hermite mónicos. Sea $\mathbf{v}_H$ un funcional lineal simétrico, definido positivo, y denotemos por $\{R_n\}_n$ la correspondiente SPOM. Supongamos que esta familia de polinomios está relacionada con los polinomios de Hermite mónicos según la relación

$$H_n(x) + u_{n-2}H_{n-2}(x) = R_n(x) + s_{n-2}R_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \tag{4.44}$$

donde u_n, s_n son constantes no nulas para todo $n \geq 0$, siendo $u_0 \neq s_0$ y $u_1 \neq s_1$.

Se sabe que los polinomios de Hermite verifican la siguiente RRTT,

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

con condiciones iniciales $H_0(x) = 1$ y $H_1(x) = x$. Igual que hicimos en la sección anterior, denotaremos por $\tilde{\gamma}_n$ los coeficientes en la RRTT para la familia de polinomios $\{R_n\}_n$. Esto es,

$$R_{n+1}(x) = xR_n(x) - \tilde{\gamma}_n R_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

con condiciones iniciales $R_0(x) = 1$ y $R_1(x) = x$. Además, por ser $\mathbf{v}_H$ definido positivo, sabemos que $\tilde{\gamma}_n > 0$ para $n \geq 1$. Entonces, la relación (4.33) en este caso sería,

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{n}{2}\frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{s_{n-1}}{s_n}, \quad n \geq 3.$$

Por otro lado, por el Teorema 4.3.3 podemos describir los coeficientes u_n como una cierta función racional. A continuación reescribiremos el enunciado de dicho teorema en este caso particular y, además, identificaremos las familias de polinomios involucradas en dicha expresión racional.

Teorema 4.3.7. *Los coeficientes $\{u_n\}_n$ de la relación* (4.44) *se pueden expresar como una función racional de la forma,*

$$u_{2n+3} = -\frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad u_{2n+2} = -\frac{q_n}{q_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

donde r_n y q_n son polinomios de grado n en la variable $A = (u_3 - 2)(\frac{3}{2u_2} - 1)$. Además verifican la siguiente RRTT,

$$\begin{aligned} Ar_{n-1} &= r_n + [2(n+1) + 3/2]r_{n-1} + (n+1)(n+3/2)r_{n-2}, \quad n \geq 2, \\ Aq_n &= q_{n+1} + [2(n+1) + 5/2]q_n + (n+2)(n+3/2)q_{n-1}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} r_0 &= 1, \quad r_1 = A - 3 - 5/2 + 5/u_3, \\ q_0 &= 1, \quad q_1 = A - 2 - 5/2 + 3/u_2. \end{aligned}$$

Entonces, podemos identificar estas familias de polinomios, salvo cambio lineal de variable, como los polinomios co–recursivos de los polinomios asociados de orden 2 de los polinomios de Laguerre con parámetro $\alpha = 1/2$ en el caso de los polinomios $r_n(A)$, y $\alpha = -1/2$ para los polinomios $q_n(A)$.

Nota 4.3.8. Observamos que este resultado coincide con el Corolario 4.3.5. En efecto, es conocido (ver por ejemplo [12]) que las sucesiones de polinomios ortogonales correspondientes a los polinomios de Hermite según (4.37) son los polinomios de Laguerre de parámetros $\alpha = -1/2$ para los de orden par y $\alpha = 1/2$ para los de orden impar,

$$H_{2n}(x) = L_n^{(-1/2)}(x^2), \quad H_{2n+1}(x) = xL_n^{(1/2)}(x^2), \quad n \geq 0.$$

Consideramos ahora $\mathbf{u} = \mathcal{G}^{(\lambda)}$ el funcional clásico de Gegenbauer definido en (4.43). Denotamos por $\{C_n^{(\lambda)}\}_n$ los polinomios de Gegenbauer mónicos, que sabemos verifican la RRTT siguiente,

$$C_{n+1}^{(\lambda)}(x) = xC_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda-1)(n+\lambda)}C_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 1,$$

con $C_0(x) = 1$ y $C_1(x) = x$.

Sea $\{R_n\}_n$ la SPOM asociada a un funcional $\mathbf{v}_G$ simétrico y definido positivo, tales que se verifica,

$$C_n^{(\lambda)} + u_{n-2}C_{n-2}^{(\lambda)} = R_n + s_{n-2}R_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Si denotamos por $\tilde{\gamma}_n > 0$ los coeficientes en la RRTT para esta familia de polinomios, entonces por (4.33) tenemos

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda-1)(n+\lambda)}\frac{u_n}{u_{n-1}}\frac{s_{n-1}}{s_n}, \quad n \geq 3.$$

Además, teniendo en cuenta el Teorema 4.3.3, podemos identificar la familia de parámetros $\{u_n\}_n$ como una función racional de polinomios ortogonales consecutivos. Concretamente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3.9. *Las familias de polinomios $\{r_n\}_n$ y $\{q_n\}_n$ definidas recursivamente por $r_{-1} = -1/u_3$, $q_{-1} = -1/u_2$ y*

$$u_{2n+3} = \frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad u_{2n+2} = \frac{q_n}{q_{n-1}}, \quad n \geq 0,$$

verifican, respectivamente, las RRTT siguientes,

$$\begin{aligned}
Ar_{n-1} &= r_n + [\gamma_{2n+3} + \gamma_{2n+4}]\, r_{n-1} + \gamma_{2n+2}\gamma_{2n+3}\, r_{n-2}, \quad n \geq 1,\\
r_{-1} &= -1/u_3, \quad r_0 = 1,\\
Aq_n &= q_{n+1} + [\gamma_{2n+4} + \gamma_{2n+5}]\, q_n + \gamma_{2n+3}\gamma_{2n+4}\, q_{n-1}, \quad n \geq 0,\\
q_{-1} &= -1/u_2, \quad q_0 = 1,
\end{aligned}$$

siendo

$$\gamma_n = \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda-1)(n+\lambda)}, \quad n \geq 1$$

En particular, cuando $\lambda = 0$ tenemos los polinomios mónicos de Chebyshev de primera especie, $\{C_n\}_n$, ortogonales con respecto al funcional

$$\langle \mathcal{G}^{(0)}, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad p \in \mathbb{P}.$$

Para estos polinomios (ver [12]) los coeficientes en la RRTT son constantes, $\gamma_2 = 1/2$ y $\gamma_n = 1/4$ para $n \geq 2$. Esto es,

$$\begin{aligned}
&C_{n+1}(x) = xC_n(x) - \frac{1}{4}C_{n-1}(x), \quad n \geq 2,\\
&C_0(x) = 1, \quad C_1(x) = x, \quad C_2(x) = x^2 - 1/2.
\end{aligned}$$

Finalmente, por el Corolario 4.3.5 podemos identificar las sucesiones $\{r_n\}_n$ y $\{q_n\}_n$, salvo cambio lineal de variable, como las familias de polinomios co–recursivos de los polinomios asociados de orden 2 de los polinomios de Jacobi con parámetros $\alpha = -1/2$ y $\beta = 1/2$, y los polinomios co–recursivos de los polinomios asociados de orden 2 de los polinomios de Chebyshev de primera especie, respectivamente.

Para concluir el capítulo, estudiaremos los funcionales compañeros $\mathbf{v}_H$ y $\mathbf{v}_G$ para $\mathbf{w}$ en los casos Hermite y Gegenbauer, respectivamente.

En el caso del funcional de Hermite (4.42), tenemos por (4.40) que el funcional compañero correspondiente viene dado por

$$\langle \mathbf{v}_H, p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \frac{(x^2+a)}{(x^2+b)}\, e^{-x^2}\, dx, \quad p \in \mathbb{P},$$

donde a y b son números reales positivos.

En el caso de Gegenbauer (4.43) se presentan dos posibilidades para el funcional compañero correspondiente, teniendo en cuenta los valores para las constantes a y b definidas en (4.40).

$$\langle \mathbf{v}_G, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x) \frac{(x^2+a)}{(x^2+b)}\, (1-x^2)^{\lambda-1/2}\, dx, \quad p \in \mathbb{P},$$

si $a, b > 0$, y

$$\langle \mathbf{v}_G, p\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\frac{(x^2-a)}{(x^2-b)}\,(1-x^2)^{\lambda-1/2}\,dx + M[p(\sqrt{b})+p(-\sqrt{b})],\; p \in \mathbb{P},$$

con a, $b > 1$.

Observamos que estos resultados concuerdan con los ejemplos estudiados por A. Berti y A. Sri Ranga en [10]. En dicho trabajo, los autores prueban que los polinomios de Hermite están relacionados con los polinomios de Sobolev correspondientes al par de funcionales $(\mathcal{H}, \mathbf{v}_H)$ según una relación del tipo (4.4). Entonces, por el Teorema 4.1.4 sabemos que los polinomios de Hermite están relacionados con los polinomios $\{R_n\}_n$ ortogonales respecto al funcional compañero según (4.7). Por tanto, nuestros resultados muestran que estos ejemplos estudiados en [10] no son casuales, si no que es la única posible modificación del funcional de Hermite que permite obtener una relación del tipo (4.4). En el caso del funcional de Gegenbauer y su funcional compañero se tiene la misma situación.

Capítulo 5

Polinomios ortogonales en dos variables

Introducción

Muchos autores han investigado en el tema de polinomios ortogonales en varias variables. El origen de la teoría general de estos polinomios puede situarse en el año 1936, con el trabajo de D. Jackson [37]. Ejemplos de este tipo de polinomios aparecen en estudios relacionados con grupos de simetría [20, 47, 55], como extensiones de las familias de polinomios en una variable [25, 45] o como autofunciones de operadores diferenciales en derivadas parciales lineales de segundo orden [39, 40, 41, 44, 50, 53]. El texto de C. F. Dunkl y Y. Xu [21], así como el de P. K. Suetin [79], ofrecen una excelente visión global y bastante completa de la teoría desde dichas perspectivas.

Cuando se plantea el estudio de la teoría de polinomios ortogonales de más de una variable, el principal problema que se encuentra es decidir qué orden elegir para los monomios básicos. Salvo en algunos casos especiales, el orden preferido por los autores al tratar estos temas es el *orden total* utilizado por D. Jackson, y entre polinomios con el mismo orden total, se adopta el *orden lexicográfico*. Una buena razón para usar este orden es que cuando se necesita construir nuevos polinomios de orden mayor, entonces las relaciones de ortogonalidad en los niveles inferiores no se ven afectadas por las de los niveles superiores. Este hecho puede verse reflejado especialmente en la formulación vectorial del problema dada por Y. Xu [81]. Véanse también los textos [8, 26, 48, 49].

Sin embargo, J. S. Geronimo y H. J. Woerdeman, en sus trabajos [28] y [29] sobre el problema de factorización de Fejér-Riesz, encontraron más conveniente la utilización del *orden lexicográfico* y el *orden lexicográfico inverso*. En dichos trabajos son de especial relevancia las relaciones entre polinomios ortogonales usando ambos órdenes, ya que en tal caso la matriz de momentos tiene una estructura especial (véase [28]): es una matriz Toeplitz por bloques que, a su vez, son matrices Toeplitz.

En el caso de una variable, la conexión existente entre la familia de polinomios ortogonales y la matriz Hankel asociada juega un papel importante en el desarrollo de la teoría, como ya describimos en el Capítulo 1. Concretamente, los coeficientes de las relaciones de recurrencia entre los polinomios ortogonales permiten obtener una parametrización de las matrices con estructura Hankel que son definidas positivas. Además, las matrices con este tipo de estructura aparecen en diversos problemas de la física y de la ingeniería, de ahí el interés que merece el estudio y análisis de las familias de polinomios ortogonales asociadas a ellas.

El objetivo de este capítulo es presentar un estudio de ciertos sistemas de polinomios ortogonales en dos variables cuya matriz de momentos es definida positiva y tiene una doble estructura Hankel ($\mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H}$), esto es, es una matriz Hankel por bloques que, a su vez, son matrices con estructura Hankel.

Desarrollaremos el capítulo de la siguiente manera: en la Sección 5.1 consideramos subespacios finito–dimensionales de polinomios en dos variables y establecemos la conexión entre los funcionales lineales definidos positivos sobre estos espacios y las matrices definidas positivas que tienen estructura $\mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H}$. Concretamente, estas matrices aparecen cuando usamos, para ordenar los monomios, el orden lexicográfico o el orden lexicográfico inverso. Entonces introducimos ciertos polinomios ortogonales matriciales (esto es, polinomios en una variable con coeficientes matriciales) y vemos cómo estos están estrechamente relacionados con los factores de la descomposición de Cholesky de la matriz $\mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H}$ considerada anteriormente.

En la Sección 5.2 construimos dos familias de polinomios ortogonales en dos variables considerando, respectivamente, el orden lexicográfico y el orden lexicográfico inverso. Cuando estas familias de polinomios se organizan adecuadamente en forma vectorial, estos vectores se pueden relacionar con los polinomios matriciales construidos anteriormente. A través de esta relación probamos que dichos polinomios minimizan cierto funcional cuadrático. Usando las propiedades de ortogonalidad, deducimos relaciones de recurrencia entre los vectores de polinomios asociados al orden lexicográfico y los asociados al orden lexicográfico inverso, así como las propiedades elementales que tienen los coeficientes matriciales de dichas relaciones de recurrencia.

Finalmente, en la Sección 5.3 obtenemos varias fórmulas de tipo Christoffel–Darboux para los sistemas de polinomios ortogonales construidos. Los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en [15].

5.1 Funcionales lineales positivos y matrices Hankel

En primer lugar, vamos a establecer la notación general que usaremos a lo largo de los dos próximos capítulos.

En esta sección consideramos matrices de momentos asociadas con el orden lexicográfico, que está definido como

$$(k,\ell) <_{\text{lex}} (k_1,\ell_1) \Leftrightarrow k < k_1 \text{ ó } (k = k_1 \text{ y } \ell < \ell_1),$$

y el orden lexicográfico inverso,

$$(k,\ell) <_{\text{revlex}} (k_1,\ell_1) \Leftrightarrow (\ell,k) <_{\text{lex}} (\ell_1,k_1).$$

Estos dos órdenes son lineales (es decir, cualesquiera dos pares distintos están ordenados) y además verifican la propiedad aditiva

$$(k,\ell) < (m,n) \Rightarrow (k+p,\ell+q) < (m+p,n+q).$$

A lo largo de este capítulo, denotaremos por $\mathbb{P}_{n,m}[x,y]$ al espacio vectorial de los polinomios en dos variables, de grado menor o igual que n respecto de x y de grado menor o igual que m respecto de y,

$$\mathbb{P}_{n,m}[x,y] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}x^i y^j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R} \Big\}.$$

El espacio vectorial de todos los polinomios en dos variables lo denotaremos por

$$\mathbb{P}[x,y] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}x^i y^j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}, \quad n,m \geq 0 \Big\}.$$

Consideramos $\mathbf{U}$ un funcional lineal definido sobre $\mathbb{P}[x,y]$ con valores reales. Análogamente al caso de una única variable,

Definición 5.1.1. *Llamaremos momento de orden (i,j) del funcional $\mathbf{U}$ al número real $h_{i,j} = \langle \mathbf{U}, x^i y^j \rangle$. Recíprocamente, diremos que $\mathbf{U}$ es el funcional de momentos asociado a $\{h_{i,j}\}$.*

Asociada al funcional $\mathbf{U}$ podemos definir, para cada $n,m \in \mathbb{N}$, la forma bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot,\cdot \rangle \ : \ & \mathbb{P}_{n,m}[x,y] \times \mathbb{P}_{n,m}[x,y] \to \mathbb{R}, \\ & \langle p,q \rangle = \langle \mathbf{U}, pq \rangle, \quad p,q \in \mathbb{P}_{n,m}[x,y]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Entonces, si construimos la matriz de Gram, de dimensión $(n+1)(m+1) \times (n+1)(m+1)$, asociada a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ teniendo en cuenta el orden lexicográfico, dicha matriz es la siguiente matriz Hankel por bloques:

$$H_{n,m} = \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & \dots & H_{n-1} & H_n \\ H_1 & H_2 & \dots & H_n & H_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ H_{n-1} & H_n & \dots & H_{2n-2} & H_{2n-1} \\ H_n & H_{n+1} & \dots & H_{2n-1} & H_{2n} \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

donde cada H_i es, a su vez, la siguiente matriz Hankel de dimensión $(m+1)\times(m+1)$,

$$H_i = \begin{bmatrix} h_{i,0} & h_{i,1} & \dots & h_{i,m-1} & h_{i,m} \\ h_{i,1} & h_{i,2} & \dots & h_{i,m} & h_{i,m+1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ h_{i,m-1} & h_{i,m} & \dots & h_{i,2m-2} & h_{i,2m-1} \\ h_{i,m} & h_{i,m+1} & \dots & h_{i,2m-1} & h_{i,2m} \end{bmatrix}, \qquad i = 0, \dots, 2n. \tag{5.3}$$

Entonces, la matriz $H_{n,m}$ tiene una doble estructura Hankel, que como hemos anunciado en la introducción, notaremos mediante $\mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H}$.

Denotaremos por $\mathbf{I}_n^{m+1}(x)$ a la siguiente matriz,

$$\mathbf{I}_n^{m+1}(x) = \begin{bmatrix} I_{m+1} \\ xI_{m+1} \\ \vdots \\ x^n I_{m+1} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Entonces, la matriz de momentos $H_{n,m}$ definida anteriormente se puede escribir como

$$H_{n,m} = \left\langle \mathbf{U}, \mathbf{I}_n^{m+1}(x)[1, y, \dots, y^m]^t [1, y, \dots, y^m](\mathbf{I}_n^{m+1}(x))^t \right\rangle.$$

Si consideramos el orden lexicográfico inverso, obtenemos otra matriz de momentos $\tilde{H}_{n,m}$ análoga a la anterior, pero intercambiando los papeles de n y m,

$$\tilde{H}_{n,m} = \left\langle \mathbf{U}, \mathbf{I}_m^{n+1}(y)[1, x, \dots, x^n]^t [1, x, \dots, x^n](\mathbf{I}_m^{n+1}(y))^t \right\rangle.$$

Nota 5.1.2. Recordemos que $H = (h_{i,j})_{1 \le i,j \le k}$ es una matriz Hankel si y sólo si se verifica $h_{i+1,j} = h_{i,j+1}$ para todo i, j.

En los siguientes lemas, damos una caracterización de las matrices con estructura $\mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H}$. Es una caracterización análoga a la que para matrices con doble estructura Toeplitz se puede encontrar en [29].

Lema 5.1.3. *Sea H una matriz real cuadrada de dimensión $k \times k$, y denotemos por $H^{(1)}$ la matriz resultante de eliminar en la anterior la primera fila y la última columna. Entonces H es una matriz Hankel si y sólo si se dan las igualdades $H = H^t$ y $H^{(1)} = (H^{(1)})^t$, donde el superíndice t denota la trasposición de matrices.*

Demostración. La condición necesaria del lema es inmediata por la estructura de las matrices Hankel.

Para comprobar la condición suficiente, observamos que $H = H^t$ implica que $h_{i,j} = h_{j,i}$ para $i, j = 1, \ldots, k$. Como $H^{(1)} = (h^{(1)}_{i,j})_{1 \le i,j \le k-1}$ con $h^{(1)}_{i,j} = h_{i+1,j}$ para $i, j = 1, \ldots, k-1$, entonces podemos escribir la segunda condición como $h_{i+1,j} = h_{j+1,i}$. Por tanto $h_{i+1,j} = h_{i,j+1}$ y el resultado queda probado. □

De manera análoga, pero considerando matrices por bloques, podemos probar el siguiente

Lema 5.1.4. *Consideremos la matriz $H = (H_{i,j})_{1 \le i,j \le k}$, donde cada $H_{i,j}$ es una matriz real cuadrada de dimensión $m \times m$. Denotemos por $H^{(1)}$ la matriz que resulta de eliminar en H la primera fila de bloques y la última columna de bloques, y por $H^{(2)}$ la matriz obtenida al eliminar la primera fila y la última columna en cada bloque $H_{i,j}$ de la matriz H. Entonces H es una matriz $\mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H}$ si y sólo si se verifican las igualdades $H = H^t$, $H^{(1)} = (H^{(1)})^t$ y $H^{(2)} = (H^{(2)})^t$.*

Obsérvese que los resultados anteriores son ciertos si se intercambian los papeles de filas y columnas.

Definición 5.1.5. *Diremos que el funcional de momentos $\mathbf{U} : \mathbb{P}[x, y] \to \mathbb{R}$ es definido positivo hasta el nivel (n, m) si se verifica*

$$\langle \mathbf{U}, p^2 \rangle > 0$$

para todo polinomio no nulo $p \in \mathbb{P}_{n,m}[x, y]$.

Nota 5.1.6. A diferencia de lo que ocurre en una única variable, la distinción entre ser definido positivo hasta cierto nivel (n, m) y serlo de manera global es esencial, ya que, como veremos más adelante, es posible que un funcional $\mathbf{U}$ sea definido positivo hasta un nivel finito (n, m) pero ninguna extensión del mismo sea definida positiva cuando aumentamos n ó m (cosa que no ocurre en el caso de una variable).

Observamos que una condición necesaria y suficiente para que un funcional $\mathbf{U}$ sea definido positivo hasta cierto nivel (n, m) es que la matriz de momentos $H_{n,m}$ asociada sea definida positiva.

De manera general, podemos decir simplemente que el funcional de momentos $\mathbf{U}$ es definido positivo si $\langle \mathbf{U}, p^2 \rangle > 0$ para todo $p \in \mathbb{P}[x, y]$ no nulo. De nuevo observamos que estas condiciones son equivalentes a que todas las matrices de momentos $H_{n,m}$ sean definidas positivas para cada par de enteros no negativos n y m.

Las anteriores observaciones pueden ser resumidas en el siguiente lema, cuya demostración omitiremos por su trivialidad.

Lema 5.1.7. *Consideremos $H_{n,m}$ la matriz cuadrada definida en (5.2) y (5.3), de dimensión $(n+1)(m+1) \times (n+1)(m+1)$. Entonces $H_{n,m}$ es definida positiva si y sólo si el funcional de momentos asociado a dicha matriz es definido positivo hasta el nivel (n,m).*

Denotemos por $\mathcal{M}^{n\times m}$ el espacio de las matrices reales de dimensión $n \times m$, y por

$$\mathbb{P}_n^{k\times k}[x] = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_i x^i, \quad A_i \in \mathcal{M}^{k\times k} \Big\}$$

el espacio vectorial de los polinomios matriciales de grado menor o igual que n con coeficientes en $\mathcal{M}^{k\times k}$.

