Teoría de Muestreo en Espacios Invariantes por Traslación

Gerardo Pérez Villalón

TESIS DOCTORAL

Teoría de Muestreo en Espacios Invariantes por Traslación

Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Memoria presentada para optar al grado de Doctor por el programa de Doctorado en Ingeniería Matemática

Autor: Gerardo Pérez Villalón

Director: Antonio García García
Profesor Titular de Universidad
Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Octubre 2005

Para María, Lucía y Manuel

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de tesis Antonio García, que con su dedicación, técnica y simpatía hizo de la realización de esta tesis una tarea agradable y fructífera. Agradecerle también por presentarme el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ y el núcleo K_t, cimientos de esta memoria.

Quisiera agradecer a mis compañeros de “sampling”, Miguel y Alberto, su compañía, consejos y colaboración en la realización de este trabajo.

Quisiera agradecer a mi madre por el tiempo, cariño e ingenio que pacientemente dedicó a darme mis primeras lecciones de matemáticas.

Este trabajo ha sido posible gracias al proyecto BMF2003-1034 de la Dirección General de Investigación del anterior Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Índice general

Introducción a la teoría de muestreo

En 1949, C. E. Shannon publicó su famoso trabajo *Communication in the presence of noise* [107], que entre otras cuestiones fundamentales, introdujo en la teoría de la comunicación la fórmula clásica de muestreo:

"If a signal $f(t)$ contains no frequencies higher than w cicles per second, then $f(t)$ is completely determined by its values $f(n/2w)$ at a discrete set of points with spacing $1/2w$ and can be reconstructed from these values by the formula

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{n}{2w}\Big)\frac{\sin \pi(2wt-n)\text{"}}{\pi(2wt-n)} \tag{1}$$

Una señal f se dice banda-limitada a $[-w, w]$ si su transformada de Fourier, $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi itx}dt$ se anula fuera del intervalo $[-w, w]$. El conocimiento de la frecuencia límite de una señal banda-limitada, determina la mínima frecuencia a la que debe ser muestreada para poder recuperarla. Esta frecuencia es conocida como frecuencia de Nyquist, en referencia al autor que primeramente destacó su importancia [96].

Según la fórmula de Shannon, se puede reemplazar una función banda-limitada por una sucesión discreta de muestras, sin perder por ello ninguna información. Este principio tan simple es una de las claves de la transformación del mundo analógico al mundo digital a la que estamos asistiendo en los últimos años.

La serie que aparece en (1) se conoce como serie cardinal, ya que involucra a la función seno cardinal $\operatorname{senc}(t) := \operatorname{sen}(\pi t)/(\pi t)$, y debe su nombre a J. M. Whittaker [132], referencia citada por Shannon en [107]. Para ser precisos, el trabajo de J. M. Whittaker, fue un refinamiento del trabajo de su padre, el eminente matemático ingles E. T. Whittaker [131], y no está claro si fueron los primeros matemáticos en introducir este desarrollo. Algunas notas históricas con respecto a esta controversia se pueden encontrar en [28, 69, 101, 137]. La fórmula clásica de muestreo fue introducida en la teoría de la comunicación, de forma independiente, por Kotel'nikov [84] (en ruso) y por Shannon [107]. Una traducción al inglés del trabajo de Kotel'nikov se puede encontrar en [14].

A partir de la publicación del trabajo de Shannon, el esfuerzo de muchos matemáticos e ingenieros se dirige a la obtención de métodos que permitan la reconstrucción de distintos tipos de señales a partir de sucesiones de muestras de las propias señales, o de versiones filtradas de éstas. La motivación fundamental es que una cantidad finita, suficientemente representativa, de una sucesión de muestras puede ser fácilmente almacenada o trasmitida.

Así, lo que empezó como un teorema para reconstruir funciones bandalimitada a partir de muestras uniformes, ha llegado a ser una nueva rama de la Matemática Aplicada conocida como Teoría de Muestreo (94A20 en la clasificación de la AMS), con aplicaciones en la teoría de la comunicación y en el procesado de la señal. La teoría de muestreo utiliza métodos de diversos campos de las matemáticas tales como, el análisis armónico, la teoría de la aproximación, la teoría de las funciones enteras, la interpolación, la teoría de distribuciones, los procesos estocásticos, las ecuaciones diferenciales o la teoría de wavelets. En las líneas que siguen comentaremos algunos aspectos de la teoría de muestreo. Una visión más amplia de esta teoría, se puede encontrar en los libros de Higgins [70] o de Zayed [137] (véanse también [15, 18, 72, 93, 94, 129]) o en los artículos especializados de Butzer [26, 27], García [52, 53], Higgins [69] y Jerri [80].

La fórmula de Shannon ha sido probada de muchas formas: Mediante la fórmula de sumación de Poisson, utilizando integrales de contorno, mediante el núcleo reproductor, mediante la teoría de las distribuciones, etc. (véase, por ejemplo [70, 137]). Pero la demostración más elegante y simple es probablemente la debida a Hardy [64], utilizando que la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es una isometría entre el espacio de Paley-Wiener

$$PW_{1/2} := \big\{ f \in C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \,:\, \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-1/2, 1/2] \big\}$$

y el espacio $L^2[-1/2, 1/2]$. Para cualquier $f \in PW_{1/2}$ se tiene

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} dx = \big\langle \widehat{f}(\cdot), e^{-2\pi i t \cdot} \big\rangle_{L^2[-1/2,1/2]}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

Así, las muestras regulares $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son los coeficientes de Fourier de $\widehat{f}$ con respecto a la base ortonormal $\{e^{-2\pi i n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[-1/2, 1/2]$, y en consecuencia

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) e^{-2\pi i n x} \quad \text{en } L^2[-1/2, 1/2]\,.$$

La clave en la demostración de Hardy es que cualquier desarrollo convergente en $L^2[-1/2,1/2]$ se transforma por $\mathcal{F}^{-1}$ en otro desarrollo que converge en $L^2(\mathbb{R})$ y uniformemente en $\mathbb{R}$, ya que como consecuencia de (2) y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para cada $t \in \mathbb{R}$ y $g \in PW_{1/2}$ se tiene

$$|g(t)| \leq \|\widehat{g}\|_{L^2[-1/2,1/2]} = \|g\|_2 \,, \tag{3}$$

donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma de $L^2(\mathbb{R})$. Así, transformando el desarrollo anterior por $\mathcal{F}^{-1}$, y teniendo en cuenta que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{X}_{[-1/2,1/2]} = \text{senc}$, se obtiene la fórmula de Shannon:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\,\text{senc}(t-n)\,,$$

en $L^2(\mathbb{R})$ y uniformemente en $\mathbb{R}$. Una versión de la fórmula anterior para funciones banda-limitada a $[-w,w]$ se obtiene con un simple cambio de variable. Esta técnica, acuñada en [70, p. 56] como *Dualidad de Fourier*, muestra la fórmula de Shannon como un desarrollo en una base ortonormal, y la clase de Paley-Wiener $PW_{1/2}$ como la imagen del espacio $L^2[-1/2,1/2]$ por medio de una isometría definida mediante el núcleo de Fourier $K_t(x) = e^{-2\pi ixt}$ (véase (2)). Ambas ideas, han propiciado desarrollos posteriores de la teoría, y juegan un papel principal en esta memoria.

La fórmula de Shannon puede extenderse fácilmente a funciones de $\mathbb{R}^n$ banda-limitada a rectangulos de $\mathbb{R}^n$ (Parzen [99]). Fórmulas más eficaces para la recuperación de funciones banda-limitada a regiones acotadas B de $\mathbb{R}^n$, se pueden obtener considerando bases de exponenciales complejas en el espacio $L^2(B)$, lo que está íntimamente relacionado con la geometría de B [70].

El Lema de Kramer [85] permite obtener fórmulas de muestreo a partir de otros núcleos $K_t(x)$. Los núcleos $K_t(x)$, para los cuales es aplicable este lema (elevado por autores posteriores a la categoría de teorema), deben verificar que K_t es, para cada t en un cierto subconjunto de $\mathbb{R}$, una función de un cierto espacio $L^2(I)$, y que exista una sucesión $\{t_n\}$ tal que $\{K_{t_n}\}$ formen una base ortogonal de $L^2(I)$. La aplicación del Lema de Kramer a núcleos asociados con problemas de contorno, especialmente del tipo de Sturm-Liouville, proporciona diversas fórmulas de muestreo [39, 40, 67, 136, 138]. Recientemente se ha obtenido la versión discreta del Lema de Kramer [54, 55, 56, 57].

En muchas aplicaciones las muestras disponibles se toman en puntos no distribuidos uniformemente (muestreo irregular). La recuperación a partir de estas muestras es un problema complejo que ha sido objeto de numerosos estudios. Los primeros resultados en muestreo irregular están basados en la identificación de las funciones banda-limitada con ciertas funciones enteras de crecimiento exponencial. Las funciones del espacio $PW_{1/2}$ son, como consecuencia de la expresión (2), enteras y verifican la desigualdad

$$|f(z)| \leq e^{|z|/2}\|f\|_2\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

El teorema clásico de Paley-Wiener [97] afirma que el recíproco de este resultado es también cierto. Así se obtiene una caracterización de las funciones banda-limitada sin necesidad de la transforma de Fourier. Utilizando técnicas de variable compleja Paley y Wiener encontraron una cota K de forma que si los puntos de muestreo verifican $\sup_n |t_n - n| < K = 1/\pi^2$ entonces las funciones f del espacio $PW_{1/2}$ se pueden recuperar de forma estable a partir de las muestras irregulares $\{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Además, el teorema de Paley-Wiener-Levinson [86] establece que esta recuperación puede ser llevada a cabo por medio de una fórmula interpolatoria de tipo Lagrange

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n)\frac{G(t)}{G'(t_n)(t-t_n)}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $G(t) := (t-t_0)\prod_{n=1}^{\infty}(1-t/t_n)(1-t/t_{-n})$. Kadec [82] encontró el mayor valor posible para la constante K. Éste resulta ser $K = 1/4$.

En el contexto del análisis no armónico, Duffin y Schaeffer [37] introdujeron en 1952 las sucesiones *frame*, que jugarán después un importante papel en la teoría de muestreo, en la teoría de wavelets y en el análisis de Gabor. Una sucesión $\{f_k\}$ es un *frame* de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ cuando existen dos constates positivas A y B tales que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_k |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \ \text{ para todo } f \in \mathcal{H}\,.$$

Los *frame* son una generalización, en el caso infinito dimensional, de los conjuntos de generadores en el espacio $\mathbb{C}^n$, i.e., cualquier elemento de $\mathcal{H}$ se puede representar, no necesariamente de forma única, como $f = \sum_k c_k f_k$. Es más, existen otros *frame* $\{g_k\}$ de $\mathcal{H}$, denominados *frame* duales, cumpliendo $f = \sum_k \langle f, g_k\rangle f_k = \sum_k \langle f, f_k\rangle g_k$ para todo $f \in \mathcal{H}$. Duffin y Schaeffer propusieron también un algoritmo, denominado algoritmo *frame*, que proporciona, a partir de los productos $\{\langle f, f_k\rangle\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de aproximantes que converge geométricamente a f.

El muestreo irregular está estrechamente relacionado con el análisis no armónico: Si la sucesión de exponenciales complejas $\{e^{-2\pi i t_n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un *frame* de $L^2[-1/2, 1/2]$, se tiene que para cada $f \in PW_{1/2}$ (ver (2)),

$$\widehat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big\langle \widehat{f}(\cdot), e^{-2\pi i t_n \cdot}\big\rangle_{L^2[-1/2,1/2]} h_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t_n) h_n\,,$$

donde $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un *frame* dual a $\{e^{-2\pi i t_n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Aplicando $\mathcal{F}^{-1}$ se obtiene un desarrollo que permite recuperar f de forma estable a partir de las muestras irregulares $\{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Además, el algoritmo *frame* permite obtener una aproximación a f, a partir de la sucesión $\{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Duffin y Schaeffer [37] dieron una condición suficiente, en términos de la densidad de $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, para que la sucesión $\{e^{-2\pi i t_n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea un *frame* de $L^2[-1/2, 1/2]$. Jaffard [74] demostró una condición necesaria y suficiente para que esta sucesión sea un *frame* de $L^2[-1/2, 1/2]$, y Pavlov [100] para que sea base de Riesz de $L^2[-1/2, 1/2]$. En el libro de de Young [135] se puede encontrar un amplio tratamiento de estas cuestiones.

Feichtinger y Gröchenig [41] han propuesto diversos algoritmos iterativos, más eficaces que el algoritmo *frame*, para la recuperación de funciones banda-limitada a partir de muestras irregulares (véase [42]). Estos algoritmos basados en el método de Richardson, precisan de *oversampling*, es decir, muestrean con una tasa superior a la necesaria.

La desigualdad (3) implica que las evaluaciones puntuales son funcionales continuos en $PW_{1/2}$. Los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ con esta propiedad se denominan espacios de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS en sus siglas inglesas), ya que existe una función $k(t, s)$, con la propiedad reproductora

$$f(s) = \langle f(\cdot), k(\cdot, s)\rangle_{\mathcal{H}}\,, \quad s \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Ésta es una propiedad importante en relación con el muestreo, ya que proporciona una adecuada representación de las muestras [101].

En ocasiones, las muestras disponibles no son de la función que se pretende recuperar, sino de otras funciones relacionadas con ésta. Uno de los primeros resultados en este sentido, fue dado por Jagerman y Fogel [76] en 1956, quienes proporcionaron una fórmula que permite la recuperación de las funciones, $f \in PW_{1/2}$, a partir de las muestras $\{f(2n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f'(2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Linden y Abramson [88] generalizaron la fórmula, considerando n derivadas.

En 1977, Papoulis [98] extendió éstas y otras fórmulas, dando una fórmula que permite recuperar las funciones f del espacio de Paley-Wiener $PW_{1/2}$ a partir de las muestras de las respuestas a la función por s sistemas lineales e invariantes por traslación $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_s$ (filtros) tomadas en los puntos $\{sn\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\big\{\big(\mathcal{L}_j f\big)(sn)\big\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}\,.$$

La correspondiente fórmula se conoce como fórmula de muestreo generalizado o multicanal. Esta generalización resulta muy útil en la teoría del procesado de la señal donde en ocasiones se dispone de muestras de versiones filtradas de la señal.

Introducción a la memoria

La fórmula de Shannon ha demostrado ser muy útil en la teoría de la comunicación y en el procesado de la señal. Sin embargo presenta algunos inconvenientes. En primer lugar, las señales de duración finita no pueden ser funciones enteras, y debido a la caracterización de Paley-Wiener tampoco banda-limitada. Es más, el *Principio de Incertidumbre* establece que una señal no puede estar al vez bien localizada en el tiempo (i.e., tener la mayor parte de su energía concentrada en un intervalo acotado) y en frecuencia. Concretamente, para $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t-\mu_f|^2 |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |w-\mu_{\widehat{f}}|^2 |\widehat{f}(w)|^2 dw \geq \frac{\|f\|^4}{4},$$

donde $\mu_f = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt$ y $\mu_{\widehat{f}} = \int_{-\infty}^{\infty} w \widehat{f}(w) dw$ (ver [12]). La igualdad se alcanza para $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$. Así, las señales en las aplicaciones, ya sean procedentes de sonidos o de imágenes, no son exactamente banda-limitada. En [70, 110, 108, 109] se puede encontrar un tratamiento amplio de este tema.

El principal inconveniente de la fórmula de Shannon es, sin embargo, el lento decrecimiento de la función seno cardinal, o dicho con otras palabras, su mala localización en el tiempo. Como $\operatorname{senc}(t)$ decrece como $1/|t|$ cuando $|t| \to \infty$, calcular una aproximación razonable al valor en un punto no entero de una señal con la fórmula de Shannon, puede requerir de una gran cantidad de operaciones. En el extremo contrario una fórmula de muestreo del tipo

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) S(t-n), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

cuya función de reconstrucción S tuviera soporte en un intervalo de longitud menor que N, daría un valor exacto utilizando únicamente N términos. Otro problema derivado del lento decrecimiento del seno cardinal es la falta de robustez de la fórmula. Por ejemplo, aplicar la fórmula a las muestras perturbadas $f(n) + \delta_n$ produce, al evaluar $f(1/2)$, un error de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \delta_n / (\pi n - \pi/2)$, que podría ser infinito incluso para una sucesión

δ_n acotada. Aunque, la técnica de *oversampling* (muestrear con una frecuencia superior a la frecuencia de Nyquist) reduce estos problemas, la solución dista mucho de ser la óptima.

Una posible generalización del espacio $PW_{1/2}$, son los espacios invariantes por traslación con un generador estable $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Estos son los espacios de la forma

$$V_\varphi = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) : \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\}.$$

donde la sucesión $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ. La investigación sobre muestreo en estos espacios, que comienza en 1992 y continua hasta el momento actual, ha mostrado que muchos de los resultados de muestreo que se verifican en el espacio $PW_{1/2} = V_{\text{senc}}$ se satisfacen también cuando se sustituye senc por otro generador estable φ. Los resultados obtenidos han mostrado además que sustituir el seno cardinal por otro generador estable permite superar alguno de los inconvenientes antes mencionados. Un resumen de resultados sobre muestreo en espacios invariantes por traslación, tanto regular como irregular se puede encontrar en [3] y en [120].

Los espacios invariantes por traslación resultan hoy familiares a muchos matemáticos, físicos e ingenieros debido al papel que juegan en la Teoría de Wavelets. Para la construcción de wavelets, Mallat [91] introduce en 1989 un concepto que jugará un papel clave en esta teoría: el análisis multirresolución. Un análisis multirresolución (MRA en sus siglas inglesas) es una sucesión de subespacios cerrados $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, verificando

1. $V_j \subset V_{j+1}\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,.$
2. $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$
3. $V_{j+1} = DV_j$, donde D denota el operador de dilatación $Df(t) = \sqrt{2}f(2t)$
4. V_0 es un espacio invariante por traslación con un generador estable φ, es decir la sucesión $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_0. La función φ es la denominada función de escala del análisis multirresolución.

Un ejemplo de análisis multirresolución es el de Shannon, donde $V_j = D^j V_{\text{senc}}$, $j \in \mathbb{Z}$. En general, se puede construir un análisis multirresolución, a partir de un generador estable φ, continuo en $t = 0$, verificando que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ y la condición de escala $\varphi \in DV_\varphi$. En estas condiciones, los espacios $V_j = D^j V_\varphi$, $j \in \mathbb{Z}$, forman un análisis multirresolución (véase por ejemplo [66] o [133]).

Mediante un cambio de variable, una fórmula de muestreo como (4) para el espacio V_0 de un análisis multirresolución, proporciona una fórmula para el espacio V_j donde las muestras están tomadas con periodo 2^{-j}. Es importante que cuando el tamaño del paso $h = 2^{-j}$ es pequeño la correspondiente fórmula de muestreo aproxime a cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$ suficientemente regular (por ejemplo, en un cierto espacio de Sobolev). Este hecho, viene garantizado por las condiciones del análisis multirresolución [44, 120]. Así, unos generadores φ convenientes para su uso en teoría de muestreo, son aquellos que son la función de escala de un MRA. Ver [20, 22] y las referencias allí citadas para las propiedades de aproximación de los espacios invariantes por traslación dilatados $V_\varphi^h = \{f(\cdot/h) : f \in V_\varphi\}$.

El MRA de *splines* de grado m, se forma tomando como espacio V_0 el formado por los *splines* de grado m con nodos en los enteros y pertenecientes a $L^2(\mathbb{R})$. Este análisis multirresolución se utiliza con frecuencia en las aplicaciones prácticas, debido a sus ventajas computacionales y a sus propiedades de aproximación. Además, tiene una función de escala simple y de soporte compacto: El B-*spline* de grado m, N_{m+1} cuyo soporte es $[0, m+1]$. El *B-spline* N_1 es la función característica del intervalo $(0, 1)$ y los *B-splines* N_m se definen recursivamente mediante la convolución $N_m := N_{m-1} * N_1$. En el extremo contrario a la función seno cardinal, el B-*spline* N_1 está bien localizado en el tiempo, y mal en frecuencia. Sin embargo, cuando m crece mejora su localización en frecuencia, alcanzándose pronto una buena localización tiempo-frecuencia. Por ejemplo, el B-*spline* N_4 está a un 1 % de alcanzar el límite impuesto por el principio de incertidumbre [121].

Esta memoria trata de la teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación con un generador estable, centrándose fundamentalmente en tres aspectos de este problema: Muestreo regular e irregular, muestreo generalizado tanto regular como irregular y estudio de errores. Pasamos a continuación a describir, de una manera concisa, el desarrollo que se ha seguido en la presenta memoria. Ésta consta de cuatro capítulos, cuyo contenido detallamos brevemente.

El Capítulo 1, de carácter introductorio, está dedicado a los espacios invariantes por traslación. Se estudian las propiedades de estos espacios necesarias para nuestros objetivos de muestreo. Se introducen además los ejemplos más utilizados en las aplicaciones prácticas y que ilustrarán la teoría obtenida en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 se estudia el muestreo regular e irregular en un espacio invariante por traslación V_φ. La técnica de Hardy, descrita anteriormente y conocida como Dualidad de Fourier, puede ser generalizada a un espacio invariante por traslación V_φ de la siguiente manera: Consideramos el isomorfismo

$$\mathcal{T}_\varphi : L^2(0,1) \longrightarrow V_\varphi \,,$$

que transforma la base ortonormal $\{e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1)$ en la base de Riesz $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_φ. Así como las funciones banda-limitada se describen mediante el núcleo de Fourier $e^{-2\pi itw}$ como

$$f(t) = \big\langle \widehat{f}(\cdot), e^{-2\pi it\cdot} \big\rangle_{L^2[-1/2,1/2]} \,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

las funciones del espacio V_φ se representan mediante el núcleo

$$K_t(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi(t+n)} e^{2\pi inw}$$

como:

$$f(t) = \mathcal{T}_\varphi F = \big\langle F, K_t \big\rangle_{L^2(0,1)} \,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

Las muestras se pueden representar mediante

$$f(t_n) := \big\langle F, K_{t_n} \big\rangle_{L^2(0,1)} \,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Esta representación es un punto de comienzo adecuado para el estudio del muestreo en V_φ: Las sucesiones $\{K_{t_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $L^2(0,1)$ son el análogo de las sucesiones de exponenciales complejas $\{e^{-2\pi it_nw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $L^2[-1/2,1/2]$. Los desarrollos del tipo $F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle F, K_{t_n}\rangle_{L^2(0,1)} K^*_{t_n}$ en $L^2(0,1)$ se convierten, via $\mathcal{T}_\varphi$, en desarrollos muestrales en el espacio invariante por traslación V_φ, $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t_n) S_n$. Como V_φ es también un RKHS, el desarrollo anterior es válido también en el sentido puntual, $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t_n) S_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$. La elección de los puntos de muestreo $\{t_n = a + n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ conduce al muestreo regular en V_φ, mientras que perturbaciones de esta sucesión de la forma $\{t_n = a + n + \varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ lleva a resultados de muestreo irregular.

El Capítulo 3 está dedicado al muestreo generalizado tanto regular como irregular. Las muestras consideradas ahora, no son de la propia función, sino de su respuesta mediante la acción de s sistemas lineales e invariantes por traslación (filtros), $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, definidos en el espacio V_φ. Con el objetivo de aplicar las mismas técnicas que tan buenos resultados dieron en el capítulo anterior, se obtiene una generalización de la representación (5) de las funciones f del espacio V_φ : Para los sistemas lineales e invariante por traslación $\mathcal{L}$ considerados se tiene la representación

$$\big(\mathcal{L}f\big)(t) = \big\langle F, K_t^{\mathcal{L}} \big\rangle_{L^2(0,1)} \,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $K_t^{\mathcal{L}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\mathcal{L}\varphi(t+n)} e^{2\pi inw}$ y $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$. Así, las muestras regulares admiten la representación

$$\mathcal{L}_j f(rn) = \big\langle F(\cdot), K_0^{\mathcal{L}_j}(\cdot) e^{-2\pi irn\cdot} \big\rangle_{L^2(0,1)} \quad n, r \in \mathbb{Z}\,,$$

ya que $K_{t+n}^{\mathcal{L}}(w) = K_t^{\mathcal{L}}(w)e^{-2\pi irnw}$. Esta representación traslada el problema de la recuperación de las funciones $f \in V_\varphi$ a partir de estas muestras, al problema de la recuperación de las funciones $F \in L^2(0,1)$ a partir del valor de sus productos escalares con la sucesión $\{K_0^{\mathcal{L}_j}(w)e^{-2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$. El problema se resuelve utilizando la teoría de *frames* duales.

Las muestras irregulares se pueden representar mediante

$$\mathcal{L}_j f(rn + \varepsilon_{j,n}) = \left\langle F(\cdot), K_{\varepsilon_{j,n}}^{\mathcal{L}_j}(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot} \right\rangle_{L^2(0,1)}. \tag{6}$$

Una técnica apropiada de perturbación de *frames* proporciona, partiendo de la sucesión $\{K_0^{\mathcal{L}_j}(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$, condiciones suficientes sobre las perturbaciones $\{\varepsilon_{j,n}\}$ para que la sucesión $\{K_{\varepsilon_{j,n}}^{\mathcal{L}_j}(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ sea un *frame* de $L^2(0,1)$, garantizando así, la recuperación de $f = \mathcal{T}_\varphi F$, a partir de las muestras $\{\mathcal{L}_j f(rn+\varepsilon_{j,n})\}$ de forma estable. Además, la representación (6) permite la recuperación de $F \in L^2(0,1)$, y así de $f = \mathcal{T}_\varphi F$, a partir de las muestras generalizadas, $\{\mathcal{L}_j f(nr+\varepsilon_{j,n})\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$, por medio del algoritmo *frame*. Implementamos este algoritmo en el contexto de $\ell^2(\mathbb{Z})$, que resulta el marco más adecuado para su uso en la práctica.

En el Capítulo 4 se tratan los principales errores que pueden aparecer en la aplicación práctica de las fórmulas de muestreo deducidas en los anteriores capítulos. Concretamente: el error de truncamiento debido a la imposibilidad de disponer de infinitas muestras; el error de amplitud debido a perturbaciones de las muestras; y el error de aliasing debido a la aplicación de la fórmula de muestreo a una función que no pertenece al espacio donde la fórmula es válida.

Capítulo 1

Espacios invariantes por traslación

Fórmulas de muestreo regular del tipo:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a)S(t-n), \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

permiten recuperar las funciones f de cierto espacio de funciones V a partir de sus muestras tomadas con periodo 1. Además, mediante un cambio de variable, se pueden recuperar las funciones del espacio dilatado $V^h = \big\{f(\cdot/h) : f \in V\big\}$ a partir de sus muestras tomadas con periodo h. Para el estudio de estas fórmulas, en el contexto de un espacio de Hilbert, es natural considerar subespacios V de $L^2(\mathbb{R})$ con la siguiente estructura

$$V_\varphi := \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) : \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\}\,,$$

donde φ es una función de $L^2(\mathbb{R})$ denominada el generador de V_φ. Los espacios con esta estructura contienen a los trasladados por enteros de sus funciones y por ello se denominan espacios invariantes por traslación. Estos espacios, que generalizan el espacio de Paley-Wiener

$$\begin{aligned} PW_{1/2} &:= \big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,:\, \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-1/2, 1/2] \big\} \\ &= \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \operatorname{senc}(t-n) : \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\}\,, \end{aligned}$$

han permitido establecer formulaciones más generales del teorema de Shannon y de otros resultados de la teoría clásica de muestreo para funciones banda-limitada, demostrando ser un marco adecuado para la obtención de fórmulas y algoritmos de muestreo.

En este capítulo introducimos los espacios invariantes por traslación, estudiamos sus propiedades principales e introducimos algunos de los ejemplos más importantes.

Para que la representación $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ de los elementos de V_φ, tenga sentido, sea estable e incondicional, es conveniente que la sucesión $\{\varphi(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea una base de Riesz de V_φ (lo que incluye a los ejemplos más importantes en la práctica). En la Sección 1.1 damos una condición necesaria y suficiente, fácilmente verificable, para que φ verifique esta propiedad, en cuyo caso diremos que φ es un generador estable de V_φ.

La trasformada de Fourier de las funciones de un espacio invariante por traslación admite una representación simple en términos de una función de $L^2(0,1)$, a la que dedicamos la Sección 1.2.

Si $f\in V_\varphi$ entonces la sucesión $\{f(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ está en V_φ. Éstas son las sucesiones más naturales en un espacio invariante por traslación. En la Sección 1.3 estudiamos las propiedades de este tipo de sucesiones, y encontramos entre ellas una base ortonormal de V_φ, y la base de Riesz dual de $\{\varphi(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Las funciones de V_φ están en principio definidas como elementos de $L^2(\mathbb{R})$. En teoría de muestreo es necesario, sin embargo, dar un sentido a las muestras $f(t_n)$. En la Sección 1.4 se da una condición que permite dar de forma natural un sentido a los valores puntuales de las funciones de V_φ. Se da también una condición necesaria y suficiente para que V_φ sea un espacio de funciones continuas.

En la Sección 1.5 se introducen los espacios de Hilbert con núcleo reproductor y se demuestra que V_φ es uno de tales espacios.

En la Sección 1.6 daremos una breve introducción a la teoría de wavelets, contexto en el cual aparecen los espacios invariantes por traslación con más aplicaciones prácticas en teoría de muestreo.

1.1. Generadores estables de V_φ

Se dice que un espacio V de funciones complejas definidas sobre $\mathbb{R}^n$ es invariante por traslación si para cada función $f\in V$, las trasladadas $f(\cdot-k)$, $k\in\mathbb{Z}^n$ pertenecen a V. Las principales propiedades de los espacios cerrados de $L^2(\mathbb{R}^n)$, invariantes por traslación se pueden encontrar en [22, 23, 24] y en las referencias allí citadas. Estudiaremos en este capítulo las propiedades de un tipo importante de estos espacios utilizado con frecuencia en teoría de wavelets, los espacios invariantes por traslación de $L^2(\mathbb{R})$ con un generador estable.

Definición 1.1 *Se dice que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es un generador estable de*

$$V_\varphi := \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) : \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\} ,$$

si V_φ es un espacio de Hilbert (o equivalentemente un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$) y la sucesión $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ .

En el Apéndice A se dan las definiciones y las principales propiedades de las sucesiones de Bessel, bases de Riesz y *frames* en un espacio de Hilbert. Para cuestiones relacionadas con el análisis de Fourier véanse las referencias [10, 13, 38, 102, 111, 140].

Nótese que si φ es un generador estable de V_φ, la representación de los elementos de V_φ, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$, donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, tiene sentido y es no ambigua, ya que la convergencia de los desarrollos en una sucesión de Bessel es incondicional.

El siguiente lema proporciona una primera caracterización de los generadores estables.

Lema 1.1 *Una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es un generador estable de V_φ si y sólo si existen constantes $A, B > 0$ tales que para cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se verifica*

$$A \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \le \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \Big\|^2 \le B \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 . \tag{1.1}$$

Demostración. Supongamos primero que existen A y B verificando (1.1). Según la conocida caracterización de bases de Riesz (véase Teorema A.2), $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz del subespacio $\overline{\operatorname{span}}\,\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, adherencia de la clausura lineal de $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces, cada función f del espacio $\overline{\operatorname{span}}\,\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se puede expresar en la forma

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \eta_n \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \varphi(t-n) ,$$

donde $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la base dual de $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (Teorema A.4). Como la sucesión $\{\langle f, \eta_n\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{Z})$, ya que $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz y entonces sucesión de Bessel, de aquí se deduce que

$$\overline{\operatorname{span}}\,\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) : \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\} = V_\varphi .$$

Por tanto $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz de V_φ. El recíproco es consecuencia inmediata del Teorema A.2. $\square$

El mayor número A y el menor número B verificando (1.1) se denominan las cotas óptimas de la base de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (véase Apéndice A).