Supongamos ahora que $\mathbf{U} : \mathbb{P}[x,y] \to \mathbb{R}$ es un funcional de momentos definido positivo hasta un nivel prefijado (n,m). Entonces podemos extenderlo de forma natural al espacio de las matrices cuyas entradas son polinomios en dos variables con coeficientes reales, haciéndolo actuar componente a componente. Usando esa extensión, a $\mathbf{U}$ le podemos asociar un funcional bilineal matricial (igual que en (5.1), también lo denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entendiendo que estamos usando uno u otro según la situación),

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \ &: \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x] \times \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x] \longrightarrow \mathcal{M}^{(m+1)\times(m+1)} \\ &\langle P(x), Q(x) \rangle = \langle \mathbf{U}, P(x,y)\ Q^t(x,y) \rangle, \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde

$$P(x,y) = P(x)\,[1,\ldots,y^m]^t \quad \text{y} \quad Q(x,y) = Q(x)\,[1,\ldots,y^m]^t\,.$$

Nota 5.1.8. Consideremos $(\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^k$ el espacio vectorial formado por los vectores de dimensión k con entradas en $\mathbb{P}_{n,m}[x,y]$.

En general, notaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a la extensión natural de la forma bilineal (5.1) actuando sobre vectores de polinomios en dos variables,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \ : \quad &(\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^{k_1} \times (\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^{k_2} \to \mathcal{M}^{k_1\times k_2}, \\ &\langle P(x,y), Q(x,y) \rangle = \langle \mathbf{U}, P(x,y)Q(x,y)^t \rangle. \end{aligned}$$

De la misma manera, también notaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a la extensión natural de la forma bilineal matricial (5.5) sobre polinomios matriciales en una variable, de distintas dimensiones,

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \; : \; \mathbb{P}_n^{k_1\times k_2}[x]\times\mathbb{P}_n^{k_3\times k_4}[x] \longrightarrow \mathcal{M}^{k_1\times k_3}$$
$$\langle P(x),Q(x)\rangle = \langle \mathbf{U}, P(x,y)\; Q^t(x,y)\rangle,$$

donde

$$P(x,y)=P(x)\left[1,\ldots,y^{k_2}\right]^t \;\text{ y }\; Q(x,y)=Q(x)\left[1,\ldots,y^{k_4}\right]^t.$$

A continuación estableceremos algunos resultados relacionados con la teoría de polinomios ortogonales matriciales.

Supongamos que $\mathbf{U}:\mathbb{P}[x,y]\to\mathbb{R}$ es un funcional de momentos definido positivo hasta cierto nivel prefijado (n,m). Entonces, podemos asociar a la forma bilineal matricial $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dada en (5.5) un sistema de polinomios ortogonales matriciales de la siguiente manera:

Sean $\{R_i(x)\}_{i=0}^n$ y $\{L_i(x)\}_{i=0}^n$ dos familias de polinomios matriciales, dados por,

$$R_i(x)=R_{i,i}x^i+R_{i,i-1}x^{i-1}+\cdots, \qquad i=0,\ldots,n,$$

y

$$L_i(x)=L_{i,i}x^i+L_{i,i-1}x^{i-1}+\cdots, \qquad i=0,\ldots,n,$$

con $R_{i,j},L_{i,j}\in\mathcal{M}^{(m+1)\times(m+1)}$, verificando las relaciones de ortogonalidad

$$\langle R_i^t(x),R_j^t(x)\rangle=\delta_{i,j}I_{m+1}, \quad \langle L_i(x),L_j(x)\rangle=\delta_{i,j}I_{m+1}, \tag{5.6}$$

respectivamente, donde I_{m+1} denota la matriz identidad de dimensión $(m+1)\times(m+1)$.

Las relaciones anteriores determinan de forma única las sucesiones $\{R_i\}_{i=0}^n$ y $\{L_i\}_{i=0}^n$ salvo un factor unitario. A lo largo de este capítulo consideraremos que estas familias de polinomios están normalizadas de forma que $R_{i,i}$ es una matriz triangular superior y $L_{i,i}$ una matriz triangular inferior, ambas con entradas positivas en la diagonal.

De las ecuaciones (5.6), se sigue que una familia de polinomios se obtiene a partir otra mediante trasposición, es decir, $R_i(x)^t=L_i(x)$. Por tanto, nos centraremos en el análisis de los polinomios $L_i(x)$.

Definición 5.1.9. *Sean A una matriz triangular inferior y B una matriz triangular superior, ambas con entradas positivas en la diagonal. Diremos que A (resp. B) es el factor inferior (resp. superior) de Cholesky de la matriz simétrica definida positiva M si se verifica*

$$M=AA^t=BB^t.$$

El polinomio matricial $L_i(x)$ definido anteriormente, se puede expresar en la siguiente forma matricial, como producto de un vector fila (de matrices) por un vector columna (de matrices),

$$L_i(x) = [L_{i,0}, L_{i,1}, \cdots, L_{i,i}, 0, \cdots, 0]\mathbf{I}_n^{m+1}(x), \tag{5.7}$$

y con los $n+1$ primeros polinomios matriciales, $\{L_0(x), \ldots, L_n(x)\}$, construimos el vector siguiente:

$$\mathbf{L}^n(x) = \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_n(x) \end{bmatrix} = L\mathbf{I}_n^{m+1}(x), \text{ con } L = \begin{bmatrix} L_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{1,0} & L_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n,0} & L_{n,1} & \cdots & L_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Nótese la diferencia de notación entre el polinomio matricial $L_n(x)$ y el vector de polinomios matriciales $\mathbf{L}^n(x)$.

Entonces se tiene el siguiente lema.

Lema 5.1.10. *Con la normalización establecida previamente en* (5.6)*, la matriz por bloques L^t es el factor superior de Cholesky de la matriz de momentos $H_{n,m}^{-1}$.*

Demostración. Por la definición de la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ según se ha descrito en la Nota 5.1.8 y la normalización (5.6) se tiene

$$\begin{aligned} I_{(n+1)(m+1)} &= \langle \mathbf{L}^n(x), \mathbf{L}^n(x) \rangle = L \left\langle \mathbf{I}_n^{m+1}(x), \mathbf{I}_n^{m+1}(x) \right\rangle L^t \\ &= L \left\langle \mathbf{U}, \mathbf{I}_n^{m+1}(x) \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \left(\mathbf{I}_n^{m+1}(x) \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right)^t \right\rangle L^t = LH_{n,m}L^t, \end{aligned}$$

de donde se sigue $H_{n,m}^{-1} = L^t L$ y, por tanto, el resultado. $\square$

Nota 5.1.11. Como consecuencia, observamos que la matriz $L_{n,n}^t$ es el factor superior de Cholesky de $[0, \cdots, I_{m+1}]H_{n,m}^{-1}\,[0, \cdots, I_{m+1}]^t$. Por tanto, teniendo en cuenta (5.8) deducimos la siguiente expresión para el polinomio matricial $L_n(x)$,

$$L_n(x) = \left[0, 0, \ldots, 0, (L_{n,n}^t)^{-1}\right] H_{n,m}^{-1}\mathbf{I}_n^{m+1}(x). \tag{5.9}$$

Nota 5.1.12. De la teoría de polinomios ortogonales matriciales (véanse, por ejemplo, [7, 23, 27, 51]) se obtiene la siguiente RRTT,

$$xL_i(x) = A_{i+1,m}L_{i+1}(x) + B_{i,m}L_i(x) + A_{i,m}^t L_{i-1}(x), \tag{5.10}$$

para $i = 0, \ldots, n-1$, con condiciones iniciales $L_{-1}(x) = 0$, donde las matrices $A_{i+1,m}$ y $B_{i,m}$ vienen dadas por

$$A_{i+1,m} = \langle xL_i(x), L_{i+1}(x) \rangle = L_{i,i} L_{i+1,i+1}^{-1},$$

y

$$B_{i,m} = \langle xL_i(x), L_i(x) \rangle.$$

De estas expresiones vemos que $B_{i,m}$ es una matriz real y simétrica y $A_{i,m}$ es una matriz real triangular inferior, ambas de dimensión $(m+1) \times (m+1)$.

Al igual que en el caso escalar, en [27] se prueba que los polinomios ortogonales matriciales también verifican una propiedad minimal. Veámoslo.

Teorema 5.1.13. *Denotaremos mediante $\mathcal{S}_{m+1}$ el espacio de las matrices reales y simétricas de dimensión $(m+1) \times (m+1)$. Sea*

$$\mathfrak{U} : \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x] \to \mathcal{S}_{m+1}$$

el funcional dado por

$$\langle \mathfrak{U}, Y(x) \rangle = \langle Y(x), Y(x) \rangle - 2\,\mathrm{Sim}(Y_n), \tag{5.11}$$

donde $Y(x) = Y_n x^n + \cdots + Y_0 = [Y_0, \ldots, Y_n]\mathbf{I}_n^{m+1}(x)$ y $\mathrm{Sim}(Y_n) = (Y_n + Y_n^t)/2$. Entonces, $W(x) = L_{n,n}^t L_n(x) \in \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x]$ es el único polinomio matricial que minimiza el funcional $\mathfrak{U}$. Esto es,

$$\langle \mathfrak{U}, W(x) \rangle \leq \langle \mathfrak{U}, Y(x) \rangle, \quad \forall\, Y(x) \in \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x],$$

entendiendo que para dos matrices simétricas, $X_1, X_2 \in \mathcal{S}_{m+1}$, decimos que $X_1 < X_2$ si y sólo si $X_2 - X_1$ es una matriz definida positiva.

Demostración. De la definición del funcional $\mathfrak{U}$ se sigue que

$$\langle \mathfrak{U}, Y(x) \rangle = [Y_0, Y_1, \ldots, Y_n] H_{n,m} \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} - 2\,\mathrm{Sim}(Y_n).$$

Por otro lado, consideramos la matriz

$$X = [Y_0, Y_1, \ldots, Y_n] H_{n,m}^{1/2} - V_n H_{n,m}^{-1/2},$$

donde $V_n = [0, 0, \ldots, I_{m+1}]$ y $H_{n,m}^{1/2}$ es cualquier raíz cuadrada de $H_{n,m}$. Con esta notación, reescribimos finalmente el funcional $\mathfrak{U}$ como

$$\langle \mathfrak{U}, Y(x) \rangle = XX^t - V_n H_{n,m}^{-1} V_n^t.$$

Entonces, existe un único polinomio matricial $W(x) \in \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x]$, correspondiente a $X = 0$, dado por

$$W(x) = V_n H_{n,m}^{-1} \mathbf{I}_n^{m+1}(x),$$

para el que se verifica $\langle \mathfrak{U}, W(x) \rangle \leq \langle \mathfrak{U}, Y(x) \rangle$ para todo $Y(x) \in \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x]$. Finalmente, de (5.9) se sigue que el polinomio matricial $L_n(x)$ es

$$L_n(x) = (L_{n,n}^t)^{-1} W(x). \tag{5.12}$$

□

Por último, hay que observar que los resultados presentados son igualmente ciertos si se considera el orden lexicográfico inverso, con y en lugar de x e intercambiando los papeles de n y m.

5.2 El orden lexicográfico y los polinomios ortogonales

En esta sección analizaremos las propiedades de las dos familias de polinomios ortogonales en dos variables resultado de considerar los dos órdenes tratados anteriormente: el orden lexicográfico y el orden lexicográfico inverso.

A lo largo de esta sección, serán N y M números naturales fijos y

$$\mathbf{U} : \mathbb{P}_{2N,2M}[x, y] \to \mathbb{R}$$

un funcional lineal definido positivo hasta el nivel (N, M). Teniendo en cuenta el orden lexicográfico, aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt para construir los polinomios ortogonales correspondientes,

$$p_{n,m}^l(x, y) = k_{n,m,l}^{n,l} x^n y^l + \sum_{\substack{(i,j) <_{\text{lex}} (n,l) \\ j \leq m}} k_{n,m,l}^{i,j} x^i y^j, \tag{5.13}$$

para $0 \leq n \leq N,\ 0 \leq m \leq M$ y $0 \leq l \leq m$, que están definidos según las siguientes condiciones de ortogonalidad y normalización, respectivamente,

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{U}, x^i y^j p_{n,m}^l(x, y) \rangle = 0, \quad \begin{cases} 0 \leq i < n \ \text{ y } \ 0 \leq j \leq m, \\ i = n \ \text{ y } \ 0 \leq j < l, \end{cases} \\ &\langle \mathbf{U}, p_{n,m}^l(x, y) p_{n,m}^l(x, y) \rangle = 1. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Con el convenio $k^{n,l}_{n,m,l} > 0$, los polinomios $\{p^l_{n,m}(x,y)\}$ quedan determinados de forma única por las ecuaciones descritas anteriormente.

De forma análoga podemos construir los polinomios ortogonales con respecto al funcional lineal $\mathbf{U}$ usando el orden lexicográfico inverso. Denotaremos dichos polinomios por $\{\tilde{p}^l_{n,m}(x,y)\}$, que están determinados de forma única por las ecuaciones anteriores intercambiando los papeles de n y m. Concretamente,

$$\tilde{p}^l_{n,m}(x,y) = \tilde{k}^{m,l}_{n,m,l} x^l y^m + \sum_{\substack{(i,j) <_{\text{revlex}} (l,m) \\ i \le n}} \tilde{k}^{i,j}_{n,m,l} x^i y^j,$$

con $\tilde{k}^{m,l}_{n,m,l} > 0$, verificando las condiciones de ortogonalidad,

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{U}, x^i y^j \tilde{p}^l_{n,m}(x,y)\rangle = 0, \quad \begin{cases} 0 \le i \le n \;\text{ y }\; 0 \le j < m, \\ 0 \le i < l \;\text{ y }\; j = m, \end{cases} \\ &\langle \mathbf{U}, \tilde{p}^l_{n,m}(x,y)\tilde{p}^l_{n,m}(x,y)\rangle = 1. \end{aligned}$$

Nota 5.2.1. Observamos que, por la construcción de los polinomios $\{p^l_{n,m}(x,y)\}$ y $\{\tilde{p}^l_{n,m}(x,y)\}$, se tiene que los conjuntos siguientes

$$\begin{aligned} &\{p^l_{i,m}(x,y), \quad 0 \le i \le n, \quad 0 \le l \le m\}, \\ &\{\tilde{p}^l_{n,j}(x,y), \quad 0 \le j \le m, \quad 0 \le l \le n\}, \end{aligned}$$

forman sendas bases ortonormales del espacio vectorial $\mathbb{P}_{n,m}[x,y]$ con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces, cualquier polinomio $q \in \mathbb{P}_{n,m}[x,y]$ se puede expresar en la forma

$$q(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \langle \mathbf{U}, p^l_{i,m}\, q\rangle \; p^l_{i,m}(x,y) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \langle \mathbf{U}, \tilde{p}^l_{n,j}\, q\rangle \; \tilde{p}^l_{n,j}(x,y).$$

Consideremos ahora el vector formado por los polinomios descritos anteriormente,

$$\mathbf{P}_{n,m}(x,y) = \begin{bmatrix} p^0_{n,m}(x,y) \\ p^1_{n,m}(x,y) \\ \vdots \\ p^m_{n,m}(x,y) \end{bmatrix} = K_{n,m} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ x^n y^m \end{bmatrix} = K_{n,m} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \bigotimes \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

donde la matriz $K_{n,m}$ de dimensión $(m+1) \times (n+1)(m+1)$ viene dada por los coeficientes de los polinomios $\{p^l_{n,m}\}$,

$$K_{n,m} = \begin{bmatrix} k^{0,0}_{n,m,0} & k^{0,1}_{n,m,0} & \cdots & k^{n,0}_{n,m,0} & 0 & \cdots & 0 \\ k^{0,0}_{n,m,1} & k^{0,1}_{n,m,1} & \cdots & k^{n,0}_{n,m,1} & k^{n,1}_{n,m,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^{0,0}_{n,m,m} & k^{0,1}_{n,m,m} & \cdots & k^{n,0}_{n,m,m} & k^{n,1}_{n,m,m} & \cdots & k^{n,m}_{n,m,m} \end{bmatrix}, \tag{5.16}$$

y donde, $\bigotimes$ representa el producto de Kronecker de matrices. Esto es, si la matriz $M = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le c}}$, entonces $M \bigotimes N$ es una matriz por bloques dada por,

$$M \bigotimes N = \begin{bmatrix} m_{1,1}N & \cdots & m_{1,c}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r,1}N & \cdots & m_{r,c}N \end{bmatrix}.$$

De forma análoga, respecto del orden lexicográfico inverso podemos construir los sistemas de polinomios

$$\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x,y) = \begin{bmatrix} \tilde{p}^0_{n,m}(x,y) \\ \tilde{p}^1_{n,m}(x,y) \\ \vdots \\ \tilde{p}^n_{n,m}(x,y) \end{bmatrix} = \tilde{K}_{n,m} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n y^m \end{bmatrix} = \tilde{K}_{n,m} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \bigotimes \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \tag{5.17}$$

donde la matriz $\tilde{K}_{n,m}$ de dimensión $(n+1) \times (n+1)(m+1)$ está dada de forma similar a (5.16) intercambiando los papeles de n y m.

Nuestro siguiente objetivo es analizar las propiedades de ortogonalidad que satisfacen ambos sistemas de polinomios, $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ y $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$.

Teniendo en cuenta las relaciones (5.14) que definen los polinomios $\{p^l_{n,m}\}$, podemos probar el siguiente

Lema 5.2.2. *Sea $\mathbf{P} \in (\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^k$ verificando las relaciones de ortogonalidad,*

$$\langle \mathbf{P}(x,y), x^i y^j \rangle = 0, \quad 0 \le i < n, \quad 0 \le j \le m. \tag{5.18}$$

Entonces, $\mathbf{P}(x,y) = C\mathbf{P}_{n,m}(x,y)$, donde C es una matriz de dimensión $k \times (m+1)$. Si, además, $k = m+1$, la matriz C es triangular inferior con entradas positivas en la diagonal y $\langle \mathbf{P}(x,y), \mathbf{P}(x,y) \rangle = I_{m+1}$, entonces $C = I_{m+1}$.

Demostración. Sea $\mathbf{P}(x,y) = [p^1(x,y), \ldots, p^k(x,y)]^t \in (\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^k$ verificando (5.18). Entonces, teniendo en cuenta la independencia lineal de los polinomios

$\{p^l_{n,m}\}$ (véase la Nota 5.2.1) podemos escribir, para $1 \leq l \leq k$,

$$p^l(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c^l_{i,j} p^j_{i,m}(x,y),$$

siendo $c^l_{i,j} = \langle p^l(x,y), p^j_{i,m}(x,y) \rangle$. Por (5.18) tenemos que $c^l_{i,j} = 0$ para $i < n$, por lo que

$$p^l(x,y) = \sum_{j=0}^{m} c^l_{n,j} p^j_{n,m}(x,y) = [c^l_{n,0}, \ldots, c^l_{n,m}] \mathbf{P}_{n,m}(x,y).$$

Entonces, $\mathbf{P}(x,y) = C\mathbf{P}_{n,m}(x,y)$, siendo $C = (c^l_{n,j})_{\substack{1 \leq l \leq k \\ 0 \leq j \leq m}} \in \mathcal{M}^{k \times (m+1)}$. El resto del enunciado es claro por la unicidad de los polinomios $\{p^l_{n,m}(x,y)\}$. $\square$

De forma análoga, para el sistema $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$ se tiene,

Lema 5.2.3. *Sea* $\tilde{\mathbf{P}} \in (\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^k$ *tal que satisface las relaciones de ortogonalidad,*

$$\langle \tilde{\mathbf{P}}(x,y), x^i y^j \rangle = 0, \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j < m.$$

Entonces $\tilde{\mathbf{P}} = C\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}$, *con* C *una matriz de dimensión* $k \times (n+1)$. *Además, si* $k = n+1$, *la matriz* C *es triangular inferior con entradas positivas en la diagonal y* $\langle \tilde{\mathbf{P}}(x,y), \tilde{\mathbf{P}}(x,y) \rangle = I_{n+1}$, *entonces* $C = I_{n+1}$.

Como consecuencia de los dos lemas anteriores, tenemos el siguiente

Corolario 5.2.4. *Los sistemas de polinomios* $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ *y* $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$ *definidos por* (5.15) *y* (5.17), *respectivamente, son los únicos que verifican las condiciones de ortogonalidad siguientes:*

$$\langle \mathbf{P}_{n,m}(x,y), x^i y^j \rangle = 0, \quad 0 \leq i < n, \quad 0 \leq j \leq m,$$
$$\langle \mathbf{P}_{n,m}(x,y), \mathbf{P}_{n,m}(x,y) \rangle = I_{m+1},$$

$$\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x,y), x^i y^j \rangle = 0, \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j < m,$$
$$\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x,y), \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x,y) \rangle = I_{n+1}.$$

Además, los lemas anteriores, junto con la independencia lineal de las entradas de los sistemas de polinomios que hemos construido (véase la Nota 5.2.1), nos permiten probar el siguiente resultado.

Lema 5.2.5. *Cualquier vector de polinomios $P \in (\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^k$ se puede poner como combinación lineal de los sistemas de polinomios $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ y $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$ en la forma*

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{n} M_i \mathbf{P}_{i,m}(x,y) = \sum_{j=0}^{m} \tilde{M}_j \tilde{\mathbf{P}}_{n,j}(x,y),$$

siendo

$$M_i = \langle P(x,y), \mathbf{P}_{i,m}(x,y)\rangle \in \mathcal{M}^{k\times(m+1)}$$
$$\tilde{M}_j = \langle P(x,y), \tilde{\mathbf{P}}_{n,j}(x,y)\rangle \in \mathcal{M}^{k\times(n+1)}.$$

De lo anterior, podemos establecer cierta relación entre estos sistemas de polinomios y los polinomios matriciales introducidos en la Sección 5.1, como muestra el siguiente resultado.