En el Teorema 1.1 obtenemos una caracterización de que φ sea un generador estable en términos de la función 1-periódica

$$\Phi_\varphi(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w+n)|^2 .$$

En esta definición, como en toda la memoria, para $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ denota la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(w) := \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(t) e^{-2\pi i n w} dt\,, \quad w \in \mathbb{R}\,.$$

donde el límite se entiende en la norma de $L^2(\mathbb{R})$. Recuérdese que el operador $\mathcal{F}$ definido por $\mathcal{F}f := \widehat{f}$ es un operador unitario de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$.

En la deducción de la anunciada caracterización necesitamos los siguientes lemas, que se utilizarán en esta memoria sin que hagamos una referencia explícita a ellos.

Lema 1.2 *Sea $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ función medible y $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ función 1-periódica y medible. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$ o bien si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(\cdot - n)| \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $f \in L^1(0,1)$ se verifica*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \int_0^1 f(w) \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(w-n) dw\,.$$

Demostración. En cualquiera de los dos casos descritos se tiene que

$$\int_0^1 |f(w)| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(w-n)| dw = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |f(w) g(w)| dw = \int_{-\infty}^{\infty} |f(w) g(w)| dw$$

es finito. El lema se obtiene entonces aplicando el teorema de convergencia dominada. □

Lema 1.3 *Sea $\{\eta(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de Bessel de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces para cada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se verifica*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[a_n e^{-2\pi i n w} \widehat{\eta}(w) \right] = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi i n w} \right] \widehat{\eta}(w) \quad c.t.p.\, w \in \mathbb{R}\,,$$

donde la convergencia en la serie del lado izquierdo de la igualdad se entiende en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$ y en la serie del lado derecho en el de $L^2(0,1)$.

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Como $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es sucesión de Bessel, la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ converge en $L^2(\mathbb{R})$ y como la transformada de Fourier es una isometría, la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[a_n e^{-2\pi inw}\widehat{\varphi}(w)\right]$ converge en $L^2(\mathbb{R})$. Sea

$$S_l(w) := \sum_{|n|<l} a_n e^{-2\pi inw} .$$

Como la sucesión $\{S_l(w)\widehat{\varphi}(w)\}_{l=1}^\infty = \{\sum_{|n|<l}\left[a_n e^{-2\pi inw}\widehat{\varphi}(w)\right]\}_{l=1}^\infty$ converge en $L^2(\mathbb{R})$, existe una subsucesión $\{S_{l_n}(w)\widehat{\varphi}(w)\}_{n=1}^\infty$ que converge c.t.p. de $\mathbb{R}$ a $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[a_n e^{-2\pi inw}\widehat{\varphi}(w)\right]$.

Por otra parte, como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la subsucesión de funciones 1-periódicas $\{S_{l_n}(w)\}_{n=1}^\infty$ converge en $L^2(0,1)$, y entonces existe una subsucesión de ésta, $\{S_{l_{n_k}}(w)\}_{k=1}^\infty$ que converge c.t.p. de $\mathbb{R}$ a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi inw}$. Entonces $\{S_{l_{n_k}}(w)\widehat{\varphi}(w)\}_{k=1}^\infty$ converge c.t.p de $\mathbb{R}$ a $\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi inw}\right]\widehat{\varphi}(w)$. De la unicidad del límite se sigue el lema. □

Para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ medible, denotaremos al supremo y ínfimo esencial de $|f|$ por $\|f\|_\infty$ y $\|f\|_0$ respectivamente, es decir,

$$\|f\|_\infty := \text{ínf}\left\{c \geq 0 : \text{medida}\{x : |f(x)| \geq c\} = 0\right\},$$
$$\|f\|_0 := \sup\left\{c \geq 0 : \text{medida}\{x : |f(x)| \leq c\} = 0\right\}.$$

Teorema 1.1 *Una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es un generador estable de V_φ si y sólo si*

$$0 < \|\Phi_\varphi\|_0 \leq \|\Phi_\varphi\|_\infty < \infty .$$

Si se verifican estas condiciones equivalentes las cotas óptimas de la base de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son respectivamente $\|\Phi_\varphi\|_0$ y $\|\Phi_\varphi\|_\infty$.

Demostración. Supongamos que $0 < \|\Phi_\varphi\|_0 \leq \|\Phi_\varphi\|_\infty < \infty$. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión finita, es decir con un número finito de elementos no nulos, y $f := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(\cdot - n)$. Entonces

$$\widehat{f}(w) = F(w)\widehat{\varphi}(w) , \tag{1.2}$$

donde $F(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi inw}$. Aplicando el Lema 1.2 se obtiene

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(\cdot - n)\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)\widehat{\varphi}(w)|^2 dw = \int_0^1 |F(w)|^2\Phi_\varphi(w) dw . \tag{1.3}$$

Como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 = \|F\|^2_{L^2(0,1)}$, esta igualdad muestra que

$$\|\Phi_\varphi\|_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(\cdot - n)\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\Phi_\varphi\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 .$$

Se deduce fácilmente que la misma igualdad se verifica para cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Por tanto, según el Lema 1.1, φ es un generador estable de V_φ. Además las cotas óptimas inferior y superior de la base de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que notaremos por A y B verifican $\|\Phi_\varphi\|_0 \leq A$ y $\|\Phi_\varphi\|_\infty \geq B$.

Recíprocamente, supongamos que φ es un generador estable de V_φ. Sea K tal que $\|\Phi_\varphi\|_\infty > K$. Entonces existe un conjunto $\Omega \subset (0,1)$ de medida positiva tal que $|\Phi_\varphi(w)| \geq K$ cuando $w \in \Omega$. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$F(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi i n w} = \mathcal{X}_\Omega(w)\,, \quad \text{en } L^2(0,1)\,,$$

donde $\mathcal{X}_\Omega(w)$ denota la función característica de Ω. Como φ es un generador estable, entonces la sucesión $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz y en particular sucesión de Bessel. Así, aplicando el Lema 1.3 se obtiene que para $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$, se verifica (1.2) y entonces aplicando el Lema 1.2 que se verifica (1.3). Por tanto

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(\cdot - n)\Big\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \geq K\int_0^1 |F(w)|^2 dw = K\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\,.$$

Entonces K es menor o igual que la cota superior óptima de la base de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que hemos denotado por B. Como esto es cierto para cualquier $K < \|\Phi_\varphi\|_\infty$ entonces $\|\Phi_\varphi\|_\infty \leq B$. De la misma forma se prueba que $\|\Phi_\varphi\|_0 \geq A$, lo que termina la demostración del teorema. $\square$

Como consecuencia de este teorema la sucesión $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de V_φ si y sólo si (véase Proposición A.2)

$$\Phi_\varphi(w) = 1, \quad \text{c.t.p. } w \in \mathbb{R}\,.$$

En las referencias [17] y [29] se demuestra que una sucesión de trasladados en $L^2(\mathbb{R})$, $\{\eta(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es un sucesión de Bessel si y sólo si $\|\Phi_\eta\|_\infty < \infty$, y que es un *frame* de $\overline{\text{span}}(\{\eta(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}})$, es decir una sucesión *frame*, si y sólo si

$$0 < \inf_{w\in N} \Phi_\eta(w) \leq \sup_{w\in N} \Phi_\eta(w) < \infty\,,$$

donde $N = \big\{w \in \mathbb{R} : \Phi_\eta(w) \neq 0\big\}$.

1.2. La transforma de Fourier en V_φ

Sea φ un generador estable de V_φ. La transformada de Fourier de una función $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ de V_φ admite la representación (véase Lema 1.3)

$$\widehat{f}(w) = F_\varphi(w)\widehat{\varphi}(w)\,,$$

donde F_φ es la transformada de Fourier discreta de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es decir

$$F_\varphi(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi i n w} .$$

Recíprocamente, si la transformada de Fourier de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ es de la forma

$$\widehat{f}(w) = p(w)\widehat{\varphi}(w) ,$$

donde $p(w)$ es una función 1-periódica de $L^2(0,1)$, aplicando el Lema 1.3 y la transformada inversa de Fourier se obtiene que $f \in V_\varphi$ y que $p = F_\varphi$.

En la siguiente proposición, vemos que el producto escalar de dos funciones $f, g \in V_\varphi$ se puede dar en términos de F_φ y G_φ, donde G_φ se define de la misma forma que F_φ.

Proposición 1.1 *Sea φ un generador estable de V_φ y sean $f, g \in V_\varphi$. Entonces*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\langle F_\varphi, G_\varphi \Phi_\varphi \right\rangle_{L^2(0,1)} .$$

Demostración. Como la transformada de Fourier es un operador unitario se tiene

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\,\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\langle F_\varphi\widehat{\varphi}, G_\varphi\widehat{\varphi}\,\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\langle F_\varphi, G_\varphi|\widehat{\varphi}|^2\right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} .$$

El lema se sigue entonces de la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\varphi(t)\overline{G_\varphi}(t)|\widehat{\varphi}(t)|^2 dt = \int_0^1 F_\varphi(w)\overline{G_\varphi(w)}\Phi_\varphi(w) dw ,$$

que se obtiene aplicando el Lema 1.2. □

1.3. Bases de V_φ

Estudiamos ahora las propiedades de las sucesiones en un espacio invariante por traslación V_φ con la estructura $\{f(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Lema 1.4 *Sea φ un generador estable de V_φ y $f \in V_\varphi$. Entonces la sucesión $\{f(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz de V_φ si y sólo si*

$$0 < \|F_\varphi\|_0 \leq \|F_\varphi\|_\infty < \infty ,$$

donde F_φ es la única función 1-periódica de $L^2(0,1)$ que verifica $\widehat{f} = F\widehat{\varphi}$.

Demostración. Como $\widehat{f}(w) = F_\varphi(w)\widehat{\varphi}(w)$ se tiene

$$\Phi_f(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(w+n)|^2 = |F_\varphi(w)|^2 \Phi_\varphi(w)\,,$$

de donde se deduce, utilizando la caracterización de los generadores estables, dada en el Teorema 1.1, que $\{f(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz de

$$V_f := \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f(t-n) : \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\}\,,$$

si y sólo si $0 < \|F_\varphi\|_0 \le \|F_\varphi\|_\infty < \infty$.

Queda por demostrar que en este caso $V_f = V_\varphi$. Como $\{f(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset V_\varphi$ y V_φ es cerrado resulta que $V_f \subseteq V_\varphi$. Desde que $\widehat{\varphi}(w) = (F_\varphi)^{-1}(w)\widehat{f}(w)$ y $(F_\varphi)^{-1} \in L^2(0,1)$, es una función 1-periódica, se tiene que $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset V_f$. Entonces $V_\varphi \subseteq V_f$, y así $V_\varphi = V_f$. □

Teorema 1.2 *Sea φ un generador estable de V_φ y sean ϕ y ϱ las funciones de $L^2(\mathbb{R})$ cuyas transformadas de Fourier viene dadas por*

$$\widehat{\phi}(w) := \frac{\widehat{\varphi}(w)}{\sqrt{\Phi_\varphi(w)}} \qquad y \qquad \widehat{\varrho}(w) := \frac{\widehat{\varphi}(w)}{\Phi_\varphi(w)}\,.$$

Entonces la sucesión $\{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_φ y la sucesión $\{\varrho(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la base de Riesz dual de $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Demostración. Según el Lema 1.4 se tiene que las sucesiones $\{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{\varrho(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son bases de Riesz de V_φ. Utilizando la Proposición 1.1 se obtiene que

$$\begin{aligned}
\langle \phi(\cdot-n), \phi(\cdot-m)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \Big\langle \frac{e^{-2\pi i n\cdot}}{\sqrt{\Phi_\varphi}}, \frac{e^{-2\pi i m\cdot}}{\sqrt{\Phi_\varphi}}\Phi_\varphi \Big\rangle_{L^2(0,1)} = \delta_{n,m} \\
\langle \varphi(\cdot-n), \varrho(\cdot-m)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle e^{-2\pi i n\cdot}, \frac{e^{-2\pi i m\cdot}}{\Phi_\varphi}\Phi_\varphi\rangle_{L^2(0,1)} = \delta_{n,m}\,, \quad n,m\in\mathbb{Z}\,,
\end{aligned}$$

de donde se sigue el teorema. □

1.4. Valores puntuales de las funciones de V_φ

Las funciones $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(\cdot - n)$ del espacio V_φ son elementos de $L^2(\mathbb{R})$. En teoría de muestreo necesitaremos obviamente dar un sentido a las muestras $f(t_n)$. La siguiente condición sobre un generador estable φ, permite dar de forma natural, un sentido a los valores puntuales de las funciones de V_φ:

Se puede fijar un representante de la clase $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, que con abuso de notación denominamos también con φ, que satisface que para todo $t \in \mathbb{R}$ fijo, la sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{Z})$, es decir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 < \infty \,. \tag{1.4}$$

En efecto, si se verifica esta condición, la serie que define a una función $f \in V_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n)\,,$$

con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, converge puntualmente. El límite puntual de esta serie es un representante de la clase $f \in L^2(\mathbb{R})$ (véase [33, Teorema 2.3.1]). Convenimos en tomar siempre este representante.

El siguiente resultado de Zhou y Sun [139] caracteriza el hecho de que V_φ sea un espacio de funciones continuas.

Teorema 1.3 *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Para cada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ converge puntualmente a una función continua en $\mathbb{R}$.

(b) φ es una función continua en $\mathbb{R}$ y $\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 < \infty$.

Demostración. Supongamos primero que se verifica (a). Entonces se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{n,0}\varphi(t-n) = \varphi(t)$ es una función continua. Por otra parte, para cada $t \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ converge. Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 < \infty$. Así, para cada $t \in [0,1)$, el funcional lineal

$$\begin{array}{rccl} \Lambda_t: & \ell^2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)\,, \end{array}$$

es acotado, con $\|\Lambda_t\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$. Como para cada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que $f(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces

$$\sup_{t\in[0,1)} |\Lambda_t\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}| = \sup_{t\in[0,1)} |f(t)| < \infty \,.$$

Por tanto, según el teorema de Banach-Steinhaus, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,1)} \|\Lambda_t\|^2 = \sup_{t\in[0,1)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 < M \,.$$

Por periodicidad, $\sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\varphi(t-n)|^2 < M$, lo que termina de probar (b).

Supongamos ahora que se verifica (b). Se tiene que para cada sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\varphi(t-n)|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\,,$$

La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ converge pues uniformemente sobre $\mathbb{R}$. Como el generador $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, lo que demuestra (a). □

Nótese que si el generador φ verifica

$$\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \varphi(t) = O\big(|t|^{-1/2-\epsilon}\big) \quad \text{cuando } |t| \to \infty,$$

para algún $\epsilon > 0$, entonces se satisfacen las afirmaciones equivalentes del teorema anterior. En efecto, en este caso existen constantes $K_1, K_2 > 0$ tales que $|\varphi(t)|^2 \leq |t|^{-1-2\epsilon}$ para $|t| > K_2$. Por tanto, para $t \in [0,1)$ se tiene

$$|\varphi(t-n)|^2 \leq \frac{K_1}{|t-n|^{1+2\epsilon}} \leq \frac{K_1}{(|n|-1)^{1+2\epsilon}}\,, \quad |n| \geq K_2+1\,,$$

y entonces

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\varphi(t-n)|^2 \leq \sum_{|n|\geq[K_2+1]} \frac{K_1}{(|n|-1)^{1+2\epsilon}} + \sup_{t\in[0,1)} \sum_{|n|<[K_2+1]} |\varphi(t-n)|^2\,.$$

lo que demuestra que $\sup_{t\in\mathbb{R}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\varphi(t-n)|^2 < \infty$.

1.5. El núcleo reproductor del RKHS V_φ

La teoría de espacios de Hilbert con núcleo reproductor, sistematizada por Aronszajn [7] en 1950, resulta muy útil en el estudio de la teoría de muestreo (Higgins [70]). Daremos en esta sección una breve introducción a estos espacios. Un estudio más detallado, así como diversas aplicaciones de esta teoría, se puede encontrar en el libro de Saitoh [103]. Terminaremos la sección, demostrando que los espacios invariantes por traslación son un espacio de Hilbert con núcleo reproductor.

Definición 1.2 *Se dice que un espacio de Hilbert separable, $\mathbb{H}$, de funciones complejas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS en sus siglas inglesas), si para cada $t \in \Omega$ fijo, la evaluación puntual $E_t(f) = f(t)$, $f \in \mathbb{H}$, es un funcional acotado.*

Supongamos en esta sección que $\mathbb{H}$ es un RKHS. Como las evaluaciones puntuales son funcionales lineales y continuos, por el teorema de representación de Riesz, para cada $t \in \Omega$ existe una única función $k_t \in \mathbb{H}$ tal que

$$\langle f, k_t \rangle_{\mathbb{H}} = f(t)\,, \quad f \in \mathbb{H}\,.$$

Se define el núcleo reproductor de $\mathbb{H}$ como

$$k(t,s) := \langle k_s, k_t \rangle_{\mathbb{H}} = k_s(t)\,, \quad t, s \in \Omega\,.$$

Nótese que $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$. La denominación de núcleo reproductor se debe a la siguiente propiedad: para cada $f \in \mathbb{H}$,

$$\langle f(\cdot), k(\cdot, s) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle f, k_s \rangle_{\mathbb{H}} = f(s)\,, \quad s \in \Omega.$$

Una de las principales ventajas de los RKHS, es que la convergencia en norma implica convergencia puntual y también convergencia uniforme en conjuntos de Ω donde $k(t,t)$ este acotado, lo cual es consecuencia de la desigualdad

$$|f(t)|^2 = |\langle f, k_t \rangle_{\mathbb{H}}|^2 \leq \|f\|^2 \|k_t\|^2 = k(t,t)\|f\|^2\,.$$

Se puede expresar el núcleo reproductor en función de una base de Riesz de $\mathbb{H}$, $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, y de su base dual $\{\eta_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$. En efecto,

$$k(t,s) = k_s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle k_s, \eta_n^* \rangle_{\mathbb{H}}\, \eta_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\eta_n^*}(s)\eta_n(t) \quad t, s \in \Omega\,. \tag{1.5}$$

Esta igualdades muestran también que el núcleo reproductor es la única función con la propiedad reproductora $\langle f, k_s \rangle_{\mathbb{H}} = f(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{H}$.

Veremos ahora que V_φ es un *RKHS*.

Teorema 1.4 *Sea φ un generador estable de V_φ cumpliendo la condición* (1.4). *Entonces, el espacio V_φ es un RKHS, cuyo núcleo reproductor es*

$$k(t,s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varrho}(s-n)\varphi(t-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}(s-n)\varrho(t-n) \quad t, s \in \mathbb{R}\,,$$

donde ϱ es la función definida en el Teorema 1.2.

La convergencia de una sucesión de V_φ en la norma de $L^2(\mathbb{R})$ implica la convergencia puntual y la convergencia uniforme en conjuntos donde $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ este acotado. Concretamente

$$|f(t)|^2 \leq \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2}{\|\Phi_\varphi\|_0}\, \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,.$$

Demostración. Para cada $f := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(\cdot - n)$ y cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, se tiene

$$|f(t)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \frac{1}{\|\Phi_\varphi\|_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 \; \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,,$$

donde hemos utilizado que $\|\Phi_\varphi\|_0$ es la cota inferior óptima de la base de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Esta desigualdad muestra que la convergencia en la norma de $L^2(\mathbb{R})$ implica la convergencia puntual y la convergencia uniforme en conjuntos donde $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ este acotado. Muestra también que las evaluaciones puntuales son funcionales acotados de V_φ, y así V_φ es un RKHS. Las expresiones del núcleo reproductor en las bases de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y su dual $\{\varrho(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (véase (1.5)) proporcionan las expresiones dadas en este teorema. □

Según este teorema y el Teorema 1.3, si V_φ es un espacio de funciones continuas entonces es un RKHS. Este es un caso particular del siguiente resultado de Higgins [68, pág. 54]:

Todo espacio de Hilbert de funciones continuas es un RKHS.

1.6. Wavelets y análisis multirresolución

Las bases wavelets se construyen a partir de una función, conocida como wavelet:

Una wavelet (o wavelet madre) es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que la sucesión $\left\{2^{j/2}\psi(2^j t - n)\right\}_{n,j\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

La teoría de las wavelets se desarrolla con gran rapidez en la década de los 80 debido a sus múltiples aplicaciones. El año 1989, Mallat [91] introduce un concepto que jugará un papel clave en esta teoría: el análisis multirresolución (MRA en sus siglas inglesas).

Definición 1.3 *Se dice que una sucesión de subespacios cerrados $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, es un análisis multirresolución con función de escala ortonormal $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, si se verifica:*

1. $V_j \subset V_{j+1}\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,.$
2. $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad y \quad \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$
3. $V_j = D^j V_0, \quad j \in \mathbb{Z},$ *donde D es el operador de dilatación,*

$$Df(t) := \sqrt{2} f(2t)\,.$$

4. $\{\phi(t-n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal de* V_0.

En los libros de Frazier [45] y de Walnut [125] se puede encontrar un tratamiento elemental de wavelets y en los libros de Chui [34], Daubechies [35], Mallat [92], Meyer [95] y Wojtaszczyk [133] un tratamiento más avanzado.

Para construir un análisis multirresolución, basta encontrar un generador estable $\varphi(t)$, continuo en $t=0$, que cumpla $\widehat{\varphi}(0)\neq 0$ y la condición de escala $\varphi\in DV_\varphi$. En efecto en estas condiciones [133, Teorema 2.13], los espacios $V_j=D^jV_\varphi$, $j\in\mathbb{Z}$, forman un análisis multirresolución. En este contexto al generador φ se le denomina una función de escala de Riesz o simplemente una función de escala del análisis multirresolución $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. El Teorema 1.2 proporciona una función de escala ortonormal para un MRA construido según el método descrito.

A partir de un análisis multirresolución se puede construir una wavelet madre ψ mediante el procedimiento que describimos a continuación. Consideremos los espacios W_j, complementos ortogonales de V_j en V_{j+1}, i.e., $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$. Se tiene que

$$L^2(\mathbb{R})=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}W_j \quad \text{y} \quad W_j=D^jW_0\,, \quad j\in\mathbb{Z}\,.$$

Por tanto, todo lo que necesitamos es una función $\psi\in W_0$ verificando que la sucesión $\{\psi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_0.

La búsqueda de ψ entre los elementos de V_1 está basada en la siguiente relación entre éstos y las funciones 1-periódicas de $L^2(0,1)$: Para cada función $f\in V_1$ existe una función 1-periódica de m_f de $L^2(0,1)$, tal que

$$\widehat{f}(w)=m_f(w/2)\widehat{\phi}(w/2)\,. \tag{1.6}$$

Esta función es única. Recíprocamente, si una función $f\in L^2(\mathbb{R})$ verifica (1.6) para alguna función 1-periódica, m_f de $L^2(0,1)$ entonces pertenece a V_1. Además, para $f,g\in V_1$,

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}=2\langle m_f,m_g\rangle_{L^2(0,1)}.$$

En particular,

$$\|f\|_2^2=2\|m_f\|^2_{L^2(0,1)}\,.$$

Esta relación entre las funciones de V_1 y de $L^2(0,1)$, se puede deducir fácilmente a partir de los resultados de la Sección 1.2, utilizando que el operador D es un operador unitario entre V_0 y V_1 y que la función de escala ϕ es un generador estable de V_0.

Figura 1.1: La función seno cardinal.

En particular, como $\phi \in V_0 \subset V_1$, se tiene $\widehat{\phi}(w) = m_\phi(w/2)\widehat{\phi}(w/2)$, denominada la *ecuación de escala*.

Ahora es fácil caracterizar a los elementos de W_0 [133, Sección 2.4]: una función $\psi \in W_0$ si y sólo si existe una función 1-periódica $v(w)$ en $L^2(0,1)$ tal que

$$\widehat{\psi}(w) := v(w)e^{\pi i w}\overline{m_\phi(w/2+1/2)\widehat{\phi}(w/2)}\,,$$

Además ψ es una wavelet madre si $|v(w)| = 1$, c.t.p. $w \in (0,1)$.

Terminaremos este capítulo, introduciendo algunos ejemplos importantes de análisis multirresolución.

1.6.1. Análisis multirresolución de Shannon

La función $\varphi(t) = \operatorname{senc}(t) := \operatorname{sen}(\pi t)/\pi t$, denominada el seno cardinal, es la transformada inversa de Fourier de $\mathcal{X}_{(-1/2,1/2)}$, función característica del intervalo $(-1/2,1/2)$. Se tiene que

$$\Phi_{\mathrm{senc}}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{senc}}(w+n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{X}_{(-1/2,1/2)}(w+n) = 1\,, \quad \text{c.t.p. } w \in \mathbb{R}\,.$$

Entonces $\{\operatorname{senc}(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de V_{senc}.

Por otra parte $\widehat{V}_\varphi = \big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi i n w}\mathcal{X}_{(-1/2,1/2)}(w) : \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 \big\}$ y así

$$V_{\mathrm{senc}} = \big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-1/2, 1/2] \big\}\,.$$

El espacio V_{senc} es el conocido espacio de Paley-Wiener, $PW_{1/2}$.

Como $\operatorname{senc} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\operatorname{senc}(t+n)|^2$ es esencialmente acotada en $\mathbb{R}$, el espacio $PW_{1/2}$ es un RKHS y la convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ de sucesiones de $PW_{1/2}$ implica su convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ (Teorema 1.4).

Utilizando el teorema de inversión de la transformada de Fourier se obtiene que para cada $f \in PW_{1/2}$,

$$
\begin{aligned}
f(s) = & \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{f}(w) e^{2\pi i w s} dw = \big\langle \widehat{f}, e^{-2\pi i s \cdot} \mathcal{X}_{(-1/2,1/2)} \big\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
= & \big\langle f, \mathcal{F}^{-1}\big(e^{-2\pi i s \cdot} \mathcal{X}_{(-1/2,1/2)}\big) \big\rangle_{L^2(0,1)} = \langle f, \operatorname{senc}(\cdot - s) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} ,
\end{aligned}
$$

y entonces el núcleo reproductor de $PW_{1/2}$ es $k(t,s) = \operatorname{senc}(t-s)$.

De lo anterior se deduce fácilmente el teorema de Shannon: Si $f \in PW_{1/2}$ entonces

$$
f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f(\cdot), \operatorname{senc}(t-n) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \operatorname{senc}(t-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \operatorname{senc}(t-n) , \quad t \in \mathbb{R} ,
$$

en $L^2(\mathbb{R})$, y por tanto uniformemente en $\mathbb{R}$.

Como $\widehat{\operatorname{senc}}(0) \neq 0$ y se cumple la condición de escala

$$
\operatorname{senc} \in D(PW_{1/2}) = \big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-1,1] \big\} ,
$$

los espacios

$$
D^j(PW_{1/2}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-2^{j-1}, 2^{j-1}] \} , \quad j \in \mathbb{Z} ,
$$

denominados clases de Paley-Wiener, $PW_{2^{j-1}}$, forman un análisis multirresolución, denominado de Shannon.

1.6.2. Análisis multirresolución con Splines

Definición 1.4 *Se define el espacio de los splines cardinales de grado $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con nodos en $\mathbb{Z}$, que notaremos por $\mathcal{S}^m$, como la colección de funciones $f \in C^{m-1}(\mathbb{R})$ ($C^{-1} := L^1_{loc}(\mathbb{R})$), tales que la restricción de f a cualquier intervalo del tipo $[k, k+1)$ sea un polinomio de grado menor o igual a m.*

Definición 1.5 *Sea N_1 la función característica del intervalo $[0,1)$. Se define el B-spline cardinal de grado $m-1$, que notaremos por N_m, recursivamente por*

$$
N_m := N_{m-1} * N_1, \quad m = 2, 3, ...
$$

Los B-*splines* lineal, cuadrático y cúbico son los más utilizados en las aplicaciones. En la figura 1.2 se pueden ver sus gráficas. Sus expresiones

Figura 1.2: B-*splines* N_2,N_3 y N_4.

explícitas son:

$$
\begin{aligned}
N_2(t) &= t\mathcal{X}_{[0,1)}(t) + (t-2)\mathcal{X}_{[1,2)}(t)\,,\\
N_3(t) &= \frac{t^2}{2}\mathcal{X}_{[0,1)}(t) + \Big(3t - t^2 - \frac{3}{2}\Big)\mathcal{X}_{[1,2)}(t) + \frac{(3-t)^2}{2}\mathcal{X}_{[2,3)}(t)\,,\\
N_4(t) &= \frac{t^3}{6}\mathcal{X}_{[0,1)}(t) + \Big(\frac{2}{3} - 2t + 2t^2 - \frac{t^3}{2}\Big)\mathcal{X}_{[1,2)}(t)\\
&\quad + \Big(-\frac{22}{3} + 10t - 4t^2 + \frac{t^3}{2}\Big)\mathcal{X}_{[2,3)}(t) + \Big(\frac{32}{3} - 8t + 2t^2 - \frac{t^3}{6}\Big)\mathcal{X}_{[3,4)}(t)\,.
\end{aligned}
$$

Los libros de Boor [21], Schumaker [106] y Schoenberg [105] son las referencias clásicas sobre *splines*. En [119] y en las referencias allí dadas se pueden encontrar algunas de las muchas aplicaciones de los *splines* en procesado de la señal, y en particular en procesado de imágenes. La deducción de las propiedades de los B-*splines*, que recogemos en la siguiente proposición, se puede encontrar en el libro de Chui [34, Teorema 4.3].

Proposición 1.2 *Sea* $m \in \mathbb{N}$. *Entonces*

1. $\operatorname{supp} N_m = [0, m]$
2. $N_m(t) > 0, \quad 0 < t < m\,.$
3. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} N_m(t-n) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$
4. $\widehat{N}_m(w) = e^{-\pi i m w}\operatorname{senc}^m w\,, \quad w \in \mathbb{R}\,.$
5. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{N}_m(w+n)|^2 = e^{2\pi i m w}\sum_{n\in\mathbb{Z}} N_{2m}(n)e^{-2\pi i n w}\,, \quad w \in \mathbb{R}\,.$
6. $\displaystyle N_{m+1}(t) = \frac{t}{m}N_m(t) + \frac{m-t+1}{m}N_m(t-1)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$

7. $N_m(m-t) = N_m(t) \quad t \in \mathbb{R}$.
8. $N'_m(t) = N_{m-1}(t) - N_{m-1}(t-1)$.

Se define el polinomio de Euler-Frobenius de grado $2m-2$ por

$$E_{2m-1}(z) := \frac{(2m-1)!}{z} \sum_{n\in\mathbb{Z}} N_{2m}(n) z^n \,.$$

Estos polinomios se pueden expresar como [34, Teorema 6.13]

$$E_{2m-1}(z) := \prod_{j=1}^{m-1} (z-\lambda_j)\big(z-1/\lambda_j\big)\,, \quad \text{donde } -1 < \lambda_{m-1} < \ldots < \lambda_1 < 0\,.$$

Utilizando el apartado 5 de la Proposición 1.2 se obtiene

$$\Phi_{N_m}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} N_{2m}(n) e^{-2\pi i(n-m)w} = \frac{e^{2\pi i(m-1)w}}{(2m-1)!} E_{2m-1}(e^{-2\pi i w})\,. \tag{1.7}$$

Entonces

$$\Phi_{N_m}(w) = \frac{1}{(2m+1)!} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1 - 2\lambda_j \cos(2\pi w) + \lambda_j^2}{|\lambda_j|}\,.$$

Así pues $\Phi_{N_m}(w)$ alcanza su mínimo y máximo valor en $w = 1/2$ y $w = 0$ respectivamente. Utilizando (1.7), se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\Phi_{N_m}\|_0 &= \Phi_{N_m}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^m \sum_{n=1}^{m-1} N_{2m}(n)(-1)^n\,, \\ \|\Phi_{N_m}\|_\infty &= \Phi_{N_m}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} N_{2m}(n) = 1\,, \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde la última igualdad se sigue del apartado 3 de la Proposición 1.2. Por tanto, N_m es un generador estable de V_{N_m}.

Un resultado notable debido a Schoenberg [104] es el siguiente:

Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene $V_{N_m} = \mathcal{S}^{m-1} \cap L^2(\mathbb{R})$.