Lema 5.2.6. *Sean $\mathbf{P}_{n,m}(x,y) \in (\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^{m+1}$ el vector de polinomios definido en* (5.15) *y $L_n(x) \in \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x]$ el polinomio matricial definido por las relaciones de ortogonalidad* (5.6)*. Entonces,*

$$\mathbf{P}_{n,m}(x,y) = L_n(x)[1, y, \ldots, y^m]^t,$$

y, en consecuencia,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,m}(x,y) \\ \mathbf{P}_{1,m}(x,y) \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{n,m}(x,y) \end{bmatrix} = L\ \mathbf{I}_n^{m+1}(x) \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}, \tag{5.19}$$

siendo $\mathbf{I}_n^{m+1}(x)$ la matriz definida en (5.4) *y L la matriz de coeficientes de los polinomios matriciales $\{L_0(x), \ldots, L_n(x)\}$ dada en* (5.8)*.*

Demostración. Sea $\hat{L}_n(x) \in \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x]$ tal que podemos escribir el vector $\mathbf{P}_{n,m}(x,y)$ en la forma

$$\mathbf{P}_{n,m}(x,y) = \hat{L}_n(x)[1, \cdots, y^m]^t = \sum_{i=0}^{n} \hat{L}_{n,i} x^i [1, \cdots, y^m]^t,$$

con $\hat{L}_{n,i} \in \mathcal{M}^{(m+1)\times(m+1)}$ para $0 \le i \le n$. Entonces, por las relaciones de ortogonalidad (5.18) y la definición del funcional bilineal matricial $\langle \cdot, \cdot \rangle$, deducimos

$$0 = \left\langle \mathbf{P}_{n,m}(x,y),\, x^j \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \hat{L}_{n,i} \left\langle x^i \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix},\, x^j \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \hat{L}_{n,i} \langle x^i,\; x^j \rangle = \langle \hat{L}_n(x),\; x^j \rangle, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

De forma análoga podemos probar,

$$I_{m+1} = \langle \mathbf{P}_{n,m}(x,y),\, \mathbf{P}_{n,m}(x,y) \rangle = \langle \hat{L}_n(x),\, \hat{L}_n(x) \rangle.$$

Por otro lado, observamos que (5.15) implica que la matriz $\hat{L}_{n,m}$ es triangular inferior con entradas positivas en la diagonal.

Finalmente, teniendo en cuenta que (5.6) determina de forma única a los polinomios $L_n(x)$, deducimos la primera parte del lema.

El resto del enunciado se deduce directamente de (5.8) y teniendo en cuenta lo que hemos probado en la primera parte del lema para $\mathbf{P}_{i,m}(x,y)$ para $i = 0, \ldots, n$. $\square$

Como hemos señalado anteriormente, resultados análogos a los del Lema 5.2.6 se verifican para la familia de polinomios ortogonales en el orden lexicográfico inverso, intercambiando los papeles de n y m.

En el siguiente teorema mostramos las relaciones de recurrencia que verifican los sistemas de polinomios $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ y $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$. Dichas relaciones son los elementos clave para el estudio realizado en el resto del capítulo y en el capítulo siguiente.

Teorema 5.2.7. *Sean $\{\mathbf{P}_{n,m}\}_{n,m}$ y $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}_{n,m}$, $0 \leq n \leq N$, $0 \leq m \leq M$ los sistemas de polinomios ortogonales definidos previamente en* (5.15) *y* (5.17)*. Entonces se verifican las siguientes fórmulas de recurrencia,*

$$x\mathbf{P}_{n,m} = A_{n+1,m}\mathbf{P}_{n+1,m} + B_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} + A_{n,m}^t\mathbf{P}_{n-1,m}, \tag{5.20}$$
$$\Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{P}_{n,m-1} - \mathcal{K}_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}, \tag{5.21}$$
$$J_{n,m}^1\mathbf{P}_{n,m} = y\mathbf{P}_{n,m-1} + J_{n,m}^2\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m} + J_{n,m}^3\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}, \tag{5.22}$$
$$\mathbf{P}_{n,m} = I_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} + \Gamma_{n,m}^t\mathbf{P}_{n,m-1}, \tag{5.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_{n,m} &= \langle x\mathbf{P}_{n-1,m}, \mathbf{P}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{(m+1)\times(m+1)}, && (5.24)\\
B_{n,m} &= \langle x\mathbf{P}_{n,m}, \mathbf{P}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{(m+1)\times(m+1)}, && (5.25)\\
J^1_{n,m} &= \langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \mathbf{P}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{m\times(m+1)}, && (5.26)\\
J^2_{n,m} &= -\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle \in \mathcal{M}^{m\times n}, && (5.27)\\
J^3_{n,m} &= -\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}\rangle \in \mathcal{M}^{m\times n}, && (5.28)\\
\Gamma_{n,m} &= \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, \mathbf{P}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{m\times(m+1)}, && (5.29)\\
\mathcal{K}_{n,m} &= \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle \in \mathcal{M}^{m\times n}, && (5.30)\\
I_{n,m} &= \langle \mathbf{P}_{n,m}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{(m+1)\times(n+1)}. && (5.31)
\end{aligned}$$

Fórmulas análogas se verifican para $\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}$. *Estas ecuaciones homólogas las denotaremos por* (5.20˜), (5.21˜), *etc.*

$$\begin{aligned}
y\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} &= \tilde{A}_{n,m+1}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m+1} + \tilde{B}_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} + \tilde{A}^t_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m-1}, && (5.20˜)\\
\tilde{\Gamma}_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} &= \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m} - \tilde{\mathcal{K}}_{n,m}\mathbf{P}_{n,m-1}, && (5.21˜)\\
\tilde{J}^1_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} &= x\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m} + \tilde{J}^2_{n,m}\mathbf{P}_{n,m-1} + \tilde{J}^3_{n,m}\mathbf{P}_{n-1,m-1}, && (5.22˜)\\
\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} &= \tilde{I}_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} + \tilde{\Gamma}^t_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}, && (5.23˜)
\end{aligned}$$

donde los coeficientes matriciales que aparecen vienen dadas, de forma análoga a las anteriores, mediante las fórmulas,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{n,m} &= \langle y\tilde{\mathbf{P}}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{(n+1)\times(n+1)}, && (5.24˜)\\
\tilde{B}_{n,m} &= \langle y\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{(n+1)\times(n+1)}, && (5.25˜)\\
\tilde{J}^1_{n,m} &= \langle x\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{n\times(n+1)}, && (5.26˜)\\
\tilde{J}^2_{n,m} &= -\langle x\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}, \mathbf{P}_{n,m-1}\rangle \in \mathcal{M}^{n\times m}, && (5.27˜)\\
\tilde{J}^3_{n,m} &= -\langle x\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}, \mathbf{P}_{n-1,m-1}\rangle \in \mathcal{M}^{n\times m}, && (5.28˜)\\
\tilde{\Gamma}_{n,m} &= \langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{n\times(n+1)}, && (5.29˜)\\
\tilde{\mathcal{K}}_{n,m} &= \langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}, \mathbf{P}_{n,m-1}\rangle \in \mathcal{M}^{n\times m}, && (5.30˜)\\
\tilde{I}_{n,m} &= \langle \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}, \mathbf{P}_{n,m}\rangle \in \mathcal{M}^{(n+1)\times(m+1)}. && (5.31˜)
\end{aligned}$$

Demostración. La relación (5.20) se deduce directamente del Lema 5.2.6 y de la ecuación (5.10).

Para probar (5.21) observamos que $\mathbf{P}_{n,m-1} \in (\mathbb{P}_{n,m}[x,y])^m$ y, por el Lema 5.2.5, existe una matriz $\Gamma_{n,m}$ de dimensión $m\times(m+1)$ tal que

$$\Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} - \mathbf{P}_{n,m-1} \in (\mathbb{P}_{n-1,m}[x,y])^m.$$

Además, por la ortogonalidad de $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ se tiene

$$\langle \Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}(x,y) - \mathbf{P}_{n,m-1}(x,y), x^i y^j \rangle = 0,$$

para $i = 0, \ldots, n-1$ y $j = 0, \ldots, m-1$. Por tanto, por la unicidad del sistema $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$ que es consecuencia del Lema 5.2.3, se sigue (5.21),

$$\Gamma_{nm}\mathbf{P}_{n,m} - \mathbf{P}_{n,m-1} = \mathcal{K}_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}$$

con $\mathcal{K}_{n,m} \in \mathcal{M}^{m\times n}$.

Las demás fórmulas se pueden demostrar siguiendo un procedimiento similar.

Veamos (5.22). Sea $J^1_{n,m} \in \mathcal{M}^{m\times(m+1)}$ una matriz tal que

$$y\mathbf{P}_{n,m-1} - J^1_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} \in (\mathbb{P}_{n-1,m}[x,y])^m.$$

Dicha matriz existe en virtud del Lema 5.2.5. Además, por las propiedades de ortogonalidad de $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$, se verifica

$$\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}(x,y) - J^1_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}(x,y), x^i y^j \rangle = 0,$$

para $i = 0, \ldots, n-1$ y $j = 0, \ldots, m-2$. Por lo tanto, teniendo en cuenta el Lema 5.2.5 existen dos matrices $J^2_{n,m}$, $J^3_{n,m} \in \mathcal{M}^{m\times n}$ tales que

$$y\mathbf{P}_{n,m-1} - J^1_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} = -J^2_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m} - J^3_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1},$$

que es exactamente la relación (5.22).

Por último, veamos (5.23). De nuevo por el Lema 5.2.5, existe una matriz $I_{n,m} \in \mathcal{M}^{(m+1)\times(n+1)}$ tal que

$$\mathbf{P}_{n,m} - I_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} \in (\mathbb{P}_{n,m-1}[x,y])^{m+1}$$

y verifica la propiedad de ortogonalidad

$$\langle \mathbf{P}_{n,m}(x,y) - I_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x,y), x^i y^j \rangle = 0$$

para $i = 0, \ldots, n-1$ y $j = 0, \ldots, m-1$. Por lo tanto, por el Lema 5.2.2, existe una matriz $C \in \mathcal{M}^{(m+1)\times m}$ tal que

$$\mathbf{P}_{n,m} - I_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} = C\mathbf{P}_{n,m-1}.$$

Además, podemos calcular esa matriz, teniendo en cuenta la Nota 5.2.5 y la ortogonalidad de $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$, en la forma

$$C = \langle \mathbf{P}_{n,m} - I_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}, \mathbf{P}_{n,m-1} \rangle = \langle \mathbf{P}_{n,m}, \mathbf{P}_{n,m-1} \rangle,$$

que es exactamente $\Gamma^t_{n,m}$ (véase (5.29)).

Las expresiones (5.24)–(5.31) se deducen directamente por la ortogonalidad de los sistemas $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ y $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$, teniendo en cuenta el Lema 5.2.5. $\square$

Nota 5.2.8. Observemos que la ecuación (5.20) se sigue directamente de la teoría de polinomios ortogonales matriciales, y nos permite movernos a lo largo de la banda de tamaño $m+1$, es decir, podemos aumentar el grado de los polinomios en x pero sin aumentar el grado en y. Además, esta fórmula no mezcla los sistemas de polinomios en los dos órdenes. Sin embargo, las demás fórmulas indican que si se desea aumentar m en una unidad para los polinomios construidos según el orden lexicográfico, se deben involucrar los polinomios construidos según el orden lexicográfico inverso.

En la sección anterior vimos que las matrices de la RRTT (5.20) tienen una estructura particular. Concretamente, $A_{n,m}$ es triangular inferior con entradas positivas en la diagonal y $B_{n,m}$ es simétrica. Algunas de las matrices que aparecen en las demás ecuaciones también tienen una forma especial, como vemos a continuación.

• *Sobre la matriz* $J^1_{n,m}$. Por las relaciones de ortogonalidad, se puede comprobar directamente que el elemento en la posición (i,j) de la matriz $J^1_{n,m}$ es

$$(J^1_{n,m})_{ij} = \langle y p^{i-1}_{n,m-1}, p^{j-1}_{n,m} \rangle,$$

por lo que $(J^1_{n,m})_{ij} = 0$ para $i+1 < j$, mientras que $(J^1_{n,m})_{i,i+1} > 0$. Por tanto $J^1_{n,m}$ es, salvo la primera columna, una matriz triangular inferior,

$$J^1_{n,m} = \begin{bmatrix} (J^1_{n,m})_{1,1} & (J^1_{n,m})_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ (J^1_{n,m})_{2,1} & (J^1_{n,m})_{2,2} & (J^1_{n,m})_{2,3} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (J^1_{n,m})_{m,1} & (J^1_{n,m})_{m,2} & (J^1_{n,m})_{m,3} & \cdots & (J^1_{n,m})_{m,m+1} \end{bmatrix}.$$

Los mismos argumentos muestran que la matriz $\tilde{J}^1_{n,m}$ tiene la misma estructura que $J^1_{n,m}$.

• *Sobre la matriz* $\Gamma_{n,m}$. Haciendo un análisis similar, para la matriz $\Gamma_{n,m}$ tenemos que la entrada en la posición (i,j) es

$$(\Gamma_{n,m})_{ij} = \langle p^{i-1}_{n,m-1}, p^{j-1}_{n,m} \rangle,$$

luego $(\Gamma_{n,m})_{ij} = 0$ si $i < j$ y $(\Gamma_{n,m})_{i,i} > 0$, es decir, $\Gamma_{n,m}$ es, salvo la última columna de ceros, una matriz triangular inferior,

$$\Gamma_{n,m} = \begin{bmatrix} (\Gamma_{n,m})_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (\Gamma_{n,m})_{2,1} & (\Gamma_{n,m})_{2,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\Gamma_{n,m})_{m,1} & (\Gamma_{n,m})_{m,2} & \cdots & (\Gamma_{n,m})_{m,m} & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz $\tilde{\Gamma}_{n,m}$ tiene la misma estructura que $\Gamma_{n,m}$.

- *Sobre la matriz $I_{n,m}$.* Finalmente, por la definición de la matriz $I_{n,m}$ tenemos que el elemento en la posición (i,j) está dado por

$$(I_{n,m})_{i,j} = \langle p^i_{n,m}, \tilde{p}^j_{n,m} \rangle.$$

Además, observamos que, en virtud de las relaciones de ortogonalidad que definen los sistemas de polinomios $\{p^l_{n,m}\}$ y $\{\tilde{p}^l_{n,m}\}$, se tiene $p^m_{n,m} = \tilde{p}^n_{n,m}$ y, por tanto, la entrada en la última posición de la matriz $I_{n,m}$ es $(I_{n,m})_{m+1,n+1} = 1$, las primeras n entradas de la última fila se anulan, $(I_{n,m})_{m+1,j} = 0$ para $j \leq n$, y también se anulan las primeras m entradas de la última columna, $(I_{n,m})_{i,n+1} = 0$ para $i \leq m$. Es decir,

$$I_{n,m} = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.32}$$

Además, usando las relaciones de ortogonalidad, se puede probar que las matrices involucradas en las ecuaciones del Teorema 5.2.7 están relacionadas entre sí como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.2.9. *Consideremos los coeficientes matriciales definidos en las relaciones de recurrencia del Teorema 5.2.7. Entonces, se verifican las siguientes identidades.*

$$\tilde{\mathcal{K}}_{n,m} = \mathcal{K}^t_{n,m}, \tag{5.33}$$

$$\mathcal{K}_{n,m}\mathcal{K}^t_{n,m} + \Gamma_{n,m}\Gamma^t_{n,m} = I_m, \tag{5.34}$$

$$J^3_{n,m} = -\mathcal{K}_{n,m}\tilde{A}^t_{n-1,m}, \tag{5.35}$$

$$\tilde{I}_{n,m} = I^t_{n,m}, \tag{5.36}$$

$$I_{n,m}I^t_{n,m} + \Gamma^t_{n,m}\Gamma_{n,m} = I_{m+1}. \tag{5.37}$$

Para (5.34), (5.35) *y* (5.37) *se tienen las ecuaciones homólogas:*

$$\mathcal{K}^t_{n,m}\mathcal{K}_{n,m} + \tilde{\Gamma}_{n,m}\tilde{\Gamma}^t_{n,m} = I_n, \tag{5.34˜}$$

$$\tilde{J}^3_{n,m} = -\mathcal{K}^t_{n,m}A^t_{n,m-1}, \tag{5.35˜}$$

$$I^t_{n,m}I_{n,m} + \tilde{\Gamma}^t_{n,m}\tilde{\Gamma}_{n,m} = I_{n+1}. \tag{5.37˜}$$

Demostración. En primer lugar, (5.33) y (5.36) se deducen directamente de la definición de las matrices.

Para probar (5.34) y (5.37), basta tener en cuenta las propiedades de ortogonalidad dadas en los Lemas 5.2.2 y 5.2.3. Concretamente, de (5.21) deducimos

$$\begin{aligned}\Gamma_{n,m}\Gamma_{n,m}^t &= \langle \Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}, \Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}\rangle \\ &= \langle \mathbf{P}_{n,m-1} - \mathcal{K}_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}, \mathbf{P}_{n,m-1} - \mathcal{K}_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle,\end{aligned}$$

de donde se deduce (5.34) teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad y la definición de las matrices $\mathcal{K}_{n,m}$. De forma análoga se puede probar (5.37) a partir de (5.23).

Por último veamos (5.35). Por la definición de $J_{n,m}^3$ se tiene

$$J_{n,m}^3 = -\langle \mathbf{P}_{n,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}\rangle.$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5.20˜), así como la ecuación que define a la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$, deducimos el resultado. $\square$

Finalmente mostraremos que los sistemas de polinomios $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ también verifican cierta propiedad minimal, que se deduce de la propiedad minimal de los polinomios matriciales definidos en la sección anterior.

Denotaremos por $\mathbb{P}_{n,m}^{(m+1)\times(m+1)}[x,y]$ el espacio vectorial de los polinomios matriciales en dos variables, de grado menor o igual que n respecto de x, y de grado menor o igual que m respecto de y,

$$\mathbb{P}_{n,m}^{(m+1)\times(m+1)}[x,y] = \Big\{ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{i,j}x^i y^j, \quad A_{i,j} \in \mathcal{M}^{(m+1)\times(m+1)} \Big\}.$$

Consideremos el funcional $\hat{\mathfrak{U}} : \mathbb{P}_{n,m}^{(m+1)\times(m+1)}[x,y] \to \mathcal{S}_{m+1}$ definido por

$$\langle \hat{\mathfrak{U}}, P(x,y)\rangle = \langle P(x,y), P(x,y)\rangle - 2\,\mathrm{Sim}(K_n),$$

siendo $K_n \in \mathcal{M}^{(m+1)\times(m+1)}$ tal que

$$P(x,y) = K_n x^n [1, \dots, y^m]^t + R(x,y),$$

con $R \in \mathbb{P}_{n-1,m}^{(m+1)\times(m+1)}[x,y]$.

Lema 5.2.10. *Con la notación establecida anteriormente, el vector de polinomios* $P(x,y) = L_{n,n}^{-1}\mathbf{P}_{n,m}(x,y)$ *es el único que minimiza el funcional* $\hat{\mathfrak{U}}$*, es decir,*

$$\langle \hat{\mathfrak{U}}, P(x,y)\rangle \le \langle \hat{\mathfrak{U}}, Y(x,y)\rangle$$

para todo $Y(x,y) \in \mathbb{P}_{n,m}^{(m+1)\times(m+1)}[x,y]$*. Aquí* $L_{n,n}$ *es la matriz coeficiente del término de grado* n *en el polinomio matricial* $L_n(x)$ *definido en* (5.6).

Demostración. Sea $P(x,y) = \sum_{i=0}^{n} K_i x^i [1,\ldots,y^m]^t$. Puesto que

$$\left\langle x^i \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix}, x^j \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \right\rangle = \langle x^i, x^j \rangle,$$

entendiendo que en cada miembro de la igualdad actúa la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definida en el espacio correspondiente (véase la Nota 5.1.8), entonces podemos escribir

$$\langle \hat{\mathfrak{U}}, P(x,y) \rangle = \langle \mathfrak{U}, P(x) \rangle,$$

siendo $P(x) \in \mathbb{P}_n^{(m+1)\times(m+1)}[x]$ el polinomio matricial tal que

$$P(x,y) = P(x)[1,\ldots,y^m]^t.$$

Por lo tanto, el resultado se deduce de (5.12) y el Lema 5.2.6. □

5.3 Fórmulas de tipo Christoffel–Darboux

La importancia de la fórmula de Christoffel–Darboux es conocida en la teoría de polinomios ortogonales en una variable (véase el Teorema 1.1.18). Usando la conexión entre polinomios ortogonales matriciales y los polinomios ortogonales en dos variables desarrollada en la Sección 5.2, vamos a presentar un análogo en dos variables de esta fórmula.

Teorema 5.3.1 (Fórmula de Christoffel-Darboux). *Sean $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ y $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ los sistemas de polinomios en dos variable ortogonales con respecto al funcional lineal $\mathbf{U}$ asociados al orden lexicográfico y lexicográfico inverso, respectivamente, verificando las condiciones de ortogonalidad dadas en el Corolario 5.2.4. Entonces se verifican las igualdades*

$$\frac{\mathbf{P}^t_{n,m}(x_1,y_1)A_{n+1,m}\mathbf{P}_{n+1,m}(x,y) - \mathbf{P}^t_{n+1,m}(x_1,y_1)A^t_{n+1,m}\mathbf{P}_{n,m}(x,y)}{x - x_1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}^t_{k,m}(x_1,y_1)\mathbf{P}_{k,m}(x,y) = \sum_{j=0}^{m} \tilde{\mathbf{P}}^t_{n,j}(x_1,y_1)\tilde{\mathbf{P}}_{n,j}(x,y).$$

Demostración. La primera igualdad se sigue, aplicando un procedimiento estándar, a partir de la ecuación de recurrencia a tres términos (5.20). La segunda igualdad es cierta porque las dos sumas son núcleos reproductores para el mismo espacio. □

El correspondiente resultado análogo también se verifica para el orden lexicográfico inverso.

Como consecuencia del teorema anterior se tiene,

Lema 5.3.2. *Se verifican*

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}^t_{n,m}(x_1,y_1)A_{n+1,m}\mathbf{P}_{n+1,m}(x,y)-\mathbf{P}^t_{n+1,m}(x_1,y_1)A^t_{n+1,m}\mathbf{P}_{n,m}(x,y)=\\&=(x-x_1)\tilde{\mathbf{P}}^t_{n,m}(x_1,y_1)\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x,y)+\mathbf{P}^t_{n,m-1}(x_1,y_1)A_{n+1,m-1}\mathbf{P}_{n+1,m-1}(x,y)-\\&\quad-\mathbf{P}^t_{n+1,m-1}(x_1,y_1)A^t_{n+1,m-1}\mathbf{P}_{n,m-1}(x,y),\end{aligned}\tag{5.38}$$

y

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}^t_{n+1,m+1}(x_1,y_1)\mathbf{P}_{n+1,m+1}(x,y)-\mathbf{P}^t_{n+1,m}(x_1,y_1)\mathbf{P}_{n+1,m}(x,y)=\\&\qquad=\tilde{\mathbf{P}}^t_{n+1,m+1}(x_1,y_1)\tilde{\mathbf{P}}_{n+1,m+1}(x,y)-\tilde{\mathbf{P}}^t_{n,m+1}(x_1,y_1)\tilde{\mathbf{P}}_{n,m+1}(x,y).\end{aligned}\tag{5.39}$$

Demostración. Para probar la primera fórmula, consideramos los polinomios matriciales definidos mediante

$$\begin{aligned}Z_{n,m}(x,y)&=[1,y,\ldots,y^m](\mathbf{I}^{m+1}_n(x))^t,\\\tilde{Z}_{n,m}(x,y)&=[1,x,\ldots,x^n](\mathbf{I}^{n+1}_m(y))^t.\end{aligned}$$

Entonces, por la fórmula de Christoffel–Darboux, el Lema 5.1.10 y la igualdad (5.19) deducimos

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{P}^t_{n,m}(x_1,y_1)A_{n+1,m}\mathbf{P}_{n+1,m}(x,y)-\mathbf{P}^t_{n+1,m}(x_1,y_1)A^t_{n+1,m}\mathbf{P}_{n,m}(x,y)}{x-x_1}=\\&\qquad=Z_{n,m}(x_1,y_1)H^{-1}_{n,m}Z_{n,m}(x,y)^t=\tilde{Z}_{n,m}(x_1,y_1)\tilde{H}^{-1}_{n,m}\tilde{Z}_{n,m}(x,y)^t\\&\qquad=\tilde{\mathbf{P}}^t_{n,m}(x_1,y_1)\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x,y)+\tilde{Z}_{n,m-1}(x_1,y_1)\tilde{H}^{-1}_{n,m-1}\tilde{Z}_{n,m-1}(x,y)^t.\end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento en el último sumando del término de la derecha en la anterior igualdad para expresarlo en términos de los polinomios asociados al orden lexicográfico, obtenemos el resultado.

La ecuación (5.39) la obtenemos usando la igualdad entre las dos sumatorias del Teorema 5.3.1,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}^t_{n+1,m+1}(x_1,y_1)\mathbf{P}_{n+1,m+1}(x,y)-\sum_{j=0}^{m}\tilde{\mathbf{P}}^t_{n+1,j}(x_1,y_1)\tilde{\mathbf{P}}_{n+1,j}(x,y)=\\&\qquad=\tilde{\mathbf{P}}^t_{n+1,m+1}(x_1,y_1)\tilde{\mathbf{P}}_{n+1,m+1}(x,y)-\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}^t_{j,m+1}(x_1,y_1)\mathbf{P}_{j,m+1}(x,y).\end{aligned}$$

Cambiando la suma del primer término para expresarla en función $\mathbf{P}_{n,m}$ y al contrario con la suma del segundo término, igualamos los términos de grado máximo y usando el Teorema 5.3.1 obtenemos el resultado. □

Nota 5.3.3. Antes de finalizar esta sección hemos de resaltar que las ecuaciones anteriores se pueden deducir de las fórmulas de recurrencia obtenidas en las secciones anteriores.

La ecuación (5.39) se obtiene directamente de (5.21) y de la Proposición 5.2.9. Sin embargo, el procedimiento para obtener (5.38) es diferente.

Capítulo 6

Aplicaciones computacionales

Introducción

En este capítulo continuamos con el estudio de la teoría desarrollada en el Capítulo 5, enfocando el análisis en los aspectos más aplicados de la teoría. El capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la Sección 6.1 estudiamos las matrices que aparecen en las relaciones de recurrencia deducidas en la Sección 5.2, obteniendo relaciones entre ellas que serán elementos clave para el desarrollo del resto del capítulo. A partir de estas relaciones entre los coeficientes, en la Sección 6.2 desarrollamos un algoritmo para construir los coeficientes de las fórmulas de recurrencia hasta un cierto nivel usando los coeficientes de los niveles inmediatamente anteriores y un número determinado de incógnitas. Concretamente, estas incógnitas están en correspondencia biunívoca con el número de momentos que se necesitan para construir el vector de polinomios hasta dicho nivel. Este algoritmo se usa en la Sección 6.3 para determinar un funcional lineal definido positivo con respecto al cual los sistemas de polinomios $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ son ortogonales. Esto nos permite deducir condiciones necesarias y suficientes sobre los coeficientes de las relaciones de recurrencia para la existencia de un funcional lineal definido positivo, estableciendo una correspondencia biunívoca entre éstos y el conjunto de las matrices definidas positivas con estructura $\mathcal{H} \bigotimes \mathcal{H}$. En dicha construcción juegan un papel importante el conjunto de las matrices $\mathcal{K}_{n,m}$ definidas en el capítulo anterior, que deben ser contracciones. En la Sección 6.4 analizamos el caso particular en el que dichas matrices contractivas se anulan, deduciendo que esta situación caracteriza las medidas en dos variables que se obtienen como producto tensorial de dos medidas reales en una variable. Terminaremos en la Sección 6.5 con un ejemplo numérico que ilustra el funcionamiento del algoritmo mencionado anteriormente. También presentamos un ejemplo que muestra que este problema de momentos no siempre se puede extender a niveles superiores.

6.1 Relaciones matriciales

Es evidente que deben de existir relaciones entre los coeficientes matriciales de las ecuaciones (5.20)–(5.23) y sus homólogas (5.20˜)–(5.23˜). En esta sección analizaremos dichas relaciones, cuyas demostraciones, aunque no entrañan dificultad, requieren de cierta habilidad técnica y son bastante tediosas en algunos casos.

Estas relaciones nos permitirán desarrollar un algoritmo que nos permita construir los elementos de un nivel prefijado, (n, m), a partir de los elementos conocidos en los niveles anteriores.

Lema 6.1.1 (Relaciones para $\mathcal{K}_{n,m}$). *Consideremos los coeficientes matriciales dados en las relaciones del Teorema 5.2.7. Entonces, las siguientes igualdades*

$$\Gamma_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m}\tilde{A}^t_{n-1,m} = -J^2_{n,m-1} - \mathcal{K}_{n,m-1}\tilde{B}_{n-1,m-1}, \tag{6.1}$$

$$A_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m}\tilde{\Gamma}^t_{n-1,m} = -\tilde{J}^{2\,t}_{n-1,m} - B_{n-1,m-1}\mathcal{K}_{n-1,m}, \tag{6.2}$$

se verifican para $2 \le n \le N$ y $2 \le m \le M$.

Demostración. Por un lado, teniendo en cuenta la definición (5.30) de la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$ y usando la RRTT (5.20˜), así como las propiedades de ortogonalidad de $\mathbf{P}_{n,m-1}$, calculamos

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{n,m}\tilde{A}^t_{n-1,m} &= \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{A}_{n-1,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle \\ &= \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1} - \tilde{B}_{n-1,m-1}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1} - \tilde{A}^t_{n-1,m-1}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-2}\rangle \\ &= \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}\rangle.\end{aligned}$$

Por tanto, multiplicando a la izquierda por la matriz $\Gamma_{n,m-1}$, usamos la ecuación (5.21) y obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m}\tilde{A}^t_{n-1,m} &= \langle \Gamma_{n,m-1}\mathbf{P}_{n,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}\rangle \\ &= \langle \mathbf{P}_{n,m-2} - \mathcal{K}_{n,m-1}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}\rangle \\ &= -J^2_{n,m-1} - \mathcal{K}_{n,m-1}\tilde{B}_{n-1,m-1},\end{aligned}$$

con lo que se completa la prueba de (6.1). Finalmente, para probar la relación (6.2) basta escribir el homólogo de (6.1) para $\tilde{\mathcal{K}}_{n,m}$,

$$\tilde{\Gamma}_{n-1,m}\tilde{\mathcal{K}}_{n,m}A^t_{n,m-1} = -\tilde{J}^2_{n-1,m} - \tilde{\mathcal{K}}_{n-1,m}B_{n-1,m-1},$$

que se puede probar de forma análoga, y usar (5.33). □

Lema 6.1.2 (Relaciones para $J^2_{n,m}$). *Para cada par de números naturales (n,m), con $2 \le n \le N$ y $2 \le m \le M$, se verifican las siguientes igualdades:*

$$\Gamma_{n,m-1}J^2_{n,m} = -J^1_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m} + \mathcal{K}_{n,m-1}\tilde{A}_{n-1,m}, \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
- A_{n,m-1}J^2_{n,m}\tilde{\Gamma}^t_{n-1,m} &= J^1_{n-1,m}A^t_{n-1,m}I_{n-2,m} - J^2_{n-1,m}\tilde{\Gamma}_{n-1,m}\tilde{J}^{1\,t}_{n-1,m} \\
&\quad + J^2_{n-1,m}\mathcal{K}^t_{n-1,m}\tilde{J}^{2\,t}_{n-1,m} + J^3_{n-1,m}I^t_{n-2,m-1}\tilde{J}^{3\,t}_{n-1,m} + B_{n-1,m-1}J^2_{n-1,m} \\
&\quad - A^t_{n-1,m-1}I_{n-2,m-1}\tilde{A}_{n-2,m} + A_{n,m-1}J^3_{n,m}I^t_{n-1,m-1}\mathcal{K}_{n-1,m}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Demostración. Para probar la primera ecuación, comenzamos multiplicando por la izquierda, en la ecuación (5.27) que define la matriz $J^2_{n,m}$, por la matriz $\Gamma_{n,m-1}$. Usando la relación (5.21) para sustituir $\Gamma_{n,m-1}\mathbf{P}_{n,m-1}$ y la definición de $\tilde{A}_{n-1,m}$ dada en (5.24˜), obtenemos

$$\Gamma_{n,m-1}J^2_{n,m} = -\langle y\mathbf{P}_{n,m-2}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle + \mathcal{K}_{n,m-1}\tilde{A}_{n-1,m}.$$

A continuación usamos la relación (5.22) para sustituir el polinomio $y\mathbf{P}_{n,m-2}$, y obtenemos (6.3) teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad de los polinomios.

Para probar (6.4), usamos en primer lugar la definición de la matriz $J^2_{n,m}$, aplicamos la ecuación (5.21˜) en la forma apropiada y obtenemos,

$$\begin{aligned}
-A_{n,m-1}J^2_{n,m}\tilde{\Gamma}^t_{n-1,m} &= A_{n,m-1}\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\Gamma}_{n-1,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle \\
&= A_{n,m-1}\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle - A_{n,m-1}\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \mathbf{P}_{n-1,m-1}\rangle\mathcal{K}_{n-1,m}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Calculamos a continuación el primer sumando del término de la derecha en la ecuación anterior. Por (5.20) tenemos

$$\begin{aligned}
A_{n,m-1}\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle =& \langle x\mathbf{P}_{n-1,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle - B_{n-1,m-1}J^2_{n-1,m} \\
&- A^t_{n-1,m-1}\langle \mathbf{P}_{n-2,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

En el primer sumando del término de la derecha de (6.6) intercambiamos las posiciones de x e y, y usamos (5.22) para sustituir $y\mathbf{P}_{n-1,m-1}$,

$$\begin{aligned}
\langle y\mathbf{P}_{n-1,m-1}, x\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle =& J^1_{n-1,m}\langle \mathbf{P}_{n-1,m}, x\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle - \\
&- \langle J^2_{n-1,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m} + J^3_{n-1,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m-1}, x\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, usando la RRTT (5.20) para sustituir $x\mathbf{P}_{n-1,m}$ en el primer sumando, y (5.22˜) para sustituir $x\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}$ en el segundo, obtenemos la siguiente expresión para el primer sumando del término de la derecha de (6.6),

$$\begin{aligned}
\langle x\mathbf{P}_{n-1,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle &= J^1_{n-1,m}A^t_{n-1,m}I_{n-2,m} - J^2_{n-1,m}\tilde{\Gamma}_{n-1,m}\tilde{J}^{1\,t}_{n-1,m} \\
&\quad + J^2_{n-1,m}\mathcal{K}^t_{n-1,m}\tilde{J}^{2\,t}_{n-1,m} + J^3_{n-1,m}I^t_{n-2,m-1}\tilde{J}^{3\,t}_{n-1,m},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

donde hemos utilizado la definición de las matrices $\mathcal{K}_{n,m}$ e $I_{n,m}$ así como las relaciones (5.33) y (5.36).

El último término de (6.6) se puede calcular fácilmente usando (5.20˜) y (5.31),

$$\langle \mathbf{P}_{n-2,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle = I_{n-2,m-1}\tilde{A}_{n-2,m}. \tag{6.8}$$

Ahora sustituimos (6.7) y (6.8) en (6.6) y observamos que el primer término de (6.5) es

$$\begin{aligned} A_{n,m-1}\langle y\mathbf{P}_{n,m-1},\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle = {} & J^1_{n-1,m}A^t_{n-1,m}I_{n-2,m} - J^2_{n-1,m}\tilde{\Gamma}_{n-1,m}\tilde{J}^{1\,t}_{n-1,m} \\ & + J^2_{n-1,m}\mathcal{K}^t_{n-1,m}\tilde{J}^{2\,t}_{n-1,m} + J^3_{n-1,m}I^t_{n-2,m-1}\tilde{J}^{3\,t}_{n-1,m} \\ & + B_{n-1,m-1}J^2_{n-1,m} - A^t_{n-1,m-1}I_{n-2,m-1}\tilde{A}_{n-2,m}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Por otro lado, de (5.21) se deducen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, \mathbf{P}_{n-1,m}\rangle &= \mathcal{K}_{n,m}I^t_{n-1,m}, \\ \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}\rangle &= \mathcal{K}_{n,m}\tilde{\Gamma}^t_{n-1,m}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Sustituyendo (5.22) en el segundo sumando del término de la derecha de (6.5), y usando las ecuaciones anteriores, así como (5.35) y (6.17), obtenemos

$$\begin{aligned} & A_{n,m-1}\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \mathbf{P}_{n-1,m-1}\rangle\mathcal{K}_{n-1,m} = \\ & \quad = A_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m}I^t_{n-1,m}J^{1\,t}_{n-1,m}\mathcal{K}_{n-1,m} - A_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m}\tilde{\Gamma}^t_{n-1,m}J^{2\,t}_{n-1,m}\mathcal{K}_{n-1,m} \\ & \quad = A_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m}(I^t_{n-1,m}J^{1\,t}_{n-1,m} - \tilde{\Gamma}^t_{n-1,m}J^{2\,t}_{n-1,m})\mathcal{K}_{n-1,m} \\ & \quad = -A_{n,m-1}J^3_{n,m}I^t_{n-1,m-1}\mathcal{K}_{n-1,m}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Para concluir, insertando (6.9) y (6.11) en (6.5) obtenemos finalmente la relación anunciada (6.4). □

Lema 6.1.3 (Relaciones para $J^1_{n,m}$). *Las siguientes relaciones,*

$$\Gamma_{n,m-1}J^1_{n,m} = J^1_{n,m-1}\Gamma_{n,m}, \tag{6.12}$$
$$J^1_{n,m}\Gamma^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1} = J^{1\,t}_{n,m-1} + J^3_{n,m}\mathcal{K}^t_{n,m-1} + J^2_{n,m}\mathcal{K}^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1}, \tag{6.13}$$

se verifican para $1 \leq n \leq N$ *y* $2 \leq m \leq M$.

Demostración. La primera relación se deduce directamente multiplicando en la definición de la matriz $J^1_{n,m}$ dada en (5.26) por $\Gamma_{n,m-1}$ y después usando la relación (5.22) para sustituir y simplificar teniendo en cuenta la ortogonalidad.

Para probar (6.13), multiplicamos (5.26) por $\Gamma_{n,m}^t$ por la derecha y usamos la relación (5.21), llegando a la igualdad,

$$J_{n,m}^1 \Gamma_{n,m}^t = \langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}\rangle = \langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \mathbf{P}_{n,m-1}\rangle + J_{n,m}^2 \mathcal{K}_{n,m}^t.$$

Multiplicamos de nuevo por la derecha por la matriz $\Gamma_{n,m-1}^t$. Finalmente, usando (5.21) y después (5.22) en dos ocasiones, obtenemos el resultado. □

Lema 6.1.4 (Relaciones para $A_{n,m}$). *Sean $A_{n,m}$, $\Gamma_{n,m}$ y $J_{n,m}^1$ las matrices dadas en el Teorema 5.2.7. Entonces, se verifican las siguientes relaciones,*

$$\Gamma_{n-1,m} A_{n,m} = A_{n,m-1} \Gamma_{n,m}, \tag{6.14}$$

$$J_{n-1,m}^1 A_{n,m} = A_{n,m-1} J_{n,m}^1, \tag{6.15}$$

para $1 \leq n \leq N$ y $1 \leq m \leq M$.

Demostración. Usando la RRTT (5.20) y teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad calculamos, por un lado,

$$\langle \mathbf{P}_{n-1,m-1}, x\mathbf{P}_{n,m}\rangle = \langle \mathbf{P}_{n-1,m-1}, \mathbf{P}_{n-1,m}\rangle A_{n,m} = \Gamma_{n-1,m} A_{n,m},$$

y, por otro lado,

$$\langle x\mathbf{P}_{n-1,m-1}, \mathbf{P}_{n,m}\rangle = A_{n,m-1} \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, \mathbf{P}_{n,m}\rangle = A_{n,m-1} \Gamma_{n,m}.$$

De estas dos igualdades se sigue directamente (6.14).

Para probar (6.15), basta considerar la definición de la matriz $J_{n-1,m}^1$ y usar la RRTT (5.20). Entonces deducimos, por ortogonalidad,

$$J_{n-1,m}^1 A_{n,m} = \langle x\mathbf{P}_{n-1,m-1}, y\mathbf{P}_{n,m}\rangle.$$

Ahora sustituimos $x\mathbf{P}_{n-1,m-1}$ usando la RRTT (5.20) y, aplicando la definición de la matriz $J_{n,m}^1$ dada en (5.26), obtenemos finalmente la relación buscada (6.15). □

Lema 6.1.5 (Relaciones para $I_{n,m}$). *Para cada $1 \leq n \leq N$ y $1 \leq m \leq M$ se verifican las siguientes relaciones,*

$$\Gamma_{n,m} I_{n,m} = -\mathcal{K}_{n,m} \tilde{\Gamma}_{n,m}, \tag{6.16}$$

$$J_{n,m}^1 I_{n,m} = I_{n,m-1} \tilde{A}_{n,m} + J_{n,m}^2 \tilde{\Gamma}_{n,m}. \tag{6.17}$$

Demostración. La primera ecuación se deduce directamente multiplicando (5.31) por la izquierda por la matriz $\Gamma_{n,m}$ y usando posteriormente la relación (5.21).

Para (6.17), calculamos en primer lugar, partiendo de la ecuación (5.31) que define la matriz $I_{n,m-1}$,

$$I_{n,m-1}\tilde{A}_{n,m} = \langle \mathbf{P}_{n,m-1}, y\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\rangle,$$

donde hemos usado la RRTT (5.20˜) para sustituir $\tilde{A}_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m-1}$ y hemos simplificado teniendo en cuenta la ortogonalidad. En segundo lugar, por la definición de la matriz $J^1_{n,m}$ dada en (5.26) obtenemos, usando la relación (5.23˜),

$$\langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\rangle = J^1_{n,m}I_{n,m} - J^2_{n,m}\tilde{\Gamma}_{n,m},$$

con lo que concluimos la demostración de (6.17). □

Lema 6.1.6 (Relaciones para $B_{n-1,m}$). *Las siguientes igualdades,*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n-1,m}B_{n-1,m} =& -\mathcal{K}_{n-1,m}I^t_{n-2,m}A_{n-1,m} + B_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m} \qquad (6.18)\\
&+ A_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m}I^t_{n-1,m},\\
J^1_{n-1,m}B_{n-1,m} =& B_{n-1,m-1}J^1_{n-1,m} + J^2_{n-1,m}I^t_{n-2,m}A_{n-1,m} \qquad (6.19)\\
&+ J^3_{n-1,m}I^t_{n-2,m-1}A_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m} - A_{n,m-1}J^2_{n,m}I^t_{n-1,m}\\
&- A_{n,m-1}J^3_{n,m}I^t_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m}.
\end{aligned}$$

se verifican para $2 \le n \le N$ y $1 \le m \le M$.

Demostración. Comencemos probando la primera relación multiplicando por la derecha la matriz $\Gamma_{n-1,m}$, definida en (5.29), por la matriz $B_{n-1,m}$. Después usamos la RRTT (5.20) y por la ortogonalidad obtenemos,

$$\Gamma_{n-1,m}B_{n-1,m} = \langle \mathbf{P}_{n-1,m-1}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle - \langle \mathbf{P}_{n-1,m-1}, \mathbf{P}_{n-2,m}\rangle A_{n-1,m}.$$

En virtud de (6.10) vemos que el segundo sumando del término de la derecha en la ecuación anterior nos proporciona directamente el primer sumando del término de la derecha de (6.18). Trabajemos ahora con el primer sumando del término de la derecha de la fórmula anterior. Sustituimos $x\mathbf{P}_{n-1,m}$ usando la RRTT (5.20),

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{P}_{n-1,m-1}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle =&\\
&= A_{n,m-1}\langle \mathbf{P}_{n,m-1}, \mathbf{P}_{n-1,m}\rangle + B_{n-1,m-1}\langle \mathbf{P}_{n-1,m-1}, \mathbf{P}_{n-1,m}\rangle\\
&= A_{n,m-1}\mathcal{K}_{n,m}I^t_{n-1,m} + B_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m},
\end{aligned}$$

donde, para la última igualdad, hemos usado de nuevo (6.10). Así completamos la prueba de (6.18).