Con respecto al cálculo de la cota óptima inferior, $\|\Phi_{N_m}\|_0$, de la base de Riesz $\{N_m(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, nótese que los números $N_{2m}(n)$ se pueden calcular utilizando el apartado 6 de la Proposición 1.2. Algunos valores para las cotas inferiores óptimas $\|\Phi_{N_m}\|_0$ son $1, 1/3, 2/15, 17/315$, para $m = 1,2,3,4$ respectivamente.

Figura 1.3: Transformada de Fourier de una función de escala de Meyer.

Como $\widehat{N}_m(0) \neq 0$ y se cumple evidentemente la condición de escala $N_m \in D\big(S^{m-1} \cap L^2(\mathbb{R})\big)$ entonces para $m \in \mathbb{N}$ los espacios

$$D^j V_{N_m} = D^j \big[\mathcal{S}^{m-1} \cap L^2(\mathbb{R})\big]\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,,$$

forman un análisis multirresolución.

Para $m > 1$, como $N_m \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $\sum_{n\in\mathbb{Z}} N_m^2(t+n)$ es esencialmente acotada en $\mathbb{R}$, ya que el soporte de N_m es compacto, entonces el espacio $V_{N_m} = \mathcal{S}^{m-1} \cap L^2(\mathbb{R})$ es un RKHS y la convergencia de sucesiones de V_{N_m} en la norma de $L^2(\mathbb{R})$ implica la convergencia uniforme sobre $\mathbb{R}$ (Teorema 1.4).

1.6.3. Análisis multirresolución de Meyer

Supongamos que φ es una función continua, cuya transformada de Fourier $\widehat{\varphi}$ verifica

$$\begin{aligned}
&\widehat{\varphi} \in C^2(\mathbb{R}), \quad \widehat{\varphi}(w) = \widehat{\varphi}(-w), \quad 0 \leq \widehat{\varphi}(w) \leq 1, \quad w \in \mathbb{R},\\
&\widehat{\varphi}(w) = 1,\ |w| < \frac{1}{3}, \quad \widehat{\varphi}(w) = 0,\ |w| > \frac{2}{3}\,,\\
&\widehat{\varphi}^2(w) + \widehat{\varphi}^2(w-1) = 1,\ 0 \leq w \leq 1.
\end{aligned}$$

Estas condiciones implican que $\Phi_\varphi(w) = 1$, $w \in \mathbb{R}$. Por tanto $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_φ. Como $\widehat{\varphi}(2w) = p(w)\widehat{\varphi}(w)$ donde p es la función 1-periódica igual a $\widehat{\varphi}(2w)$ cuando $w \in (-1/2, 1/2)$, se tiene que el generador verifica la condición de escala $\varphi \in DV_\varphi$. Además $\widehat{\varphi}(0) = 1 \neq 0$. Por tanto los espacios $V_j = D^j V_\varphi$, $j \in \mathbb{Z}$, forman un análisis multirresolución, denominado de Meyer, con función de escala ortonormal φ.

Nótese además que el generador φ verifica $\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 < \infty$, y entonces la convergencia de sucesiones de V_φ en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$ implica su convergencia uniforme en $\mathbb{R}$.

Se puede construir una función $\widehat{\varphi}$ que satisface las condiciones pedidas, a partir de una función $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, verificando

$$\begin{aligned} &0 \leq g(t) \leq 1, \quad g(t) + g(1-t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ &g(t) = 0, \quad t \leq 0, \quad g(t) = 1, \quad t \geq 1\,, \end{aligned}$$

y definiendo $\widehat{\varphi}$ en la banda de transición mediante

$$\widehat{\varphi}(w) := \cos\left[\frac{\pi}{2}\, g(3|w|-1)\right] \quad \text{si } |w| \in (1/3, 2/3)\,.$$

En la figura 1.3, se puede ver la representación gráfica de $\widehat{\varphi}(w)$ para

$$g(t) = t^4(35 - 84t + 70t^2 - 20t^3)\,, \quad t \in (0,1)\,.$$

La transformada de Fourier de la función de escala tiene, como en el MRA de Shannon, soporte compacto, con la ventaja añadida de tener n derivadas continuas (y así un mejor decrecimiento de φ). Es incluso posible construir $\widehat{\varphi}$ perteneciente a $C^\infty(\mathbb{R})$ verificando las condiciones pedidas. Basta para ello tomar $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ en la construcción anterior. De esta forma la función de escala ortonormal φ pertenece a la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Capítulo 2

Muestreo regular e irregular en V_φ

En este capítulo estudiamos el muestreo regular e irregular en un espacio invariante por traslación con un generador estable V_φ, cuando las muestras se toman directamente de la función que se pretende recuperar. Para ello extendemos la técnica conocida como *Dualidad de Fourier*, debida a Hardy [64], que exponemos a continuación.

Las funciones del espacio de Paley-Wiener

$$PW_{1/2} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \,:\, \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-1/2, 1/2]\}$$

se pueden representar mediante el núcleo de Fourier $e^{-2\pi i t w}$. En efecto, según el teorema de inversión de Fourier se tiene que para cualquier $f \in PW_{1/2}$, se tiene

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{f}(w) e^{2\pi i w t} dw = \left\langle \widehat{f}(\cdot), e^{-2\pi i t \cdot} \right\rangle_{L^2[-1/2,1/2]}, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{2.1}$$

Esta expresión proporciona una representación para las muestras regulares

$$f(n) = \left\langle \widehat{f}(\cdot), e^{-2\pi i n \cdot} \right\rangle_{L^2[-1/2,1/2]}, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

a partir de la cual, se puede obtener la transformada de Fourier de f en función de las muestras regulares $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$\widehat{f}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) e^{-2\pi i n w} \quad \text{en } L^2[-1/2, 1/2]\,.$$

Como $\widehat{f}$ se anula fuera de $[-1/2, 1/2]$ se tiene que

$$\widehat{f}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) e^{-2\pi i n w} \mathcal{X}_{[-1/2,1/2]}(w) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R})\,.$$

Tomando la transformada de Fourier inversa se obtiene la fórmula de Shannon

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\ \mathrm{senc}(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

La convergencia de la serie es en $L^2(\mathbb{R})$, absoluta y uniforme sobre $\mathbb{R}$. Esta técnica muestra también que el anterior desarrollo, es un desarrollo en una base ortonormal.

Por otra parte, la expresión (2.1) proporciona también una representación para las muestras tomadas en los puntos irregulares $\{n+\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$f(n+\varepsilon_n) = \big\langle \widehat{f}(\cdot), e^{-2\pi i(n+\varepsilon_n)\cdot} \big\rangle_{L^2[-1/2,1/2]}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Si se verifica la condición de Kadec, $\sup|\varepsilon_n| < 1/4$, entonces $\{e^{-2\pi i(n+\varepsilon_n)w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2[-1/2,1/2]$ (véase [11, 135]). Así, se puede obtener $\widehat{f}$, y entonces f, a partir de la sucesión de muestras irregulares $\{f(n+\varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$\widehat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+\varepsilon_n) h_n \quad \text{en } L^2[-1/2,1/2]\,,$$

donde $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la base de Riesz dual de $\{e^{-2\pi i(n+\varepsilon_n)w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Tomando la transformada de Fourier inversa se obtiene

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+\varepsilon_n)\big(\mathcal{F}^{-1}h_n\big)(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Podría ocurrir que la existencia de éstos y de otros muchos resultados de muestreo que se verifican en el espacio $PW_{1/2} = V_{\mathrm{senc}}$ dependiese, más que de las características de la función seno cardinal, de que el espacio $PW_{1/2}$ es invariante por traslación. Walter comienza a confirmar esta tesis, dando en [126] una fórmula que permite, si se cumplen ciertas condiciones, la recuperación de las funciones de un subespacio wavelet, i.e., de un espacio de un análisis multiresolución, a partir de sus muestras regulares. Poco después, Aldroubi y Unser [6] demostraron, utilizando técnicas de RKHS, la fórmula en el contexto de los espacios invariantes por traslación.

El muestreo irregular fue estudiado a continuación utilizando técnicas de perturbación de bases de Riesz en [31, 32, 90, 114]. Algoritmos de reconstrucción fueron propuestos en [2, 3, 89].

Recientemente se ha caracterizado la existencia de una fórmula de muestreo regular en V_φ del tipo $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n)S_a(t-n)$ donde $\{S_a(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ [30, 112].

En este capítulo mostramos, como la *Dualidad de Fourier* para el espacio $PW_{1/2}$ se puede generalizar a un espacio invariante por traslación V_φ. Para este fin consideraremos el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ entre $L^2(0,1)$ y V_φ, que transforma cada función $F \in L^2(0,1)$ en

$$f(t) = \mathcal{T}_\varphi F(t) := \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.2}$$

donde el núcleo $t \in \mathbb{R} \mapsto K_t \in L^2(0,1)$ está dado por el conjugado de la transformada de Zak del generador φ, $K_t(w) := \overline{(Z\varphi)}(t,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi(t+n)} e^{2\pi i n w}$. La representación de las funciones f de V_φ dada por (2.2) juega un papel análogo a la representación (2.1) para las funciones del espacio de Paley-Wiener. En la Sección 2.1 introducimos la transformada de Zak y estudiamos las propiedades del isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$.

Para las muestras regulares se tiene

$$f(n) := \langle F, K_n \rangle_{L^2(0,1)}, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

La sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ no es en general una base ortonormal. Sin embargo, en la Sección 2.2.1 vemos, que si se verifica cierta condición la sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$. Además su base de Riesz dual $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se determina fácilmente. Aplicando el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ al desarrollo

$$F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle F, K_n \rangle_{L^2(0,1)} h_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) h_n$$

se obtiene una fórmula de muestreo regular para el espacio invariante por traslación V_φ. En la Sección 2.2.2 exponemos una aproximación alternativa al muestreo regular utilizando técnicas de núcleo reproductor. En la Sección 2.2.3 estudiamos la estabilidad de la fórmula obtenida.

El núcleo K_t verifica la siguiente propiedad $K_{n+\varepsilon_n}(w) = K_{\varepsilon_n}(w) e^{-2\pi i n w}$, $n \in \mathbb{Z}$. Así, para las muestras irregulares se tiene

$$f(n+\varepsilon_n) := \langle F, K_{\varepsilon_n}(w) e^{-2\pi i n \cdot} \rangle_{L^2(0,1)}, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

En la Sección 2.3, una técnica de perturbación de bases de Riesz, aplicada a $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{K_0 e^{-2\pi i n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, proporciona una condición sobre la sucesión de errores $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de manera que la sucesión $\{K_{\varepsilon_n} e^{-2\pi i n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea también una base de Riesz de $L^2(0,1)$. Así, se garantiza la posibilidad de una recuperación estable de las funciones de V_φ a partir de las muestras irregulares $\{n+\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. En la Sección 2.3.1 expresamos la condición anterior en términos de $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_n|$, obteniendo, para los principales espacios de *splines* condiciones tipo Kadec.

En la última sección estudiamos la recuperación de las funciones f de un espacio invariante por traslación, V_φ, a partir de sus muestras tomadas en dos sucesiones regulares entrelazadas de periodo 2, $\{f(a+2n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f(b+2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

A lo largo de este capítulo suponemos que φ es un generador estable de V_φ y que V_φ es un espacio de funciones continuas. Es decir se verifican las condiciones:

$$0 < \|\Phi_\varphi\|_0 \le \|\Phi_\varphi\|_\infty < \infty\,, \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 < \infty\,.$$

(Teoremas 1.1 y 1.3). Recuérdese que en estas condiciones el espacio V_φ es un RKHS y que la convergencia de una sucesión de V_φ en la norma de $L^2(\mathbb{R})$ implica su convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ (Teorema 1.4).

2.1. El isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ entre $L^2(0,1)$ y V_φ

El espacio invariante por traslación V_φ es la imagen de $L^2(0,1)$ por medio del isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varphi :\ L^2(0,1) &\longrightarrow V_\varphi \\ F &\longrightarrow f = \mathcal{T}_\varphi F\,, \end{aligned}$$

que transforma la base ortonormal $\{e^{-2\pi i n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1)$ en la base de Riesz $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_φ, es decir:

$$f(t) = (\mathcal{T}_\varphi F)(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle F(\cdot), e^{-2\pi i n \cdot}\right\rangle_{L^2(0,1)} \varphi(t-n), \qquad F \in L^2(0,1).$$

Nótese que si $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(\cdot - n)$ entonces $F(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-2\pi i n w}$. La función F es pues (véase la Sección 1.2) la única función 1-periódica de $L^2(0,1)$ que verifica $\widehat{f} = F\widehat{\varphi}$. Entonces, si $f = \mathcal{T}_\varphi F$ y $g = \mathcal{T}_\varphi G$ se tiene que (Proposición 1.1)

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\langle F, G\Phi_\varphi\right\rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\|F\sqrt{\Phi_\varphi}\,\right\|_{L^2(0,1)}\,.$$

Además (Lema 1.4),

$$\{f(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ es base de Riesz de } V_\varphi \Leftrightarrow 0 < \|F\|_0 \le \|F\|_\infty < \infty \tag{2.3}$$

Este isomorfismo jugará un papel destacado en éste y en posteriores capítulos, ya que permitirá tratar cuestiones referentes al muestreo en el espacio invariante por traslación V_φ, a través de cuestiones equivalentes en el más fácil de manejar espacio $L^2(0,1)$. Esta forma de actuación es fructífera, debido a que este isomorfismo se puede definir, mediante un conveniente núcleo integral. Concretamente, para cada $F \in L^2(0,1)$, se tiene

$$f(t) = \mathcal{T}_\varphi F(t) = \langle F, K_t\rangle_{L^2(0,1)}, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde K_t es la función de $L^2(\mathbb{R})$ definida por

$$K_t(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi(t-n)} e^{-2\pi iwn} .$$

Esta representación es consecuencia de la igualdad de Parseval y de que para cada $t \in \mathbb{R}$, hemos definido $f(t)$ (véase sección 1.4) como el límite puntual de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$. Recuérdese que suponemos que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ es uniformemente acotada en $\mathbb{R}$.

La norma del isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ y de su inverso $\mathcal{T}_\varphi^{-1}$ pueden darse en función de las cotas óptimas, $\|\Phi_\varphi\|_0$ y $\|\Phi_\varphi\|_\infty$, de la base de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (véase Teorema A.3):

$$\|\mathcal{T}_\varphi\|^2 = \|\Phi_\varphi\|_\infty \quad \text{y} \quad \|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\|^2 = \frac{1}{\|\Phi_\varphi\|_0} .$$

La transformada de Zak

El núcleo integral $K_t \in L^2(0,1)$ asociado al isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ se puede expresar mediante la transformada de Zak. Se define formalmente la transformada de Zak de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ como

$$Zf(t,w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) e^{-2\pi inw} . \tag{2.4}$$

La transformada de Zak es un instrumento muy útil para analizar los sistemas de Gabor. En el libro de Gröchenig [63] o en el artículo de Janssen [77] se pueden encontrar propiedades y otras aplicaciones de la transformada de Zak.

Para una función f continua y de soporte compacto, la transformada de Zak está definida puntualmente por (2.4), pero para una función general de $L^2(\mathbb{R})$ deberemos ser más precisos acerca de como interpretar esta definición. Notando $Q = [0,1] \times [0,1]$ se puede probar que la serie que define a Zf en (2.4) converge en $L^2(Q)$, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. De hecho ([33, Lema 9.4.1]):

La transformada de Zak Z es un operador unitario de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(Q)$.

Otras propiedades de la transformada de Zak son ([33, Lema 9.4.2]):

- $Zf(t+n,w) = e^{2\pi inw} Zf(t,w), \quad Zf(t,w+n) = Zf(t,w) , \quad n \in \mathbb{Z}.$
- *Si la función f es continua y $f(t) = O\big((1+|t|)^{-2}\big)$ entonces Zf es una función continua de $\mathbb{R}^2$.*
- *Si la función f es continua en $\mathbb{R}^2$ entonces existe un punto $(t,w) \in \mathbb{R}^2$ tal que $Zf(t,w) = 0$.*

En esta memoria, para todo $t \in \mathbb{Z}$ fijo, y siempre que $\{f(n+t)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $(Zf)(t,\cdot)$ denota la función definida en $L^2(0,1)$ por (2.4). Con este convenio se puede escribir la definición de K_t como

$$K_t := \overline{(Z\varphi)}(t,\cdot)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Como $(Zf)(t-n,w) = e^{-2\pi inw}(Zf)(t,w)$, se tiene que

$$K_{t-n}(w) = e^{2\pi inw}K_t(w)\,.$$

En consecuencia, el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ cumple

$$\mathcal{T}_\varphi\big(Fe^{-2\pi in\cdot}\big)(t) = \langle Fe^{-2\pi in\cdot}, K_t\rangle = \langle F, K_{t-n}\rangle = \mathcal{T}_\varphi F(t-n)\,, \tag{2.5}$$

relación también deducible a partir de la propiedad análoga para la transformada de Fourier.

En ocasiones, por ejemplo cuando el generador φ es la función de escala del MRA de Shannon o de un MRA de Meyer, la transformada de Fourier del generador, $\widehat{\varphi}$, tiene una expresión más simple que φ. En estos casos sería útil, una expresión de la transformada de Zak del generador, $Z\varphi$ en función de $\widehat{\varphi}$. Ésta se puede obtener aplicando la fórmula de sumación de Poisson. El siguiente lema proporciona una versión de la fórmula de Poisson adecuada para el propósito descrito.

Lema 2.1 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ verificando $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(w+n)| \in L^2(0,1)$. Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo,*

$$(Zf)(t,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(w+n)e^{2\pi i(w+n)t}\,, \qquad c.t.p.\ w \in (0,1)\,.$$

Demostración. Como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(w+n)| \in L^2(0,1)$ entonces para $t \in \mathbb{R}$ fijo, la función

$$g_t(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(w+n)e^{2\pi i(w+n)t},$$

pertenece a $L^2(0,1)$. Como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(w+n)| \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$ y

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(w)|dw = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |\widehat{f}(w)|dw = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(w+n)|dw,$$

entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Ahora, utilizando la transformada inversa de Fourier y el Lema 1.2, se puede comprobar fácilmente que los coeficientes de Fourier de g_t con respecto a la base ortonormal $\{e^{-2\pi iwn}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1)$ son $\{f(t+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, lo cual demuestra el lema. $\square$

2.2. Muestreo regular

En esta sección, presentamos dos aproximaciones distintas al muestreo regular en espacios invariantes por traslación. La primera de ellas está basada en el núcleo integral $K_t(w)$ introducido en la sección anterior, mientras que la segunda utiliza como principal herramienta el núcleo reproductor $k(t,s)$, introducido en la Sección 1.5.

2.2.1. Muestreo regular utilizando un núcleo integral

Nuestra aspiración es deducir una fórmula que permita recuperar cualquier función f de un espacio invariante por traslación V_φ, a partir de las muestras tomadas en una sucesión regular de puntos de periodo 1, $\{f(a+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a\in[0,1)$.

El núcleo integral K_t proporciona una representación adecuada de las muestras en las que éstas aparecen como los coeficientes de Fourier de la función 1-periódica $F\overline{K}_a$, donde $F=\mathcal{T}_\varphi^{-1}f$. En efecto,

$$f(a+n)=\langle F,K_{n+a}\rangle_{L^2(0,1)}=\langle F,K_a e^{-2\pi i n\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}=\langle F\overline{K}_a,e^{-2\pi i n\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\,.$$

Suponiendo $\|K_a\|_\infty<\infty$ se tiene que $F\overline{K}_a\in L^2(0,1)$ y entonces la anterior expresión da

$$F(w)\overline{K}_a(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(a+n)e^{-2\pi i w m}\quad \text{en }\ L^2(0,1)\,.$$

Suponiendo además que $\|K_a\|_0>0$, podemos despejar F, obteniendo

$$F(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(a+n)\frac{e^{-2\pi i w n}}{\overline{K}_a(w)}\qquad \text{en }L^2(0,1)\,.$$

Para obtener f, aplicamos el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ (utilizando la propiedad (2.5)) obteniendo

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(a+n)\mathcal{T}_\varphi\Big(\frac{1}{\overline{K}_a(w)}\Big)(t-n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(a+n)S_a(t-n)\qquad \text{en }L^2(\mathbb{R})\,,$$

donde

$$S_a=\mathcal{T}_\varphi\Big(\frac{1}{\overline{K}_a(w)}\Big)=\mathcal{T}_\varphi\Big(\frac{1}{(Z\varphi)(a,w)}\Big)$$

Además, las condiciones supuestas, $\|K_a\|_0>0$ y $\|K_a\|_\infty<\infty$, (véase 2.3) implican que $\{S_a(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz de V_φ.

La función de reconstrucción S_a se puede determinar a partir de los coeficientes de Fourier de $1/(Z\varphi)(a,w)$ (véase la definición de $\mathcal{T}_\varphi$),

$$S_a(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle 1/(Z\varphi)(a,\cdot), e^{-2\pi i n\cdot} \right\rangle_{L^2(0,1)} \varphi(t-n)\,,$$

o bien, a partir de su transformada de Fourier

$$\widehat{S}_a(w) = \frac{\widehat{\varphi}(w)}{(Z\varphi)(a,w)}\,.$$

En el siguiente teorema vemos que las condiciones que hemos supuesto son también necesarias y que la fórmula obtenida es la única posible.

Teorema 2.1 *Sea $a \in \mathbb{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $0 < \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_0 \le \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_\infty < \infty\,.$

(b) Existe una base de Riesz $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que se verifica la fórmula de muestreo: para cada $f \in V_\varphi$,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n) S_{a,n} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R})\,. \tag{2.6}$$

Si se cumplen estas condiciones equivalentes, existe una única fórmula de muestreo del tipo (2.6) *siendo $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una base de Riesz de V_φ. Esta fórmula es: para cada $f \in V_\varphi$,*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n) S_a(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.7}$$

donde $\widehat{S}_a(w) := \widehat{\varphi}(w)/(Z\varphi)(a,w)$. La convergencia de la serie en (2.7) *es en la norma de $L^2(\mathbb{R})$, absoluta, y uniforme en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Antes de enunciar el teorema hemos demostrado que si se cumple la condición (a) o, equivalentemente, $0 < \|K_a\|_0 \le \|K_a\|_\infty < \infty$ entonces se verifica (2.7) en $L^2(\mathbb{R})$, y $\{S_a(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz de V_φ, lo que prueba (b).

Supongamos ahora que existe una base de Riesz $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que se verifica (2.6). Para cada $m \in \mathbb{Z}$, aplicando (2.6) a $S_{a,m}$ se obtiene que $S_{a,m} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S_{a,m}(a+n) S_n$. Debido a la unicidad de los coeficientes en una base se verifica la propiedad interpolatoria

$$S_{a,m}(a+n) = \delta_{m,n}\,.$$

Como $\mathcal{T}_\varphi^{-1}$ es un isomorfismo, entonces $\{\mathcal{T}_\varphi^{-1}S_{a,m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$. Desarrollando K_{m+a} en la base dual, que notaremos por $\{G_{a,m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$, se obtiene

$$K_{m+a} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle K_{m+a}, \mathcal{T}_\varphi^{-1}S_{a,n}\rangle_{\mathbb{H}} G_{a,n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{S}_{a,n}(m+a)G_{a,n} = G_{a,m}\,.$$

Por tanto, $\{K_{m+a}\}_{m\in\mathbb{Z}} = \{e^{-2\pi i m\cdot}K_a\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es la base dual de la base de Riesz $\{\mathcal{T}_\varphi^{-1}S_{a,m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$. En particular es una base de Riesz de $L^2(0,1)$. Entonces la sucesión $\{\mathcal{T}_\varphi e^{-2\pi i m\cdot}K_a\}_{m\in\mathbb{Z}} = \{b(\cdot - m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, donde $b = \mathcal{T}_\varphi K_a$, es una base de Riesz de V_φ. Por tanto, según la equivalencia (2.3), $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$, lo cual demuestra (a).

Supongamos ahora que se verifican las condiciones equivalentes (a) y (b). Sea $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una base de Riesz tal que se verifica (2.6). Hemos demostrado que entonces $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ verifica la propiedad interpolatoria $S_{a,m}(a+n) = \delta_{m,n}$. Aplicando la fórmula de muestreo (2.7) a $S_{a,m}$, que ha sido probada cuando se verifica (a), se obtiene

$$S_{a,m}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} S_{a,m}(n+a)S_a(t-n) = S_a(t-m)\,,$$

lo cual demuestra la unicidad.

La convergencia de la serie en (2.7) es uniforme en $\mathbb{R}$ pues la convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ implica, para las sucesiones de V_φ, la convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ y es absoluta debido al carácter incondicional del desarrollo en una base de Riesz. $\square$

2.2.2. Muestreo regular mediante el núcleo reproductor

En este sección, damos otra deducción de la fórmula de muestreo (2.7), así como otra demostración del Teorema 2.1, utilizando el núcleo reproductor de V_φ como herramienta fundamental. Éste viene dado por (Teorema 1.4)

$$k(t,s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varrho}(s-n)\varphi(t-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}(s-n)\varrho(t-n) \quad t,s\in\mathbb{R}\,,$$

donde $\widehat{\varrho} = \widehat{\varphi}/\Phi_\varphi$.

Si $\{k(\cdot, n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz de V_φ, entonces, para cada $f\in V_\varphi$,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, k(\cdot, n+a)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} B_{a,n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a)B_{a,n}\,, \tag{2.8}$$

donde $\{B_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es su base dual.

Necesitamos pues condiciones suficientes que garanticen que la sucesión $\{k(\cdot, n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz, y en este caso, determinar su base dual $\{B_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Para $n \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} k(t, a+m) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}(a+m-n)\varrho(t-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}(a-n)\varrho(t-m-n) \\ &= k(t-m, a)\,. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \widehat{k(\cdot, a)}(w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}(a-n)e^{-2\pi i n w}\widehat{\varrho}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}(a-n)\frac{e^{-2\pi i n w}}{\Phi_\varphi(w)}\widehat{\varphi}(w) \\ &= \frac{\overline{(Z\varphi)}(w,a)}{\Phi_\varphi(w)}\widehat{\varphi}(w)\,. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $0 < \|\Phi_\varphi\|_0 \le \|\Phi_\varphi\|_\infty < \infty$, el Lema 1.4 da que la sucesión $\{k(\cdot, n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ si y sólo si

$$0 < \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_0 \le \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_\infty < \infty\,. \tag{2.9}$$

Si $\{k(\cdot, n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz de V_φ, su base de Riesz dual $\{B_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (Teorema A.4) es la única sucesión tal que $\{k(\cdot, n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{B_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman un sistema biortogonal. Utilizando la expresión para el producto escalar dada en la Proposición 1.1 se obtiene

$$\begin{aligned} \langle k(\cdot - m, a), S_a(\cdot - n)\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\langle \frac{e^{-2\pi i m\cdot}\,\overline{(Z\varphi)}(a,\cdot)}{\Phi_\varphi}, \frac{e^{-2\pi i n\cdot}}{(Z\varphi)(a,\cdot)}\Phi_\varphi \right\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \delta_{n,m}, \end{aligned}$$

donde $\widehat{S}_a(w) = \widehat{\varphi}(w)/(Z\varphi)(a,w)$. Entonces,

$$B_{a,n}(t) = S_a(t-n)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Por tanto, (véase (2.8)) para cada $f \in V_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n)S_a(t-n) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R})\,.$$

Para demostrar el Teorema 2.1 bastara probar que: si $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz tal que se verifica la fórmula de muestreo: para cada $f \in V_\varphi$,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n)S_{a,n}, \qquad \text{en } L^2(\mathbb{R})\,, \tag{2.10}$$

entonces $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{S_a(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y se satisface la condición (2.9).

Supongamos pues que existe $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ base de Riesz tal que se satisface (2.10). Como probamos en la anterior demostración del Teorema 2.1, $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ satisface la propiedad interpolatoria $S_m(n+a) = \delta_{n,m}$. Desarrollando la sucesión $k(\cdot, m+a)$ en la base dual de $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que notaremos por $\{S^*_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
k(t, m+a) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle k(\cdot, m+a), S_{a,n}\rangle_{\mathbb{H}} S^*_{a,n}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{S_{a,n}(m+a)} S^*_{a,n}(t) \\
&= S^*_{a,m}(t)\,,
\end{aligned}
$$

y así $\{k(\cdot, n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la base dual de $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. En particular, la sucesión $\{k(\cdot, n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz lo cual ocurre si y sólo si se verifica (2.9). Además, se ha demostrado que $\{S_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es necesariamente la base dual de $\{k(\cdot, n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que anteriormente vimos que es $\{S_a(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

2.2.3. Estabilidad

Si el generador estable φ satisface la condición $0 < \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_0 \leq \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_\infty < \infty$, entonces toda función $f \in V_\varphi$ se puede recuperar a partir de la sucesión de muestras $M := \{f(n+a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ por medio de la fórmula de muestreo (2.7),

$$
f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a) S_a(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.
$$

Si las muestras se toman con un error $\triangle M = \{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, entonces la aplicación de la fórmula de muestreo produce un error

$$
\triangle f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n S_a(t-n)
$$

La condición de base de Riesz (Teorema A.2) da una acotación de la norma de este error

$$
\sqrt{A}\, \| \triangle M\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \big\| \triangle f\big\|_2 \leq \sqrt{B}\, \| \triangle M\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,.
$$

donde A y B son las cotas óptimas de la base de Riesz $\{S_a(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es decir el mayor número A y el menor número B tales que la anterior acotación se verifica para cada $\triangle M \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Como, además $\sqrt{A}\, \|M\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \big\|f\big\|_2 \leq \sqrt{B}\, \|M\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$, entonces para el error relativo se tiene la acotación

$$
\sqrt{\frac{A}{B}}\, \frac{\| \triangle M\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|M\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} \leq \frac{\| \triangle f\|_2}{\|f\|_2} \leq \sqrt{\frac{B}{A}}\, \frac{\| \triangle M\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|M\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}\,.
$$

Cuando $\{S_a(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal se tiene $\sqrt{B/A} = \sqrt{A/B} = 1$. El siguiente teorema proporciona una expresión para el cálculo de las cotas óptimas A y B.

Teorema 2.2 *Supongamos que se satisfacen las condiciones equivalentes del Teorema 2.1. Entonces las cotas óptimas de la base de Riesz $\{S_a(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_φ son*

$$A := \Big\| \frac{\sqrt{\Phi_\varphi}}{(Z\varphi)(a,\cdot)} \Big\|_0^2 \quad y \quad B := \Big\| \frac{\sqrt{\Phi_\varphi}}{(Z\varphi)(a,\cdot)} \Big\|_\infty^2 .$$

Demostración. Se tiene que

$$S_a(\cdot - n) = \mathcal{T}_\varphi \frac{e^{-2\pi i n \cdot}}{(Z\varphi)(a,\cdot)} = \mathcal{T}_\varphi \mathcal{U} e^{-2\pi i n \cdot}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde $\mathcal{U}$ es el isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{U}: \quad L^2(0,1) &\longrightarrow \quad L^2(0,1) \\ \mathbb{F} &\longrightarrow \quad f = \mathcal{U}\mathbb{F} := \mathbb{F}/(Z\varphi)(a,\cdot)\,, \end{aligned}$$

Entonces $\{S_a(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la imagen por el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi\mathcal{U}$ de la base ortonormal $\{e^{-2\pi i n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1)$. Por tanto (Teorema A.3)

$$A = \frac{1}{\|(\mathcal{T}_\varphi\mathcal{U})^{-1}\|^2} \quad \text{y} \quad B = \|\mathcal{T}_\varphi\mathcal{U}\|^2 .$$

Para $f = \mathcal{T}_\varphi F = \mathcal{T}_\varphi\mathcal{U}\,\mathbb{F}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|f\|_2 = \|F\sqrt{\Phi_\varphi}\|_{L^2(0,1)} &= \Big\| \frac{\mathbb{F}}{(Z\varphi)(a,\cdot)} \sqrt{\Phi_\varphi} \Big\|_{L^2(0,1)} \\ &\le \Big\| \frac{\sqrt{\Phi_\varphi}}{(Z\varphi)(a,\cdot)} \Big\|_\infty \|\mathbb{F}\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

y análogamente

$$\|f\|_2 \ge \Big\| \frac{\sqrt{\Phi_\varphi}}{(Z\varphi)(a,\cdot)} \Big\|_0 \|\mathbb{F}\|_{L^2(0,1)} .$$

Entonces $\|\mathcal{T}_\varphi\mathcal{U}\| \le \|\sqrt{\Phi_\varphi}/(Z\varphi)(a,\cdot)\|_\infty$ y $\|(\mathcal{T}_\varphi\mathcal{U})^{-1}\| \le \|\sqrt{\Phi_\varphi}/(Z\varphi)(a,\cdot)\|_0^{-1}$. Veamos que se dan las igualdades. Para ello consideremos un número C verificando $C < \|\sqrt{\Phi_\varphi}/(Z\varphi)(a,\cdot)\|_\infty$. Entonces existe un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ de medida positiva tal que $|\sqrt{\Phi_\varphi}(w)/(Z\varphi)(a,w)| \ge C$, $w \in \Omega$. Para la función característica de Ω, $\mathcal{X}_\Omega \in L^2(0,1)$ se tiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_\varphi\mathcal{U}\mathcal{X}_\Omega\|_2 &= \|\mathcal{U}\mathcal{X}_\Omega\sqrt{\Phi_\varphi}\|_{L^2(0,1)} \\ &= \Big\| \frac{\mathcal{X}_\Omega}{(Z\varphi)(a,\cdot)} \sqrt{\Phi_\varphi} \Big\|_{L^2(0,1)} \ge C\|\mathcal{X}_\Omega\|_{L^2(0,1)} , \end{aligned}$$

Figura 2.1: Función de reconstrucción $S_{1/3}(t)$ de los *splines* lineales.

y entonces $\|\mathcal{T}_\varphi \mathcal{U}\| \geq C$. Esto demuestra que $\|\mathcal{T}_\varphi \mathcal{U}\| = \|\sqrt{\Phi_\varphi}/(Z\varphi)(a,\cdot)\|_\infty$ y así $B = \|\sqrt{\Phi_\varphi}/(Z\varphi)(a,\cdot)\|_\infty^2$.

De forma análoga se demuestra que $\|(\mathcal{T}_\varphi \mathcal{U})^{-1}\| = \|\sqrt{\Phi_\varphi}/(Z\varphi)(a,\cdot)\|_0^{-1}$ y así se verifica $A = \|\sqrt{\Phi_\varphi}/(Z\varphi)(a,\cdot)\|_0^2$. □

2.2.4. Ejemplos

Mostramos en esta sección algunos ejemplos que ilustran los resultados obtenidos.

• **Subespacios wavelet de Shannon.** Cuando el generador es el seno cardinal, $\varphi = \operatorname{senc}$, utilizando el Lema 2.1 se tiene que para $a \in [0,1)$, $(Z\varphi)(a,w) = e^{2\pi a w}$, $w \in (0,1)$. Entonces, se cumplen las condiciones equivalentes del Teorema 2.1 y $\widehat{S}(w) = e^{-2\pi a w}\widehat{\varphi}(w)$ o equivalentemente $S(t) = \operatorname{senc}(t-a)$. Así la fórmula (2.7) se lee como: Para cada $f \in PW_{1/2}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n)\operatorname{senc}(t-a-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Esta fórmula se podría deducir de la fórmula de Shannon mediante un cambio de variable, teniendo en cuenta que si $f \in PW_{1/2}$ entonces $f(\cdot + a) \in PW_{1/2}$.

• **Splines lineales.** Consideremos el generador $\varphi = N_2$, B-spline lineal (véase Sección 1.6.2). Para $a \in [0,1)$, se tiene

$$(ZN_2)(a,w) = a + (1-a)e^{-2\pi i w}\,, \quad w \in \mathbb{R}\,.$$

Figura 2.2: *Spline* cardinal fundamental cúbico L_4

Para $a \neq 1/2$, se tiene que $(ZN_2)(a,w) \neq 0\,,\ w \in \mathbb{R}$. Por tanto se verifica la fórmula de muestreo (2.7), donde $S_a = \mathcal{T}_\varphi(a + (1-a)e^{-2\pi i w})^{-1}$. Como

$$\frac{1}{a + (1-a)e^{-2\pi i w}} = \begin{cases} e^{2\pi i w}, & a = 0 \\ \frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{a-1}\right)^n e^{2\pi i(n+1)w}, & a \in (0,1/2) \\ \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n e^{-2\pi i n w}, & a \in (1/2,1) \end{cases}$$

se tiene que

$$S_a(t) = \begin{cases} N_2(t+1), & a = 0 \\ \frac{1}{1-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{a-1}\right)^n N_2(t+n+1), & a \in (0,1/2) \\ \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n N_2(t-n), & a \in (1/2,1) \end{cases}$$

En la figura 2.1 se representa esta función de reconstrucción cuando $a = 1/3$. Nótese que cuando $a \in (0,1/2)$ el soporte de $S_a(t)$ es acotado a la derecha y que cuando $a \in (1/2,1)$ el soporte de $S_a(t)$ es acotado a la izquierda. El valor más favorable es $a = 0$, ya que en este caso $S_a(t)$ tiene soporte compacto. La fórmula de muestreo correspondiente a este caso es: Para $f \in V_{N_2} = \mathcal{S}^1 \cap L^2(\mathbb{R})$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) N_2(t+1-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

• **Splines de grado impar.** Consideremos el generador N_{2r}, B-*spline* de grado $2r-1$. Se tiene que

$$(ZN_{2r})(0,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} N_{2r}(n)e^{-2\pi i n w} = \frac{e^{-2\pi i w}}{(2r-1)!}E_{2r-1}(e^{-2\pi i w})\,, \quad w \in \mathbb{R}$$

donde $E_{2r-1}(z)$ es el polinomio de Euler-Frobenius de grado $2m-2$. Como este polinomio no se anula sobre la circunferencia unidad (véase Sección 1.6.2) resulta que $(ZN_{2r})(0,w) \neq 0$, $w \in \mathbb{R}$, de donde por continuidad,

$$0 < \|(ZN_{2r})(0,w)\|_0 \leq \|(ZN_{2r})(0,w)\|_\infty < \infty\,.$$

Se tiene entonces que para $f \in V_{N_{2r}} = \mathcal{S}^{2r-1} \cap L^2(\mathbb{R})$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) L_{2r}(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $L_{2r} = \mathcal{T}_\varphi\big[1/(ZN_{2r})(0,w)\big]$. El *spline* L_{2r} se denomina *spline* cardinal fundamental de grado $2r-1$.

El desarrollo de Laurent de la función racional $1/\sum_{n\in\mathbb{Z}} N_{2r}(n) z^n$ en una corona conteniendo a la circunferencia unidad, proporciona los coeficientes de Fourier de $1/(ZN_{2r})(0,w)$ en la base $\{e^{-2\pi i n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, y así los coeficientes del *spline* cardinal fundamental L_{2r} en la base de Riesz $\{N_{2r}(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Por ejemplo, para el caso cúbico, $r=4$, se tiene que

$$\frac{1}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} N_4(n) z^n} = \frac{1}{\frac{1}{6}z + \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{6}z^3} = \sqrt{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (2-\sqrt{3})^{|n|} z^{n-2}\,.$$

Entonces

$$\frac{1}{(ZN_{2r})(0,w)} = \sqrt{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (2-\sqrt{3})^{|n|} e^{-2\pi i (n-2) w}$$

y así

$$L_4(t) = \sqrt{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n (2-\sqrt{3})^{|n|} N_4(t-n+2)\,.$$

Las cotas óptimas de la base de Riesz $\{L_{2r}(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se pueden calcular utilizando la expresión dada en el Teorema 2.2 y el apartado 5 de la Proposición 1.2. Por ejemplo, en el caso cúbico, utilizando la propiedad 5 de la Proposición 1.2 se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\Phi_{N_4}(w)}{|(ZN_4)(0,w)|^2} &= \frac{e^{-8\pi i w}(ZN_8)(0,w)}{|(ZN_4)(0,w)|^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2520}\cos(6\pi w) + \frac{1}{21}\cos(4\pi w) + \frac{397}{840}\cos(2\pi w) + \frac{151}{315}}{\frac{1}{18}\cos(4\pi w) + \frac{4}{9}\cos(2\pi w) + \frac{1}{2}}\,,\end{aligned}$$

de donde se obtiene que las cotas óptimas de la base de Riesz $\{L_4(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son

$$\begin{aligned} A &:= \inf_{w\in(0,1)} \frac{\Phi_{N_4}(w)}{|(ZN_4)(0,w)|^2} = \frac{\Phi_{N_4}(1/2)}{|(ZN_4)(0,1/2)|^2} = \frac{17}{35}\,, \\ B &:= \sup_{w\in(0,1)} \frac{\Phi_{N_4}(w)}{|(ZN_4)(0,w)|^2} = \frac{\Phi_{N_4}(0)}{|(ZN_4)(0,0)|^2} = 1\,. \end{aligned}$$

• **Splines cuadráticos.** Consideremos el generador $\varphi = N_3$, B-*spline* cuadrático. Para $a \in [0,1)$ se tiene

$$(ZN_3)(a,w) = \frac{a^2}{2} + \Big[\frac{3}{4} - \Big(a - \frac{1}{2}\Big)^2\Big] e^{-2\pi i w} + \frac{(1-a)^2}{2} e^{-4\pi i w} .$$

Para $a \in (0,1)$, se tiene que $(ZN_3)(a,w) \neq 0, \quad w \in \mathbb{R}$, y es válida pues la fórmula de muestreo (2.7). Para determinar la función de reconstrucción S_a consideremos el polinomio $p(z) := a^2/2 + [3/4 - (a-1/2)^2]z + [(1-a)^2/2]z^2$. $p(z)$ que tiene dos raíces reales $x_{a,1}$ y $x_{a,2}$ cumpliendo $0 > x_{a,1} > -1 > x_{a,2}$. Utilizando el desarrollo en serie de Laurent de $1/p(z)$ en la corona $|x_{a,1}| < |z| < |x_{a,2}|$, se obtiene

$$\frac{1}{(ZN_3)(a,w)} = \frac{2}{(1-a)^2(x_{a,1} - x_{a,2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n w}}{x_{a,2}^{n+1}} + x_{a,1}^n e^{2\pi i (n+1) w} ,$$

de donde

$$S_a(t) = \frac{2}{(1-a)^2(x_{a,1} - x_{a,2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_3(t-n)}{x_{a,2}^{n+1}} + x_{a,1}^n N_3(t+n+1) .$$

Cuando $a = 1/2$ se tiene $x_{a,1} = 1/x_{a,2} = -3 + 2\sqrt{2}$.La correspondiente fórmula de muestreo se escribe como: para cada $f \in V_{N_3}$,

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + 1/2) L_3(t-n) , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

donde

$$L_3(t) = \frac{8}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-3 + 2\sqrt{2})^{|n+1|} N_3(t-n) .$$

• **Splines de grado par.** Consideremos el B-*spline* N_{2r+1}, de grado $2r$. Como, por simetría, $(ZN_{2r+1})(0,1/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} N_{2r+1}(n)(-1)^n = 0$ no se cumplen las condiciones del Teorema 2.1 para $a = 0$. Tomemos $a = 1/2$. Se tiene que

$$(ZN_{2r+1})(1/2, w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} N_{2r+1}(n + 1/2) e^{-2\pi i n w} = \frac{1}{(2r)!} E_{2r}(e^{-2\pi i w}) ,$$

donde $E_m(z) := (m-1)! z^{[(m-1)/2]} \sum_{n \in \mathbb{Z}} N_m(m/2 + n) z^n$. Esta definición generaliza la definición de los polinomio de Euler-Frobenius para m impar dada en la Sección 1.6.2. Los polinomios de Euler-Frobenius no se anulan sobre la

Figura 2.3: *Spline* cardinal fundamental cuadrático L_3

circunferencia unidad (véase [34, Sección 4.6]) y entonces $(ZN_{2r+1})(0,w) \neq 0$, de donde por continuidad,

$$0 < \|(ZN_{2r+1})(1/2,w)\|_0 \leq \|(ZN_{2r+1})(1/2,w)\|_\infty < \infty\,.$$

Se tiene entonces que para cada $f \in V_{N_{2r+1}}$, se verifica

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+1/2)L_{2r+1}(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $L_{2r+1} = \mathcal{T}_\varphi\big[1/(ZN_{2r+1})(1/2,\cdot)\big]$. El *spline* L_{2r+1} se denomina *spline* cardinal fundamental de grado $2r$ y se puede determinar de la misma forma que en los anteriores ejemplos.

• **Subespacios wavelet de Meyer.** Sea φ la función de escala de un análisis multirresolución de Meyer (véase Sección 1.6.3). Utilizando la fórmula de sumación de Poisson (Lema 2.1) se obtiene

$$(Z\varphi)(0,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(w+n) = \begin{cases} 1\,, & w \in [0,1/3) \cup [2/3,1] \\ \widehat{\varphi}(w) + \widehat{\varphi}(w-1)\,, & w \in (1/3,2/3) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\widehat{\varphi}^2(w-1) + \widehat{\varphi}^2(w) = 1$, $w \in (1/3,2/3)$, y que $0 \leq \widehat{\varphi}(w) \leq 1$, $w \in [0,1]$ se obtiene que

$$1 \leq (Z\varphi)(0,w) \leq \sqrt{2}\,, \quad w \in [0,1]\,.$$

Como $\widehat{\varphi}(1/3) = 1$, $\widehat{\varphi}(2/3) = 0$ y $\widehat{\varphi}$ es continua, entonces existe $w_0 \in (1/3,2/3)$ tal que $\widehat{\varphi}(w_0) = 1/\sqrt{2}$, y así $(Z\varphi)(0,w_0) = \sqrt{2}$. Por tanto,

$$\|(Z\varphi)(0,w)\|_0 = 1 \qquad \text{y} \qquad \|(Z\varphi)(0,w)\|_\infty = \sqrt{2}\,.$$

Figura 2.4: Función de escala cardinal $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} 3\pi t/4 + \operatorname{sen} 5\pi t/4}{2\pi t(1+t/2)}$.

Cuando $a = 0$ se verifica la fórmula de muestreo (2.7). Las cotas óptimas de la base de Riesz $\{S_0(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son:

$$A := \operatorname*{ínf}_{w\in(0,1)} \frac{\Phi_\varphi(w)}{|(ZN_4)(0,w)|^2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad B := \sup_{w\in(0,1)} \frac{\Phi_\varphi(w)}{|(ZN_4)(0,w)|^2} = 1\,,$$

donde hemos utilizado que $\Phi_\varphi(w) = 1$, $w \in (0,1)$.

• **Funciones escala cardinales.** Una generalización de la función de escala $\varphi = \operatorname{senc}$, del análisis multirresolución de Shannon, son las funciones de escala cardinales. Se dice que una función de escala ortonormal, φ, de un análisis multirresolución es cardinal si

$$\varphi(n) = \delta_{n,0}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

La ventaja del muestreo en el espacio $V_0 = V_\varphi$, si φ es una función de escala cardinal, es que la correspondiente función de reconstrucción S_0 en la fórmula de muestreo (2.7) es el propio generador, $\varphi = S_0$, y así $\{S_0(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_φ. En consecuencia las cotas óptimas de la base de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{S_0(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ valen ambas 1.

En Xia y Zhang [134] y en Walter y Liu [128] se pueden encontrar distintas construcciones de funciones de escala cardinales. Una función de escala cardinal con una simple expresión es (véase [129]):

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi(1-\gamma)t + \operatorname{sen} \pi(1+\gamma)t}{2\pi t(1+2\gamma t)}\,,$$

donde $0 < \gamma < 1/3$ (véase figura 2.4).

2.3. Muestreo irregular

Frecuentemente, se considera el muestreo irregular como una perturbación del muestreo regular, es decir, se trata la recuperación de una función de $f \in V_\varphi$ a partir de sus muestras perturbadas $\{f(a+n+\varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $a \in [0,1)$ y $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión en $(-1,1)$. Como

$$f(a+n+\varepsilon_n) = \langle F, K_{a+n+\varepsilon_n}\rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1}(f) \in L^2(0,1)$, un método adecuado de tratar el problema es probar que la sucesión $\{K_{a+n+\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{K_{a+\varepsilon_n}e^{-2\pi in\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$. Si $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$ entonces la sucesión $\{K_{a+n}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{K_a e^{-2\pi in\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que juega el papel principal en el muestreo regular, es base de Riesz de $L^2(0,1)$. De esta manera estaremos en condiciones, a partir de esta sucesión y mediante una técnica de perturbación de bases de Riesz, de dar una condición suficiente sobre la sucesión de perturbaciones $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ para que $\{K_{a+n+\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea base de Riesz de $L^2(0,1)$. El siguiente lema da las cotas de Riesz óptimas de $\{K_a e^{-2\pi in\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, necesarias para la aplicación de la mencionada técnica.

Lema 2.2 *Sea $F \in L^2(0,1)$ cumpliendo $0 < \|F\|_0 \leq \|F\|_\infty < \infty$. Entonces, la sucesión $\{F(w)e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Riesz de $L^2(0,1)$ con cotas óptimas $\|F\|_0^2$ y $\|F\|_\infty^2$.*

Demostración. Como $\|F\|_\infty < \infty$, la aplicación

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{J}: & L^2(0,1) & \longrightarrow & L^2(0,1) \\ & G & \longrightarrow & \mathcal{J}(G) := FG\,, \end{array}$$

está bien definida y es un operador acotado de norma $\|F\|_\infty$. Además como $\|1/F\|_\infty = 1/\|F\|_0 < \infty$, este operador es invertible, y su inverso, $\mathcal{J}^{-1}(G) = G/F$, tiene norma $1/\|F\|_0$. Como $\{F(w)e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la imagen por el isomorfismo $\mathcal{J}$ de la base ortonormal $\{e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, entonces es una base de Riesz de $L^2(0,1)$ con cotas óptimas (Teorema A.3) $\|\mathcal{J}^{-1}\|^{-2} = \|F\|_0^2$ y $\|\mathcal{J}\|^2 = \|F\|_\infty^2$. □

Para una matriz infinita $\mathcal{M} = \{m_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ notaremos

$$\|\mathcal{M}\| := \sup_{\|c\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}=1} \|\mathcal{M}c\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,.$$

Teorema 2.3 *Sea F una función de $L^2(0,1)$ con desarrollo de Fourier $F(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi ikw}$, tal que $0 < \|F\|_0 \leq \|F\|_\infty < \infty$. Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de funciones de $L^2(0,1)$ con desarrollos $F_n(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(n)e^{-2\pi ikw}$.*

Supongamos que la matriz infinita $D = \{d_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ *con entradas* $d_{n,k} := a_{n-k}(n) - a_{n-k}$, $n, k \in \mathbb{Z}$, *verifica la condición*

$$\|D\| < \|F\|_0 \,.$$

Entonces, la sucesión $\{F_n(x)e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base de Riesz de* $L^2(0,1)$.

Demostración. Utilizaremos el siguiente resultado sobre perturbación de bases de Riesz (véase [33, Corolario 15.1.5]):

Sea $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una base de Riesz de un espacio de Hilbert con cotas de Riesz inferior y superior C y D respectivamente. Sea $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de $\mathcal{H}$ para la que existe una constante $R < C$ verificando que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle \eta_n - \xi_n, f\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \le R\,\|f\|^2_{\mathcal{H}}\,, \quad f \in \mathcal{H}\,.$$

Entonces $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$.

Para cualquier $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{c_j} e^{2\pi ijx}$ de $L^2(0,1)$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle F_n(x)e^{2\pi inx} - F(x)e^{2\pi inx}, f\rangle|^2\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_k(n) - a_k) e^{2\pi i(n-k)x}, \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{c_j} e^{2\pi ijx}\rangle|^2\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big(a_{n-k}(n) - a_{n-k}\big)\ c_k\Big|^2\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{n,k}\ c_k\Big|^2 = \|D\,c\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})} \le \|D\|_2^2\ \|f\|^2\,.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en nuestro caso $C = \|F\|_0^2$, se obtiene que la sucesión $\{F_n(x)e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$. □

Teorema 2.4 *Sea* $a \in [0,1)$ *tal que* $0 < \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_0 \le \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_\infty < \infty$. *Sea* $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión de perturbaciones en* $(-1,1)$ *tal que la matriz infinita* $D_\varepsilon = \{d_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$ *cuyas entradas están dadas por*

$$d_{n,k} := \varphi(a+n-k+\varepsilon_n) - \varphi(a+n-k)\,, \quad n,k \in \mathbb{Z}$$

verifica

$$\|D_\varepsilon\| < \|(Z\varphi)(a,\cdot)\|_0\,.$$

Entonces existe una base de Riesz $\{S^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* V_φ *tal que, para cada* $f \in V_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n+\varepsilon_n) S^{\varepsilon}_{a,n}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.11}$$

donde la convergencia de la serie es en $L^2(\mathbb{R})$*, absoluta y uniforme en* $t \in \mathbb{R}$*. La sucesión* $\{S^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *verificando* (2.11) *en* $L^2(\mathbb{R})$ *es única, y satisface la propiedad interpolatoria* $S^{\varepsilon}_{a,n}(a+m+\varepsilon_m) = \delta_{n,m}$.

Demostración. Aplicando el Teorema 2.3 a las funciones

$$\overline{K}_a(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(a+k) e^{-2\pi i k x}, \quad \overline{K}_{a+\varepsilon_n}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(a+k+\varepsilon_n) e^{-2\pi i k x}\,, n \in \mathbb{Z}\,,$$

se obtiene que la sucesión $\{\overline{K}_{a+\varepsilon_n} e^{2\pi i n x}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{\overline{K}_{a+n+\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$. Notamos por $\{G^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a la base dual de la base de Riesz $\{K_{a+n+\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Ahora, dada $f \in V_\varphi$, desarrollando la función $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1}(f) \in L^2(0,1)$ con respecto a $\{G^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se tiene

$$F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle F, K_{a+n+\varepsilon_n}\rangle_{L^2(0,1)}\, G^{\varepsilon}_{a,n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n+\varepsilon_n)\, G^{\varepsilon}_{a,n}\,, \;\text{ en }\; L^2(0,1)\,.$$

Aplicando el operador $\mathcal{T}_\varphi$ se obtiene

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n+\varepsilon_n)\, \mathcal{T}_\varphi G^{\varepsilon}_{a,n} \quad \text{ en }\; L^2(\mathbb{R})\,.$$

Además, como $\mathcal{T}_\varphi$ es un isomorfismo, la sucesión $\{S^{\varepsilon}_{a,n} := \mathcal{T}_\varphi G^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ. La convergencia es absoluta debido al carácter incondicional de la convergencia de los desarrollos en un base de Riesz. Además, la convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ de sucesiones del RKHS V_φ implica su convergencia uniforme en $\mathbb{R}$.

Supongamos ahora que se verifica (2.11) para una sucesión $\{S^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ base de Riesz de V_φ . Entonces aplicando $\mathcal{T}_\varphi^{-1}$ se obtiene que para cada $F \in L^2(0,1)$

$$F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} f(a+n+\varepsilon_n) \mathcal{T}_\varphi^{-1} S^{\varepsilon}_{a,n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big\langle F, K_{a+n+\varepsilon_n}\big\rangle_{L^2(0,1)} \mathcal{T}_\varphi^{-1} S^{\varepsilon}_{a,n}\,.$$

Entonces, $\{\mathcal{T}_\varphi^{-1} S^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ es necesariamente la única base de Riesz dual de $\{K_{a+n+\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Así pues la sucesión $\{S^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ verificando (2.11) es única. Aplicando (2.11) a $S^{\varepsilon}_{a,m}$ y teniendo en cuenta la unicidad de los coeficientes de un desarrollo con respecto a una base de Riesz se obtiene que se verifica $S^{\varepsilon}_{a,n}(a+m+\varepsilon_m)=\delta_{n,m}$. □

El siguiente teorema proporciona una acotación uniforme de la norma $\|D_\varepsilon\|$, para todas las sucesiones $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset(-\delta,\delta)$, lo que facilita la aplicación del resultado anterior.

Teorema 2.5 *En la notación del teorema anterior, para cualquier sucesión de perturbaciones* $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset[\alpha,\beta]\subseteq[0,1)$ *se tiene*

$$\|D_\varepsilon\|^2\le\Lambda\Gamma\,,$$

donde

$$\begin{aligned}\Lambda&:=\sup_{\{d_k\}\subset[\alpha,\beta]}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\varphi(a+k+d_k)-\varphi(a+k)|\,,\\ \Gamma&:=\sup_{d\in[\alpha,\beta]}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\varphi(a+k+d)-\varphi(a+k)|\,.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Demostración. Suponemos que $\Lambda\Gamma$ es finito. De otra forma la desigualdad se verifica trivialmente. Nótese que para $k,n\in\mathbb{Z}$,

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}|d_{l,k}|\le\Lambda\quad\text{y}\quad\sum_{l\in\mathbb{Z}}|d_{n,l}|\le\Gamma\,.$$

Para cualquier $c=\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene

$$\begin{aligned}\|D_\varepsilon c\|^2_{\ell^2_s(\mathbb{Z})}&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_{n,k}\;c_k\right|^2\le\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l,k\in\mathbb{Z}}|d_{n,l}c_l\overline{d}_{n,k}\overline{c}_k|\\ &=\sum_{l,k\in\mathbb{Z}}|c_l|\;|c_k|\;\sum_{n\in\mathbb{Z}}|d_{n,l}d_{n,k}|\le\sum_{l,k\in\mathbb{Z}}\frac{|c_l|^2+|c_k|^2}{2}\;\sum_{n\in\mathbb{Z}}|d_{n,l}d^{(j)}_{n,k}|\\ &=\sum_{l\in\mathbb{Z}}|c_l|^2\sum_{k,n\in\mathbb{Z}}|d_{n,l}d_{n,k}|\le\sum_{l\in\mathbb{Z}}|c_l|^2\Gamma\sum_{n\in\mathbb{Z}}|d_{n,l}|\le\Lambda\Gamma\;\|c\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,,\end{aligned}$$

lo cual termina la demostración. □

Trataremos ahora un caso en que el Teorema 2.5 es aplicable. Supongamos que el generador estable $\varphi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y que para algún $\epsilon>0$ verifica $\varphi'(t)=O(|t|^{-(1+\epsilon)})$ cuando $|t|\to\infty$. Entonces, se prueba fácilmente que, para $\delta\in(0,1]$

$$M_{\varphi'}(\delta):=\sum_k\max_{I_k(\delta)}|\varphi'(t)|\le M_{\varphi'}(1)<\infty\,,$$

donde $I_k(\delta)$ nota el intervalo $[a+k-\delta,a+k+\delta]$.

Corolario 2.1 *Sea $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ un generador estable tal que $M_{\varphi'}(\delta) < \infty$, donde $\delta := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_n|$. Entonces la condición*

$$\delta\ M_{\varphi'}(\delta) < \|(Z\varphi(a,\cdot)\|_0$$

implica la existencia de una base de Riesz $\{S^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_φ tal que, para cada $f \in V_\varphi$

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n+\delta_n)\, S^{\varepsilon}_{a,n}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. El Teorema del valor medio da

$$\Lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{\{d\}\subset[-\delta,\delta]} |\varphi(a+n+d) - \varphi(a+n)| \le \delta\ M_{\varphi'}(\delta)\,.$$

Entonces

$$\|D_\varepsilon\| \le \sqrt{\Lambda\Gamma} \le \Lambda \le\ \delta\ M_{\varphi'}(\delta) < \|(Z\varphi(a,\cdot)\|_0\,.$$

Utilizando el Teorema 2.4 se obtiene el resultado buscado. □

2.3.1. Muestreo irregular en espacios de Splines

En las aplicaciones prácticas interesa una cota tipo Kadec, esto es, una cota C, lo mayor posible, sobre el supremos de las perturbaciones $\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_n|$ que garantice la existencia de una fórmula de muestreo irregular

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n+\varepsilon_n) S^{\varepsilon}_{a,n}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.13}$$

donde $\{S^{\varepsilon}_{a,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz, asociada a las perturbaciones. Aunque, en general las funciones de reconstrucción $S^{\varepsilon}_{a,n}$ no son calculables, tendremos garantizada la posibilidad de una recuperación estable, mediante el algoritmo *frame*. Determinamos en esta sección cotas tipo Kadec en los espacios de *splines* lineales, cuadráticos y cúbicos. En la Sección 3.5 estudiaremos el algoritmo *frame* en el contexto del muestreo generalizado irregular y calcularemos las tasas de convergencia del algoritmo para los ejemplos tratados en esta sección.

• **Splines lineales.** Consideremos primero el espacio de los *splines* lineales de $L^2(\mathbb{R})$ con nodos en los enteros, V_{N_2} y $a = 0$. Un generador de este espacio es el B-*spline* lineal $N_2(t) := t\mathcal{X}_{[0,1)} + (2-t)\mathcal{X}_{[1,2)}$. Para $d \in [0,1]$ se tiene

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |N_2(k+d) - N_2(k)| = |N_2(d)| + |N_2(1+d) - N_2(1)| = d + d = 2d\,,$$

Figura 2.5: B-spline N_2

Por simetría $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |N_2(k-d) - N_2(k)| = 2d$. Así, cuando $a = 0$ y $[\alpha, \beta] = [-\delta, \delta]$, donde $\delta \leq 1$, se tiene, en la notación del Teorema 2.5, que $\Gamma := 2\delta$. Además

$$\Lambda := \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_2(d)| + \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_2(1+d) - N_2(1)| + \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_2(2+d)| = 3\delta\,.$$

El Teorema 2.5 da que si $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset [-\delta, \delta]$, se verifica

$$\|D_\varepsilon\|^2 \leq \Lambda\Gamma = 6\,\delta^2\,. \tag{2.14}$$

Por otra parte

$$\big\|(ZN_2)(0,w)\big\|_0 = \inf_{w\in(0,1)} \big|e^{-2\pi i w}\big| = 1\,.$$

Por tanto, según el Teorema 2.4, siempre que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_n| < \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0{,}408\,,$$

existe una base de Riesz $\{S^{\varepsilon}_{0,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_{N_2} tal que para cada $f \in V_{N_2}$, se verifica (2.13) (con $a = 0$) donde la serie converge en $L^2(\mathbb{R})$, absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$.

La cota $1/\sqrt{6} \approx 0{,}408$ mejora el valor $1/3$ obtenido por Chen, Itoh y Shiki en [32].

Suponiendo que $\varepsilon_n \geq 0$ (o $\varepsilon_n \leq 0$) para todo $n \in \mathbb{Z}$, la cota $1/\sqrt{6}$ puede ser mejorada hasta $1/2$ ya que en este caso $\Lambda = 2\delta$. Esta cota es óptima pues no es posible una recuperación mediante un desarrollo en base de Riesz a partir de las muestras tomadas en $\{n + 1/2\}_{n\in\mathbb{Z}}$, ya que (Teorema 2.1)

$$\|(ZN_1)(1/2,\cdot)\|_0 = \inf_{w\in(0,1)} |1/2 - 1/2e^{-2\pi i w}| = 0\,.$$

La cota $1/2$ y su optimalidad apareció por primera vez en [90].