A continuación deduciremos la relación (6.19). En primer lugar multiplicamos por la izquierda la ecuación (5.25) que define la matriz $B_{n-1,m}$ por la matriz $J^1_{n-1,m}$. Entonces, utilizando (5.22) para sustituir $J^1_{n-1,m}\mathbf{P}_{n-1,m}$ obtenemos,

$$\begin{aligned} J^1_{n-1,m}B_{n-1,m} = &\langle y\mathbf{P}_{n-1,m-1}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle + J^2_{n-1,m}\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle \\ &+ J^3_{n-1,m}\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m-1}, xP_{n-1,m}\rangle. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Seguidamente calculamos cada uno de los tres sumandos que aparecen en el término de la derecha.

Para el primer sumando de (6.20), sustituimos $x\mathbf{P}_{n-1,m-1}$ usando la RRTT (5.20). Teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad podemos simplificar convenientemente y deducimos,

$$\langle y\mathbf{P}_{n-1,m-1}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle = A_{n,m-1}\langle \mathbf{P}_{n,m-1}, y\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle + B_{n-1,m-1}J^1_{n-1,m}.$$

Calculamos el término $\langle \mathbf{P}_{n,m-1}, y\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle$ en la ecuación anterior usando (5.22), y finalmente obtenemos la siguiente expresión para el primer término del miembro de la derecha de (6.20),

$$\begin{aligned} \langle y\mathbf{P}_{n-1,m-1}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle = &- A_{n,m-1}J^2_{n,m}I^t_{n-1,m} - A_{n,m-1}J^3_{n,m}\tilde{I}_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m} \\ &+ B_{n-1,m-1}J^1_{n-1,m}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Para calcular el segundo sumando del término de la derecha de (6.20), sustituimos $x\tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}$ usando (5.22˜) y obtenemos

$$\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle = \tilde{J}^1_{n-1,m}I^t_{n-1,m} - \tilde{J}^2_{n-1,m}\Gamma_{n-1,m}.$$

Finalmente, usando la relación (6.17) para la matriz $\tilde{I}_{n-1,m}$, así como la igualdad (5.36), obtenemos la siguiente expresión para el segundo sumando de (6.20),

$$J^2_{n-1,m}\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle = J^2_{n-1,m}I^t_{n-2,m}A_{n-1,m}. \tag{6.22}$$

Para terminar, calculamos el tercer sumando en (6.20) con la ayuda de (5.22˜),

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m-1}, x\mathbf{P}_{n-1,m}\rangle = \\ &\quad = \tilde{J}^1_{n-1,m-1}\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}, \mathbf{P}_{n-1,m}\rangle - \tilde{J}^2_{n-1,m-1}\langle \mathbf{P}_{n-1,m-2}, \mathbf{P}_{n-1,m}\rangle. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Por un lado, observamos que usando (5.23˜) podemos calcular el primer sumando del término de la derecha de (6.23) en la forma

$$\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}, \mathbf{P}_{n-1,m}\rangle = \tilde{I}_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m},$$

Por otro lado, usamos (5.23) para sustituir $\mathbf{P}_{n-1,m}$ y obtenemos

$$\langle \mathbf{P}_{n-1,m-2}, \mathbf{P}_{n-1,m} \rangle = \Gamma_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m}.$$

Por tanto, sustituyendo las dos últimas igualdades en (6.23) y teniendo en cuenta (6.17˜),

$$\tilde{J}^1_{n-1,m-1}\tilde{I}_{n-1,m-1} = \tilde{I}_{n-2,m-1}A_{n-1,m-1} + \tilde{J}^2_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m-1},$$

cuya demostración es análoga a la realizada para (6.17), se sigue que el tercer sumando de (6.20) es

$$J^3_{n-1,m}\langle \tilde{\mathbf{P}}_{n-2,m-1}, x\mathbf{P}_{n-1,m} \rangle = J^3_{n-1,m}\tilde{I}_{n-2,m-1}A_{n-1,m-1}\Gamma_{n-1,m},$$

Finalmente, insertando la ecuación anterior, (6.21) y (6.22) en (6.20), concluimos (6.19). □

Para el resto de las matrices del nivel veremos en los cuatro lemas siguientes que se pueden expresar en términos de las demás matrices.

Lema 6.1.7. *Para cada* $1 \leq n \leq N$ *y* $1 \leq m \leq M$*, la matriz* $\tilde{J}^1_{n,m}$ *de la relación* (5.22˜) *se puede expresar como*

$$\begin{aligned} \tilde{J}^1_{n,m} = & I^t_{n-1,m}A_{n,m}I_{n,m} + I^t_{n-1,m}B_{n-1,m}I_{n-1,m}\tilde{\Gamma}_{n,m} + \\ & + I^t_{n-1,m}A^t_{n-1,m}I_{n-2,m}\tilde{\Gamma}_{n-1,m}\tilde{\Gamma}_{n,m} + \tilde{\Gamma}^t_{n-1,m}\tilde{J}^1_{n-1,m}\tilde{\Gamma}_{n,m}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Demostración. En la definición de la matriz $\tilde{J}^1_{n,m}$, dada por (5.26˜), sustituimos $\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}$ y $\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}$ y, usando las relaciones (5.23˜) y (5.22˜) sucesivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{J}^1_{n,m} = & I^t_{n-1,m}\langle x\mathbf{P}_{n-1,m}, I^t_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} + \tilde{\Gamma}^t_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle + \\ & + \tilde{\Gamma}^t_{n-1,m}\langle \tilde{J}^1_{n-1,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m} - \tilde{J}^2_{n-1,m}\mathbf{P}_{n-1,m-1} - \tilde{J}^3_{n-1,m}\mathbf{P}_{n-2,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\rangle \\ = & I^t_{n-1,m}A_{n,m}I_{n,m} + I^t_{n-1,m}\langle x\mathbf{P}_{n-1,m}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle\tilde{\Gamma}_{n,m} + \tilde{\Gamma}^t_{n-1,m}\tilde{J}^1_{n-1,m}\tilde{\Gamma}_{n,m}. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado (5.24) y (5.29˜) para las convenientes simplificaciones.

Seguidamente usamos (5.20) para eliminar $x\mathbf{P}_{n-1,m}$. En la expresión que resulta, podemos calcular todos los términos usando las ecuaciones (5.24)–(5.31), salvo el término $\langle \mathbf{P}_{n-2,m}, \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}\rangle$, que lo calculamos aplicando (5.23˜) para sustituir el polinomio $\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m}$. □

Con argumentos similares podemos probar la siguiente fórmula para $\tilde{J}^2_{n,m}$.

Lema 6.1.8. *La matriz $\tilde{J}^2_{n,m}$ de la relación* (5.22˜) *se puede expresar en términos del resto de matrices en la forma,*

$$\begin{aligned} -\tilde{J}^2_{n,m} =& I^t_{n-1,m} A_{n,m} \Gamma^t_{n,m} + I^t_{n-1,m} B_{n-1,m} I_{n-1,m} \mathcal{K}^t_{n,m} \\ &+ I^t_{n-1,m} A^t_{n-1,m} I_{n-2,m} \tilde{\Gamma}_{n-1,m} \mathcal{K}^t_{n,m} + \tilde{\Gamma}^t_{n-1,m} \tilde{J}^1_{n-1,m} \mathcal{K}^t_{n,m}, \end{aligned} \tag{6.25}$$

para cada $1 \leq n \leq N$ y $1 \leq m \leq M$.

Por último, obtenemos expresiones para las matrices en la RRTT (5.20˜) que satisface el sistema de polinomios $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$.

Lema 6.1.9. *Para $1 \leq n \leq N$ y $1 \leq m \leq M$, la matriz $\tilde{A}_{n,m}$ definida en* (5.24˜) *se puede expresar en la forma,*

$$\tilde{A}_{n,m} = I^t_{n,m-1} J^1_{n,m} I_{n,m} - I^t_{n,m-1} J^2_{n,m} \tilde{\Gamma}_{n,m} + \tilde{\Gamma}^t_{n,m-1} \tilde{A}_{n-1,m} \tilde{\Gamma}_{n,m}. \tag{6.26}$$

Demostración. A partir de la ecuación (5.24˜) que define la matriz $\tilde{A}_{n,m}$ y usando (5.23˜) para sustituir el polinomio $\tilde{\mathbf{P}}_{n,m-1}$ obtenemos,

$$\tilde{A}_{n,m} = I^t_{n,m-1} \langle y\mathbf{P}_{n,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m} \rangle + \tilde{\Gamma}^t_{n,m-1} \langle y\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,m} \rangle.$$

Entonces, sustituimos el polinomio $y\mathbf{P}_{n,m-1}$ usando la relación (5.22) y el polinomio $y\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1}$ usando la RRTT (5.20˜). Finalmente, teniendo en cuenta la ortogonalidad podemos simplificar convenientemente y deducimos el resultado. $\square$

Finalmente, siguiendo un procedimiento análogo podemos deducir la siguiente expresión para la matriz $\tilde{B}_{n,m-1}$.

Lema 6.1.10. *Sea $B_{n,m}$ la matriz de la RRTT* (5.20˜) *para el sistema de polinomios ortogonales $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$. Entonces, se verifica*

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{n,m-1} = & I^t_{n,m-1} \Gamma_{n,m} J^{1\,t}_{n,m} I_{n,m-1} - I^t_{n,m-1} \mathcal{K}_{n,m} J^{2\,t}_{n,m} I_{n,m-1} \\ & - \tilde{\Gamma}^t_{n,m-1} J^{3\,t}_{n,m} I_{n,m-1} - I^t_{n,m-1} J^3_{n,m} \tilde{\Gamma}_{n,m-1} + \tilde{\Gamma}^t_{n,m-1} \tilde{B}_{n-1,m-1} \tilde{\Gamma}_{n,m-1}, \end{aligned} \tag{6.27}$$

para $1 \leq n \leq N$ y $1 \leq m \leq M$.

6.2 Algoritmo

En esta sección usaremos las relaciones descritas en la Sección 6.1 para desarrollar un algoritmo que nos permita calcular los coeficientes de las relaciones de recurrencia del Teorema 5.2.7 en niveles superiores, digamos por ejemplo (n, m), a partir de los coeficientes en niveles inferiores, esto es, a partir de los niveles inferiores a $(n-1,m)$ y $(n,m-1)$. Para ello necesitaremos introducir ciertos parámetros que corresponderán biunívocamente al número de nuevos momentos necesarios para pasar al nivel superior. Concretamente, en cada nivel (n,m) construimos, si tienen sentido en función del nivel, las correspondientes matrices $\mathcal{K}_{n,m}$, $\Gamma_{n,m}$, $J^3_{n,m}$, $J^2_{n,m}$, $J^1_{n,m}$, $A_{n,m}$, $I_{n,m}$, $B_{n-1,m}$, $\tilde{A}_{n,m}$, $\tilde{J}^1_{n,m}$, $\tilde{J}^2_{n,m}$, $\tilde{B}_{n,m-1}$ y los polinomios $\mathbf{P}_{n,m}(x,y)$ y $\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x,y)$, usando las matrices y los polinomios de los niveles inferiores a $(n-1,m)$ y $(n,m-1)$.

Para construir dichas matrices, necesitaremos las siguientes matrices auxiliares U_m, de dimensión $m\times(m+1)$, definidas mediante

$$U_m=[I_m|0]=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix},$$

y $E_{m,m}$ de dimensión $m\times m$ que es la matriz nula salvo un uno en la entrada que ocupa la posición (m,m),

$$E_{m,m}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

En primer lugar, analicemos los parámetros que necesitaremos en cada paso.

En el nivel $(0,0)$ sólo tenemos un parámetro libre, correspondiente al primer momento $h_{0,0}=\langle 1,1\rangle$.

Para pasar del nivel $(n-1,0)$ al nivel $(n,0)$, con $n\geq 1$, necesitaremos dos parámetros nuevos, de la misma forma que desde el punto de vista de los momentos tendríamos que introducir los momentos $h_{2n-1,0}=\langle x^{2n-1},1\rangle$ y $h_{2n,0}=\langle x^{2n},1\rangle$.

Para aumentar un nivel de $(0,m-1)$ a $(0,m)$, con $m\geq 1$, aparecen dos parámetros nuevos, correspondientes a los momentos que habría que introducir en este nivel, $h_{0,2m-1}=\langle 1,y^{2m-1}\rangle$ y $h_{0,2m}=\langle 1,y^{2m}\rangle$.

Por último, para llegar al nivel (n,m), con $n,m\geq 1$, a partir de lo niveles inferiores a $(n-1,m)$ y $(n,m-1)$, necesitaremos cuatro parámetros nuevos, que corresponden a los momentos $h_{2n-1,2m-1}=\langle x^{2n-1},y^{2m-1}\rangle$, $h_{2n-1,2m}=\langle x^{2n-1},y^{2m}\rangle$, $h_{2n,2m-1}=\langle x^{2n},y^{2m-1}\rangle$ y $h_{2n,2m}=\langle x^{2n},y^{2m}\rangle$.

A continuación pasaremos a describir el algoritmo.

Nivel(0,0). En este paso sólo tenemos que definir el primer polinomio,

$$\mathbf{P}_{0,0}(x,y)=\tilde{\mathbf{P}}_{0,0}(x,y)=[s_{0,0}],$$

donde $s_{0,0}$ es el parámetro que introducimos en este nivel.

Nivel(n,0). Supongamos que todos los elementos de los niveles $(i, 0)$ para $0 \leq i \leq n-1$ son conocidos, y pasemos a construir los elementos del nivel $(n, 0)$. En el siguiente esquema marcamos con "$\circ$" el nivel que queremos construir, y con "$\bullet$" los niveles anteriores que son conocidos.

m	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$m-1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\vdots$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
0	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bigcirc$
	0	1	$\cdots$	$n-1$	n

Cuando $m = 0$, el polinomio $\mathbf{P}_{n,0}(x, y) = [p^0_{n,0}(x, y)]$ es, en realidad, una función escalar de variable real x y, además, por la unicidad de los sistemas $\{p^l_{n,m}\}$ y $\{\tilde{p}^l_{n,m}\}$, es evidente que

$$\tilde{\mathbf{P}}_{n,0}(x, y) = \begin{bmatrix} p^0_{0,0}(x, y) \\ p^0_{1,0}(x, y) \\ \vdots \\ p^0_{n,0}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Además, en este caso

$$I_{n,0} = [0, 0, \ldots, 0, 1]$$

es una matriz de dimensión $1 \times (n+1)$. Para construir el resto de las matrices en este nivel, necesitamos dos nuevos parámetros, $s_{2n-1,0}$ y $s_{2n,0}$.

Definimos la matrices de la RRTT (5.20) que, en este nivel, son matrices de dimensión 1×1, asignándoles los valores de esos parámetros:

$$A_{n,0} = s_{2n,0} > 0, \quad B_{n-1,0} = s_{2n-1,0}.$$

Entonces, los polinomios en este nivel vienen dados por las RRTT (5.20),

$$p^0_{n,0}(x, y) = A^{-1}_{n,0}\Big(xp^0_{n-1,0}(x, y) - B_{n-1,0}p^0_{n-1,0}(x, y) - A_{n-1,0}p^0_{n-2,0}(x, y)\Big), \quad (6.28)$$

con el convenio $p^0_{-1,0}(x, y) = 0$.

Por la definición de $\tilde{J}^1_{n,0}$ y (6.28) se tiene que $\tilde{J}^1_{n,0}$ es la siguiente matriz,

$$\tilde{J}^1_{n,0} = \begin{bmatrix} B_{0,0} & A_{1,0} & & & \\ A_{1,0} & B_{1,0} & A_{2,0} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{n-1,0} & B_{n-1,0} & A_{n,0} \end{bmatrix}.$$

Por último, de la definición se sigue que $\tilde{\Gamma}_{n,0} = U_n$. El resto de las matrices carecen de sentido en este nivel.

Nivel(0,m). Supongamos que hemos calculado todos los elementos de los niveles $(0, j)$ con $0 \leq j \leq m-1$ y queremos calcular los elementos del nivel $(0, m)$ a partir de ellos,

$$
\begin{array}{cccccc}
m & \circ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m-1 & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\vdots & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \bullet & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 0 & 1 & \cdots & n-1 & n
\end{array}
$$

En este caso $\tilde{\mathbf{P}}_{0,m}(x, y) = [\tilde{p}^0_{0,m}(x, y)]$ es un polinomio escalar en la variable y. Además, por la unicidad de los sistemas $\{p^l_{n,m}\}$ y $\{\tilde{p}^l_{n,m}\}$, tenemos

$$
\mathbf{P}_{0,m}(x, y) = \begin{bmatrix} \tilde{p}^0_{0,0}(x, y) \\ \tilde{p}^0_{0,1}(x, y) \\ \vdots \\ \tilde{p}^0_{0,m}(x, y) \end{bmatrix}.
$$

Por definición, es evidente que $\Gamma_{0,m} = U_m$ y $I_{0,m} = [0, 0, \ldots, 0, 1]^t$ de dimensión $(m + 1) \times 1$.

Introducimos ahora dos parámetros nuevos, $s_{0,2m-1}$ y $s_{0,2m}$, y definimos las matrices que aparecen en la RRTT (5.20˜) y que en este caso son matrices escalares, como

$$
\tilde{A}_{0,m} = s_{0,2m} > 0, \quad \tilde{B}_{0,m-1} = s_{2m-1,0}.
$$

Entonces, el polinomio $\tilde{\mathbf{P}}_{0,m}(x, y) = \tilde{p}^0_{0,m}(x, y)$ viene dado por la RRTT,

$$
\tilde{p}^0_{0,m}(x, y) = \tilde{A}^{-1}_{0,m}\Big(y\tilde{p}^0_{0,m-1}(x, y) - \tilde{B}_{0,m-1}\tilde{p}^0_{0,m-1}(x, y) - \tilde{A}_{0,m-1}\tilde{p}^0_{0,m-2}(x, y)\Big), \quad (6.29)
$$

con el convenio $\tilde{p}^0_{0,-1}(x, y) = 0$. Por otro lado, de la definición deducimos trivialmente que $J^1_{0,m}$ es una matriz de dimensión $m \times (m + 1)$ dada por,

$$
J^1_{0,m} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{0,0} & \tilde{A}_{0,1} & & & \\ \tilde{A}_{0,1} & \tilde{B}_{0,1} & \tilde{A}_{0,2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \tilde{A}_{0,m-1} & \tilde{B}_{0,m-1} & \tilde{A}_{0,m} \end{bmatrix}.
$$

Nivel(n,m). Para alcanzar el nivel (n, m) con $n \geq 1$ y $m \geq 1$, una vez conocidos todos los niveles anteriores, necesitaremos cuatro parámetros nuevos, $s_{2n-1,2m-1}$, $s_{2n-1,2m}$, $s_{2n,2m-1}$ y $s_{2n,2m}$. Para dar este paso y construir el nivel (n, m), marcado con "$\circ$", suponemos que tenemos toda la información en los niveles inmediatamente anteriores, marcados con "$\bullet$", como muestra el siguiente esquema:

$$
\begin{array}{cccccc}
m & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\
m-1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\vdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
1 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 & 0 & 1 & \cdots & n-1 & n
\end{array}
$$

Veamos, paso a paso, cómo se calculan cada una de las matrices involucradas en los coeficientes de las relaciones de recurrencia del Teorema 5.2.7.

• *Cálculo de* $\mathcal{K}_{n,m}$. En virtud de las relaciones dadas en el Lema 6.1.1 que se verifican entre las matrices del Teorema 5.2.7, veremos que para la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$ la única entrada nueva es $(\mathcal{K}_{n,m})_{m,n}$, puesto que el resto de la matriz puede ser calculado a partir de los datos que se tienen de niveles anteriores.

Concretamente, de la ecuación (6.1) se pueden recuperar las entradas en todas las filas de la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$, salvo las de la última fila. En efecto, en primer lugar, por la estructura de la matriz $\Gamma_{n,m-1}$ descrita en (5.32), se tiene que $\Gamma_{n,m-1}E_{m,m} = 0$ y, puesto que $U_{m-1}^t U_{m-1} + E_{m,m} = I_m$, podemos escribir

$$\Gamma_{n,m-1} = \Gamma_{n,m-1}(U_{m-1}^t U_{m-1} + E_{m,m}) = \Gamma_{n,m-1}U_{m-1}^t U_{m-1}.$$

Además, $\Gamma_{n,m-1}U_{m-1}^t$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal, luego es regular, lo que nos permite escribir la ecuación (6.1) en la forma,

$$U_{m-1}\mathcal{K}_{n,m} = -(\Gamma_{n,m-1}U_{m-1}^t)^{-1}(J_{n,m-1}^2 + \mathcal{K}_{n,m-1}\tilde{B}_{n-1,m-1})(\tilde{A}_{n-1,m}^t)^{-1}.$$

Observamos que $U_{m-1}\mathcal{K}_{n,m}$ es, precisamente, la matriz de dimensión $(m-1) \times n$ que se obtiene de $\mathcal{K}_{n,m}$ eliminando la última fila.

Análogamente, vemos que a partir de la ecuación (6.2) podemos reconstruir todas las columnas de la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$ a excepción de la última.

De forma similar a como hemos hecho anteriormente para $\Gamma_{n,m-1}$, podemos escribir

$$\tilde{\Gamma}_{n-1,m} = \tilde{\Gamma}_{n-1,m}(U_{n-1}^t U_{n-1} + E_{n,n}) = \tilde{\Gamma}_{n-1,m}U_{n-1}^t U_{n-1},$$

o lo que es lo mismo, $\tilde{\Gamma}_{n-1,m}^t = U_{n-1}^t(U_{n-1}\tilde{\Gamma}_{n-1,m}^t)$, siendo $U_{n-1}\tilde{\Gamma}_{n-1,m}^t$ una matriz triangular superior con entradas positivas en la diagonal. Por lo tanto, de la ecuación (6.2) obtenemos,

$$\mathcal{K}_{n,m}U_{n-1}^t = -A_{n,m-1}^{-1}(\tilde{J}_{n-1,m}^{2\,t} + B_{n-1,m-1}\mathcal{K}_{n-1,m})(U_{n-1}\tilde{\Gamma}_{n-1,m}^t)^{-1}.$$

Esta ecuación nos dice que la matriz $\mathcal{K}_{n,m}U_{n-1}^t$, de dimensión $m \times (n-1)$, obtenida a partir de $\mathcal{K}_{n,m}$ eliminando la última columna, se puede calcular a partir de los datos conocidos en los niveles anteriores.