Figura 2.6: B-*spline* N_4

• **Splines cúbicos.** Para obtener un resultado similar para los *splines* cúbicos, seguiremos los mismos pasos cuando el generador es el B-*spline* cúbico

$$\begin{aligned} N_4(t) =& \frac{t^3}{6}\mathcal{X}_{[0,1)}(t) + \Big(\frac{2}{3} - 2t + 2t^2 - \frac{t^3}{2}\Big)\mathcal{X}_{[1,2)}(t) \\ &+ \Big(-\frac{22}{3} + 10t - 4t^2 + \frac{t^3}{2}\Big)\mathcal{X}_{[2,3)}(t) + \Big(\frac{32}{3} - 8t + 2t^2 - \frac{t^3}{6}\Big)\mathcal{X}_{[3,4)}(t)\,. \end{aligned}$$

Fijamos $a = 0$. Se tiene que para $d \in [0, 1)$

$$\sum_{k=0}^{4} |N_4(k-d) - N_4(k)| = \sum_{k=0}^{4} |N_4(k+d) - N_4(k)| = d + d^2 - \frac{2d^3}{3}\,,$$

donde la primera igualdad se debe a que N_4 es simétrica con respecto a $t = 2$. Por tanto, para $[\alpha, \beta] = [-\delta, \delta]$, donde $\delta < 1$, se tiene que

$$\Gamma = \delta + \delta^2 - 2\delta^3/3\,.$$

Teniendo en cuenta la simetría y monotonía de N_4 y que

$$N_4(1+\delta) - N_4(1) > N_4(1) - N_4(1-\delta)\,,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \Lambda :=& \sum_{k=0}^{4} \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4(k+d) - N_4(k)| \\ =& \, 2N_4(\delta) + 2[N_4(1+\delta) - N_4(1)] + N_4(2) - N_4(2+\delta) \\ =& \, \delta + 2\delta^2 - \frac{7\delta^3}{6}\,. \end{aligned}$$

Así, para $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset [-\delta, \delta]$, se tiene

$$\|D_\varepsilon\|^2 \le \Lambda\Gamma = \frac{7\delta^6}{9} - \frac{5\delta^5}{2} + \frac{\delta^4}{6} + 3\delta^3 + \delta^2\,.$$

Figura 2.7: B-spline N_3

Como

$$\big\|(ZN_4)(0,\cdot)\big\|_0 = \inf_{w\in(0,1)} \Big|\frac{1}{6}e^{-2\pi i w} + \frac{2}{3}e^{-4\pi i w} + \frac{1}{6}e^{-6\pi i w}\Big| = \frac{1}{3}\,,$$

se tiene que si

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_n| < C \approx 0{,}253\,,$$

donde C es el cero del polinomio $7\delta^6/9 - 5\delta^5/2 + \delta^4/6 + 3\delta^3 + \delta^2 - 1/9$ en $(0,1/2)$, existe una base de Riesz $\{S^{\varepsilon}_{0,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_{N_4} tal que para cada $f \in V_{N_4}$ se verifica (2.13) con $a = 0$.

• **Splines cuadráticos.** Consideremos ahora el espacio de los *splines* cuadráticos $V_{N_3} = \mathcal{S}^2 \cap L^2(\mathbb{R})$. Un generador de este espacio es el B-*spline* cuadrático

$$N_3(t) := \frac{t^2}{2}\mathcal{X}_{[0,1)}(t) + \Big(3t - t^2 - \frac{3}{2}\Big)\mathcal{X}_{[1,2)}(t) + \frac{(3-t)^2}{2}\mathcal{X}_{[2,3)}(t)\,.$$

Como

$$\big\|(ZN_3)(0,\cdot)\big\|_0 = \frac{1}{2}\inf_{w\in(0,1)} |e^{-2\pi i w} + e^{-4\pi i w}| = 0\,,$$

no es posible considerar $a = 0$. Sin embargo para $a = 1/2$ se tiene

$$\big\|(ZN_3)(1/2,\cdot)\big\|_0 = \frac{1}{2}\inf_{w\in(0,1)} \Big|\frac{1}{8} + \frac{3}{4}e^{-2\pi i w} + \frac{1}{8}e^{-4\pi i w}\Big| = \frac{1}{2}\,,$$

Para $d \in [0,1/2)$,

$$\sum_{k=0}^{2} |N_3(k+1/2+d) - N_3(k)| = \sum_{k=0}^{2} |N_3(k+1/2-d) - N_3(k)| = d + d^2\,.$$

Entonces, para $[\alpha,\beta] = [-\delta,\delta]$, donde $\delta < 1/2$, se tiene que

$$\Gamma = \delta + \delta^2\,.$$

Teniendo en cuenta la monotonía y la simetría de N_3, y que

$$N_3(1/2+\delta) - N_3(1/2) > N_3(1/2) - N_3(1/2-\delta)\,,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\Lambda &= \sum_{k=0}^{2} \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4(k+d) - N_4(k)| \\ &= 2[N_3(1/2+\delta) - N_3(1/2)] + N_4(3/2) - N_4(3/2+\delta) \\ &= \delta + 2\delta^2\,.\end{aligned}$$

Entonces, para $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset [-\delta,\delta]\,$,

$$\|D_\varepsilon\|^2 \le \Lambda\Gamma = \delta^2 + 3\delta^3 + 2\delta^4\,.$$

Por tanto, si

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_n| < C \approx 0{,}334\,,$$

donde C es el cero del polinomio $\delta^2 + 3\delta^3 + 2\delta^4 - 1/4$ en $(0, 1/2)\,$, entonces, existe una base de Riesz $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_{N_3} tal que para cada $f \in V_{N_3}$ se verifica (2.13) con $a = 1/2$. La cota C mejora la cota $1/4$ obtenida en [32].

2.4. Muestreo entrelazado

Trataremos en esta sección la recuperación de las funciones f de un espacio invariante por traslación V_φ, a partir de sus muestras tomadas en dos sucesiones regulares entrelazadas de periodo 2, $\{f(a+2n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f(b+2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $a \neq b$. Nótese que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a, b \in [0, 2)$. Kohlenberg [83] estudió por primera vez este problema, obteniendo una fórmula estable que permite tal recuperación en el caso $V_\varphi = PW_{1/2}$.

Nuestro estudio está basado en los subespacios de $V_1 := DV_\varphi$, donde D es el operador de dilatación $(Df)(t) := \sqrt{2}f(2t)$, formados por las funciones que se anulan en una sucesión regular de puntos de periodo 1,

$$M_c := \{f \in V_1\,:\, f(c+n) = 0,\, n \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Estos subespacios resultaran también muy útiles en el estudio del error de aliasing en la Sección 4.3. Bajo cierta condición que se especificara más adelante, los espacios $M_{a/2}$ y $M_{b/2}$ son espacios invariantes por traslación con un generador estable y además $V_1 = M_{a/2} + M_{b/2}$. Así, para cada $f \in V_1$, existen

$f_a \in M_{a/2}$ y $f_b \in M_{b/2}$ tales que $f = f_a + f_b$. La fórmula de muestreo regular (Teorema 2.1) proporciona dos funciones $T_{a,b/2}$ y $T_{b,a/2}$ tales que

$$f_a(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_a(b/2+n)T_{a,b/2}(t-n), \quad f_b(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_b(a/2+n)T_{b,a/2}(t-n)\,.$$

Teniendo en cuenta que $f(b/2+n) = f_a(b/2+n)$ y $f(a/2+n) = f_b(a/2+n)$, $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$f(t) = f_a(t) + f_b(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[f(b/2+n)T_{a,b/2}(t-n) + f(a/2+n)T_{b,a/2}(t-n)\big]\,.$$

La aplicación del operador D^{-1} a esta fórmula, proporciona la fórmula de muestreo buscada para las funciones f de $V_\varphi = D^{-1}V_1$.

En el Teorema 2.6 desarrollamos en detalle este argumento. Antes, necesitamos una caracterización de las funciones del espacio M_c que damos en el Lema 2.4, la cual es una consecuencia de una expresión para la transformada de Zak de las funciones de V_1 que damos en el Lema 2.3.

Aplicando la caracterización de las transformadas de Fourier de V_φ dada en la Sección 1.2, se obtiene que una función $f \in V_1 = DV_\varphi$ si y sólo si existe una función 1-periódica $m_f \in L^2(0,1)$ tal que

$$\widehat{f}(w) = m_f(w/2)\widehat{\varphi}(w/2)\,.$$

Esta función es única. De hecho $m_f = (1/\sqrt{2})\mathcal{T}_\varphi^{-1}D^{-1}f$. Nótese que aunque para facilitar la lectura estamos utilizamos la notación habitual en el espacio V_1 de un análisis multirresolución, no suponemos que V_1 forme parte de un análisis multirresolución, ni siquiera que se verifique la condición de escala $\varphi \in V_1$.

Para poder aplicar la fórmula sumatoria de Poisson a las funciones de V_1, basta suponer, y así lo hacemos en esta sección, que el generador verifica

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w+n)|\Big\|_\infty < \infty\,. \tag{2.15}$$

En efecto, para $f \in V_1$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(w+n)| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|m_f\Big(\frac{w}{2}+\frac{n}{2}\Big)\widehat{\varphi}\Big(\frac{w}{2}+\frac{n}{2}\Big)\Big| \\ &= \Big|m_f\Big(\frac{w}{2}\Big)\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|\widehat{\varphi}\Big(\frac{w}{2}+n\Big)\Big| + \Big|m_f\Big(\frac{w}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|\widehat{\varphi}\Big(\frac{w}{2}+\frac{1}{2}+n\Big)\Big|\,,\end{aligned}$$

c.t.p. $w \in \mathbb{R}$, y así (2.15) implica que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(w+n)| \in L^2(0,1)$, lo cual permite aplicar la fórmula sumatoria de Poisson (Lema 2.1), obteniéndose que para un $t \in \mathbb{R}$ fijo, se verifica

$$(Zf)(t,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(w+n)e^{2\pi i(w+n)t} \quad \text{c.t.p.}\, w \in \mathbb{R}\,. \tag{2.16}$$

Lema 2.3 *Para $t \in \mathbb{R}$ fijo y para cada $f \in V_1$ se tiene*

$$(Zf)\Big(\frac{t}{2}, w\Big) = m_f\Big(\frac{w}{2}\Big)(Z\varphi)\Big(t, \frac{w}{2}\Big) + m_f\Big(\frac{w}{2} + \frac{1}{2}\Big)(Z\varphi)\Big(t, \frac{w}{2} + \frac{1}{2}\Big),$$

c.t.p. $w \in \mathbb{R}$.

Demostración. Utilizando la igualdad (2.16) y descomponiendo la suma en los términos pares y en los impares se obtiene

$$\begin{aligned}
(Zf)\Big(\frac{t}{2}, w\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_f\Big(\frac{w}{2} + \frac{n}{2}\Big)\widehat{\varphi}\Big(\frac{w}{2} + \frac{n}{2}\Big)e^{2\pi i(w+n)t/2} \\
&= m_f\Big(\frac{w}{2}\Big) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}\Big(\frac{w}{2} + n\Big)e^{2\pi i(w/2+n)t} \\
&\quad + m_f\Big(\frac{w}{2} + \frac{1}{2}\Big) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}\Big(\frac{w}{2} + \frac{1}{2} + n\Big)e^{2\pi i(w/2+1/2+n)t}.
\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo (2.16) para $f = \varphi$, se obtiene el resultado. □

Lema 2.4 *Sea f una función de V_1 y $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f \in M_{c/2}$ si y sólo si*

$$m_f(w)(Z\varphi)(c,w) + m_f\Big(w + \frac{1}{2}\Big)(Z\varphi)\Big(c, w + \frac{1}{2}\Big) = 0, \quad \text{c.t.p. } w \in \mathbb{R}\,.$$

Demostración. Como $(Zf)(c/2, w) = 0$ c.t.p si y sólo si $f(c/2 + n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, el resultado es consecuencia del lema anterior. □

Notaremos

$$\Gamma_{a,b}(w) := (Z\varphi)(b,w)(Z\varphi)\Big(a, w + \frac{1}{2}\Big) - (Z\varphi)\Big(b, w + \frac{1}{2}\Big)(Z\varphi)(a,w)\,.$$

Teorema 2.6 *Sean $a, b \in [0,2)$ tales que $\|\Gamma_{a,b}\|_0 > 0$. Entonces, para cada $f \in V_\varphi$,*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big[f(a+2n)S_1(t-2n) + f(b+2n)S_2(t-2n)\big]\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{2.17}$$

donde las funciones S_1 y S_2 de V_φ vienen dadas por su transformada de Fourier

$$\widehat{S}_1(w) := \frac{-2(Z\varphi)(b,w+1/2)}{\Gamma_{a,b}(w)}\widehat{\varphi}(w), \quad \widehat{S}_2(w) := \frac{2(Z\varphi)(a,w+1/2)}{\Gamma_{a,b}(w)}\widehat{\varphi}(w).$$

La convergencia de la serie en (2.17) *es en $L^2(\mathbb{R})$, absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$.*

Demostración. El Lema 2.4 nos conduce a considerar las funciones φ_a y φ_b de V_1 dadas por

$$m_{\varphi_a}(w) := e^{-i\pi w}(Z\varphi)\Big(a, \frac{w}{2}+\frac{1}{2}\Big), \quad m_{\varphi_b}(w) := e^{-i\pi w}(Z\varphi)\Big(b, \frac{w}{2}+\frac{1}{2}\Big).$$

Probaremos que φ_a (respectivamente φ_b) es un generador estable de V_{φ_a} (respectivamente V_{φ_b}). Se tiene

$$\begin{aligned}\Phi_{\varphi_a}(w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_a(w+n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|(Z\varphi)\Big(a, \frac{w}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}\Big)\widehat{\varphi}\Big(\frac{w}{2}+\frac{n}{2}\Big)\Big|^2 \\ &= \Big|(Z\varphi)\Big(a, \frac{w}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big|^2\Phi_\varphi\Big(\frac{w}{2}\Big) + \Big|(Z\varphi)\Big(a, \frac{w}{2}\Big)\Big|^2\Phi_\varphi\Big(\frac{w}{2}+\frac{1}{2}\Big).\end{aligned}$$

Como $(Zf)(\varphi,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(w+n)e^{2\pi i(w+n)t}$ la hipótesis (2.15), implica que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\|(Z\varphi)(t,\cdot)\|_\infty < \infty$. Como φ es un generador estable $0 < \|\Phi_\varphi\|_0 \le \|\Phi_\varphi\|_\infty < \infty$. Entonces $\|\Phi_{\varphi_a}\|_\infty < \infty$. Además utilizando que $\|(Z\varphi)(b,\cdot)\|_\infty > 0$, pues $\|\Gamma_{a,b}\|_0 > 0$, y

$$\begin{aligned}&\big|(Z\varphi)\big(a, w+\tfrac{1}{2}\big)\big| + \big|(Z\varphi)(a,w)\big| \\ &\qquad \ge \frac{|(Z\varphi)(b,w)(Z\varphi)(a,w+1/2)| + |(Z\varphi)(b,w+1/2)(Z\varphi)(a,w)|}{\|(Z\varphi)(b,\cdot)\|_\infty} \\ &\qquad \ge \frac{\|\Gamma_{a,b}\|_0}{\|(Z\varphi)(b,\cdot)\|_\infty}, \text{ a.e. },\end{aligned}$$

se obtiene que $\|\Phi_{\varphi_a}\|_0 > 0$. Por tanto, φ_a es un generador estable de V_{φ_a}.

De manera similar se prueba que φ_b es un generador estable de V_{φ_b}.

Para $f \in V_1$, consideremos las funciones $f_a \in V_{\varphi_a}$ and $f_b \in V_{\varphi_b}$,cuyas transformadas de Fourier son $\widehat{f_a}(w) := \alpha_f(w)\widehat{\varphi}_a(w)$ y $\widehat{f_b}(w) := \beta_f(w)\widehat{\varphi}_b(w)$, donde α_f y β_f son las funciones 1-periódicas de $L^2(0,1)$ definidas respectivamente por

$$\alpha_f(w) := e^{i\pi w}\frac{m_f(w/2)(Z\varphi)(b,w/2) + m_f(w/2+1/2)(Z\varphi)(b,w/2+1/2)}{\Gamma_{a,b}(w/2)},$$

$$\beta_f(w) := -e^{i\pi w}\frac{m_f(w/2)(Z\varphi)(a,w/2) + m_f(w/2+1/2)(Z\varphi)(a,w/2+1/2)}{\Gamma_{a,b}(w/2)}.$$

Se comprueba fácilmente que $\widehat{f} = \widehat{f_a} + \widehat{f_b}$ de donde se sigue que $f = f_a + f_b$.

Veamos ahora que se satisfacen las condiciones para la aplicación de la fórmula de muestreo dada en el Teorema 2.1 cuando el generador es φ_a y las muestras son $\{n + b/2\}_{n\in\mathbb{Z}}$. En primer lugar el generador φ_b es continuo pues $\varphi_b \in V_1 = DV_\varphi$. Aplicando la igualdad de Parseval en la igualdad (2.16) se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t+n)|^2 &= \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(w+n) e^{2\pi i(w+n)t} \Big\|^2_{L^2(0,1)} \\ &\le \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(w+n)| \Big\|^2_{L^2(0,1)} < \infty\,.\end{aligned}$$

Por tanto, para cada $f \in V_1$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t+n)|^2 < \infty\,. \tag{2.18}$$

El Lema 2.3 da la relación $(Z\varphi_a)(b/2, w) = e^{-i\pi w}\Gamma_{a,b}(w/2)$. Como $\|\Gamma_{a,b}\|_0 > 0$ se tiene que $\|(Z\varphi_a)(b/2,\cdot)\|_0 > 0$ y, como para todo $t \in \mathbb{R}$, $\|(Z\varphi)(t,\cdot)\|_\infty < \infty$ se tiene también que $\|(Z\varphi_a)(b/2,\cdot)\|_\infty < \infty$. Se cumplen pues las condiciones para la aplicación de la fórmula de muestreo antes mencionada. Aplicando dicha fórmula a f_a se obtiene

$$f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_a\Big(\frac{b}{2} + n\Big) T_{a,b/2}(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde

$$\widehat{T}_{a,b/2}(w) = \frac{\widehat{\varphi}_a(w)}{(Z\varphi_a)(b/2,w)} = \frac{(Z\varphi)(a, w/2 + 1/2)}{\Gamma_{a,b}(w/2)} \widehat{\varphi}\Big(\frac{w}{2}\Big)\,.$$

La convergencia es en $L^2(\mathbb{R})$, absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$.

De manera similar se obtiene que

$$f_b(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_b(a/2 + n) T_{b,a/2}(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde

$$\widehat{T}_{b,a/2}(w) = -(Z\varphi)(b, w/2 + 1/2)\widehat{\varphi}(w/2)/\Gamma_{a,b}(w/2)\,.$$

Utilizando el Lema 2.4, $f_a \in M_{a/2}$ y $f_b \in M_{b/2}$. Por tanto

$$\begin{aligned} f(t) &= f_a(t) + f_b(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[f\big(\frac{b}{2} + n\big) T_{a,b/2}(t-n) + f\big(\frac{a}{2} + n\big) T_{b,a/2}(t-n) \Big]\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Aplicando el operador D^{-1} a esta fórmula de muestreo que satisfacen las funciones $f \in V_1$, se obtiene la fórmula de muestreo (2.17) para las funciones $f \in V_\varphi$. $\square$

Nótese que se podría probar a partir del Lema 2.4, y con una técnica similar a la utilizada en la obtención de una madre wavelet a partir de un análisis multirresolución [133, p. 35], que $M_{a/2} = V_{\varphi_a}$, siempre que $\|\Gamma_{a,b}\|_0 > 0$. Además, de la fórmula de muestreo (2.19) se obtiene $M_{a/2} \cap M_{b/2} = \{0\}$. Por tanto la condición $\|\Gamma_{a,b}\|_0 > 0$ implica que V_1 se puede escribir como la suma directa $V_1 = M_{a/2} \oplus M_{b/2}$ de sus subespacios cerrados $M_{a/2}$ y $M_{b/2}$. De este resultado y utilizando [33, Lema 3.6.2] se obtiene que la sucesión

$$\{S_1(\cdot - 2n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{S_2(\cdot - 2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

es una base de Riesz de V_φ.

Finalizaremos esta sección con dos ejemplos:

• **El espacio de Paley-Wiener $PW_{1/2}$.** Para el generador $\varphi = \text{senc}$, se tiene que $(Z\,\text{senc})(t,w) = e^{2\pi iwt}$ cuando $|w| < 1/2$ y entonces

$$\Gamma_{a,b}(w) = e^{2\pi iw(a+b)}\left[e^{-i\pi a} - e^{-i\pi b}\right], \quad w \in (0, 1/2).$$

Como además $\Gamma_{a,b}(w \pm 1/2) = -\Gamma_{a,b}(w)$, se tiene $\|\Gamma_{a,b}\|_0 > 0$ si y sólo si $a \neq b$, con $a, b \in [0, 2)$. Para cada $f \in PW_{1/2}$ la fórmula de muestreo (2.17) se escribe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[f(a+2n)S(t-2n-a) + f(b+2n)S(b+2n-t)\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

donde

$$S(t) := \frac{\sin\pi t - \sin\pi(t+a-b) + \sin\pi(a-b)}{\pi t(1-\cos\pi(a-b))}.$$

• **Subespacios wavelet de Meyer.** Sea φ la función de escala de un análisis multirresolución de Meyer (véase Sección 1.6.3). Se comprueba fácilmente que

$$(Z\varphi)(t,w) = e^{2\pi iwt}\begin{cases} 1 & w \in (0,1/3) \\ \widehat{\varphi}(w) + \widehat{\varphi}(w-1)e^{-2\pi it} & w \in (1/3, 2/3) \\ e^{-2\pi it} & w \in (2/3, 1). \end{cases}$$

Después de algunos cálculos se obtiene

$$\Gamma_{a,b} = e^{i2\pi w(a+b)}\begin{cases} \widehat{\varphi}(w+1/2)\overline{C} + \widehat{\varphi}(w-1/2)C & w \in (0,1/6) \\ C & w \in (1/6,1/3) \\ C\widehat{\varphi}(w) - C\widehat{\varphi}(w-1)e^{-\pi i(a+b)} & w \in (1/3,1/2), \end{cases}$$

donde $C := e^{-\pi ia} - e^{-i\pi b}$. En consecuencia, si $a \neq b$ y $a + b \neq 2$ entonces $\|\Gamma_{a,b}\|_0 > 0$ (recuérdese que $a, b \in [0, 2)$).

Capítulo 3

Muestreo generalizado

En este capítulo tratamos la recuperación de las funciones de un espacio invariante por traslación a partir de muestras, no necesariamente de la propia función, sino de otras funciones relacionadas con ésta.

Uno de los primeros resultados en este sentido, fue dado por Jagerman y Fogel [76] en 1956, quienes proporcionaron una fórmula que permite la recuperación de las funciones, f, del espacio de Paley-Wiener $PW_{1/2}$, a partir de las muestras $\{f(2n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f'(2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Tres años antes, Kohlenberg [83] dio una fórmula, denominada de muestreo periódico no uniforme, que permite la recuperación de las funciones, f del espacio $PW_{1/2}$ a partir de las muestras $\{f(d_j + sn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$, donde d_j, $j = 1, 2, \dots, s$, son puntos distintos en el intervalo $[0, s)$.

En 1977, Papoulis [98] extendió éstos y otros resultados dando una fórmula que permite recuperar las funciones f del espacio de Paley-Wiener $PW_{1/2}$ a partir de las muestras de las respuestas de la función f a s sistemas lineales e invariantes por traslación $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_s$ (filtros) tomadas en los puntos $\{sn\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\big\{\big(\mathcal{L}_j f\big)(sn)\big\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s} .$$

Esta generalización resulta muy útil en las aplicaciones al procesado de la señal, donde frecuentemente se efectúa un filtrado previo al muestreo. Una deducción diferente de esta fórmula, denominada de muestreo generalizado o multicanal, puede encontrarse en [70].

En 1997, Djokovic y Vaidyanathan [36], utilizando técnicas de la teoría de *filter-banks*, extendieron la fórmula de Jagerman y Fogel y la fórmula de muestreo periódico no uniforme a un espacio invariante por traslación general. En este mismo trabajo, consideraron también la reconstrucción de las funciones a partir de medias locales de la función. Dada la importancia que en las aplicaciones prácticas tiene este tipo de muestreo, ha sido objeto de estudios posteriores (ver [1, 4, 115, 116, 117]).

Unser y Zerubia [122] y [123], utilizando también la teoría de *filter-banks*, extendieron la fórmula de muestreo generalizado de Papoulis a un espacio invariante por traslación, obteniendo una fórmula, que contiene como casos particulares a las obtenidas anteriormente por Djokovic and Vaidyanathan .

En este capítulo estudiamos el muestreo generalizado regular, así como el muestreo generalizado irregular, siguiendo una técnica similar a la desarrollada en el capítulo anterior. Contemplamos la posibilidad de un periodo de muestreo menor que el número de canales. Más concretamente, estudiamos la recuperación de cualquier función, f, perteneciente a V_φ a partir de las muestras

$$\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\}_{n\in\mathbb{Z}\,,j=1,2,\dots,s}\,,$$

donde $s \geq r$. Tal posibilidad aporta dos ventajas como compensación a tener que utilizar una mayor tasa de muestreo (*oversampling*). Por una parte la fórmula de muestreo no es única, sino que existen infinitas fórmulas, permitiendo, pues, elegir entre éstas. Esta flexibilidad puede ser aprovechada para obtener funciones de reconstrucción con propiedades convenientes. Por ejemplo, en ocasiones, se pueden obtener fórmulas de muestreo cuyas funciones de reconstrucción son de soporte compacto. Por otra parte, las fórmulas con *oversampling*, es decir, con $s > r$, son un desarrollo en un *overcomplete frame* y en consecuencia, tienen una mayor estabilidad numérica (véase [35, Sección 3.6], [92, Sección 5.1] y Sección 4.2).

La posibilidad de muestreo con un periodo de muestreo $r < s$, fue señalada mediante un ejemplo por Djokovic y Vaidyanathan [36], y ha sido estudiada en detalle por Venkataramani y Bresler [124] en el caso de que el espacio invariante por traslación sea el espacio de Paley-Wiener $PW_{1/2}$.

La técnica seguida, de la que damos a continuación un breve resumen no precisa del conocimiento de la teoría de *filter-banks*. La representación de las funciones f del espacio V_φ, dada por

$$f(t) = \langle F, K_t\rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

donde $f = \mathcal{T}_\varphi F$ y $K_t(w) = \overline{(Z\varphi)}(t,w)$, que jugó un papel importante en el estudio del muestreo regular e irregular, admite una generalización (Sección 3.1): Para un sistema lineal e invariante por traslación $\mathcal{L}$ definido sobre V_φ, con ciertas propiedades que se especificarán más adelante, se tiene la representación

$$\big(\mathcal{L}f\big)(t) = \big\langle F, K_t^{\mathcal{L}}\big\rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

donde $K_t^{\mathcal{L}} = \overline{(Z\mathcal{L}\varphi)}(t,\cdot)$. Esta representación es muy adecuada para nuestros propósitos de muestreo generalizado debido a que el núcleo $K_t^{\mathcal{L}}$ satisface la propiedad

$$K_{t+n}^{\mathcal{L}}(w) = K_t^{\mathcal{L}}(w)e^{-2\pi inw}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Así las muestras regulares admiten la representación: Para $j = 1, 2, \ldots, s$,

$$(\mathcal{L}_j f)(rn) = \big\langle F(\cdot), K_0^{\mathcal{L}_j}(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Esta representación traslada el problema de la recuperación de las funciones $f \in V_\varphi$ a partir de estas muestras, al problema de la recuperación de las funciones $F \in L^2(0,1)$ a partir del valor de sus productos escalares con la sucesión $\{K_0^{\mathcal{L}_j}(w)e^{-2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$. Este problema se resuelve con la ayuda de los *frame* duales a $\{K_0^{\mathcal{L}_j}(w)e^{-2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ (Sección 3.3).

Las muestras irregulares se pueden representar mediante

$$(\mathcal{L}_j f)(rn + \varepsilon_{j,n}) = \big\langle F(\cdot), K_{\varepsilon_{j,n}}^{\mathcal{L}_j}(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.1}$$

Una técnica apropiada de perturbación de *frames* proporciona, partiendo del frame $\{K_0^{\mathcal{L}_j}(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$, condiciones suficientes sobre las perturbaciones $\varepsilon = \{\varepsilon_{j,n}\}$ para que la sucesión $\{K_{\varepsilon_{j,n}}^{\mathcal{L}_j}(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ sea un *frame* de $L^2(0,1)$, y poder así obtener $f = \mathcal{T}_\varphi F$, a partir de las muestras irregulares $\{(\mathcal{L}_j f)(rn+\varepsilon_{j,n})\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ de forma estable (Sección 3.4). Concretamente, cuando la sucesión de errores ε verifica cierta condición, existe un *frame* $\{S_{j,n}^{\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ (base de Riesz si $r = s$) de V_φ tal que, para cada $f \in V_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_j f)(rn + \varepsilon_{j,n})S_{j,n}^{\varepsilon}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{3.2}$$

uniformemente en $\mathbb{R}$. Además, para muchos ejemplos importantes las sucesiones de errores permitidas $\varepsilon = \{\varepsilon_{j,n}\}$ se expresarán en función de $\delta = \sup_{j,n}|\varepsilon_{j,n}|$.

Desde un punto de vista práctico, la fórmula (3.2) no es útil, ya que el *frame* $\{S_{j,n}^{\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ depende de la sucesión de errores ε, y es por tanto imposible de determinar. Ahora bien, la representación (3.1) permite la recuperación de $F \in L^2(0,1)$, y así de $f = \mathcal{T}_\varphi F$, a partir de las muestras generalizadas, $\{\mathcal{L}_j f(nr + \varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$, por medio del algoritmo *frame* correspondiente al *frame* $\{K_{\varepsilon_{j,n}}^{\mathcal{L}_j}(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$. Implementaremos este algoritmo en el contexto de $\ell^2(\mathbb{Z})$, que resulta el marco más adecuado para su puesta en práctica (Sección 3.5).

Como en el capítulo anterior V_φ es un espacio invariante por traslación de funciones continuas con un generador estable $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Así V_φ es un RKHS y la convergencia en la norma $L^2(\mathbb{R})$ implica convergencia uniforme en $\mathbb{R}$.

Nótese que no se pierde generalidad al estudiar la recuperación de las funciones de $f \in V_\varphi$ a partir de las muestras $\{\mathcal{L}_j f(rn)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\cdots,s}$ en lugar de a partir de las muestras $\{\mathcal{L}_j f(rn+c_j)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\cdots,s}$, ya que siempre se podría considerar los sistemas trasladados adecuados.

3.1. Una representación para las muestras

Supongamos que s sistemas lineales e invariantes por traslación $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, se definen sobre V_φ. Consideramos sistemas lineales e invariantes por traslación, $\mathcal{L}_j$, de los dos siguientes tipos:

(a) La respuesta impulsional l de $\mathcal{L}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Así, para cada $f \in V_\varphi$ se tiene

$$\big(\mathcal{L}f\big)(t) := [f * l](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)l(t-x)dx = \langle f(\cdot), \phi(\cdot - t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $\phi(t) := \overline{l(-t)}$. Nótese que $\mathcal{L}f$ es una función continua y acotada sobre $\mathbb{R}$ (véase [60]).

(b) La respuesta impulsional de $\mathcal{L}$ es de la forma $l = \sum_{k=1}^{N} c_k \delta^{(k)}(t + d_k)$ donde $\delta^{(k)}$ es la derivada k-ésima de la delta de Dirac, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y c_k, d_k son constantes reales. Así, para cada $f \in V_\varphi$ se tiene

$$\big(\mathcal{L}f\big)(t) := \sum_{k=0}^{N} c_k f^{(k)}(t + d_k)\,.$$

Para garantizar que esta definición tiene sentido para cada $f \in V_\varphi$ y para cada $t \in \mathbb{R}$, suponemos en este caso que $\varphi^{(N)}$ existe y que para $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi^{(k)}(t-n)|^2$ es uniformemente acotada sobre $\mathbb{R}$. De esta forma, como para $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n \varphi^{(k)}(t-n)| \le \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \sup_{t\in[0,1]} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi^{(k)}(t-n)|^2\Big)^{1/2}\,,$$

las funciones $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \in V_\varphi$ tienen N derivadas dadas por

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi^{(k)}(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{3.3}$$

para $k = 1, 2, \ldots, N$, siendo la convergencia de esta serie uniforme en $\mathbb{R}$.

En la demostración del siguiente lema utilizamos la *desigualdad integral de Minkowski* (véase [65]). Ésta establece que si (X, M, μ) y (Y, N, υ) son espacios de medida σ-finita y $1 \le p < \infty$, entonces, para cualquier función h que sea $M \times N$-medible se tiene

$$\Big(\int_X \Big| \int_Y h(x,y) d\upsilon(y) \Big|^p d\mu(x) \Big)^{1/p} \le \int_Y \Big(\int_X |h(x,y)|^p d\mu(x) \Big)^{1/p} d\upsilon(y) \,.$$

En particular, tomando $X = \mathbb{Z}$, $\mu(n) = 1$, para $n \in \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{R}$, υ la medida de Lebesgue y $p = 2$, se tiene que cualquier $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $h(n, \cdot)$ sea Lebesgue medible para cada $n \in \mathbb{Z}$, verifica

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} h(n,y) dy \Big|^2 \le \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h(n,y)|^2 \Big)^{1/2} dy \Big)^2 . \tag{3.4}$$

Lema 3.1 *Para los sistemas $\mathcal{L}$ de los tipos (a) y (b) antes considerados se tiene que, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\{(\mathcal{L}\varphi)(n+t)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \,.$$

Demostración. Para los sistemas del tipo (b) es una consecuencia inmediata de las hipótesis. Supongamos pues que $\mathcal{L}$ es un sistema del tipo (a). Utilizando la desigualdad (3.4), se tiene que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|(\mathcal{L}\varphi)(n+t)\big|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} l(x)\varphi(n+t-x) dx \Big|^2 \\
&\le \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |l(x)\varphi(n+t-x)|^2 \Big)^{1/2} dx \Big)^2 \\
&\le \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |l(x)| \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(n+t-x)|^2 \Big)^{1/2} dx \Big)^2 \\
&\le M \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |l(x)| dx \Big)^2 = M \, \|l\|^2_{L^1(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

donde $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(x-n)|^2$. Como hemos supuesto que $l \in L^1(\mathbb{R})$ y que M es finita se tiene que $\{(\mathcal{L}\varphi)(n+t)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. $\square$

Como consecuencia de este lema, para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, la transformada de Zak,

$$(Z\mathcal{L}\varphi)(t,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\mathcal{L}\varphi\big)(t+n) e^{-2\pi i n w}$$

esta bien definida como elemento de $L^2(\mathbb{R})$.

El siguiente lema da una representación de los sistemas lineales $\mathcal{L}_j$ mediante un núcleo integral conveniente para nuestros propósitos de muestreo.

Los resultados que obtendremos en las siguientes secciones se verifican no únicamente para los sistemas de los tipos (a) y (b) considerados aquí, sino para cualesquiera sistemas tales que se satisfaga el siguiente lema.

Lema 3.2 *Sea $\mathcal{L}$ un sistema lineal e invariante por traslación de los tipos (a) o (b) antes considerados. Entonces, para $f \in V_\varphi$ se tiene*

$$\big(\mathcal{L}f\big)(t) = \big\langle F(\cdot), \overline{(Z\mathcal{L}\varphi)}(t,\cdot)\big\rangle_{L^2(0,1)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$.

Demostración. Supongamos primero que el sistema $\mathcal{L}$ es del tipo (a). Se tiene

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}f)(t) &= \big\langle f(\cdot), \phi(\cdot - t)\big\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \Big\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big\langle F(\cdot), e^{-2\pi i k\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} \varphi(\cdot - k), \phi(\cdot - t)\Big\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big\langle F(\cdot), e^{-2\pi i k\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} \Big\langle \varphi(\cdot), \phi(\cdot - t + k)\Big\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big\langle F(\cdot), e^{-2\pi i k\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} \mathcal{L}\varphi(t-k)\,.
\end{aligned}$$

Como según el Lema 3.1, $\{(\mathcal{L}\varphi)(t+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la igualdad de Parseval da

$$(\mathcal{L}f)(t) = \big\langle F(\cdot), \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\mathcal{L}\varphi}(t-k)\, e^{-2\pi i k\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} = \big\langle F(\cdot), \overline{(Z\mathcal{L}\varphi)}(t,\cdot)\big\rangle_{L^2(0,1)}\,.$$

Supongamos ahora que el sistema $\mathcal{L}$ es del tipo (b). De (3.3), para $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, se tiene

$$f^{(k)}(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \big\langle F(\cdot), e^{-2\pi i l\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} \varphi^{(k)}(t-l)\,.$$

Teniendo en cuenta que en este caso hemos supuesto que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi^{(k)}(t-n)|^2$ es acotada para cualquier $t \in \mathbb{R}$, se obtiene que para $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f)(t) &= \sum_{k=0}^{N} c_k f^{(k)}(t+d_k) = \sum_{k=0}^{N} c_k \sum_{l\in\mathbb{Z}} \big\langle F(\cdot), e^{-2\pi i l\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} \varphi^{(k)}(t+d_k-l) \\ &= \Big\langle F(\cdot), \sum_{k=0}^{N} \overline{c}_k \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi}^{(k)}(t+d_k-l) e^{-2\pi i l\cdot}\Big\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \Big\langle F(\cdot), \sum_{l\in\mathbb{Z}} \overline{\mathcal{L}\varphi}(t+d_k-l) e^{-2\pi i l\cdot}\Big\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \big\langle F(\cdot), \overline{(Z\mathcal{L}\varphi)}(t,\cdot)\big\rangle_{L^2(0,1)},\end{aligned}$$

lo que termina la demostración. $\square$

La representación de los sistemas "$(\mathcal{L}f)(t) = \langle f(\cdot), \phi(\cdot - t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$", válida para los sistemas del tipo (a), es más simple que la contenida en el lema. Sin embargo esta última resulta más útil en muestreo ya que permite trasladar el problema de muestreo al contexto del espacio $L^2(0,1)$ y a que el núcleo en esta representación verifica

$$\overline{(Z\mathcal{L}\varphi)}(t+n,w) = \overline{(Z\mathcal{L}\varphi)}(t,w)e^{-2\pi i n w}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

pues $(Zf)(t+n,w) = e^{2\pi i n w}(Zf)(t,w)$. Así, las muestras regulares, $\mathcal{L}_j f(rn)$ se representan por

$$\mathcal{L}_j f(rn) = \big\langle F(\cdot), \overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(0,\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}.$$

Como la sucesión $\{e^{-2\pi i n r w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortogonal de $L^2(0,1/r)$ resultará útil considerar la representación

$$\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn) = \Big\langle \sum_{k=0}^{r-1} F\Big(\cdot + \frac{k}{r}\Big)(Z\mathcal{L}_j)\Big(0, \cdot + \frac{k}{r}\Big), e^{-2\pi i n r\cdot}\Big\rangle_{L^2(0,1/r)}, \tag{3.5}$$

que se deduce de la anterior, descomponiendo la integral sobre $(0,1)$ en r partes y mediante un cambio de variable.

Las muestras irregulares $\{\mathcal{L}_j f(rn+\varepsilon_{j,n})\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ se pueden representar por

$$\mathcal{L}_j f(rn+\varepsilon_{j,n}) = \big\langle F(\cdot), \overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}.$$

Nótese que la sucesión $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ puede ser vista, y así lo haremos en la Sección 3.4, como una perturbación de la sucesión $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(0,\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$.

3.2. Sucesiones de $L^2(0,1)$ relacionadas con el muestreo generalizado

Las representaciones obtenidas en la sección anterior conducen al estudio de la sucesión $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(0,\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$. Es conveniente estudiar, con algo más de generalidad, las sucesiones de $L^2(0,1)$ con la estructura $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$, ya que ciertas sucesiones relacionadas con la sucesión $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(0,\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ tienen también esta estructura.

Asociada a las funciones $a_j\in L^2(0,1),\quad j=1,2,\ldots,s$, introducimos la $s\times r$ matriz definida para $w\in(0,1)$ como

$$\mathbf{A}(w):=\begin{bmatrix} a_1(w) & a_1(w+\frac{1}{r}) & \cdots & a_1(w+\frac{r-1}{r}) \\ a_2(w) & a_2(w+\frac{1}{r}) & \cdots & a_2(w+\frac{r-1}{r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_s(w) & a_s(w+\frac{1}{r}) & \cdots & a_s(w+\frac{r-1}{r}) \end{bmatrix} = \Big[a_j\Big(w+\frac{k-1}{r}\Big)\Big]_{\substack{j=1,2,\ldots,s\\ k=1,2,\ldots,r}}$$

y las constantes relacionadas

$$\alpha_{\mathbf{A}}:=\operatorname*{ess\,inf}_{w\in(0,1/r)}\lambda_{\text{mín}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)],\quad \beta_{\mathbf{A}}:=\operatorname*{ess\,sup}_{w\in(0,1/r)}\lambda_{\text{máx}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)]\,,$$

donde $\mathbf{A}^*(w)$ denota la traspuesta conjugada de la matriz $\mathbf{A}(w)$. Nótese que en general, $0\le\alpha_{\mathbf{A}}\le\beta_{\mathbf{A}}\le\infty$. Obsérvese que en la definición de la matriz $\mathbf{A}(w)$ estamos considerando la extensión 1-periódica de las funciones $a_j,\ j=1,2,\ldots,s$.

Teorema 3.1 *Sea a_j perteneciente a $L^2(0,1)$ para $j=1,\ldots,s$ y sea $\mathbf{A}(w)$ su matriz asociada. Entonces:*

(a) La sucesión $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es un sistema completo de $L^2(0,1)$ si y sólo si el rango de $\mathbf{A}(w)$ es r en casi todo punto $w\in(0,1/r)$.

(b) La sucesión $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es una sucesión de Bessel de $L^2(0,1)$ si y sólo si $a_j\in L^\infty(0,1)$ para $j=1,2,\ldots,s$. En este caso, la cota Bessel óptima es $\beta_{\mathbf{A}}/r$.

(c) La sucesión $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es un frame de $L^2(0,1)$ si y sólo si $0<\alpha_{\mathbf{A}}\le\beta_{\mathbf{A}}<\infty$. En este caso, las cotas frame óptimas son $\alpha_{\mathbf{A}}/r$ y $\beta_{\mathbf{A}}/r$.

(d) La sucesión $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$ si y sólo si es un frame de $L^2(0,1)$ y $r=s$.

Demostración. Nótese que para $F \in L^2(0,1)$ se tiene

$$\langle F(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^{1/r} \sum_{k=1}^{r} a_j\Big(w+\frac{k-1}{r}\Big)F\Big(w+\frac{k-1}{r}\Big)e^{-2\pi irnw}dw\,. \tag{3.6}$$

Entonces $\langle F(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}$ son los coeficientes de Fourier del j-ésimo elemento de $\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w)$ en la base ortogonal $\{e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1/r)$, donde

$$\mathbf{F}(w) := \Big[F(w), F\Big(w+\frac{1}{r}\Big), \cdots, F\Big(w+\frac{r-1}{r})\Big]^\top .$$

Para demostrar (a) supongamos que $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$ no es un sistema completo de $L^2(0,1)$. Entonces existe $F \in L^2(0,1)$ tal que $F \neq 0$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $j = 1,2,\ldots,s$, $\big\langle F(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} = 0$.. Entonces utilizando (3.6) se obtiene que las componentes de $\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w)$, que pertenecen a $L^1(0,1/r)$, tienen coeficientes de Fourier nulos. Por tanto $\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w) = 0$ c.t.p. $w \in (0,1/r)$, lo cual implica que rango $\mathbf{A}(w) < r$, c.t.p. $w \in (0,1/r)$.

Recíprocamente, supongamos que rango $\mathbf{A}(w) < r$, c.t.p. $w \in (0,1/r)$. Entonces para c.t.p. $w \in (0,1/r)$, existe un vector $v(w)$ de módulo 1 tal que $\mathbf{A}(w)v(w) = 0$. Sea $F \in L^2(0,1)$ tal que $\mathbf{F}(w) = v(w)$, c.t.p. $w \in (0,1/r)$. Desde (3.6), se tiene $\big\langle F(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} = 0$ $n \in \mathbb{Z}$ y $j = 1,2,\ldots,s$ y entonces $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$ no es un sistema completo de $L^2(0,1)$. Esto termina la demostración de (a).

Para demostrar (b) nótese primero que la equivalencia entre la norma espectral y la norma de Frobenius (véase [73]) da que $a_j \in L^\infty(0,1)$ para $j = 1,2,\cdots,s$ si y sólo si $\beta_{\mathbf{A}} < \infty$.

Para $p = r$ y $p = s$, sea $L^2_p(0,1/r)$ el espacio de las funciones $\mathbf{H} = [h_1,\cdots,h_p]^\top$ tales que

$$\|\mathbf{H}\|^2_{L^2_p(0,1/r)} := \int_0^{1/r} |\mathbf{H}(w)|^2 dw = \sum_{j=1}^{p} \|h_j\|^2_{L^2(0,1/r)} < \infty\,,$$

donde para cada $w \in (0,1/r)$, $|\mathbf{H}(w)|$ nota la norma euclídea de $\mathbf{H}(w) \in \mathbb{C}^p$. Teniendo en cuenta (3.6) se obtiene que siempre que $\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w) \in L^2_s(0,1/r)$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\langle F(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\big|^2$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s}\Big\| \sum_{k=1}^{r} a_j\Big(\cdot + \frac{k-1}{r}\Big)F\Big(\cdot + \frac{k-1}{r}\Big)\Big\|^2_{L^2(0,1/r)} = \frac{1}{r}\|\mathbf{A}(\cdot)\mathbf{F}(\cdot)\|^2_{L^2_s(0,1/r)}$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\langle F(\cdot),\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\right|^2=\frac{1}{r}\int_0^{1/r}\mathbf{F}^*(w)\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w)dw\,. \tag{3.7}$$

Si $\beta_{\mathbf{A}}<\infty$ entonces, para cada $F\in L^2(0,1)$, se tiene

$$\frac{1}{r}\int_0^{1/r}\mathbf{F}^*(w)\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w)dw\leq\frac{\beta_{\mathbf{A}}}{r}\|\mathbf{F}\|^2_{L^2_r(0,1/r)}=\frac{\beta_{\mathbf{A}}}{r}\|F\|^2_{L^2(0,1)}\,,$$

por lo cual $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$ es una sucesión de Bessel de $L^2(0,1)$ y la cota óptima de Bessel es menor o igual que $\beta_{\mathbf{A}}/r$.

Sea $K<\beta_{\mathbf{A}}$. Entonces existe un conjunto $\Omega_K\subset(0,1/r)$, de medida positiva tal que $\lambda_{\text{máx}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)]\geq K$ para $w\in\Omega_K$. Sea $F\in L^2(0,1)$ tal que $\mathbf{F}(w)$ es el vector 0 si $w\in(0,1/r)-\Omega_K$ y es un autovector de norma 1 asociado con el máximo autovalor de $\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)$ si $w\in\Omega_K$. Como $F(w)$ es acotada se tiene que $\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w)\in L^2_s(0,1/r)$ y usando (3.7) se obtiene entonces que

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\left\langle F(\cdot),\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\right\rangle_{L^2(0,1)}\right|^2\geq\frac{1}{r}\int_0^{1/r}K|\mathbf{F}(w)|^2dw=\frac{K}{r}\|F\|^2_{L^2(0,1)}\,.$$

Por tanto si $\beta_{\mathbf{A}}=\infty$ entonces $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$ no es una sucesión de Bessel de $L^2(0,1)$, y si $\beta_{\mathbf{A}}<\infty$ entonces la cota de Bessel óptima es $\beta_{\mathbf{A}}/r$. Esto termina la demostración de (b).

Para probar la parte (c) del teorema, suponemos primero que $0<\alpha_{\mathbf{A}}\leq\beta_{\mathbf{A}}<\infty$. Según la parte (b), la sucesión $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es una sucesión de Bessel de $L^2(0,1)$. Ademas, utilizando (3.7) y el Teorema de Rayleigh-Ritz (ver [73, p. 176]), para toda $F\in L^2(0,1)$ se obtiene

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\langle F(\cdot),\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\right|^2\geq\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{r}\|\mathbf{F}\|^2_{L^2_r(0,1/r)}=\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{r}\|F\|^2_{L^2(0,1)}\,.$$

Entonces, la sucesión $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$ con cota *frame* inferior óptima mayor o igual que $\alpha_{\mathbf{A}}/r$.

Recíprocamente, si $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$, conocemos por la parte (b) que $\beta_{\mathbf{A}}<\infty$. Para probar que $\alpha_{\mathbf{A}}>0$, consideremos cualquier constante $K>\alpha_{\mathbf{A}}$. Entonces, existe un conjunto $\Omega_K\subset(0,1/r)$ con medida positiva tal que $\lambda_{\text{mín}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)]\leq K$ para $w\in\Omega_K$. Sea $F\in L^2(0,1)$ tal que su función vectorial asociada $\mathbf{F}(w)$ es 0 si $w\in(0,1/r)\setminus\Omega_K$ y $\mathbf{F}(w)$ es un autovector de norma 1 asociado con el menor autovalor de

$\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)$ si $w \in \Omega_K$. Como F es acotado, se tiene que $\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w) \in L^2_s(0,1/r)$. De (3.7) se obtiene

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\left\langle F(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\right\rangle_{L^2(0,1)}\right|^2 \leq \frac{K}{r}\int_0^{1/r} |\mathbf{F}(w)|^2 dw = \frac{K}{r}\|F\|^2_{L^2(0,1)}\,.$$

Denotando por A la cota *frame* inferior óptima de $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\cdots,s}$, hemos obtenido que $K/r \geq A$ para toda constante $K > \alpha_{\mathbf{A}}$. Así $\alpha_{\mathbf{A}}/r \geq A$ y en consecuencia, $\alpha_{\mathbf{A}} > 0$. Además, en las hipótesis de la parte (c) se deduce que $\alpha_{\mathbf{A}}/r$ y $\beta_{\mathbf{A}}/r$ son las cotas *frame* óptimas .

Para demostrar (d), nos basaremos en que un *frame* es una base de Riesz si y sólo si tiene una sucesión biortogonal (Teorema A.9). Supongamos primero que $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,\cdots,s}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$. Sea $\{b_{l,m}\}_{m\in\mathbb{Z}, l=1,\cdots,s}$ una sucesión biortogonal a $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,\cdots,s}$, es decir $\langle b_{l,m}(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)} = \delta_{j,l}\delta_{n,m}$. Entonces

$$\int_0^{1/r}\sum_{k=0}^{r-1} b_{l,0}\Big(w+\frac{k}{r}\Big)a_j\Big(w+\frac{k}{r}\Big)e^{-2\pi irnw}\,dw = \int_0^1 b_{l,0}(w)a_j(w)e^{-2\pi irnw}\,dw$$
$$= \left\langle b_{l,0}(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\right\rangle_{L^2(0,1)} = \delta_{j,l}\delta_{n,0}\,, \quad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{r-1} b_{l,0}\Big(w+\frac{k}{r}\Big)a_j\Big(w+\frac{k}{r}\Big) = r\delta_{j,l}\,, \quad \text{en } L^2(0,1/r)\,.$$

Entonces, la matriz $\big[(1/r)b_{l,0}(w+(k-1)/r)\big]_{k=1,\ldots,r,\, l=1,\ldots,s}$ es una inversa por la derecha de $\mathbf{A}(w)$. En particular $s \leq r$.

Por otra parte, como $\alpha_{\mathbf{A}} := \operatorname{ess\,inf}_{w\in(0,1/r)} \lambda_{\text{mín}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)] > 0$, entonces $\det[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)] > 0$, c.t.p. $w \in (0,1)$. Existe pues c.t.p. $w\in\mathbb{R}$, la matriz $[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)]^{-1}\mathbf{A}^*(w)$. Esta matriz es una inversa por la izquierda de $\mathbf{A}(w)$, lo cual implica que $r \leq s$, y así $r = s$.

Supongamos ahora que $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,\cdots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$ y $r = s$. Como $\mathbf{A}(w)$ es una matriz cuadrada, $\det[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)] > 0$ implica en este caso que $\det\mathbf{A}(w) \neq 0$. Sea $[b_1,\ldots,b_s]$ la primera fila de $\mathbf{A}^{-1}$. Entonces $[b_1(w),\ldots,b_s(w)]\mathbf{A}(w) = [1,0,\ldots,0]$, c.t.p. $w\in(0,1)$. Considerando la extensiones 1-periódicas de $a_j(w)$ y $b_j(w)$, se tiene que $\mathbf{B}^\top(w)\mathbf{A}(w) = \mathbf{I}_s$, donde $\mathbf{B}(w) := \big[b_j(w+(k-1)/s)\big]_{j,k=1,2,\ldots,s}$, y entonces $\mathbf{B}^\top(w) = \mathbf{A}^{-1}(w)$. Así $\mathbf{A}(w)\mathbf{B}^\top(w) = \mathbf{I}_s$, o equivalentemente $\sum_{k=0}^{s-1} a_j(w+k/s)b_l(w+k/s) = \delta_{j,l}$

c.t.p. $w \in (0,1)$. Entonces

$$\left\langle sb_l(\cdot)e^{2\pi ism\cdot}, \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi isn\cdot}\right\rangle_{L^2(0,1)} = s\int_0^1 b_l(w)a_j(w)e^{2\pi is(m-n)w}\,dw$$

$$s\int_0^{1/s}\sum_{k=0}^{s-1} b_l\Big(w+\frac{k}{s}\Big)a_j\Big(w+\frac{k}{s}\Big)e^{2\pi is(m-n)w}\,dw = \delta_{n,m}\delta_{j,l}\,,$$

Por tanto, $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi isn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$ tiene una sucesión biortogonal. □

Los resultados contenidos en el resto de esta sección complementan este Teorema.

El frame dual canónico y la pseudoinversa

Si $\{\overline{a}_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$, entonces $\alpha_{\mathbf{A}} > 0$. En particular existe $[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)]^{-1}$ c.t.p. $w \in (0,1)$. Podemos pues definir la pseudoinversa de $\mathbf{A}(w)$ en c.t.p. $w \in (0,1)$, por

$$\mathbf{A}^\dagger(w) := [\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)]^{-1}\mathbf{A}^*(w)\,.$$

La pseudoinversa $\mathbf{A}^\dagger(w)$ tiene una estructura análoga a $\mathbf{A}^*(w)$, es decir, existen $a_j^\dagger(w)$, $j=1,2,\ldots,s$, tales que

$$\mathbf{A}^\dagger(w) := \begin{bmatrix} a_1^\dagger(w) & a_2^\dagger(w) & \cdots & a_s^\dagger(w) \\ a_1^\dagger(w+\frac{1}{r}) & a_2^\dagger(w+\frac{1}{r}) & \cdots & a_s^\dagger(w+\frac{1}{r}) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^\dagger(w+\frac{r-1}{r}) & a_2^\dagger(w+\frac{r-1}{r}) & \cdots & a_s^\dagger(w+\frac{r-1}{r}) \end{bmatrix}$$

En efecto, notando por e_j el vector columna de $\mathbb{C}^r$ con todas las componentes nulas excepto la j-ésima que vale 1, se tiene que $\mathbf{A}^*(w{+}1/r) = C\mathbf{A}^*(w)$ donde C es la matriz cuya expresión en columnas es $[e_r|e_1|e_2|\cdots|e_{r-1}]$, de donde se deduce que $\mathbf{A}^\dagger(w+1/r) = C\mathbf{A}^\dagger(w)$, lo cual implica que $\mathbf{A}^\dagger(w)$ tiene esta estructura.

Nótese que si $0 < \alpha_{\mathbf{A}} \le \beta_{\mathbf{A}} < \infty$ entonces

$$a_j^\dagger \in L^\infty(0,1)\,, \quad j=1,2,\cdots,s\,,$$

ya que las funciones $a_j(w)$ y $\det^{-1}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)]$ están esencialmente acotadas en $(0,1)$.

En la siguiente proposición veremos que $\mathbf{A}^\dagger(w)$ está estrechamente relacionada con el *frame* dual canónico de $\{\overline{a}_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$.

Proposición 3.1 *Supongamos que $\{\overline{a}_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ es un frame de $L^2(0,1)$. Entonces el operador frame asociado $\mathcal{S}$ viene dado por*

$$\mathcal{S}F(w) = \frac{1}{r}[\overline{a}_1(w),\ldots,\overline{a}_s(w)]\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w)\,,$$

y el frame dual canónico es $\{ra_j^\dagger(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$ donde las funciones $a_j^\dagger(w)$, $j=1,2,\ldots,s$, forman la primera fila de $\mathbf{A}^\dagger(w)$.

Demostración. Se tiene (ver Sección A.3)

$$\mathcal{S}F(w) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big\langle F(\cdot),\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi inr\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}\overline{a}_j(w)e^{2\pi inrw}.$$

Como $\beta_{\mathbf{A}}<\infty$, entonces $a_j(w)\in L^\infty(0,1)$, $j=1,2,\cdots,s$, lo cual justifica que podamos sacar $\overline{a}_j(w)$ del sumatorio de la anterior igualdad, obteniendo

$$\begin{aligned}\mathcal{S}F(w) &= \sum_{j=1}^{s}\overline{a}_j(w)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 F(x)a_j(x)e^{-2\pi inrx}dx\,e^{2\pi inrw}\\ &= \sum_{j=1}^{s}\overline{a}_j(w)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{1/r}\sum_{k=0}^{r-1}F\Big(x+\frac{k}{r}\Big)a_j\Big(x+\frac{k}{r}\Big)e^{-2\pi inrx}dx\,e^{2\pi inrw}.\end{aligned}$$

Como $\{\sqrt{r}e^{2\pi inr\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $L_2(0,1/r)$ y la función $l(w):=\sum_{k=0}^{r-1}F(x+k/r)a_j(x+k/r)$ pertenece a $L_2(0,1/r)$, entonces para cada $j=1,\cdots,s$ el sumatorio en n en la anterior igualdad converge en la norma de $L_2(0,1/r)$ a $l(w)/r$. Como $l(w)$ es (1/r)-periódica, entonces la convergencia es también en la norma de $L^2(0,1)$, obteniéndose

$$\begin{aligned}\mathcal{S}F(w) &= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{s}\overline{a}_j(w)\sum_{k=0}^{r-1}F\Big(w+\frac{k}{r}\Big)a_j\Big(w+\frac{k}{r}\Big)\\ &= \frac{1}{r}[\overline{a}_1(w),\ldots,\overline{a}_s(w)]\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w)\end{aligned}$$

Nótese $a_j^\dagger\in L^\infty(0,1)\subset L^2(0,1)$ y que si $F(w)=ra_j^\dagger(w)e^{2\pi inrw}$ entonces $\mathbf{F}(w)=r\mathbf{A}^\dagger(w)e_je^{2\pi inrw}$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}\,ra_j^\dagger(\cdot)e^{2\pi inr\cdot})(w) &= [\overline{a}_1(w),\ldots,\overline{a}_s(w)]\mathbf{A}(w)\mathbf{A}^\dagger(w)e_je^{2\pi inrw}\\ &= e_1\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)\mathbf{A}^\dagger(w)e_je^{2\pi inrw}\\ &= \overline{a}_j(w)e^{2\pi inrw}.\end{aligned}$$

Así, el frame dual canónico es $\mathcal{S}^{-1}\big[\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi inr\cdot}\big](w) = ra_j^{\dagger}(w)e^{2\pi inrw}$. □

Cuando $\lambda_{\text{mín}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)] = 0$ sobre un conjunto de medida positiva

El siguiente resultado, informa sobre el caso en que se verifica que

$$\lambda_{\text{mín}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)] = 0$$

sobre un conjunto de medida positiva $(0, 1/r) \setminus \Omega$, pero se sigue cumpliendo la condición $0 < \alpha_{\mathbf{A}} \leq \beta_{\mathbf{A}} < \infty$ cuando ess inf y ess sup se toman sobre Ω.

Proposición 3.2 *Sea $\Omega \subseteq (0, 1/r)$ de medida positiva, tal que*

$$\alpha_{\mathbf{A}}^{\Omega} := \operatorname*{ess\,inf}_{w\in\Omega} \lambda_{\text{mín}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)] \;>\; 0, \quad \beta_{\mathbf{A}}^{\Omega} := \operatorname*{ess\,sup}_{w\in\Omega} \lambda_{\text{máx}}[\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)] \;<\; \infty\,.$$

Entonces la sucesión $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$ es un frame de $L^2(E)$, donde $E := \bigcup_{k=0}^{r-1}(k+\Omega)$.

Demostración. Para $F \in L^2(E)$ definimos

$$\widetilde{F}(w) = \begin{cases} F(w), & w \in E \\ 0, & w \in (0,1) \setminus E \end{cases}$$

y $\widetilde{\mathbf{F}}(w) := \big[\widetilde{F}(w), \widetilde{F}(w+1/r), \cdots, \widetilde{F}(w+(r-1)/r)\big]^{\top}$. Nótese que

$$\widetilde{\mathbf{F}}(w) = \begin{cases} \mathbf{F}(w), & w \in \Omega \\ 0, & w \in (0,1/r) \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Como $\beta_{\mathbf{A}}^{\Omega} < \infty$ entonces $a_j \in L^\infty(\Omega)$ y así $\mathbf{A}(w)\widetilde{\mathbf{F}}(w) \in L_s^2(0, 1/r)$. Utilizando (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\langle F(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\rangle_{L^2(E)}\big|^2 = \sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big|\langle \widetilde{F}(\cdot), \overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\big|^2 \\
&= \frac{1}{r}\int_0^{1/r} \widetilde{\mathbf{F}}^*(w)\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)\widetilde{\mathbf{F}}(w)dw\,. = \frac{1}{r}\int_\Omega \mathbf{F}^*(w)\mathbf{A}^*(w)\mathbf{A}(w)\mathbf{F}(w)dw \\
&\geq \frac{1}{r}\int_\Omega |\mathbf{F}(w)|^2\alpha_{\mathbf{A}}^{\Omega}dw = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}^{\Omega}}{r}\int_E |F(w)|^2 dw = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}^{\Omega}}{r}\|F\|_{L^2(E)}\,.
\end{aligned}$$

Por tanto $\{\overline{a}_j(\cdot)e^{2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$ satisface la desigualdad *frame* inferior. De la misma forma se demuestra que verifica la desigualdad *frame* superior. □

3.3. Muestreo generalizado regular

Estudiamos en esta sección el muestreo generalizado regular basándonos en la representación para las muestras regulares obtenida en la Sección 3.1 y en las propiedades de las sucesiones del tipo $\{a_j(w)e^{2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ estudiadas en el Teorema 3.1.

Para simplificar la notación, definimos para $j = 1, 2, \dots, s$ las funciones

$$g_j(w) := (Z\mathcal{L}_j\varphi)(0, w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_j\varphi(n)e^{-2\pi inw} \in L^2(0, 1)\,.$$

Estas funciones juegan un papel principal en esta sección. Denotamos a su matriz asociada (en el sentido de la sección anterior) por $\mathbf{G}(w)$, es decir

$$\mathbf{G}(w) := \Big[g_j\Big(w + \frac{k-1}{r}\Big)\Big]_{\substack{j=1,2,\dots,s\\ k=1,2,\dots,r}}$$

En ocasiones la transformada de Fourier del generador, $\widehat{\varphi}$, tiene una expresión más simple que el propio generador φ. En estos casos sería útil, una expresión para $g_j(w)$ en función de $\widehat{\varphi}$. Ésta se puede obtener, bajo apropiadas hipótesis, aplicando la fórmula sumatoria de Poisson. Por ejemplo, suponiendo que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathcal{L}_j\varphi}(w + n)| \in L^2(0, 1)$ (véase el Lema 2.1) se tiene

$$\begin{aligned} g_j(w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j\varphi)(n)e^{-2\pi inw} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{L}_j\varphi}(w + n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{l_j}(w + n)\widehat{\varphi}(w + n)\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde hemos utilizado que $l_j \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ cuando $\mathcal{L}_j$ es un sistema del tipo (a).

Determinación a partir de las muestras

Una primera cuestión es si las muestras $\{(\mathcal{L}_jf)(rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ determinan unívocamente a la funciones $f \in V_\varphi$. El apartado (a) del Teorema 3.1 permite dar una respuesta a esta cuestión. Este es el tema de la siguiente proposición.