Hasta ahora, hemos visto que podemos calcular todas las entradas de la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$ salvo el último elemento, $(\mathcal{K}_{n,m})_{m,n}$, que es donde finalmente introducimos el *primer parámetro* de este nivel. Por tanto, definimos la entrada en el lugar (m, n) de la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$ como

$$(\mathcal{K}_{n,m})_{m,n} = s_{2n-1,2m-1}.$$

Observemos que la relación (5.34) nos dice que no podemos elegir los parámetros de forma arbitraria, sino que se tienen que elegir de forma que la matriz $I - \mathcal{K}_{n,m}\mathcal{K}_{n,m}^t$ sea definida positiva. En particular, ha de ser

$$|s_{2n-1,2m-1}| < 1.$$

- *Cálculo de* $\Gamma_{n,m}$. En primer lugar, observamos que $I - \mathcal{K}_{n,m}\mathcal{K}_{n,m}^t$ es una matriz (simétrica) definida positiva si y sólo si $\mathcal{K}_{n,m}$ es una matriz contractiva, esto es, $||\mathcal{K}_{n,m}|| < 1$, siendo $\|\cdot\|$ la norma matricial inducida por la norma vectorial euclídea (nótese que $||\mathcal{K}_{n,m}||$ coincide con el mayor valor singular de $\mathcal{K}_{n,m}$).

Por otro lado, hemos visto anteriormente que $\Gamma_{n,m}U_m^t$ es una matriz triangular inferior que se obtiene al eliminar en $\Gamma_{n,m}$ la última columna de ceros. Entonces, si escribimos la ecuación (5.34) como

$$I - \mathcal{K}_{n,m}\mathcal{K}_{n,m}^t = (\Gamma_{n,m}U_m^t)(\Gamma_{n,m}U_m^t)^t,$$

tenemos que $\Gamma_{n,m}U_m^t$ es el factor inferior en la factorización de Cholesky de la matriz $I - \mathcal{K}_{n,m}\mathcal{K}_{n,m}^t$, lo que nos permite calcular la matriz $\Gamma_{n,m}$ añadiendo la última columna de ceros a $\Gamma_{n,m}U_m^t$.

- *Cálculo de* $J_{n,m}^3$ *y* $\tilde{J}_{n,m}^3$. Las matrices $J_{n,m}^3$ y $\tilde{J}_{n,m}^3$ se calculan directamente a partir de las igualdades (5.35) y (5.35˜), respectivamente.

- *Cálculo de* $J_{n,m}^2$. Para el cálculo de $J_{n,m}^2$ seguimos un proceso similar al del cálculo de $\mathcal{K}_{n,m}$. De la ecuación (6.3) escribimos,

$$U_{m-1}J_{n,m}^2 = (\Gamma_{n,m-1}U_{m-1}^t)^{-1}(-J_{n,m-1}^1\mathcal{K}_{n,m} + \mathcal{K}_{n,m-1}\tilde{A}_{n-1,m}),$$

que proporciona todos los elementos de la matriz $J_{n,m}^2$ salvo las entradas en la última fila. Para completar dicha fila, escribimos la ecuación (6.4) como

$$\begin{aligned}J^2_{n,m}U^t_{n-1} = &- A^{-1}_{n,m-1}(J^1_{n-1,m}A^t_{n-1,m}I_{n-2,m} - J^2_{n-1,m}\tilde{\Gamma}_{n-1,m}\tilde{J}^{1\,t}_{n-1,m}\\&+ J^2_{n-1,m}\mathcal{K}^t_{n-1,m}\tilde{J}^{2\,t}_{n-1,m} + J^3_{n-1,m}I^t_{n-2,m-1}\tilde{J}^{3\,t}_{n-1,m}\\&+ B_{n-1,m-1}J^2_{n-1,m} - A^t_{n-1,m-1}I_{n-2,m-1}\tilde{A}_{n-2,m}\\&+ A_{n,m-1}J^3_{n,m}I^t_{n-1,m-1}\mathcal{K}_{n-1,m})(U_{n-1}\tilde{\Gamma}^t_{n-1,m})^{-1},\end{aligned}$$

de donde obtenemos todas las entradas de $J^2_{n,m}$ salvo la última columna.

Finalmente, para el único elemento de $J^2_{n,m}$ que no podemos determinar a partir de los niveles anteriores, asignamos a $(J^2_{n,m})_{m,n}$ el *segundo parámetro* de este nivel,

$$(J^2_{n,m})_{m,n} = s_{2n-1,2m}.$$

- *Cálculo de $J^1_{n,m}$.* Para la matriz $J^1_{n,m}$, usamos los *dos últimos parámetros* de que disponemos. Definimos las dos últimas entradas de la última fila de la matriz $J^1_{n,m}$ como,

$$(J^1_{n,m})_{m,m} = s_{2n,2m-1}, \qquad (J^1_{n,m})_{m,m+1} = s_{2n,2m}.$$

Obsérvese que, puesto que la matriz $J^1_{n,m}$ tiene entradas positivas en la diagonal, tenemos que elegir los parámetros de forma que

$$s_{2n,2m} > 0.$$

Veamos que el resto de las entradas de la matriz las podemos calcular a partir de los niveles anteriores. Concretamente, de la ecuación (6.12),

$$U_{m-1}J^1_{n,m} = (\Gamma_{n,m-1}U^t_{m-1})^{-1}J^1_{n,m-1}\Gamma_{n,m},$$

de donde obtenemos la matriz $J^1_{n,m}$ salvo la última fila.

Consideremos ahora la matriz $\Gamma^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1}$, que tiene sus dos últimas filas nulas. La matriz que resulta de eliminar esas dos filas es triangular superior de dimensión $(m-1)\times(m-1)$ y, además, las entradas en la diagonal son positivas, con lo que es una matriz regular. Además, dicha matriz se puede escribir en la forma $\Gamma^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1} = U_{m-1}U_m\Gamma^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1}$. Puesto que $U^t_mU^t_{m-1}U_{m-1}U_m = I_{m+1} - E_{m,m} - E_{m+1,m+1}$, entonces,

$$\Gamma^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1} = U^t_mU^t_{m-1}(U_{m-1}U_m\Gamma^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1}).$$

Finalmente, combinando la anterior ecuación con la fórmula (6.13) vemos que

$$\begin{aligned}&J^1_{n,m}U^t_mU^t_{m-1} =\\&\quad=(J^{1\,t}_{n,m-1} + J^3_{n,m}\mathcal{K}^t_{n,m-1} + J^2_{n,m}\mathcal{K}^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1})(U_{m-1}U_m\Gamma^t_{n,m}\Gamma^t_{n,m-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Esta matriz es exactamente la que se obtiene eliminando las dos últimas columnas de $J^1_{n,m}$. Esto completa el cálculo de la matriz $J^1_{n,m}$.

- *Cálculo de $A_{n,m}$.* Denotemos por $\Sigma_{n-1,m}$ la matriz de dimensión $(m+1) \times (m+1)$ que se obtiene por yuxtaposición de la matriz $\Gamma_{n-1,m}$ con la última fila de $J^1_{n-1,m}$. Entonces $\Sigma_{n-1,m}$ es una matriz triangular inferior con entradas positivas en la diagonal y, por tanto, invertible. A partir de la ecuación (6.14) y de la última fila de la ecuación (6.15) podemos expresar $\Sigma_{n-1,m}A_{n,m}$ en términos de matrices conocidas, lo que nos permite calcular la matriz $A_{n,m}$.
- *Cálculo de $I_{n,m}$.* Si consideramos la ecuación (6.16),

$$U_m I_{n,m} = -(\Gamma_{n,m} U^t_m)^{-1} \mathcal{K}_{n,m} \tilde{\Gamma}_{n,m},$$

se puede calcular la matriz $I_{n,m}$ salvo la última fila, que sabemos que es de la forma $[0, 0, \ldots, 0, 1]$.
- *Cálculo de $B_{n-1,m}$.* De forma análoga al proceso para calcular $A_{n,m}$, por yuxtaposición de la ecuación (6.18) y la última fila de (6.19) obtenemos una expresión para $\Sigma_{n-1,m}B_{n-1,m}$ en términos de matrices conocidas, lo que nos permite calcular $B_{n-1,m}$, ya que $\Sigma_{n-1,m}$ es una matriz regular.
- *Cálculo de $\tilde{J}^1_{n,m}$, $\tilde{J}^2_{n,m}$, $\tilde{A}_{n,m}$ y $\tilde{B}_{n,m-1}$.* Estas matrices se calculan directamente a partir de las ecuaciones (6.24), (6.25), (6.26) y (6.27), respectivamente.
- *Cálculo de los polinomios $\mathbf{P}_{n,m}$ y $\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}$.* Finalmente, calculamos los vectores de polinomios $\mathbf{P}_{n,m}$ a partir de las relaciones (5.21) y (5.22), de forma análoga a como hicimos con $A_{n,m}$.

Por yuxtaposición de la ecuación (5.21) con la última fila de (5.22) obtenemos una fórmula para $\Sigma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}$ en términos de expresiones conocidas, lo que nos permite obtener $\mathbf{P}_{n,m}$, puesto que $\Sigma_{n,m}$ es una matriz regular.

Por último, calculamos el polinomio $\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}$ directamente a partir de la ecuación (5.23˜).

6.3 Construcción del funcional lineal

El algoritmo descrito en la sección anterior nos permitirá determinar el funcional de momentos con respecto al cual los polinomios son ortogonales, en términos de los coeficientes dados en las fórmulas de recurrencia.

Teorema 6.3.1. *Dados dos números naturales fijos $N, M \in \mathbb{N}$ y un conjunto de números reales $\{s_{0,0}, \ldots, s_{2N,2M}\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que, de acuerdo con el algoritmo descrito en la Sección 6.2, podemos construir las matrices,*

- $A_{i+1,0}, B_{i,0} \in \mathcal{M}^{1\times 1}$ *para* $i = 0, \ldots, N-1$,
  $\tilde{A}_{0,j+1}, \tilde{B}_{0,j} \in \mathcal{M}^{1\times 1}$ *para* $j = 0, \ldots, M-1$.

- $\mathcal{K}_{i,j}, J^2_{i,j} \in \mathcal{M}^{j\times i}$ *para* $i = 1, \ldots, N$ *y* $j = 1, \ldots, M$.
- $J^1_{i,j} \in \mathcal{M}^{j\times(j+1)}$ *para* $i = 1, \ldots, N$ *y* $j = 1, 2 \ldots, M$,

y los sistemas de polinomios

- $\mathbf{P}_{n,m}(x, y)$ *para* $n = 0, \ldots, N$ *y* $m = 0, \ldots, M$,
- $\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}(x, y)$ *para* $n = 0, \ldots, N$ *y* $m = 0, \ldots, M$,

Entonces, existe un funcional lineal definido positivo hasta el nivel (N, M),

$$\mathbf{U} : \mathbb{P}_{2N,2M}[x, y] \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{U}, \mathbf{P}_{i,m}\, \mathbf{P}^t_{j,m}\rangle = \delta_{i,j} I_{m+1}, \quad i, j = 0 \ldots, N, \quad m = 0, \ldots, M, \\ &\langle \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{P}}_{n,i}\, \tilde{\mathbf{P}}^t_{n,j}\rangle = \delta_{i,j} I_{n+1}, \quad i, j = 0 \ldots, M, \quad n = 0, \ldots, N. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Demostración. La construcción del funcional lineal se realizará por inducción.

En primer lugar, para $n = m = 0$ definimos

$$\langle \mathbf{U}, 1\rangle = \frac{1}{s^2_{0,0}},$$

siendo $s_{0,0}$ el primer parámetro correspondiente al nivel $(0, 0)$. Así, como por el algoritmo hemos construido $p^0_{0,0} = \tilde{p}^0_{0,0} = s_{0,0}$, se verifica

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{P}_{0,0}\mathbf{P}_{0,0}\rangle = \langle \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{P}}_{0,0}\tilde{\mathbf{P}}_{0,0}\rangle = 1.$$

Si $m = 0$, para $1 \le n \le N$ construimos los polinomios $\mathbf{P}_{n,0} = p^0_{n,0}$ a partir de la ecuación (6.28), y definimos $\mathbf{U}$ sobre los monomios x^n tal que se verifica

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{P}_{i,0}\, \mathbf{P}_{j,0}\rangle = \delta_{i,j},$$

con lo que establecemos un funcional lineal definido positivo sobre $\mathbb{P}_{2N,0}[x, y]$.

De forma análoga, si $n = 0$ y $1 \le m \le M$, construimos $\tilde{\mathbf{P}}_{0,k} = \tilde{p}^0_{0,k}$ usando (6.29) y definimos $\mathbf{U}$ sobre los monomios y^m de forma que

$$\langle \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{P}}_{0,i}\, \tilde{\mathbf{P}}_{0,j}\rangle = \delta_{i,j},$$

que determina el funcional lineal sobre $\mathbb{P}_{0,2M}[x, y]$.

Así tenemos ya el funcional lineal definido positivo sobre $\mathbb{P}_{2N,0}[x, y]+\mathbb{P}_{0,2M}[x, y]$ verificando la ecuación (6.30) cuando $m = 0$ ó $n = 0$.

Supongamos ahora, como hipótesis de inducción, que tenemos el funcional $\mathbf{U}$ definido en todos los niveles inferiores a (n, m), siendo $1 \leq n \leq N$ y $1 \leq m \leq M$. Esto es, está definido sobre los monomios

$$x^i y^j,\ x^{2n} y^j,\ x^i y^{2m}, \quad i = 0, \ldots, 2n-2, \quad j = 0, \ldots, 2m-2.$$

Para dar el paso inductivo, tendremos que definir el funcional sobre los monomios

$$x^{2n-1} y^{2m-1},\ x^{2n} y^{2m-1},\ x^{2n-1} y^{2m},\ x^{2n} y^{2m}.$$

En primer lugar, definimos $\mathbf{U}$ sobre $x^{2n-1}y^{2m-1}$ de forma que se verifique la igualdad

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{P}_{n,m-1}\, \tilde{\mathbf{P}}^t_{n-1,m} \rangle = \mathcal{K}_{n,m}. \tag{6.31}$$

Veamos que la ecuación anterior es consistente con la definición de $\mathbf{U}$ en los niveles inferiores. Concretamente, veremos que la definición del funcional lineal en los niveles inferiores junto con el proceso de construcción de la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$ implican automáticamente la igualdad en la mayor parte de las entradas de (6.31). Por un lado, observemos que, por la construcción de la matriz $\mathcal{K}_{n,m}$ y la definición de $\mathbf{U}$ en los niveles anteriores (ver Lema 6.1.1), se tiene

$$\langle \mathbf{U}, \Gamma_{n,m-1} \mathbf{P}_{n,m-1}\, \tilde{\mathbf{P}}^t_{n-1,m} \rangle = \Gamma_{n,m-1} \mathcal{K}_{n,m}.$$

De forma similar, usando la segunda relación con la que se construye $\mathcal{K}_{n,m}$, es decir, la última fila de la ecuación (6.2), vemos que

$$\langle \mathbf{U}, E_{m,m} \mathbf{P}_{n,m-1}\, (\tilde{\Gamma}_{n-1,m} \tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m})^t \rangle = E_{m,m} \mathcal{K}_{n,m} \tilde{\Gamma}^t_{n-1,m}.$$

Estas dos ecuaciones muestran que (6.31) es cierto, salvo, quizás, en la entrada (m, n). Usamos este hecho para extender el funcional a $x^{2n-1}y^{2m-1}$. Esto es, definimos $\langle \mathbf{U}, x^{2n-1}y^{2m-1} \rangle$ de forma que se verifique (6.31).

De forma similar a como hemos usado la construcción de $\mathcal{K}_{n,m}$ para extender el funcional a $x^{2n-1}y^{2m-1}$, podemos usar la construcción de la matriz $J^2_{n,m}$ para definir el funcional sobre $x^{2n-1}y^{2m}$ de forma que la relación

$$J^2_{n,m} = -\langle \mathbf{U}, y \mathbf{P}_{n,m-1}\, \tilde{\mathbf{P}}^t_{n-1,m} \rangle \tag{6.32}$$

sea cierta.

Finalmente, usamos la construcción de $J^1_{n,m}$ para definir el funcional sobre los monomios restantes que completan el nivel, esto es, sobre $x^{2n}y^{2m-1}$ y $x^{2n}y^{2m}$. Definimos $\langle \mathbf{U}, x^{2n}y^{2m-1} \rangle$ y $\langle \mathbf{U}, x^{2n}y^{2m} \rangle$ de modo que se verifique

$$J^1_{n,m} = \langle \mathbf{U}, y \mathbf{P}_{n,m-1}\, \mathbf{P}^t_{n,m} \rangle.$$

Con esto se completa la extensión del funcional lineal $\mathbf{U}$ hasta el nivel (n, m). Sólo falta comprobar que se verifican las relaciones de ortogonalidad (6.30).

Según el algoritmo, la matriz $J^3_{n,m}$ se define como

$$J^3_{n,m} = -\mathcal{K}_{n,m}\tilde{A}^t_{n-1,m}.$$

Entonces, con los mismos argumentos usados en la demostración de (5.35), podemos comprobar que se verifica la igualdad

$$J^3_{n,m} = -\langle \mathbf{U}, y\mathbf{P}_{n,m-1}\,\tilde{\mathbf{P}}^t_{n-1,m-1}\rangle. \tag{6.33}$$

Recordemos que los polinomios $\mathbf{P}_{n,m}$ se construyen acoplando la ecuación (5.21) con la última fila de la ecuación (5.22). Entonces, las relaciones de ortogonalidad en los niveles anteriores, junto con (6.31), (6.32) y (6.33) implican que

$$\langle \mathbf{U}, \Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}\,\tilde{\mathbf{P}}^t_{n-1,k}\rangle = \langle \mathbf{U}, E_{m,m}J^1_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}\,\tilde{\mathbf{P}}^t_{n-1,k}\rangle = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

y, en consecuencia,

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{P}_{n,m}\,\tilde{\mathbf{P}}^t_{n-1,k}\rangle = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

De la última ecuación se sigue

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{P}_{n,m}\,\mathbf{P}^t_{k,m}\rangle = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Finalmente, de las igualdades

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{U}, \Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}\,(\Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m})^t\rangle = \Gamma_{n,m}\Gamma^t_{n,m},\\
&\langle \mathbf{U}, E_{m,m}J^1_{n,m}\mathbf{P}_{n,m}\,\mathbf{P}^t_{n,m}\rangle = E_{m,m}J^1_{n,m},
\end{aligned}$$

se deduce $\langle \mathbf{U}, \mathbf{P}_{n,m}\,\mathbf{P}^t_{n,m}\rangle = I_{m+1}$.

De forma análoga se comprueban las condiciones de ortogonalidad para los polinomios $\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}$. □

Nota 6.3.2. Observemos que la posibilidad de implementar el algoritmo es equivalente a que los parámetros $\{s_{0,0}, \ldots, s_{2N,2M}\}$ satisfagan las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}
&s_{2i,2j} > 0, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \ldots, M,\\
&||\mathcal{K}_{i,j}|| < 1, \quad i = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, M,
\end{aligned} \tag{6.34}$$

siendo $\|\cdot\|$ la norma matricial inducida por la norma euclídea. De hecho, la positividad de los parámetros con índice par, $s_{2i,2j} > 0$, se sigue de (5.22) y la normalización adoptada en (5.13) relativa a la positividad del coeficiente conductor.

Además, la ecuación (5.34) implica que la matriz $\mathcal{K}_{i,j}$ ha de ser una contracción, esto es, $||\mathcal{K}_{i,j}|| < 1$.

Nota 6.3.3. Antes de concluir la sección, observemos que la construcción del funcional lineal descrita anteriormente proporciona un criterio sencillo para determinar cuando un funcional dado se puede extender a un nivel superior. Esto es, dada una familia de momentos tal que existe el funcional lineal definido positivo sobre $\mathbb{P}_{2n-2,2m}[x,y] + \mathbb{P}_{2n,2m-2}[x,y]$, entonces cualquier conjunto de momentos,

$$\{h_{2n-1,2m-1},\ h_{2n-1,2m},\ h_{2n,2m-1},\ h_{2n,2m}\},$$

cuyos parámetros asociados verifiquen las condiciones (6.34), es válido para definir una extensión del funcional a $\mathbb{P}_{2n,2m}[x,y]$ de manera que siga siendo definido positivo.

6.4 La condición $\mathcal{K}_{n,m} = 0$ y el producto tensorial de medidas en $\mathbb{R}$

Esta sección se dedicará al estudio de familias de polinomios ortogonales en dos variables que se obtienen como producto tensorial de dos familias de polinomios ortogonales en una variable. Concretamente, queremos ver cuando la familia $\mathbf{P}_{i,m}(x,y)$ se puede expresar en la forma

$$\mathbf{P}_{i,m}(x,y) = p_i(x) \begin{bmatrix} q_0(y) \\ \vdots \\ q_m(y) \end{bmatrix}, \tag{6.35}$$

para ciertas familias de polinomios ortogonales en una variable $\{p_i(x)\}_i$ y $\{q_j(y)\}_j$.

A continuación mostramos algunas consecuencias de la hipótesis (6.35).