Definición 3.1 *Se dice que los sistemas $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1,2,\dots,s}$ y los puntos de muestreo $\{rn\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman un conjunto de unicidad para V_φ si para toda $f \in V_\varphi$*

$$(\mathcal{L}_jf)(rn) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},\ j = 1, 2, \dots, s \quad \Rightarrow\ f = 0\,.$$

Proposición 3.3 *Los sistemas $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1,2,\dots,s}$ y los puntos $\{rn\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman un conjunto de unicidad para V_φ si y sólo si* rango $\mathbf{G}(w) = r$ *, c.t.p. $w \in (0, 1/r)$.*

Demostración. Utilizando el Lema 3.2 se obtiene que $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1,2,\ldots,s}$ y los puntos de muestreo $\{rn\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman un conjunto de unicidad para V_φ, si y sólo si para toda $F \in L^2(0,1)$

$$\left\langle F(\cdot), \overline{g}_j(\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot} \right\rangle_{L^2(0,1)} = 0, \quad n \in \mathbb{Z},\ j = 1,2,\ldots,s \Rightarrow F = 0\,,$$

lo cual es equivalente a que $\left\{\overline{g}_j(\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\right\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ sea un sistema completo de $L^2(0,1)$. Según el Teorema 3.1 esto último es equivalente a que rango $\mathbf{G}(w) = r$, c.t.p. $w \in (0,1/r)$. □

Así pues, si el periodo de muestreo es menor que el número de sistemas, $r < s$, existirán funciones de V_φ con las mismas muestras, lo cual hace inviable la recuperación a partir de estas muestras.

Si rango $\mathbf{G}(w) = r$, c.t.p. $w \in (0,1/r)$ el operador lineal que transforma una función f de V_φ en $\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ es invertible. Tal resultado tiene tan sólo una importancia teórica ya que no proporciona un método de recuperación. Además no garantiza la continuidad del operador inverso y así de la estabilidad de tal recuperación, cuestión básica en las aplicaciones.

3.3.1. Fórmulas de muestreo generalizado

El objetivo es recuperar cualquier función $f \in V_\varphi$ a partir de las muestras $\big\{\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)\big\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$. El punto de partida es la representación para las muestras regulares (3.5), en las que éstas aparecen como los coeficientes de Fourier de s funciones $1/r$-periódicas con respecto al sistema $\{e^{-2\pi i n r w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$: Para cada $j = 1,2,\ldots,s$

$$\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn) = \Big\langle \sum_{k=0}^{r-1} F\Big(\,\cdot + \frac{k}{r}\Big) g_j\Big(\,\cdot + \frac{k}{r}\Big), e^{-2\pi i n r\cdot} \Big\rangle_{L^2(0,1/r)}, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

donde $f = \mathcal{T}_\varphi F$. Suponiendo que $g_j \in L^\infty(0,1)$, se obtiene que estas s funciones pertenecen a $L^2(0,1/r)$, y entonces para cada $j = 1,2,\ldots,s$,

$$r\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)e^{-2\pi i n r w} = \sum_{k=0}^{r-1} F\Big(w + \frac{k}{r}\Big) g_j\Big(w + \frac{k}{r}\Big), \quad \text{en } L^2(0,1/r)\,.$$

El desarrollo anterior también se verifica en $L^2(0,1)$ considerando las extensiones 1-periódicas de F y g_j. En forma matricial

$$\mathbf{G}(w)\mathbf{F}(w) = r\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\mathcal{L}_1 f\big)(rn)e^{-2\pi i n r w}, \ldots, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\mathcal{L}_s f\big)(rn)e^{-2\pi i n r w}\Big]^\top \tag{3.9}$$

donde
$$\mathbf{F}(w) := \Big[F(w), F\Big(w+\frac{1}{r}\Big), \cdots, F\Big(w+\frac{r-1}{r}\Big)\Big]^\top.$$
Nuestro objetivo es obtener una solución $F(w)$ en $L^2(0,1)$. Para ello, consideremos un vector
$$\mathbf{a}(w) := \big[a_1(w), \dots, a_s(w)\big]$$
con entradas en $L^\infty(0,1)$, que verifique
$$\mathbf{a}(w)\mathbf{G}(w) = [1, 0, \dots, 0] \text{ c.t.p. } w \in (0,1)\,.$$
Multiplicando ambos lados de la igualdad (3.9) por este vector se obtiene
$$\begin{aligned}
F(w) &= r\mathbf{a}(w)\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(\mathcal{L}_1 f\big)(rn)e^{-2\pi inrw}, \dots, \sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(\mathcal{L}_s f\big)(rn)e^{-2\pi inrw}\Big]^\top \\
&= r\sum_{j=1}^{s} a_j(w)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)e^{-2\pi inrw} \\
&= r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)a_j(w)e^{-2\pi inrw}\,,
\end{aligned}$$
en el sentido de $L^2(0,1)$. Finalmente, el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ da
$$f(t) = r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)(\mathcal{T}_\varphi a_j)(t-rn)\,, \qquad \text{en } L^2(\mathbb{R})\,,$$
donde hemos utilizado la propiedad $\big(\mathcal{T}_\varphi\big[a_j(\cdot)e^{-2\pi inr\cdot}\big]\big)(t) = \big(\mathcal{T}_\varphi a_j\big)(t-rn)$, $n \in \mathbb{Z}$.

El siguiente teorema proporciona más información sobre los desarrollos obtenidos. En la demostración de este teorema, así como en el que le sigue, jugara un papal importante el siguiente resultado sobre *frames* duales, cuya demostración se puede encontrar en [33, pág. 112]. Notaremos por $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Recordamos que un *frame* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es un *frame* dual de $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, si verifica
$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, \eta_n\rangle_\mathcal{H}\xi_n\,, \quad f \in \mathcal{H}\,.$$

Lema 3.3 *Supongamos que $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son sucesiones de Bessel en $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, \eta_n\rangle_\mathcal{H}\xi_n\,, \quad f \in \mathcal{H}\,.$

(b) $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, \xi_n\rangle_\mathcal{H}\eta_n\,, \quad f \in \mathcal{H}\,.$

(c) $\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \xi_n\rangle_{\mathcal{H}} \langle \eta_n, g\rangle_{\mathcal{H}}\,, \quad f, g \in \mathcal{H}\,.$

En el caso de que se verifiquen alguna de estas condiciones equivalentes, entonces $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *son frame duales en* $\mathcal{H}$*.*

Teorema 3.2 *Supongamos que* $g_j \in L^\infty(0,1)$ *para* $j = 1, 2, \ldots, s$*. Sean* a_j *funciones de* $L^\infty(0,1)$*,* $j = 1, 2, \ldots, s$*, verificando*

$$\big[a_1(w), \ldots, a_s(w)\big]\, \mathbf{G}(w) = [1, 0, \ldots, 0], \qquad c.t.p.\ w \in (0,1)\,. \tag{3.10}$$

Entonces, para cada $f \in V_\varphi$ *se tiene*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)\ S_j(t - rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{3.11}$$

donde $S_j = r\mathcal{T}_\varphi a_j$*,* $j = 1, 2, \ldots, s$*. La sucesión* $\{S_j(t - rn)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ *es un frame de* V_φ*. La convergencia de la serie en* (3.11) *es en el sentido de* $L^2(\mathbb{R})$*, absoluta y uniforme en* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. Dada $f \in V_\varphi$, consideremos $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$. Antes de enunciar el teorema hemos probado que

$$F(w) = r \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big\langle F, \overline{g}_j\, e^{-2\pi i r n \cdot} \big\rangle_{L^2(0,1)} a_j(w) e^{-2\pi i n r w} \quad \text{en } L^2(0,1)\,. \tag{3.12}$$

Como las sucesiones $\{r a_j e^{-2\pi i r n \cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ y $\{\overline{g}_j e^{-2\pi i r n \cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ son sucesiones de Bessel de $L^2(0,1)$ y satisfacen (3.12), el Lema 3.3 da que son un par de *frame* duales. En particular $\{r a_j e^{-2\pi i r n \cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$. Como $\mathcal{T}_\varphi$ es un isomorfismo y $\mathcal{T}_\varphi r a_j e^{-2\pi i r n \cdot} = S(\cdot - nr)$ donde $S_j = r\mathcal{T}_\varphi a_j$, entonces (Proposición A.5) la sucesión $\{S(\cdot - nr)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es un *frame* de $L^2(\mathbb{R})$.

Aplicando el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ a (3.12) se obtiene que se verifica (3.11) en $L^2(\mathbb{R})$. La convergencia de la serie muestral es absoluta debido al carácter incondicional de un *frame* y es uniforme sobre $\mathbb{R}$ pues la convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ de sucesiones de V_φ implica su convergencia uniforme sobre $\mathbb{R}$. □

La siguiente proposición proporciona expresiones para el cálculo de las funciones de reconstrucción S_j, $j = 1, 2, \ldots, s$ y de sus transformadas de Fourier $\widehat{S}_j$, a partir de las funciones a_j, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Proposición 3.4 *En las hipótesis del anterior teorema para* $j = 1, 2, \ldots, s$*, se tiene:*

$$S_j(t) = r \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle a_j(\cdot), e^{-2\pi i n \cdot}\rangle_{L^2(0,1)} \varphi(t - n)\,,$$
$$\widehat{S}_j(w) = r a_j(w) \widehat{\varphi}(w)\,.$$

Demostración. Según la definición de $\mathcal{T}_\varphi$,

$$S_j(t) = r(\mathcal{T}_\varphi a_j)(t) = r\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle a_j(\cdot), e^{-2\pi i n\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\varphi(t-n)\,.$$

La segunda igualdad es consecuencia de que $\mathcal{T}_\varphi^{-1}S_j(t) = ra_j$ es la única función de $L^2(0,1)$ tal que $\widehat{S}_j(w) = ra_j(w)\widehat{\varphi}(w)$ (Sección 2.1). □

En el próximo resultado caracterizamos la existencia de fórmulas de muestreo del tipo (3.11), que aparecen en el Teorema 3.2. Demostraremos también que el Teorema 3.2 proporciona todas las posibles fórmulas de este tipo.

Nótese que la expresión (3.10) es equivalente a que

$$\mathbf{A}^\top(w)\ \mathbf{G}(w) = \mathbf{I}_r\,, \quad \text{c.t.p. en } (0,1)\,.$$

Teorema 3.3 *Supongamos que $g_j \in L^\infty(0,1)$ para $j = 1,2,\ldots,s$. Entonces, existe un frame de V_φ del tipo $\{S_j(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ tal que para cada $f \in V_\varphi$,*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)\ S_j(\cdot - rn) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R})\,, \tag{3.13}$$

si y sólo si $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$.

Si se verifican estas condiciones equivalentes, las funciones de reconstrucción están dadas por $S_j = r\mathcal{T}_\varphi a_j$, donde las funciones $a_j \in L^\infty(0,1)$, $j = 1,2,\ldots,s$, verifican $\mathbf{A}^\top(w)\ \mathbf{G}(w) = \mathbf{I}_r$ c.t.p. en $(0,1)$.

Demostración. Supongamos que $\{S_j(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ es un *frame* de V_φ para el cual se verifica la fórmula (3.13). Aplicando el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi^{-1}$ a (3.13) se obtiene

$$F(w) = r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)a_j(w)e^{-2\pi i r n w} \quad \text{en } L^2(0,1)\,,$$

donde $ra_j = \mathcal{T}_\varphi^{-1}S_j$, $j = 1,2,\ldots,s$. Como $\mathcal{T}_\varphi^{-1}$ es un isomorfismo, la sucesión $\{ra_j(w)e^{-2\pi i r n w}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$ (Proposición A.5). Entonces según el Teorema 3.1, $a_j \in L^\infty(0,1)$. Como

$$F(w) = r\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big\langle F(\cdot), \overline{g}_j(\cdot)\, e^{-2\pi i r n\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} a_j(w)e^{-2\pi i n r w}\,,$$

y $\{\overline{g}_j(\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ es una sucesión de Bessel de $L^2(0,1)$, se obtiene que las sucesiones $\{ra_j(\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ y $\{\overline{g}_j(\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ son un par de *frames* duales de $L^2(0,1)$ (Lema 3.3). En particular, según el Teorema 3.1, se deduce que $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$. Para cada $F_1, F_2 \in L^2(0,1)$, según el Lema 3.3

$$\langle F_1, F_2\rangle_{L^2(0,1)} = r\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big\langle F_1, a_j e^{-2\pi i r n\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}\big\langle \overline{g}_j e^{-2\pi i r n\cdot}, F_2\big\rangle_{L^2(0,1)}\,. \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\big\langle F_1, a_j e^{-2\pi i r n\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} &= \Big\langle \sum_{k=0}^{r-1} F_1\Big(\cdot+\frac{k}{r}\Big)\overline{a}_j\Big(\cdot+\frac{k}{r}\Big), e^{-2\pi i n r\cdot}\Big\rangle_{L^2(0,1/r)}\\ \big\langle \overline{g}_j e^{-2\pi i r n\cdot}, F_2\big\rangle_{L^2(0,1)} &= \Big\langle e^{-2\pi i n r\cdot}, \sum_{k=0}^{r-1} F_2\Big(\cdot+\frac{k}{r}\Big) g_j\Big(\cdot+\frac{k}{r}\Big)\Big\rangle_{L^2(0,1/r)}\,,\end{aligned}$$

la igualdad de Parseval, nos permite escribir el lado derecho en (3.14) en notación matricial como

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{s}\Big\langle \sum_{k=0}^{r-1} F_1\Big(\cdot+\frac{k}{r}\Big)\overline{a}_j\Big(\cdot+\frac{k}{r}\Big), \sum_{k=0}^{r-1} F_2\Big(\cdot+\frac{k}{r}\Big) g_j\Big(\cdot+\frac{k}{r}\Big)\Big\rangle_{L^2(0,1/r)}\\ &\qquad = \int_0^{1/r}\sum_{j=1}^{s}\mathbf{F_1}^{\top}(w)\overline{\mathbf{a_j}}(w)\mathbf{g_j}^{*}(w)\overline{\mathbf{F_2}}(w)dw\\ &\qquad = \int_0^{1/r}\mathbf{F_1}^{\top}(w)\mathbf{A}^{*}(w)\overline{\mathbf{G}}(w)\overline{\mathbf{F_2}}(w)dw\,.\end{aligned}$$

El lado izquierdo en (3.14) es igual a $\int_0^{1/r}\mathbf{F_1}^{\top}(w)\overline{\mathbf{F_2}}(w)dw$. Como consecuencia (3.14) implica que $\mathbf{A}^{\top}(w)\ \mathbf{G}(w) = \mathbf{I}_r$, c.t.p en $(0,1)$.

Para demostrar el recíproco, supongamos que $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$. Nótese que en este caso $\det[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]$ que es igual al producto de autovalores de $\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)$ está esencialmente acotado por un número estrictamente positivo, ya que en caso contrario $\alpha_{\mathbf{G}} = 0$. La pseudo-inversa de $\mathbf{G}$, se puede expresar como

$$\mathbf{G}^{\dagger}(w) = [\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]^{-1}\mathbf{G}^*(w)\,.$$

Sus entradas $a_j = g_j^{\dagger}$ están esencialmente acotadas, ya que las funciones $g_j(w)$ y $\det^{-1}[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]$ están esencialmente acotadas en $(0,1)$. Como $\mathbf{G}^{\dagger}(w)\mathbf{G}(w) = \mathbf{I}_r$, se obtiene la condición supuesta en el Teorema 3.2,

$$\big[a_1(w),\ldots,a_s(w)\big]\ \mathbf{G}(w) = [1,0,\ldots,0]\,,\quad \text{c.t.p. } w\in(0,1)\,.$$

Así, la fórmula de muestreo (3.13) se deriva de este teorema. □

Cotas frame

En las hipótesis del Teorema 3.2, la sucesión $\{ra_j e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es un *frame* de cotas óptimas $r\alpha_{\mathbf{A}}$ y $r\beta_{\mathbf{A}}$ (Teorema 3.1). En el caso de que la base de Riesz $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea base ortonormal de V_φ, el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ es también una isometría y así, las cotas óptimas del *frame* formado por las funciones de reconstrucción $\{S_j(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$, transformado por $\mathcal{T}_\varphi$ de $\{ra_j e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$, tiene las mismas cotas óptimas, $r\alpha_{\mathbf{A}}$ y $r\beta_{\mathbf{A}}$. En el caso general, $r\|\Phi_\varphi\|_0\alpha_{\mathbf{A}}$ y $r\|\Phi_\varphi\|_\infty\beta_{\mathbf{A}}$ son cotas *frame* del *frame* $\{S_j(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ (Teorema A.5).

Funciones de reconstrucción e inversas por la izquierda

Todas las funciones de reconstrucción se construyen, según establece el teorema anterior a partir de un vector $\mathbf{a}(w) = [a_1(w), \ldots, a_s(w)]$, con entradas esencialmente acotadas, verificando

$$\mathbf{a}(w)\mathbf{G}(w) = [1, 0, \ldots, 0] \quad \text{c.t.p. } \ w \in (0,1)\,, \tag{3.15}$$

Para calcular S_j a partir de a_j se puede utilizar la Proposición 3.4.

Un posible vector $\mathbf{a}(w)$ con estas características, viene dado por la primera fila $[g_1^\dagger(w), \ldots, g_s^\dagger(w)]$, de la pseudo-inversa de $\mathbf{G}(w)$,

$$\mathbf{G}^\dagger(w) = [\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]^{-1}\mathbf{G}^*(w)\,.$$

Según la Proposición 3.1, $\{rg_j^\dagger(w)e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ es el frame dual canónico de $\{\overline{g}_j(w)e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$. Si $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de V_φ, entonces $\mathcal{T}_\varphi$ es un operador unitario y así el *frame* dual canónico del frame formado por las correspondientes funciones de reconstrucción

$$\{S_j(t-nr)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s} = \{r\mathcal{T}_\varphi g_j^\dagger(\cdot)e^{-2\pi inr\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$$

es $\{(\mathcal{T}_\varphi\overline{g}_j)(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$.

El resto de soluciones de (3.15) vienen dados por la primera fila de las inversas por la izquierda de $\mathbf{G}$. En efecto, si $\mathbf{a}(w)\mathbf{G}(w) = [1, 0, \ldots, 0]$, la matriz $\mathbf{A}^\top(w)$, cuyas filas son $\mathbf{a}(w), \mathbf{a}(w+1/r), \ldots, \mathbf{a}(w+(r-1)/r)$, donde se considera la extensión 1-periódica de $\mathbf{a}(w)$, es una inversa por la izquierda de $\mathbf{G}(w)$ (nótese sin embargo que no todas las inversas por la izquierda de $\mathbf{G}(w)$ son de este tipo). Se comprueba fácilmente que todas las inversas por la izquierda de $\mathbf{G}(w)$ vienen dadas por

$$\mathbf{B}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w)[\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)]\,, \tag{3.16}$$

donde $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matriz $r \times s$ definida en $w \in (0,1)$. Además si las entradas de $\mathbf{U}(w)$ están esencialmente acotadas entonces las entradas de $\mathbf{B}(w)$ están esencialmente acotadas.

Cuando el periodo de muestreo es $r = 1$, las posibles fórmulas de muestreo dadas en el teorema anterior se construyen a partir de las soluciones de $[a_1(w), a_2(w), \dots, a_s(w)]\,[g_1(w), g_2(w), \dots, g_s(w)]^\top = 1$. La solución correspondiente a la pseudo-inversa de $\mathbf{G}$, viene dada por

$$a_j(w) = g_j^\dagger(w) = \frac{\overline{g_j(w)}}{\sum_{j=1}^s |g_j(w)|^2}\,, \quad j = 1, 2, \dots, s\,.$$

La correspondiente fórmula de muestreo coincide con la deducida por Aldroubi et al. [5]. Allí, se pueden encontrar también, fórmulas de muestreo cuando el espacio invariante por traslación tiene varios generadores en el caso en que el periodo de muestreo es $r = 1$.

Caso en el que las funciones g_j son continuas

Si las extensiones periódicas de las funciones g_j son continuas en $\mathbb{R}$, lo cual ocurre por ejemplo si se verifica $\{(\mathcal{L}_j\varphi)(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, las condiciones en la Proposición 3.3 y en el Teorema 3.3 coinciden, dando lugar al siguiente corolario.

Corolario 3.1 *Si las extensiones periódicas de las funciones g_j son continuas en $\mathbb{R}$ entonces son equivalentes:*

(a) rango $\mathbf{G}(w) = r\,, \quad w \in \mathbb{R}$.

(b) Los sistemas $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1,2,\dots,s}$ y los puntos de muestreo $\{rn\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman un conjunto de unicidad para V_φ.

(c) Existe un frame de V_φ, $\{S_j(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$, tal que para cada $f \in V_\varphi$,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)\ S_j(\cdot - rn) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}) \text{ y uniformemente en } \mathbb{R}\,.$$

Demostración. En este caso la condición $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$ es equivalente a que $\det \mathbf{G}^*(w)\ \mathbf{G}(w) \neq 0$, $w \in \mathbb{R}$, lo cual es a su vez equivalente a que

$$\text{rango}\,\mathbf{G}(w) = r\,, \quad w \in \mathbb{R}.$$

El corolario es pues consecuencia de la Proposición 3.3 y del Teorema 3.3 □

Estabilidad

Nótese que el Lema 3.2, el Teorema 3.1 y el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ dan el siguiente resultado:

Existen dos constantes $0 < A \leq B$ *tales que*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} |\mathcal{L}_j f(rn)|^2 \leq B\|f\|^2\,, \quad \textit{para todo} \;\; f \in V_\varphi \tag{3.17}$$

si y sólo si $0 < \alpha_{\mathbf{G}} \leq \beta_{\mathbf{G}} < \infty$.

En el caso de que se verifiquen estas condiciones equivalentes, el operador lineal que transforma cada función f de V_φ en $\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ (véase Proposición A.4) tiene inversa acotada definida en un subespacio cerrado de $\ell^2_s(\mathbb{Z}) := \ell^2(\mathbb{Z}) \times \ldots \times \ell^2(\mathbb{Z})$ (s veces). Recientemente, Aldroubi, Sun y Tang [5] han dado, para el caso en que el periodo de muestreo es $r = 1$, una condición necesaria y suficiente para que existan A y B verificando (3.17) cuando el espacio invariante por traslación tiene varios generadores.

Periodo de muestreo arbitrario

Veamos ahora como la teoría obtenida en esta sección se aplica, mediante un cambio de variable, a la deducción de formulas de muestreo generalizado que permiten la recuperación de funciones del espacio escalado

$$V^h_\varphi = \big\{f(\cdot/h) : f \in V_\varphi\big\} \qquad (h > 0)$$

a partir de muestras generalizadas tomadas en los puntos $\{hrn\}_{n\in\mathbb{Z}}$, i.e., a partir de $\{(\widetilde{\mathcal{L}}_j f)(hrn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$, donde $\widetilde{\mathcal{L}}_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$ son s sistemas lineales e invariantes por traslación definidos sobre V^h_φ. Consideremos para ello los sistemas asociados, $\mathcal{L}_j f$, $j = 1, 2, \ldots, s$, definidos sobre V_φ, por

$$(\mathcal{L}_j f)(t) = (\widetilde{\mathcal{L}}_j D_h^{-1} f)(ht)\,,$$

donde D_h es el operador de dilatación $(D_h f)(t) := \sqrt{h} f(ht)$. Se comprueba fácilmente que los sistemas $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$ son lineales e invariantes por traslación. Si con respecto a los sistemas $\mathcal{L}_j$, se verifican las hipótesis del Teorema 3.2, se tiene que, para $f \in V^h_\varphi$

$$(D_h f)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big(\mathcal{L}_j D_h f\big)(rn)\; S_j(t - rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

para las funciones de reconstrucción S_j dadas en este teorema. Aplicando D_h^{-1}, se obtiene la siguiente fórmula de muestreo generalizado: Para cada $f \in V^h_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} (\widetilde{\mathcal{L}}_j f)(hrn)\; \widetilde{S}_j(t - hrn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $\widetilde{S}_j := D_h^{-1} S_j$. Para el cálculo de $S_j = r\mathcal{T}_\varphi a_j$ y para la verificación de la condición $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$ téngase en cuenta que en este caso,

$$g_j(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j\varphi)(n) e^{-2\pi i n w} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\widetilde{\mathcal{L}}_j D_h^{-1}\varphi)(hn) e^{-2\pi i n w} .$$

Nótese que si $\{V_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es un análisis multirresolución con función de escala φ y wavelet madre ψ, para $h = 2^{-m}$ se tiene que $V_\varphi^h = V_m$ y $V_\psi^h = W_m$.

Casos particulares

La fórmula de muestreo generalizado,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_j(t - rn) , \quad t \in \mathbb{R} , \tag{3.18}$$

engloba como casos particulares a muchas fórmulas de muestreo importantes:

- Cuando $r = s = 1$ y $(\mathcal{L}_1 f) := f(n + a)$, donde $a \in [0, 1)$, la fórmula (3.18) se reduce a la fórmula de muestreo clásica que permite recuperar las funciones de V_φ a partir de sus muestras $\{f(n + a)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (Teorema 2.1).

- Cuando $r = s = 1$ y $(\mathcal{L}_1 f)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\xi(x - t)dx$, donde la función $\xi \in L^2(\mathbb{R})$ tiene soporte en $[-a, a]$, la fórmula (3.18) se reduce a una fórmula que permite recuperar una función de V_φ a partir de la sucesión de medias locales

  $$(\mathcal{L}_1 f)(n) = \int_{n-a}^{n+a} f(x)\xi(x - n)dx , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

  Es éste un caso importante en la práctica, ya que proporciona un modelo más realista al considerar las características de los instrumentos de medida disponibles. Existen pues multiples estudios y extensiones tanto para el caso regular como irregular. Véase por ejemplo [1, 4, 115, 116, 117].

- Cuando $\mathcal{L}_j f(t) := f^{(j-1)}(t + a)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, donde $a \in [0, s)$, la fórmula (3.18) proporciona un medio de recuperar una función a partir de las muestras de la función y de sus $s - 1$ primeras derivadas tomadas con periodo r. En el Sección 3.3.3 se trata en más detalle el caso $r = s = 2$ y se dan dos ejemplos importantes. En el Sección 3.3.4 se puede encontrar un ejemplo con $r = 1$ y $s = 2$.

- Cuando $(\mathcal{L}_1 f) := f(n + a_1)$, $(\mathcal{L}_2 f) := f(n + a_2)$,...,$(\mathcal{L}_s f) := f(n + a_s)$ donde $a_j \in [0, 2)$, $j \in [0, s]$ la fórmula (3.18) se reduce a la fórmula de muestreo periódico no uniforme, que permite recuperar una función de $f \in V_\varphi$ a partir de las muestras $\{f(nr + a_j)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,...,s}$. En el caso particular $r = s = 2$ se reduce a la fórmula de muestreo entrelazado deducida de forma directa en la Sección 2.4.

3.3.2. Cuando el periodo de muestreo coincide con el número de canales

En el caso $r = s$, es decir cuando el periodo de muestreo es igual al número de sistemas la fórmula de muestreo (3.13) es única como prueba el siguiente teorema.

Teorema 3.4 *Supongamos que $g_j \in L^\infty(0, 1)$ para $j = 1, 2, \dots, s$, y que $r = s$. Entonces existe una base de Riesz $\{S_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,...,s}$ de V_φ verificando la fórmula de muestreo*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big(\mathcal{L}_j f\big)(sn) S_{j,n} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}), \tag{3.19}$$

si y sólo si $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$.

En este caso, la sucesión de funciones de reconstrucción $\{S_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,...,s}$ es única y viene dada por $S_{j,n} = S_j(t - sn)$, donde $S_j = r\mathcal{T}_\varphi a_j$ siendo $a_j(w)$ el j-ésimo elemento de la primera fila de $\mathbf{G}^{-1}(w)$ para c.t.p. $w \in (0, 1)$ y $j = 1, 2, \dots, s$. Las funciones S_j, $j = 1, 2, \dots, s$, satisfacen la propiedad interpolatoria $(\mathcal{L}_l S_j)(sn) = \delta_{j,l}\delta_{n,0}$. La convergencia de la serie en (3.19) es en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$, absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que

$$\alpha_{\mathbf{G}} := \operatorname*{ess\,inf}_{w\in(0,1/s)} \lambda_{\text{mín}}[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)] > 0\,.$$

Como la matriz $\mathbf{G}(w)$ es cuadrada se tiene que $\det \mathbf{G}(w) \neq 0$, c.t.p. $w \in (0, 1)$ y consecuentemente existe una única solución de

$$[a_1(w), \dots, a_s(w)]\ \mathbf{G}(w) = [1, 0, \dots, 0]$$

dada por la primera fila de $\mathbf{G}^{-1}(w)$. Por tanto, según el Teorema 3.3, existe un *frame* $\{S_j(t - sn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,...,s}$ de V_φ, dado por $S_j = r\mathcal{T}_\varphi a_j$ siendo $a_j(w)$ el j-ésimo elemento de la primera fila de $\mathbf{G}^{-1}(w)$, para el cual se verifica la fórmula de muestreo (3.13).

La sucesión $\{ra_j(w)e^{-2\pi insw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s} = \{\mathcal{T}_\varphi^{-1}S_j(\cdot - ns)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$, lo cual como $r = s$ implica (Teorema 3.1) que es base de Riesz de $L^2(0,1)$. En consecuencia, $\{S_j(t-ns)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es base de Riesz de V_φ.

Supongamos ahora que existe una base de Riesz $\{S_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ de V_φ verificando la fórmula de muestreo (3.19). Debido a la unicidad de los coeficientes en una base de Riesz se tiene que se verifica la propiedad interpolatoria $(\mathcal{L}_l S_{j,n})(sm) = \delta_{j,l}\delta_{n,m}$.

Por otra parte, como $\mathcal{T}_\varphi^{-1}$ es un isomorfismo, $\{\mathcal{T}_\varphi^{-1}S_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es base de Riesz de $L^2(0,1)$. Desarrollando la función $\overline{g}_l(w)e^{-2\pi msw}$ en la base dual de $\{\mathcal{T}_\varphi^{-1}S_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$, que denotaremos por $\{G_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\overline{g}_l(w)e^{-2\pi msw} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\langle \overline{g}_l(\cdot)e^{-2\pi ms\cdot}, \mathcal{T}_\varphi^{-1}S_{j,n}\rangle_{L^2(0,1)} G_{j,n}(w)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\mathcal{L}_l S_{j,n}}(sm) G_{j,n}(w) = G_{l,m}(w)\,,\end{aligned}$$

En consecuencia la sucesión $\{\overline{g}_l(w)e^{-2\pi msw}\}_{m\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es la base de Riesz dual de $\{\mathcal{T}_\varphi^{-1}S_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$. En particular es base de Riesz de $L^2(0,1)$, lo cual implica según el Teorema 3.1 que $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$.

Además la sucesión $\{\mathcal{T}_\varphi^{-1}S_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es necesariamente la única base de Riesz dual de $\{\overline{g}_l(w)e^{-2\pi msw}\}_{m\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$. Por tanto existe una única sucesión $\{S_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ tal que se verifica la fórmula de muestreo (3.19).
$\square$

Si las funciones g_j son continuas en $\mathbb{R}$, la condición $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$ es equivalente a que $\det \mathbf{G}^*(w)\ \mathbf{G}(w) \neq 0$, $w \in \mathbb{R}$, lo que es a su vez equivalente a que $\det \mathbf{G}(w) \neq 0$, $w \in \mathbb{R}$, puesto que la matriz $\mathbf{G}(w)$ es cuadrada $(r = s)$.

Para el caso considerado en esta sección, esto es cuando el periodo de muestreo es igual al número de canales, $s = r$, la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(ns) S_j(t-ns)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

fue deducida por Unser y Zerubia [123] utilizando la teoría de *filter-banks* en [123]. Para ello suponen cierta condición ([123, Condicion A3]), que es equivalente a la condición $0 < \alpha_{\mathbf{G}}$, como puede verse teniendo en cuenta que la matriz de modulación (véase la definición en [123]) $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathrm{mod}}(e^{iw})$ es en nuestra notación la matriz $\mathbf{G}(w/2\pi)$ y utilizando las relaciones (34) y (38) de [123]. Si se cumple $0 < \alpha_{\mathbf{G}}$, dada la unicidad de la fórmula de muestreo probada en el Teorema 3.4, las funciones de reconstrucción en esta fórmula coinciden obviamente con las dadas en el Teorema 1 de [123]. Se puede ver que son la misma fórmula de una forma directa por medio de la Proposición 2 de [123].