Proposición 6.4.1. *Supongamos que* (6.35) *se satisface para* $i = 0,1,\dots,n$. *Entonces, para cada* $i = 0,1,\dots,n$ *y* $j = 0,1,\dots,m$ *se verifica*

$$\mathbf{P}_{i,j}(x,y) = p_i(x) \begin{bmatrix} q_0(y) \\ \vdots \\ q_j(y) \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{P}}_{i,j}(x,y) = q_j(y) \begin{bmatrix} p_0(x) \\ \vdots \\ p_i(x) \end{bmatrix}. \tag{6.36}$$

Como consecuencia, las matrices de las relaciones de recurrencia del Teorema 5.2.7 son

$$\mathcal{K}_{ij} = 0, \quad J^2_{i,j} = 0, \quad A_{i,j} = a_i I_{j+1}, \quad \tilde{A}_{i,j} = \tilde{a}_j I_{i+1}, \tag{6.37}$$

$$J^1_{i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_1 & & & \\ \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \tilde{a}_{j-1} & \tilde{b}_{j-1} & \tilde{a}_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}^1_{i,j} = \begin{bmatrix} b_0 & a_1 & & & \\ a_1 & b_1 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} & a_i \end{bmatrix},$$

donde a_i, b_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$ *y* $\tilde{a}_j, \tilde{b}_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *son los coeficientes de las RRTT que satisfacen las sucesiones de polinomios ortogonales* $\{p_i(x)\}_i$ *y* $\{q_j(y)\}_j$, *respectivamente,*

$$\begin{aligned} xp_i(x) &= a_{i+1}p_{i+1}(x) + b_ip_i(x) + a_ip_{i-1}(x), \\ yq_j(y) &= \tilde{a}_{j+1}q_{j+1}(y) + q_j\tilde{p}_j(y) + \tilde{a}_jq_{j-1}(y). \end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar, si se verifica (6.35), entonces la propiedad de ortogonalidad $\langle \mathbf{P}_{i,m}, \mathbf{P}_{l,m} \rangle = \delta_{i,l} I_{m+1}$ es equivalente a

$$\langle p_i(x)q_j(y),\, p_l(x)q_k(y) \rangle = \delta_{i,l}\delta_{j,k}.$$

De esta relación, y teniendo en cuenta la unicidad de los sistemas de polinomios $\{\mathbf{P}_{n,m}\}$ y $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}$, obtenemos fácilmente (6.36). La segunda afirmación del enunciado es consecuencia directa de (6.36). □

Nota 6.4.2. Obsérvese que, si las familias de polinomios $\{p_i(x)\}_i$ y $\{q_j(y)\}_j$ satisfacen las igualdades dadas en (6.36), entonces, para toda constante no nula $c \in \mathbb{R}$, los polinomios

$$\hat{p}_i(x) = cp_i(x) \quad \text{y} \quad \hat{q}_j(y) = q_j(y)/c, \tag{6.38}$$

también verifican (6.36).

Recíprocamente, si tenemos cuatro familias de polinomios ortogonales $\{p_i(x)\}_i$ y $\{q_j(y)\}_j$, $\{\hat{p}_i(x)\}_i$ y $\{\hat{q}_j(y)\}_j$, verificando (6.36), entonces existe una constante no nula c para la que se verifica (6.38).

Por tanto, podemos concluir que las familias de polinomios $\{p_i(x)\}_i$ y $\{q_j(y)\}_j$ que verifican (6.36) son únicas, salvo un factor constante.

En el siguiente lema establecemos una condición suficiente para que se verifiquen las condiciones descritas en la Proposición 6.4.1.

Lema 6.4.3. *Supongamos que las matrices* $\mathcal{K}_{i,j}$ *involucradas en las relaciones de recurrencia* (5.21) *son nulas para todo* $i = 1, \ldots, (n+1)$ *y* $j = 1, \ldots, (m+1)$. *Entonces se verifica* (6.36) *para cada* $i \le n$ *y* $j \le m$.

Demostración. Haremos la demostración por inducción. El resultado es trivial si $n = 0$ ó $m = 0$. Supongamos que el resultado es cierto para los niveles $(n-1, m)$ y $(n, m-1)$ y veamos que se verifica en el nivel (n, m).

Por la hipótesis de inducción junto con la Proposición 6.4.1 se deducen las igualdades (6.36) y (6.37) en los siguientes casos,

- si $i \le n-1$ y $j \le m$,

- si $i \leq n$ y $j \leq m-1$.

En particular, tenemos que la matriz $A_{n,m-1}$ es diagonal. Concretamente, $A_{n,m-1} = a_n I_m$.

Las ecuaciones (5.34), (5.35), (6.1) y (6.2), junto con $\mathcal{K}_{i,j} = 0$ para $i \leq n+1$ y $j \leq m+1$, nos permiten deducir que

$$\Gamma_{i,j} = [I_j|0], \; J^3_{i,j} = 0 \;\text{ y }\; J^2_{i,j} = 0, \quad \text{para } \; i \leq n+1, \; j \leq m. \tag{6.39}$$

Usando la igualdad anterior combinada con las relaciones (6.12) y (6.13) que definen $J^1_{n,m}$, vemos que dicha matriz es de la forma,

$$J^1_{n,m} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_1 & & & & \\ \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \tilde{a}_{m-2} & \tilde{b}_{m-2} & \tilde{a}_{m-1} & \\ & & & \tilde{a}_{m-1} & c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \tag{6.40}$$

para ciertos números reales c_1, c_2.

Por otro lado, la ecuación (6.14), junto con (6.37) y (6.39), muestra que $A_{n,m}$ es diagonal a excepción de la última fila, en la que aparecen ciertos escalares $d_1, d_2, \ldots, d_m, d$.

$$A_{n,m} = \begin{bmatrix} a_n & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_n & \\ d_1 & \ldots & d_m & d \end{bmatrix}, \tag{6.41}$$

Sustituimos (6.40), (6.41) y $A_{n,m-1} = a_n I_m$ en la ecuación (6.15), de modo que, comparando las entradas de la última fila, obtenemos las igualdades,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m d_j &= 0, \quad j = 1, \ldots, m-2, \\ \tilde{a}_{m-1} a_n + \tilde{a}_m d_{m-1} &= a_n \tilde{a}_{m-1}, \\ \tilde{b}_{m-1} a_n + \tilde{a}_m d_m &= a_n c_1, \\ \tilde{a}_m d &= a_n c_2, \end{aligned} \tag{6.42}$$

de donde deducimos directamente que $d_1 = d_2 = \ldots = d_{m-1} = 0$.

En estas condiciones, la ecuación (6.4) para $J^2_{n+1,m}$ se reduce a la forma

$$0 = J^1_{n,m} A^t_{n,m} I_{n-1,m} - A^t_{n,m-1} I_{n-1,m-1} \tilde{A}_{n-1,m}.$$

Además, usando (6.37) podemos escribir la ecuación anterior como

$$J^1_{n,m} A^t_{n,m} I_{n-1,m} = a_n \tilde{a}_m I_{n-1,m-1}.$$

De (6.16) deducimos que, para todo $i \leq n$ y $j \leq m$, la matriz $I_{i,j}$ es nula, a excepción de la entrada en la posición $(j+1, i+1)$. Por lo tanto, la igualdad anterior simplemente se traduce en que la última columna de la matriz $J^1_{n,m} A^t_{n,m}$ es $[0, 0, \dots, 0, a_n \tilde{a}_m]^t$.

Entonces, usando (6.40) y (6.41) vemos que las dos últimas entradas de la última columna de la matriz $J^1_{n,m} A^t_{n,m}$ son $\tilde{a}_{m-1} d_m$ y $c_2 d$, con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{m-1} d_m &= 0, \\ c_2 d &= a_n \tilde{a}_m. \end{aligned}$$

De la primera de las igualdades anteriores deducimos $d_m = 0$. La segunda igualdad, junto con la condición (6.39), implica que $d^2 = a_n^2$ y $c_2^2 = \tilde{a}_m^2$ y, como d, c_2, a_n y $\tilde{a}_m$ son números positivos, deducimos $d = a_n$ y $c_2 = \tilde{a}_m$. Finalmente, de la penúltima igualdad en (6.42) se sigue $c_1 = \tilde{b}_{m-1}$. Entonces, hemos probado que $A_{n,m} = a_n I_{m+1}$ y $J^1_{n,m}$ viene dada por

$$J^1_{n,m} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_1 & & & \\ \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \tilde{a}_{m-1} & \tilde{b}_{m-1} & \tilde{a}_m \end{bmatrix}.$$

Por último, (6.36) y (6.37) para $i = n$ y $j = m$ se deducen trivialmente a partir de la última fórmula y las relaciones de recurrencia (5.21), (5.22) y (5.23), con lo que concluimos la demostración. □

Como corolario, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.4.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

i) Para todo n y m, el vector de polinomios $\mathbf{P}_{n,m}$ es un producto tensorial de las familias de polinomios escalares $\{p_k(x)\}_k$ y $\{\tilde{p}_j(y)\}_j$, es decir,

$$\mathbf{P}_{n,m}(x, y) = p_n(x) \begin{bmatrix} \tilde{p}_0(y) \\ \vdots \\ \tilde{p}_m(y) \end{bmatrix}.$$

ii) Las matrices $\mathcal{K}_{n,m}$ son nulas para todo $n, m \geq 1$.

A continuación queremos probar un resultado análogo al Teorema 6.4.4 en el que se den condiciones necesarias y suficientes para que se verifique (6.35) hasta cierto nivel (n, m) dado.

Para ello necesitaremos algunos resultados previos que mostramos en el siguiente lema.

Lema 6.4.5. *Si para cada* $i = 1, \ldots, n$ *y* $j = 1, \ldots, m$ *se tiene* $\mathcal{K}_{i,j} = 0$ *y la entrada en la posición* (j, i) *de la matriz* $J^2_{i,j}$ *se anula,* $(J^2_{i,j})_{j,i} = 0$*, entonces* (6.36) *se verifica para* $i < n$ *y* $j \leq m$*, ó* $i \leq n$ *y* $j < m$*.*

Demostración. Probaremos el resultado por inducción. El enunciado se verifica trivialmente si $n = 0$ o $m = 0$. Supongamos ahora, como hipótesis de inducción, que el resultado es cierto para los niveles $(n-1, m)$ y $(n, m-1)$ y veamos que también se verifica en el nivel (n, m).

La hipótesis de inducción implica que (6.36) y (6.37) son válidas en los siguientes casos,

- si $i \leq n-2$ y $j \leq m$,
- si $i \leq n-1$ y $j \leq m-1$,
- si $i \leq n$ y $j \leq m-2$.

Puesto que $\mathcal{K}_{i,j} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$, se tiene que

$$J^3_{i,j} = 0 \text{ y } \Gamma_{i,j} = [I_j|0] \text{ para } i = 1, \ldots, n \text{ y } j = 1, \ldots, m. \tag{6.43}$$

Por otro lado, de la ecuación (6.2) deducimos que $\tilde{J}^2_{n-1,m} = 0$, lo que, combinado con (6.25) para $\tilde{J}^2_{n-1,m}$, implica que

$$I^t_{n-2,m} A_{n-1,m} \Gamma^t_{n-1,m} = 0. \tag{6.44}$$

Por la hipótesis de inducción junto con las ecuaciones (6.3) y (6.4) podemos probar que también $J^2_{n-1,m} = 0$. En efecto, es trivial comprobar que el término de la derecha de (6.3) se anula, mientras que en el término de la derecha de (6.4) sólo hay dos sumandos eventualmente no nulos,

$$J^1_{n-2,m} A^t_{n-2,m} I_{n-3,m} - A^t_{n-2,m-1} I_{n-3,m-1} \tilde{A}_{n-3,m}.$$

En virtud de (6.37) la expresión anterior se anula y, por lo tanto, todos los elementos de la matriz $J^2_{n-1,m}$ son nulos salvo, quizás, $(J^2_{n-1,m})_{m,n-1}$. Pero, por las hipótesis del lema, sabemos que esta entrada ha de ser nula.

De la fórmula (6.37) y de las ecuaciones (6.12) y (6.13), que determinan la matriz $J^1_{n-1,m}$, se sigue que

$$J^1_{n-1,m} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_1 & & & & \\ \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \tilde{a}_{m-2} & \tilde{b}_{m-2} & \tilde{a}_{m-1} & \\ & & & \tilde{a}_{m-1} & c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \tag{6.45}$$

donde c_1, c_2 son números reales. La ecuación (6.14) para $A_{n-1,m}$ combinada con (6.37) implica

$$A_{n-1,m} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \\ d_1 & \dots & d_m & d \end{bmatrix} \tag{6.46}$$

para ciertos escalares $d_1, d_2, \dots, d_m, d$. Si sustituimos (6.46) en (6.44) y usamos (6.43), deducimos que $d_1 = d_2 = \cdots = d_m = 0$ así como que la matriz $A_{n-1,m}$ es diagonal

$$A_{n-1,m} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \\ & & & d \end{bmatrix}. \tag{6.47}$$

Finalmente, si escribimos la ecuación (6.15) para $n-1$ y sustituimos (6.47), comparando las dos últimas entradas de la última fila obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{m-1} a_{n-1} &= a_{n-1} c_1, \\ \tilde{a}_m d &= a_{n-1} c_2. \end{aligned} \tag{6.48}$$

De la primera igualdad deducimos $c_1 = \tilde{b}_{m-1}$. Por otro lado, observamos que la última columna del término de la izquierda de (6.4) se anula, por lo que la última entrada en la última columna del término de la derecha en (6.4) también se anula, esto es,

$$c_2 d = a_{n-1} \tilde{a}_m. \tag{6.49}$$

Por tanto, de (6.48) y (6.49) deducimos $c_2 = \tilde{a}_m$ y $d = a_{n-1}$, con lo que $A_{n-1,m} = a_{n-1} I_{m+1}$ y

$$J^1_{n-1,m} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_1 & & & \\ \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \tilde{a}_{m-1} & \tilde{b}_{m-1} & \tilde{a}_m \end{bmatrix},$$

lo que, junto con (5.22), nos permite deducir que las ecuaciones (6.36) y (6.37) también son válidas cuando $i = n - 1$ y $j = m$. De forma análoga podemos probar que dichas ecuaciones se verifican para $i = n$ y $j = m - 1$, con lo que se completa el proceso inductivo. □

Corolario 6.4.6. *Dados $n, m \geq 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, se verifica (6.35), es decir, el vector de polinomios $\mathbf{P}_{i,m}$ es un producto tensorial de las familias de polinomios ortogonales escalares $\{p_k(x)\}_k$ y $\{q_j(y)\}_j$.

ii) Se verifican las condiciones

- $\mathcal{K}_{i,j} = 0$ *para todo* $i \leq n$ *y* $j \leq m$,
- $(J^2_{i,j})_{j,i} = 0$ *si* $i = n$ *ó* $j = m$,
- $(J^1_{n,m})_{m,m+1} = \tilde{A}_{0,m}$ *y* $(J^1_{n,m})_{m,m} = \tilde{B}_{0,m-1}$.

6.5 Algunos ejemplos numéricos

Para concluir el capítulo, presentamos en esta sección algunos ejemplos numéricos que muestran la implementación del algoritmo descrito en la Sección 6.2.

Ejemplo 6.5.1. De acuerdo con los criterios descritos en (6.34), elegimos los parámetros $s_{i,j}$ siguientes,

$n \diagdown m$	0	1		2	
0	$s_{0,0} = 0.7543$	$s_{0,1} = 0$	$s_{0,2} = 0.4633$	$s_{0,3} = 0$	$s_{0,4} = 0.4997$
1	$s_{1,0} = 0$	$s_{1,1} = -0.1185$	$s_{1,2} = 0$	$s_{1,3} = -0.1128$	$s_{1,4} = 0$
	$s_{2,0} = 0.4634$	$s_{2,1} = 0$	$s_{2,2} = 0.4681$	$s_{2,3} = 0$	$s_{2,4} = 0.4998$
2	$s_{3,0} = 0$	$s_{3,1} = -0.1128$	$s_{3,2} = 0$	$s_{3,3} = -0.1073$	$s_{3,4} = 0$
	$s_{4,0} = 0.4997$	$s_{4,1} = 0$	$s_{4,2} = 0.4682$	$s_{4,3} = 0$	$s_{4,4} = 0.4997$

En primer lugar implementamos el algoritmo en los niveles $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(2,0)$. Nótese que en estos niveles la única restricción en los parámetros es la positividad de $s_{2i,0}$ y $s_{0,2j}$.

A continuación, implementamos el algoritmo y calculamos directamente la matriz $\mathcal{K}_{1,1} = [s_{1,1}]$:

$$\mathcal{K}_{1,1} = [-0.1185].$$

$\mathcal{K}_{1,1}$ es obviamente una matriz contractiva. Por lo tanto, podemos calcular el resto de las matrices y polinomios del nivel $(1,1)$.

Seguimos con los niveles $(1,2)$ y $(2,1)$. Obtenemos,

$$\mathcal{K}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1128 \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{K}_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1128 \end{bmatrix},$$

que, obviamente, también son contracciones. Entonces, calculamos el resto de matrices y polinomios correspondientes a estos niveles.

Por último, en el nivel $(2,2)$ obtenemos

$$\mathcal{K}_{2,2} = \begin{bmatrix} 0.0174 & 0 \\ 0 & -0.1073 \end{bmatrix},$$

que, de nuevo, es una matriz contractiva, por lo que podemos implementar el algoritmo para calcular el resto de los elementos involucrados en el nivel $(2,2)$.

Como conclusión, indicamos que el ejemplo descrito corresponde al siguiente problema de momentos:

$n\diagdown m$	0	1		2	
0	$h_{0,0} = 1.7575$	$h_{0,1} = 0$	$h_{0,2} = 0.3773$	$h_{0,3} = 0$	$h_{0,4} = 0.1752$
1	$h_{1,0} = 0$	$h_{1,1} = -0.0447$	$h_{1,2} = 0$	$h_{1,3} = -0.0196$	$h_{1,4} = 0$
	$h_{2,0} = 0.3773$	$h_{2,1} = 0$	$h_{2,2} = 0.0838$	$h_{2,3} = 0$	$h_{2,4} = 0.0395$
2	$h_{3,0} = 0$	$h_{3,1} = -0.0196$	$h_{3,2} = 0$	$h_{3,3} = -0.0087$	$h_{3,4} = 0$
	$h_{4,0} = 0.1752$	$h_{4,1} = 0$	$h_{4,2} = 0.0395$	$h_{4,3} = 0$	$h_{4,4} = 0.0188$

Presentaremos a continuación un ejemplo de un problema de momentos que no se puede extender a niveles superiores.

Ejemplo 6.5.2. Comencemos fijando los parámetros de los niveles frontera $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(2,0)$ y del nivel $(1,1)$, como muestra la siguiente tabla:

$n\diagdown m$	0	1		2	
0	$s_{0,0} = 1$	$s_{0,1} = 1/7$	$s_{0,2} = 2$	$s_{0,3} = 1/3$	$s_{0,4} = 7$
1	$s_{1,0} = 1$	$s_{1,1} = 0.5$	$s_{1,2} = 0$		
	$s_{2,0} = 3$	$s_{2,1} = 0$	$s_{2,2} = 1$		
2	$s_{3,0} = 0$				
	$s_{4,0} = 0.33$				

Así, implementando el algoritmo descrito en la Sección 6.2 y en virtud del Teorema 6.3.1, obtenemos un funcional $\mathbf{U}$ sobre el espacio de polinomios

$$\mathbb{P}_{4,0}[x,y] + \mathbb{P}_{2,2}[x,y] + \mathbb{P}_{0,4}[x,y]$$

que es definido positivo.

A continuación, calculamos las matrices $\mathcal{K}_{2,1}$ y $\mathcal{K}_{1,2}$,

$$\mathcal{K}_{2,1} = \begin{bmatrix} 0.9997407262 & s_{3,1} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{K}_{1,2} = \begin{bmatrix} -0.02749286996 \\ s_{1,3} \end{bmatrix}.$$

Entonces, eligiendo los parámetros $s_{3,1}$ y $s_{1,3}$ de forma que dichas matrices sean contracciones, podremos extender dicho funcional al espacio

$$\mathbb{P}_{4,2}[x,y] + \mathbb{P}_{2,4}[x,y],$$

de forma que sigue siendo un funcional definido positivo. En particular, tenemos las restricciones $|s_{3,1}|, |s_{1,3}| < 1$. El resto de los parámetros en los niveles $(1,2)$ y $(2,1)$ se pueden elegir de forma arbitraria, siempre que $s_{2,4}$ y $s_{4,2}$ sean positivos.

Finalmente, calculamos la matriz $\mathcal{K}_{2,2}$ y extraemos la expresión de la primera entrada,

$$(\mathcal{K}_{2,2})_{1,1} = \\ = \frac{-59.47189 - 0.2717694 \times 10^{-10} s_{1,3} + 0.1087078 \times 10^{-11} s_{3,1} s_{1,3}^2 - 43.93372 s_{3,1} s_{1,3}}{\sqrt{1 - 1928.713 s_{3,1}^2}\,\sqrt{1 - 1.000756 s_{1,3}^2}\,(1 + 1.237179 \times 10^{-14} s_{1,3})}.$$

Entonces, se puede ver que en este caso la matriz $\mathcal{K}_{2,2}$ no puede ser una contracción, puesto que la expresión anterior es siempre mayor que 1 cualesquiera sean los valores elegidos para $s_{1,3}$ y $s_{3,1}$.

En conclusión, hemos puesto de manifiesto que no existe una extensión del funcional $\mathbf{U}$ hasta el nivel $(2,2)$ que sea definida positiva, independientemente de la elección de los parámetros en los niveles $(1,2)$ y $(2,1)$. En particular, se tiene que no podemos extender el funcional $\mathbf{U}$, de forma definida positiva, al espacio de polinomios $\mathbb{P}_{4,4}[x,y]$.

Nota 6.5.3. Los ejemplos anteriores muestran que no todos los funcionales lineales definidos positivos hasta los niveles inferiores a $(n, m-1)$ y $(n-1, m)$ se pueden extender hasta el nivel (n,m), aunque se modifiquen los parámetros correspondientes a un paso atrás en cada dirección, esto es, los dos niveles inmediatamente anteriores, $(n, m-1)$ y $(n-1, m)$.

Algunos experimentos numéricos parecen inducir que la modificación de los parámetros hasta 2 pasos atrás en el algoritmo es suficiente para poder continuar con la extensión del funcional. La veracidad o falsedad de esta afirmación en general sigue siendo un problema abierto.

Nota 6.5.4. El Ejemplo 6.5.2 es el caso más sencillo de un problema de momentos que no se puede extender, aunque se permita la modificación de los parámetros en los dos niveles inmediatamente anteriores. Queremos decir con esto que cuando

$n = 1$ o $m = 1$, entonces el problema de momentos siempre se puede extender si modificamos un parámetro en el nivel anterior.

Por ejemplo, para $m = 1$ tenemos que $\mathcal{K}_{n,1}$ es una matriz de dimensión $1 \times n$. Por el proceso de computación de la matriz, sabemos que las primeras $(n-1)$ entradas se calculan a partir de los datos anteriores usando (6.2) y, en este caso, $A_{n,0} = [s_{2n,0}]$ es la única matriz procedente del nivel $(n, 0)$. Entonces, podemos elegir el parámetro $s_{2n,0}$ suficientemente grande para imponer sobre $\mathcal{K}_{n,1}$ la condición de contractividad.

Capítulo 7

Conclusiones y problemas abiertos

Concluimos con una exposición, a modo de resumen, de los principales resultados originales de esta memoria, así como un conjunto de cuestiones y problemas abiertos que han surgido durante la elaboración de la misma.

7.1 Conclusiones

Sobre el estudio de pares coherentes generalizados, los resultados más importantes que hemos obtenido son, por un lado, los de caracterización de los pares coherentes generalizados (Teoremas 3.2.4, 3.2.8 y 4.2.10). Concretamente, demostramos que si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es un par coherente generalizado, entonces al menos uno de los funcionales es semiclásico de clase menor o igual que 1:

Consideremos $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *un par coherente generalizado. Esto es, si* $\{P_n\}_n$ *y* $\{R_n\}_n$ *son las SPOM asociadas a* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$*, respectivamente, se satisface*

$$R_n(x) + a_{n-1}R_{n-1}(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + b_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Entonces, se da una de las dos siguientes situaciones:

- $\mathbf{u}$ *es semiclásico de clase menor o igual que* 1*, verificando la ecuación diferencial de Pearson*

  $$D[\Phi(x)\mathbf{u}] + \Psi(x)\mathbf{u} = 0.$$

  Además, el funcional compañero $\mathbf{v}$ *está determinado a partir de* $\mathbf{u}$ *por*

  $$(x - \xi)\mathbf{v} = \Phi(x)\mathbf{u}.$$

- $\mathbf{v}$ *es semiclásico de clase menor o igual que* 1*, verificando la ecuación diferencial de Pearson*
$$D[\Phi(x)\mathbf{v}] + \Psi(x)\mathbf{v} = 0.$$
Además, el funcional compañero $\mathbf{u}$ *está determinado a partir de* $\mathbf{v}$ *por*
$$(x-\xi)\mathbf{v} = \Phi(x)\mathbf{u}.$$

Además, damos una descripción completa de todos los pares de funcionales lineales definidos positivos que verifican tal condición. Concretamente obtenemos los 24 pares de funcionales descritos en las tablas 3.1 y 3.2 de la página 56 de la memoria.

En el caso de funcionales simétricos y bajo hipótesis adicionales, probamos que el segundo funcional debe ser semiclásico de clase menor o igual que 2 (véase el Teorema 4.2.10).

Por otro lado, en la Sección 4.3.1 obtenemos un elegante resultado sobre los parámetros de la relación de coherencia simétrica generalizada (ver el Teorema 4.3.3 y el Corolario 4.3.5):

Consideremos $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos funcionales regulares y simétricos tales que* $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *forma un par coherente simétrico generalizado, esto es, si* $\{P_n\}_n$ *y* $\{R_n\}_n$ *son, respectivamente, las SPOM asociadas a* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$*, entonces se verifica,*
$$\frac{P'_{n+2}(x)}{n+2} + u_{n-1}\frac{P'_n(x)}{n} = R_{n+1}(x) + s_{n-1}R_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$
Supongamos además que $\mathbf{u}$ *es clásico y denotemos por* $\{\gamma_n\}_n$ *los coeficientes de la RRTT para* $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}_n$*. Sean* $\{S_n\}_n$ *y* $\{Q_n\}_n$ *las SPOM, que nos da el Lema 2.2.4, tales que*
$$\frac{P'_{2n+1}(x)}{2n+1} = S_n(x^2), \quad \frac{P'_{2n+2}(x)}{2n+2} = xQ_n(x^2), \quad n \geq 0.$$
Entonces,
$$u_{2n+3} = -\frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad u_{2n+2} = -\frac{q_n}{q_{n-1}}, \quad n \geq 0,$$
siendo $\{q_n\}_n$ *y* $\{r_n\}_n$ *los polinomios co–recursivos de los polinomios asociados de orden* 2 *de las sucesiones* $\{S_n\}_n$ *y* $\{Q_n\}_n$*, respectivamente, verificando las RRTT siguientes:*
$$\begin{aligned} &Ar_{n-1} = r_n + [\gamma_{2n+3}+\gamma_{2n+4}]\, r_{n-1} + \gamma_{2n+2}\gamma_{2n+3}\, r_{n-2}, \quad n \geq 2,\\ &\quad r_0 = 1, \quad r_1 = A - \gamma_5 - \gamma_6 + \gamma_4\gamma_5/u_3, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &Aq_n = q_{n+1} + [\gamma_{2n+4}+\gamma_{2n+5}]\, q_n + \gamma_{2n+3}\gamma_{2n+4}\, q_{n-1}, \quad n \geq 1,\\ &\quad q_0 = 1, \quad q_1 = A - \gamma_4 - \gamma_5 + \gamma_3\gamma_4/u_2, \end{aligned}$$

Por último, de los capítulos 5 y 6 cabe destacar los siguientes resultados:

- *Sea* $\mathbf{U}$ *un funcional lineal definido positivo, sobre el espacio vectorial de los polinomios en dos variables* $\mathbb{P}[x,y]$*, y sean* $\{\mathbf{P}_{n,m}\}_{n,m}$ *y* $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}_{n,m}$ *los sistemas de polinomios ortogonales con respecto a* $\mathbf{U}$ *correspondientes al orden lexicográfico y al orden lexicográfico inverso, respectivamente. Entonces, se verifican las siguientes relaciones de recurrencia,*

$$\begin{aligned}
&x\mathbf{P}_{n,m} = A_{n+1,m}\mathbf{P}_{n+1,m} + B_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} + A^t_{n,m}\mathbf{P}_{n-1,m},\\
&\Gamma_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} = \mathbf{P}_{n,m-1} - \mathcal{K}_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m},\\
&J^1_{n,m}\mathbf{P}_{n,m} = y\mathbf{P}_{n,m-1} + J^2_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m} + J^3_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n-1,m-1},\\
&\mathbf{P}_{n,m} = I_{n,m}\tilde{\mathbf{P}}_{n,m} + \Gamma^t_{n,m}\mathbf{P}_{n,m-1}.
\end{aligned}$$

- *Además, los coeficientes matriciales de las relaciones anteriores están relacionados entre sí (ver la Proposición 5.2.7 y los Lemas 6.1.1–6.1.10), de tal forma que es posible diseñar un algoritmo para construir los polinomios hasta cierto nivel, a partir de la información disponible en los niveles anteriores (ver la Sección 6.2).*

- *La implementación de dicho algoritmo permite construir el funcional lineal definido positivo con respecto al cual los vectores de polinomios son ortogonales (ver el Teorema 6.3.1).*

- *Se verifican fórmulas de tipo Christoffel–Darboux para los vectores de polinomios ortogonales* $\{\mathbf{P}_{n,m}\}_{n,m}$ *y* $\{\tilde{\mathbf{P}}_{n,m}\}_{n,m}$ *(ver Teorema 5.3.1).*

- *La condición* $\mathcal{K}_{n,m} = 0$ *caracteriza a los funcionales lineales en* $\mathbb{R}^2$ *que son producto tensorial de dos medidas en* $\mathbb{R}$ *(ver el Teorema 6.4.4).*

- *Hemos puesto de manifiesto, con ejemplos numéricos, que hay problemas de momentos que no son extensibles, de forma definida positiva, a niveles superiores (ver el Ejemplo 6.5.2).*

7.2 Algunos problemas abiertos

1. En el Capítulo 2 hemos dado una representación integral explícita para los funcionales lineales definidos positivos simétricos y semiclásicos de clase 2. Sería interesante estudiar las propiedades de los coeficientes de las RRTT que verifican estos funcionales.

2. En la Sección 4.3 llevamos a cabo el estudio de los coeficientes en la relación de coherencia simétrica generalizada bajo la hipótesis de que **v** es un funcional clásico. Se podría hacer un análisis similar en el caso en el que el funcional clásico sea **u**.

3. Queda pendiente, y actualmente estamos trabajando en ello, dar una caracterización de la coherencia simétrica generalizada, completando así los resultados obtenidos en la Sección 4.2.

4. Recientemente ha aparecido un trabajo de Y. Xu, [82], que versa sobre polinomios ortogonales de Sobolev sobre la bola unidad. Dicho estudio representa el primer ejemplo de productos de Sobolev cuyas medidas están soportadas fuera de la recta real. En este sentido, podríamos considerar productos de Sobolev generales en $\mathbb{R}^2$ y extender el concepto de coherencia para funcionales lineales definidos sobre el espacio vectorial de los polinomios en dos variables.

5. Como ya anunciamos en la Nota 6.5.4, queda pendiente analizar de forma rigurosa si se pueden dar condiciones necesarias y suficientes para asegurar que cierto problema de momentos en dos variables se puede extender de forma definida positiva.

7.3 Trabajos que avalan la memoria

Los resultados obtenidos en esta memoria han dado lugar a los siguientes trabajos.

Capítulo 2:

[18] Semiclassical linear functionals of class 2: the symmetric case. Antonia M. Delgado y Francisco Marcellán. Sometido, 2005.

Capítulo 3:

[16] Companion linear functionals and Sobolev inner products: A case study. Antonia M. Delgado y Francisco Marcellán, *Meth. Appl. Anal.* **11**, 237–266, 2004.

Capítulo 4:

[17] On an extension of symmetric coherent pairs of orthogonal polynomials. Antonia M. Delgado y Francisco Marcellán, *J. Comput. Appl. Math.* **178**, 155–168, 2005.

[19] About generalized symmetric coherent pairs. Antonia M. Delgado y Francisco Marcellán. En preparación, 2006.

Capítulos 5 y 6:

[15] Two variable orthogonal polynomials and structured matrices. Antonia M. Delgado, Jeffrey S. Geronimo, Plamen Iliev y Francisco Marcellán, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2006. En prensa.

Bibliografía

[1] Al-Salam, W. A., Chihara, T. S. Another characterization of the classical orthogonal polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* **3** (1972), 65–70.

[2] Alaya, J., Maroni, P. Symmetric Laguerre–Hahn forms of class $s = 1$. *Integral Transform. Spec. Funct.* **4** (1996), 301–320.

[3] Alfaro, M., Marcellán, F., Peña, A., Rezola, M. L. On linearly related orthogonal polynomials and their functionals. *J. Math. Anal. Appl.* **287** (2003), 307–319.

[4] Alfaro, M., Marcellán, F., Peña, A., Rezola, M. L. On rational transformations of linear functionals: direct problem. *J. Math. Anal. Appl.* **298**, 1 (2004), 171–183.

[5] Arvesú, J., Atia, J., Marcellán, F. On semiclassical linear functionals: the symmetric companion. *Commun. Anal. Theory Contin. Fract.* **10** (2002), 13–29.

[6] Belmehdi, S. On semi–classical linear functionals of class $s = 1$. Classification and integral representations. *Indag. Mathem. N. S.* **3** (1992), 253–275.

[7] Berezanskii, J. M. *Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 17. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[8] Berezanskii, J. M. Direct and inverse spectral problems for a Jacobi field. *Algebra i Analiz* **9** (1997), 38–61. Translation in *St. Petersburg Math. J.* **9**, (1998), 1053–1071.

[9] Berti, A. C., Bracciali, C. F., Sri Ranga, A. Orthogonal Polynomials associated with related measures and Sobolev orthogonal polynomials. *Numer. Algorithms* **34** (2003), 203–216.

[10] BERTI, A. C., SRI RANGA, A. Companion orthogonal polynomials: some applications. *Appl. Numer. Math.* **39** (2001), 127–149.

[11] BOCHNER, S. Über Sturm–Liouvillesche Polynomsysteme. *Math. Zeit.* **29** (1929), 730–736.

[12] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach, New York, 1978.

[13] CHIHARA, T. S. Orthogonal polynomials and measures with end point masses. *Rocky Mountain J. Math.* **15** (1985), 705–719.

[14] DE BRUIN, M. G., MEIJER, H. G. Zeros of orthogonal polynomials in a non-discrete sobolev space. *Ann. Numer. Math.* **2** (1995), 233–246.

[15] DELGADO, A. M., GERONIMO, J. S., ILIEV, P., MARCELLÁN, F. Two variable orthogonal polynomials and structured matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* (2006). En prensa.

[16] DELGADO, A. M., MARCELLÁN, F. Companion linear functionals and Sobolev inner products: a case study. *Meth. Appl. Anal.* **11** (2004), 237–266.

[17] DELGADO, A. M., MARCELLÁN, F. On an extension of symmetric coherent pairs of orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **178** (2005), 155–168.

[18] DELGADO, A. M., MARCELLÁN, F. Semiclassical linear functionals of class 2: the symmetric case. Sometido, 2005.

[19] DELGADO, A. M., MARCELLÁN, F. About generalized symmetric coherent pairs. En preparación, 2006.

[20] DUNKL, C. F. Intertwining operators and polynomials associated with the symmetric group. *Monatsh. Math.* **126** (1998), 181–209.

[21] DUNKL, C. F., XU, Y. *Orthogonal polynomials of several variables.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 81. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[22] DURÁN, A. A generalization of Favard's Theorem for polynomials satisfying a recurrence relation. *J. Approx. Theory* **74** (1993), 83–109.

[23] DURÁN, A. On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures. *Canad. J. Math.* **48** (1996), 1180–1195.

[24] FAVARD, J. Sur les polynômes de Tchebicheff. *C.R. Acad. Sci. Paris* **200** (1935), 2052–2053.

[25] Fernández, L., Pérez, T. E., Piñar, M. A. Weak classical orthogonal polynomials in two variables. *J. Comput. Appl. Math.* **178** (2005), 191–203.

[26] Gekhtman, M. I., Kalyuzhny, A. A. On the orthogonal polynomials in several variables. *Integr. Equat. Oper. Th.* **19** (1994), 404–418.

[27] Geronimo, J. S. Scattering theory and matrix orthogonal polynomials on the real line. *Cir. Sys. Sign. Proc.* **1** (1982), 471–495.

[28] Geronimo, J. S., Woerdeman, H. J. Positive extensions, Fejér–Riesz factorization and autoregressive filters in two variables. *Ann. of Math.* **160** (2004), 839–906.

[29] Geronimo, J. S., Woerdeman, H. J. Two variable orthogonal polynomials on the bi-circle and structured matrices. Submitted, 2005.

[30] Ghressi, A., Kheriji, L. Some D–semiclassical linear forms in connection with perturbation–symmetrization. Sometido.

[31] Hahn, W. Über die Jacobischen Polynome und Zwei Verwandte Polynomklassen. *Math. Zeit.* **39** (1935), 634–638.

[32] Hahn, W. On differential equations for orthogonal polynomials. *Funkcial. Ekvac.* **21** (1978), 1–9.

[33] Hahn, W. Über Differentialgleichungen für Orthogonalpolynome. *Monatsh. Math.* **95** (1983), 269–274.

[34] Hendriksen, E., van Rossum, H. Semiclassical orthogonal polynomials. In *Orthogonal Polynomials and Applications.* C. Brezinski *et al.* Editors. Lecture Notes in Math, vol. 1171. Springer Verlag, Berlin, 1985, pp. 354–361.

[35] Iserles, A., Koch, P. E., Nørsett, S. P., Sanz-Serna, J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products. *J. Approx. Theory* **65** (1991), 151–175.

[36] Iserles, A., Sanz-Serna, J. M., Koch, P. E., Nørsett, S. P. Orthogonality and approximation in a Sobolev space. In *Algorithms for approximations II.* J. C. Mason and M. G. Cox Editors. Chapman and Hall, London, 1990, pp. 117–124.

[37] Jackson, D. Formal properties of orthogonal polynomials in two variables. *Duke Math. J.* **2** (1936), 423–434.

[38] KIM, D. H., KWON, K. H., MARCELLÁN, F., YOON, G. J. Sobolev orthogonality and coherent pairs of moment functionals: an inverse problem. *Intern. Math. Journal* **9** (2002), 877–888.

[39] KIM, Y. J., KWON, K. H., LEE, J. K. Orthogonal polynomials in two variables and second–order partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* **82** (1997), 239–260.

[40] KIM, Y. J., KWON, K. H., LEE, J. K. Partial differential equations having orthogonal polynomial solutions. *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 239–253.

[41] KIM, Y. J., KWON, K. H., LEE, J. K. Multi–variate orthogonal polynomials and second order partial differential equations. *Commun. Appl. Anal.* **6** (2002), 479–504.

[42] KING, H. F., DUPUIS, M. Numerical integration using Rys polynomials. *J. Comput. Phys.* **21** (1976), 144–165.

[43] KONOPLEV, V. P. On orthogonal polynomials with weight functions vanishing or becoming infinite at isolated points of the interval of orthogonality. *Soviet Math. Dokl.* **2** (1961), 1538–1541.

[44] KOORNWINDER, T. H. Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators I, II. *Indag. Math.* **36** (1974), 48–58,59–66.

[45] KOORNWINDER, T. H. Two variable analogues of the classical orthogonal polynomials. In *Theory and Applications of Special Functions*. R. Askey Ed. Academic Press, New York, 1975, pp. 435–495.

[46] KOORNWINDER, T. H. Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$. *Canad. Math. Bull.* **27** (1984), 205–214.

[47] KOORNWINDER, T. H. Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC. In *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications*. Contemp. Math. Amer. Math. Soc. vol. 138, Providence, R.I., 1992, pp. 189–204.

[48] KOWALSKI, M. A. Orthogonality and recursion formulas for polynomials in n variables. *SIAM J. Math. Anal.* **13** (1982), 316–323.

[49] KOWALSKI, M. A. The recursion formulas for orthogonal polynomials in n variables. *SIAM J. Math. Anal.* **13** (1982), 309–315.

[50] Krall, H. L., Sheffer, I. M. Orthogonal polynomials in two variables. *Ann. Mat. Pura ed Appl.* **76** (1967), 325–376.

[51] Krein, M. G. Infinite J–matrices and the matrix moment problem. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.* **69** (1949), 125–128.

[52] Kwon, K. H., Lee, J. H., Marcellán, F. Generalized coherent pairs. *J. Math. Anal. Appl.* **253** (2001), 482–514.

[53] Kwon, K. H., Lee, J. K., Littlejohn, L. L. Orthogonal polynomial eigenfunctions of second order partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 3629–3647.

[54] Littlejohn, L. L. On the classification of differential equations having orthogonal polynomials solutions. *Ann. Mat. Pura Appl.* **138** (1984), 35–53.

[55] Macdonald, I. G. *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford University Press, New York, 1995.

[56] Marcellán, F., Alfaro, M., Rezola, M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions. *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993), 113–131.

[57] Marcellán, F., Branquinho, A., Petronilho, J. Classical orthogonal polynomials: a functional approach. *Acta Appl. Math.* **34** (1994), 283–303.

[58] Marcellán, F., Maroni, P. Sur l'adjonction d'une masse de Dirac à une forme régulière et semi–classique. *Ann. Mat. Pura Appl.* **162** (1992), 1–22.

[59] Marcellán, F., Meijer, H. G., Pérez, T. E., Piñar, M. A. An asymptotic result for Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **87** (1997), 87–94.

[60] Marcellán, F., Petronilho, J. C., Pérez, T. E., Piñar, M. A. What is beyond coherent pairs of orthogonal polynomials? *J. Comput. Appl. Math.* **65** (1995), 267–277.

[61] Maroni, P. Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi–classiques. *C. R. Acad. Sci. Paris* **301** (1985), 269–272.

[62] Maroni, P. Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi–classiques. *Ann. Mat. Pura Appl.* **149** (1987), 165–184.

[63] Maroni, P. Sur la décomposition quadratique d'une suite de polynômes orthogonaux I. *Riv. Mat. Pura Appl.* **6** (1990), 19–53.

[64] MARONI, P. Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme $u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}L$. *Per. Math. Hungarica* **21** (1990), 223–248.

[65] MARONI, P. Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques. In *Orthogonal polynomials and their applications.* C. Brezinski *et al.* Editors. Baltzer, Basel. *IMACS Ann. Comput. Appl. Math.* **9**, (1991), 95–130, 1991.

[66] MARONI, P. Sur la décomposition quadratique d'une suite de polynômes orthogonaux II. *Portugal. Math.* **50** (1993), 305–329.

[67] MARONI, P. An integral representation for the Bessel form. *J. Comput. Appl. Math.* **57** (1995), 251–260.

[68] MARONI, P. Semi–classical character and finite–type relations between polynomial sequences. *Appl. Num. Math.* **31** (1999), 295–330.

[69] MARONI, P., SFAXI, R. Diagonal orthogonal polynomial sequences. *Meth. Appl. Anal.* **7** (2000), 769–792.

[70] MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, A. Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **99** (1998), 491–510.

[71] MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, A., MORENO-BALCÁZAR, J. J., PÉREZ, T. E., PIÑAR, M. A. Asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of measures. *J. Approx. Theory* **92** (1998), 280–293.

[72] MEIJER, H. G. Coherent pairs and zeros of sobolev-type orthogonal polynomials. *Indag. Math. (N.S.)* **4** (1993), 163–176.

[73] MEIJER, H. G. A short history of orthogonal polynomials in a Sobolev space I: The non–discrete case. *Nieuw Arch. voor Wisk.* **14** (1996), 93–112.

[74] MEIJER, H. G. Determination of all coherent pairs. *J. Approx. Theory* **89** (1997), 321–343.

[75] MEIJER, H. G., PÉREZ, T. E., PIÑAR, M. A. Asymptotic of Sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of Laguerre type. *J. Math. Anal. Appl.* **245** (2000), 528–546.

[76] NEVAI, P. Orthogonal polynomials associated with $\exp(-x^4)$. *Proc. Canad. Math. Soc.* **3** (1983), 263–285.

[77] RONVEAUX, A. Polynômes orthogonaux dont les polynômes dérivés sont quasi orthogonaux. *C. R. Acad. Sci. Paris (A)* **289** (1979), 433–436.

[78] Shohat, J. A differential equation for orthogonal polynomials. *Duke Math. J.* **5** (1939), 401–417.

[79] Suetin, P. K. *Orthogonal Polynomials in Two Variables.* Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.

[80] Szegö, G. *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 23. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975 (4th edition).

[81] Xu, Y. On multivariate orthogonal polynomials. *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), 783–794.

[82] Xu, Y. A family of Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball. *J. Appox. Theory* **138** (2006), 232–241.