Cotas de Riesz

Si se cumplen las condiciones equivalentes del teorema anterior, las sucesiones $\{sa_j e^{-2\pi isn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ y $\{\overline{g}_j e^{-2\pi isn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ son un par de bases de Riesz de V_φ duales. Según el Teorema 3.1, las cotas óptimas de la base de Riesz $\{\overline{g}_j e^{-2\pi isn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ son $\alpha_{\mathbf{G}}/s$ y $\beta_{\mathbf{G}}/s$. Así, las cotas óptimas de su base dual $\{sa_j e^{-2\pi isn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ son $s/\beta_{\mathbf{G}}$ y $s/\alpha_{\mathbf{G}}$ (Proposición A.1). En el caso de que $\{\varphi(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea base ortonormal de V_φ, el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ es operador unitario y así, las cotas óptimas de la base de Riesz formada por las funciones de reconstrucción $\{S_j(t-sn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ tiene las mismas cotas óptimas, $s/\beta_{\mathbf{G}}$ y $s/\alpha_{\mathbf{G}}$.

En el caso general,

$$\|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\|^2 s/\beta_{\mathbf{G}} = s\|\Phi_\varphi\|_0/\beta_{\mathbf{G}} \quad \text{y} \quad \|\mathcal{T}_\varphi\|^2 s/\alpha_{\mathbf{G}} = s\|\Phi_\varphi\|_\infty/\alpha_{\mathbf{G}}$$

son cotas de la base de Riesz formada por las funciones de reconstrucción $\{S_j(t-sn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ (Proposición A.5). Además, podemos calcular las cotas óptimas de esta base utilizando la base ortonormal de V_φ, $\{\phi(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $\widehat{\phi}=\widehat{\varphi}/\sqrt{\Phi_\varphi}$ (Sección 1.3). Concretamente, notando $h_j(w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_j\phi(n)e^{-2\pi inw}$ éstas son $s/\beta_{\mathbf{H}}$ y $s/\alpha_{\mathbf{H}}$. Nótese que bajo ciertas condiciones condiciones (véase (3.8)), se tiene que

$$\begin{aligned} h_j(w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{l}_j(w+n)\widehat{\phi}(w+n) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_\varphi(w)}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{l}_j(w+n)\widehat{\varphi}(w+n) \\ &= \frac{g_j(w)}{\sqrt{\Phi_\varphi(w)}}\,. \end{aligned}$$

Por tanto, se pueden calcular las cotas de Riesz óptimas, $s/\beta_{\mathbf{H}}$ y $s/\alpha_{\mathbf{H}}$, sin calcular explícitamente ϕ. Por ejemplo si $s=1$ y $\mathcal{L}_1 f = f$, estas cotas son

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_{\mathbf{H}}} &= \frac{1}{\operatorname{ess\,sup}_{w\in\mathbb{R}}|(Z\varphi)(0,w)|^2/|\Phi_\varphi(w)|} = \operatorname*{ess\,inf}_{w\in\mathbb{R}}\frac{|\Phi_\varphi(w)|}{|(Z\varphi)(0,w)|^2}\,, \\ \frac{1}{\alpha_{\mathbf{H}}} &= \frac{1}{\operatorname{ess\,inf}_{w\in\mathbb{R}}|(Z\varphi)(0,w)|^2/|\Phi_\varphi(w)|} = \operatorname*{ess\,sup}_{w\in\mathbb{R}}\frac{|\Phi_\varphi(w)|}{|(Z\varphi)(0,w)|^2}\,, \end{aligned}$$

que coinciden con las calculadas, por otro método, en la Sección 3.17.

Hipótesis más débiles

En este capítulo hemos supuesto que se verifica:

- $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ *está uniformemente acotada en* $\mathbb{R}$.
- *Para* $j = 1, 2, \ldots, s$, *si el sistema* $\mathcal{L}_j$ *es del tipo (a) entonces su respuesta impulsional* l_j *pertenece a* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

Si en lugar de estas condición se imponen las condiciones más débiles:

- $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 < \infty$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$
- *Para* $j = 1, 2, \ldots, s$, *si el sistema* $\mathcal{L}_j$ *es del tipo (a) entonces su respuesta impulsional* l_j *pertenece a* $L^2(\mathbb{R})$
- *Para* $j = 1, 2, \ldots, s$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{L}_j\varphi(n)|^2 < \infty$

entonces los Teoremas 3.2, 3.3 y 3.4 se siguen verificando, con la salvedad de que no podemos afirmar que la convergencia de la serie de muestreo sea uniforme en $\mathbb{R}$, sino únicamente en aquellos conjuntos donde la función $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ esté uniformemente acotado. Es necesario suponer la última condición, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\mathcal{L}_j\varphi(n)|^2 < \infty$, ya que el Lema 3.1 no es válido con estas hipótesis más débiles.

3.3.3. Muestreo con derivadas

En esta sección tratamos la recuperación de las funciones $f \in V_\varphi$ a partir de las muestras $\{f(a+2n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f'(b+2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Para ello, suponemos que φ' existe y que la suma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi'(t-n)|^2$, está uniformemente acotada sobre $\mathbb{R}$ Consideremos los sistemas

$$\mathcal{L}_1 f(t) := f(t+a)\,, \qquad \mathcal{L}_2 f(t) := f'(t+b)\,, \quad f \in V_\varphi\,,$$

donde $a, b \in [0, 2)$. Las funciones g_j correspondientes a estos sistemas son

$$\begin{aligned} g_1(w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n+a) e^{-2\pi i n w} = (Z\varphi)(a, w)\,, \\ g_2(w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi'(n+b) e^{-2\pi i n w} = (Z\varphi')(b, w)\,, \end{aligned}$$

donde $Z\varphi$ y $Z\varphi'$ notan las transformadas de Zak del generador y de su derivada respectivamente. Notamos

$$\begin{aligned} \Gamma(w) &:= \det \mathbf{G}(w) \\ &= (Z\varphi)(a, w)(Z\varphi')(b, w+1/2) - (Z\varphi')(b, w)(Z\varphi)(a, w+1/2)\,, \end{aligned}$$

Figura 3.1: Funciones de reconstrucción S_1 y S_2 en la fórmula de Jagerman y Fogel

El Teorema 3.4, para $r = s = 2$ y los sistemas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, afirma que, si $0 < \|\Gamma\|_0 \le \|\Gamma\|_\infty < \infty$ entonces, para cada $f \in V_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[f(a+2n)S_1(t-2n) + f'(b+2n)S_2(t-2n)\big]\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad (3.20)$$

donde

$$S_1(t) = 2\mathcal{T}_\varphi\Big(\frac{Z\varphi'(b,\cdot+1/2)}{\Gamma(\cdot)}\Big)(t)\,, \quad S_2(t) = -2\mathcal{T}_\varphi\Big(\frac{Z\varphi(a,\cdot+1/2)}{\Gamma(\cdot)}\Big)(t)\,. \quad (3.21)$$

Para el caso particular que el generador φ sea la función de escala de un análisis multirresolución una demostración directa de esta fórmula se puede encontrar en Walter [127].

Veremos a continuación dos ejemplos:

• **Fórmula de Jagerman y Fogel.** En el caso particular $\varphi = \operatorname{senc}$ y $a = b = 0$, utilizando el Lema 2.1 se obtiene que

$$(Z\operatorname{senc})(0,w) = 1, \quad (Z\operatorname{senc}')(0,w) = \begin{cases} 2\pi i w, & w \in (-1/2,1/2) \\ 2\pi i(w-1), & w \in (1/2,3/2) \end{cases}$$

y entonces

$$\Gamma(w) = -\operatorname{sg}(w)\pi i, \quad w \in (-1/2,1/2)\,,$$

de donde se obtiene que para cada $f \in PW_{1/2}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[f(2n)S_1(t-2n) + f'(2n)S_2(t-2n)\big]\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $S_1(t) = \operatorname{senc}^2(t/2)$ y $S_2(t) = t\operatorname{senc}^2(t/2)$. Ésta es la fórmula de muestreo obtenida por Jagerman y Fogel en [76]. Una demostración directa y

Figura 3.2: *Spline* cúbicos S_1 y S_2, funciones de reconstrucción de la fórmula (3.22). Obsérvese la propiedad interpolatoria $S_1(2n+1/2)=\delta_{n,0}$, $S_2'(2n+1/2)=\delta_{n,0}$ y $S_1'(2n+1/2)=S_2(2n+1/2)=0$.

simple de esta fórmula se puede encontrar en [53]. En la Sección 4.1.1 se calculan las cotas óptimas de la base de Riesz $\{S_j(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2}$. Para diversas cuestiones relacionadas con el muestreo con derivadas en espacios de Paley-Wiener véase [71].

• **Splines cúbicos.** En el caso particular de que el generador sea el B-*spline* cúbico N_4, y $a=b=0$, se tiene que

$$(ZN_4)(0,w)=\frac{z}{6}+\frac{2z^2}{3}+\frac{z^3}{6}\,,\quad (ZN_4')(0,w)=\frac{z}{2}-\frac{z^3}{2}\,,\quad (z:=e^{-2\pi iw})$$

de donde se obtiene $\Gamma(w)=2/3\,(z^5-z^3)$. Entonces pese a que las muestras determinan unívocamente a las funciones de V_{N_4} (Proposición 3.3), no es posible una fórmula como (3.20). De hecho, no existe una fórmula del tipo (3.19) pues $\Gamma(w)$ se anula en $w=0$ y es continua. Consideremos $a=b=1/2$. Se tiene que

$$\begin{aligned}(ZN_4)\Big(\frac{1}{2},w\Big)&=\frac{1}{48}+\frac{23}{48}z+\frac{23}{48}z^2+\frac{1}{48}z^3\,,\\ (ZN_4')\Big(\frac{1}{2},w\Big)&=\frac{1}{8}+\frac{5}{8}z-\frac{5}{8}z^2-\frac{1}{8}z^3\,,\end{aligned}$$

Entonces

$$\Gamma(w)=\frac{3}{32}z-\frac{19}{16}z^3+\frac{3}{32}z^5\,,\quad (z=e^{-2\pi iw})$$

no se anula sobre el círculo unidad, y por tanto es aplicable la fórmula (3.20).

De las fórmulas (3.21) se obtienen las funciones

$$
\begin{aligned}
S_1(t) &= \mathcal{T}_\varphi\Big(\frac{8(1-5z-5z^2+z^3)}{z(3-38z^2+3z^4)}\Big)(t)\,,\\
S_2(t) &= \mathcal{T}_\varphi\Big(\frac{4(-1+23z-23z^2+z^3)}{3z(3-38z^2+3z^4)}\Big)(t), \quad t\in\mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

Utilizando que $3-38x+3x^2 = 3(x-b)(x-1/b)$ donde $b := (19-4\sqrt{22}\,)/3$, y el desarrollo de Laurent

$$
\frac{1}{(x-b)(x-1/b)} = \frac{b}{b^2-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} b^{|n+1|}x^n\,, \quad b<|x|<\frac{1}{b}\,,
$$

se obtiene que

$$
S_1(t) = \frac{1}{\sqrt{22}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} b^{|n+1|} l_1(t-2n)\,, \quad S_2(t) = \frac{1}{6\sqrt{22}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} b^{|n+1|} l_2(t-2n)\,.
$$

donde

$$
\begin{aligned}
l_1(t) &:= N_4(t+1) - 5N_4(t) - 5N_4(t-1) + N_4(t-2)\,,\\
l_2(t) &:= N_4(t+1) - 23N_4(t) + 23N_4(t-1) - N_4(t-2)\,.
\end{aligned}
$$

La fórmula resultante es: para cada $f\in V_{N_4}$ se tiene

$$
f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[f(2n+1/2)S_1(t-2n) + f'(2n+1/2)S_2(t-2n)\big]\,, \tag{3.22}
$$

uniformemente en $t\in\mathbb{R}$.

3.3.4. Oversampling

Si el periodo de muestreo es igual al número de canales, $s=r$, la fórmula de muestreo generalizado (3.19) es un desarrollo en una base de Riesz. Por el contrario, si el periodo de muestreo es menor que el número de canales, $s>r$, las fórmulas de muestreo generalizado (3.11) son desarrollos en *overcomplete frames* y por tanto en la recuperación de $f\in V_\varphi$ se están utilizando más muestras de las en principio necesarias (*oversampling*). Como compensación, el *oversampling* proporciona una mayor estabilidad, según veremos en la Sección 4.2. Proporciona además cierta flexibilidad. En efecto, si $s>r$, el Teorema 3.2 permite diferentes elecciones para el vector

$$
\mathbf{a}(w) := [a_1(w),\ldots,a_s(w)]\,,
$$

Figura 3.3: Funciones de reconstrucción S_1, S_2 y S_3 de la fórmula (3.23)

verificando $\mathbf{a}(w)\mathbf{G} = [1, 0, \ldots, 0]$, pudiéndose utilizar esta flexibilidad para obtener funciones de reconstrucción apropiadas.

Por ejemplo, si el generador φ y las repuestas al impulso de los sistemas lineales $\mathcal{L}_j$ tienen soporte compacto, las funciones g_j son polinomios trigonométricos y podríamos escoger $\mathbf{a}(w)$ para obtener funciones de reconstrucción S_j con soporte compacto. Ilustramos esta afirmación con el siguiente ejemplo, que sigue la idea del ejemplo dado por Djokovic y Vaidyanathan en [36, III.A]:

- **Medias locales y splines cúbicos.** Consideremos el generador estable $\varphi = N_4$ (B-*spline* cúbico), los $s = 3$ sistemas

$$\mathcal{L}_1 f(x) := \int_x^{x+1/3} f(t)dt\,,\ \mathcal{L}_2 f(x) := \int_{x+1/3}^{x+2/3} f(t)dt\,,\ \mathcal{L}_3 f(x) := \int_{x+2/3}^{x+1} f(t)dt,$$

y periodo de muestreo $r = 2$. Consideremos las extensiones analíticas

$$\mathsf{g}_j(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_j\varphi(n) z^n\,,\ \ \mathsf{G}(z) := \left[\mathsf{g}_j(ze^{-2\pi ik/r})\right]_{j=1,2,\ldots,s,k=0,\ldots,r-1}.$$

Si existe un vector $\mathbf{b}(z) := [b_1(z), b_2(z), b_3(z)]$ cuyas entradas son polinomios, y tal que $\mathbf{b}(z)\mathsf{G}(z) = [z^k, 0]$ para algún entero no negativo k, entonces el vector $\mathbf{a}(w) := e^{2\pi ikw}\mathbf{b}(e^{-2\pi iw})$, cuyas entradas son polinomios trigonométricos satisface $\mathbf{a}(w)\mathbf{G}(w) = [1, 0]$. Las funciones de reconstrucción $S_j = r\mathcal{T}_\varphi a_j$ construidas a partir del vector $\mathbf{a}(w) = [a_1(w), a_2(w), a_s(w)]$ tienen, como puede observarse en la Proposición 3.4, soporte compacto.

En particular, resolviendo un sistema lineal de 12 ecuaciones con 12 incógnitas, encontramos un vector $\mathbf{b}(z)$ cuyas entradas son polinomios de grado 3 que satisface $\mathbf{b}(z)\mathsf{G}(z) = [z, 0]$. Las correspondientes funciones S_j,

$j = 1, 2, 3$, son

$$S_1(t) = \frac{1}{418}[-5395N_4(t+1) + 22687N_4(t) + 188N_4(t-1) - 705N_4(t-2)]$$
$$S_2(t) = \frac{1}{418}[7943N_4(t+1) - 41438N_4(t) - 892N_4(t-1) + 3345N_4(t-2)]$$
$$S_3(t) = \frac{1}{418}[-1750N_4(t+1) + 21715N_4(t) + 1160N_4(t-1) - 4350N_4(t-2)]$$

y la correspondiente fórmula de muestreo es: Para cada $f \in V_{N_4}$ se verifica que

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\mathcal{L}_1 f(2n) S_1(t-2n) + \mathcal{L}_2 f(2n) S_2(t-2n) + \mathcal{L}_3 f(2n) S_3(t-2n)\right], \tag{3.23}$$

uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

• **Descomposición en frecuencias.** Por último, vemos un ejemplo en el que la recuperación de la función, proporciona además su descomposición en frecuencias. Consideremos el generador $\varphi = \text{senc}$ de $PW_{1/2}$, dos canales, $s = 2$ uno de ellos $\mathcal{L}_1 f = f$ y muestreo en los enteros $(r = 1)$. Las posibles funciones de reconstrucción son (véase la Proposición 3.4)

$$\widehat{S}_1(w) = a_1(w)\mathcal{X}_{(-1/2,1/2)}(w), \quad \widehat{S}_2(w) = a_2(w)\mathcal{X}_{(-1/2,1/2)}(w)$$

donde $a_1, a_2 \in L^\infty(-1/2, 1/2)$ y satisfacen

$$a_1(w) + a_2(w)g_2(w) = 1, \quad w \in (-1/2, 1/2)\,. \tag{3.24}$$

Aprovechemos la libertad en esta elección tomando

$$a_1(w) = \mathcal{X}_{(-\sigma,\sigma)}(w) \quad w \in (-1/2, 1/2)\,,$$

donde $0 < \sigma < 1/2$. Si el segundo sistema es tal que $g_2(w) \neq 0$ para $\sigma < |w| < 1$, es posible encontrar $a_2(w)$ verificando (3.24),

$$a_2(w) = g_2^{-1}(w)\mathcal{X}_{(-1/2,-\sigma)\cup(\sigma,1/2)}(w)\,.$$

De esta manera la fórmula de muestreo en el Teorema 3.2 proporciona la función descompuesta en una parte con frecuencias en $(-\sigma, \sigma)$ y otra con frecuencias en $(-1/2, -\sigma) \cup (\sigma, 1/2)$.

Por ejemplo, consideremos los sistemas $\mathcal{L}_1 f = f$ y $\mathcal{L}_2 f = f'$. Se tiene $g_1(w) = 1$, $g_2(w) = 2\pi i w$, $w \in (-1/2, 1/2)$. Tomemos

$$a_1(w) = \mathcal{X}_{(-\sigma,\sigma)}(w)\,, \quad a_2(w) = \frac{\mathcal{X}_{(-1/2,-\sigma)\cup(\sigma,1/2)}(w)}{2\pi i w}\,, \quad w \in (-1/2, 1/2).$$

La fórmula de muestreo resultante es: Para $f \in PW_{1/2}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) S_1(t-n) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(n) S_2(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde

$$S_1(t) = 2\sigma \operatorname{senc}(2\sigma t)\,, \quad S_2(t) = \int_{2\sigma t}^{t} \operatorname{senc}(x)dx\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

El primer sumando en esta fórmula de muestreo tiene frecuencias en $(-\sigma,\sigma)$ y el segundo en $(-1/2,-\sigma)\cup(\sigma,1/2)$. Una consecuencia es que a partir las muestras de la derivada en los enteros se puede recuperar una función banda-limitada a los intervalos $(-1/2,-\sigma)\cup(\sigma,1/2)$.

3.3.5. Muestreo en espacios sin generador estable

Consideramos en esta sección el caso en que $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ es un *frame* de V_φ, o equivalentemente (véase [33, Teorema 7.2.3]) que existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$0 < C_1 \le \Phi_\varphi(w) \le C_2, \quad \text{c.t.p. } w \in (0,1) \setminus \mathcal{N}\,,$$

donde

$$\mathcal{N} := \{w \in (0,1) : \Phi_\varphi(w) = 0\}\,.$$

Diversos ejemplos en los que $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ es un overcomplete *frame* de V_φ, o equivalentemente para los que $\mathcal{N}$ tiene medida positiva, y para los que por tanto no es aplicable lo estudiado en las secciones anteriores, pueden encontrarse en [33] y en [112].

Seguiremos suponiendo que las funciones de V_φ son continuas en $\mathbb{R}$ o equivalentemente (véase [112]), que φ es continua en $\mathbb{R}$ y que la función $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ es uniformemente acotada en $\mathbb{R}$. Nótese que para $f \in V_\varphi$ y $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned}|f(t)|^2 &\le \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_n^*\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \varphi(t-n)\Big|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_n^*\rangle_{L^2(\mathbb{R})}|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 \\ &\le B\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2\Big)\, \|f\|_2^2\,,\end{aligned}$$

donde $\{\varphi_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un *frame* dual a $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y B una cota superior *frame* de $\{\varphi_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Así, la convergencia de funciones en V_φ implica su convergencia uniforme sobre $\mathbb{R}$.

El operador

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{T}_\varphi: & L^2(0,1) & \longrightarrow & V_\varphi \\ & F & \longrightarrow & f = \mathcal{T}_\varphi F := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle F(\cdot), e^{-2\pi i n \cdot} \right\rangle_{L^2(0,1)} \varphi(t-n)\,, \end{array}$$

es, en este caso, acotado y suprayectivo. Sin embargo cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un overcomplete *frame*, no es inyectivo, ya que si $f = \mathcal{T}_\varphi F$,

$$\widehat{f}(w) = \widehat{\mathcal{T}\mathcal{F}}(w) = F(w)\widehat{\varphi}(w)\,,$$

y así las funciones de $L^2(0,1)$ que difieren únicamente sobre el conjunto $\mathcal{N}$ tienen la misma imagen.

Definiendo $g_j, \mathbf{G}$ y $\mathbf{F}$ como anteriormente se puede comprobar siguiendo los mismos pasos que en las secciones anteriores, que para $F \in L^2(0,1)$, tal que $\mathcal{T}_\varphi F = f$ se tiene

$$\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn) = \left\langle F(\cdot), \overline{g}_j(\cdot)\, e^{-2\pi i r n \cdot} \right\rangle_{L^2(0,1)}.$$

y que si $g_j \in L^\infty(0,1)$ para $j = 1, 2, \ldots, s$,

$$\mathbf{G}(w)\mathbf{F}(w) = r\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\mathcal{L}_1 f\big)(rn) e^{-2\pi i n r w}, \ldots, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(\mathcal{L}_s f\big)(rn) e^{-2\pi i n r w}\Big]^\top, \tag{3.25}$$

en $L^2(0,1)$. Nótese, sin embargo, que $\widehat{\varphi}(w+n) = 0$ para $n \in \mathbb{Z}$ y $w \in \mathcal{N}$ y que si se verifica $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathcal{L}_j\varphi}(w+n)| \in L^2(0,1)$ para $j = 1, 2, \ldots, s$, se tiene que

$$\begin{aligned} g_j(w) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j\varphi)(n) e^{-2\pi i r n w} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{L}_j\varphi}(w+n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{l}_j(w+n)\widehat{\varphi}(w+n) = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \quad w \in \mathcal{N}\,. \end{aligned}$$

Por tanto, en general no existe, cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un overcomplete *frame*, un vector $[a_1(w), \ldots, a_s(w)]$ que satisfaga

$$\big[a_1(w), \ldots, a_s(w)\big]\,\mathbf{G}(w) = [1, 0, \ldots, 0]\,. \tag{3.26}$$

c.t.p. $w \in (0,1)$, no pudiéndose aplicar en consecuencia el Teorema 3.2. Sin embargo es posible encontrar una generalización de este teorema. Utilizamos el operador

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\varphi : L^2\big((0,1) \setminus \mathcal{N}\big) \to V_\varphi, \qquad \widetilde{\mathcal{T}}_\varphi F := \mathcal{T}_\varphi \widetilde{F},$$

donde $\widetilde{F}$ denota la función de $L^2(0,1)$ que coincide con F en $(0,1)\setminus\mathcal{N}$, y que vale 0 en $\mathcal{N}$. Se comprueba fácilmente que $\widetilde{\mathcal{T}}_\varphi$ es un isomorfismo que satisface $\big(\widetilde{\mathcal{T}}_\varphi\big[F(\cdot)e^{-2\pi i n\cdot}\big]\big)(t) = \big(\widetilde{\mathcal{T}}_\varphi F\big)(t-n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.5 *Supongamos que* $g_j \in L^\infty\big((0,1)\setminus\mathcal{N}\big)$ *para* $j=1,2,\dots,s$, *y sean* a_j *funciones de* $L^\infty\big((0,1)\setminus\mathcal{N}\big)$, $j=1,2,\dots,s$, *tales que*

$$\big[a_1(w),\dots,a_s(w)\big]\,\mathbf{G}(w)=[1,0,\dots,0], \qquad c.t.p.\ w\in(0,1)\setminus\mathcal{N}\,.$$

Entonces, para cada $f\in V_\varphi$ *se tiene*

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)\ S_j(t-rn)\,, \quad t\in\mathbb{R}\,, \tag{3.27}$$

donde $S_j = r\widetilde{\mathcal{T}}_\varphi a_j$, $j=1,2,\dots,s$. *La sucesión* $\{S_j(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ *es un frame de* V_φ. *La convergencia de la serie en* (3.27) *es en el sentido de* $L^2(\mathbb{R})$, *absoluta y uniforme en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Para $F\in L^2\big((0,1)\setminus\mathcal{N}\big)$ sea

$$\widetilde{\mathbf{F}}(w):=\Big[\widetilde{F}(w),\widetilde{F}\Big(w+\frac{1}{r}\Big),\cdots,\widetilde{F}\Big(w+\frac{r-1}{r}\Big)\Big]^\top.$$

Como $\widetilde{F}$ se anula en $\mathcal{N}$, aún con la hipótesis más débil $g_j\in L^\infty\big((0,1)\setminus\mathcal{N}\big)$, se puede comprobar que

$$\mathbf{G}(w)\widetilde{\mathbf{F}}(w)=r\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(\mathcal{L}_1 f\big)(rn)e^{-2\pi inrw},\dots,\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(\mathcal{L}_s f\big)(rn)e^{-2\pi inrw}\Big]^\top,$$

en $L^2(0,1)$. Entonces, multiplicando a la izquierda por $[a_1(w),\dots,a_s(w)]$, se obtiene

$$F(w)=r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)a_j(w)e^{-2\pi inrw}\,, \tag{3.28}$$

en $L^2\big((0,1)\setminus\mathcal{N}\big)$. Aplicando $\widetilde{\mathcal{T}}_\varphi$ se obtiene (3.27) en $L^2(\mathbb{R})$. Teniendo en cuenta que

$$\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)=\big\langle\widetilde{F}(\cdot),\overline{g}_j(\cdot)\,e^{-2\pi irn\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}=\big\langle F(\cdot),\overline{g}_j(\cdot)\,e^{-2\pi irn\cdot}\big\rangle_{L^2((0,1)\setminus\mathcal{N})}\,,$$

la igualdad (3.28) se puede escribir como

$$F(w)=r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big\langle F(\cdot),\overline{g}_j(\cdot)\,e^{-2\pi irn\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)\setminus\mathcal{N}}\,a_j(w)e^{-2\pi inrw}\,. \tag{3.29}$$

Como $\{r\widetilde{a}_j(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ y $\{\widetilde{\overline{g}}_j(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ son sucesiones de Bessel de $L^2(0,1)$, entonces

$$\{ra_j(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s} \quad \text{y} \quad \{\overline{g}_j(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$$

son sucesiones de Bessel de $L^2(0,1)\setminus\mathcal{N}$, y así de (3.29) se obtiene que son un par de *frame* duales de $L^2(0,1)\setminus\mathcal{N}$. Como $\{S_j(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es la imagen de $\{ra_j(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ por el isomorfismo $\widetilde{\mathcal{T}_\varphi}$ entonces la sucesión $\{S_j(t-rn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* de V_φ.

La convergencia de la serie muestral es absoluta debido al carácter incondicional de un *frame* y uniforme pues la convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ de sucesiones de V_φ implica su convergencia uniforme. □

3.4. Muestreo generalizado irregular

En esta sección estudiaremos la recuperación de las funciones f del espacio invariante por traslación V_φ a partir de las muestras generalizadas irregulares $\{\mathcal{L}_jf(nr+\varepsilon_{j,n})\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$. En la Sección 2.3 tratamos el caso particular $s=r=1$, $\mathcal{L}_1f=f$, como un problema de perturbación de una base de Riesz en $L^2(0,1)$. Seguiremos la misma técnica para resolver el caso general. El punto de partida será la representación para estas muestras obtenida en la Sección 3.1,

$$\mathcal{L}_jf(rn+\varepsilon_{j,n})=\left\langle F(\cdot),\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\right\rangle_{L^2(0,1)}.$$

Si se verifica $0<\alpha_{\mathbf{G}}\le\beta_{\mathbf{G}}<\infty$ entonces $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(0,\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\dots,s}$ es un *frame* (una base de Riesz si $r=s$) de V_φ con cotas óptimas $\alpha_{\mathbf{G}}/r$, $\beta_{\mathbf{G}}/r$ (Teorema 3.1). De este resultado y con una técnica de perturbación de *frames* obtendremos en el Teorema 3.6 una condición sobre las perturbaciones $\{\varepsilon_{j,n}\}$ que garantiza que $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$. Así, podemos obtener las funciones $F\in L^2(0,1)$ mediante distintos desarrollos *frame* (de forma única si $r=s$), siendo los coeficientes de estos desarrollos las muestras $\mathcal{L}_jf(rn+\varepsilon_{j,n})$. Aplicar $\mathcal{T}_\varphi$ a estos desarrollos proporciona fórmulas para la recuperación de las funciones de V_φ a partir de estas muestras de forma estable.

La técnica de perturbación empleada proporciona también unas cotas *frame* de $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$, que permiten aplicar el algoritmo *frame* para recuperar $F\in L^2(0,1)$, y así $f=\mathcal{T}_\varphi F$, a partir de los productos escalares $\left\langle F(\cdot),\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\right\rangle_{L^2(0,1)}=\mathcal{L}_jf(rn+\varepsilon_{j,n})$. Implementaremos este algoritmo en el contexto de $\ell^2(\mathbb{Z})$, que resulta el marco más adecuado para su puesta en práctica.

Finalmente cabe resaltar que, salvo para muestreo con medias ponderadas (ver [5, 61, 113, 115, 117, 116]) y algunos otros casos particulares, el problema de muestreo generalizado irregular en espacios invariantes por traslación, no ha sido estudiado con anterioridad.

3.4.1. Perturbación de frames: Condiciones de recuperación

La demostración del siguiente resultado sobre perturbación de *frames* se puede encontrar en [33, p. 354].

Lema 3.4 *Sea $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ un frame de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con cotas frame A, B y sea $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de $\mathcal{H}$. Si existe una constante $R < A$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \eta_k - \zeta_k, \xi \rangle|^2 \le R \, \|\xi\|^2 \,, \quad \textit{para cada} \;\; \xi \in \mathcal{H} \,,$$

entonces $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es un frame *de $\mathcal{H}$ con cotas*

$$A\bigg(1 - \sqrt{\frac{R}{A}}\bigg)^2, \quad B\bigg(1 + \sqrt{\frac{R}{B}}\bigg)^2.$$

Además si $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$ entonces $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$.

Dada una sucesión de perturbaciones $\varepsilon := \{\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ definimos sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$ el operador $D_\varepsilon = \big[D_{\varepsilon,1}, \dots, D_{\varepsilon,s}\big]$, donde

$$D_{\varepsilon,j}\{c_l\}_{l\in\mathbb{Z}} := \Big\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big[\mathcal{L}_j\varphi(rn - k + \varepsilon_{j,n}) - \mathcal{L}_j\varphi(rn-k)\big] c_k \Big\}_{n\in\mathbb{Z}} .$$

La norma del operador se define en la forma habitual:

$$\|D_\varepsilon\| := \sup_{c\in\ell^2(\mathbb{Z})\setminus\{0\}} \frac{\|D_\varepsilon \, c\,\|_{\ell^2_s(\mathbb{Z})}}{\|c\,\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} \,,$$

donde $\|D_\varepsilon \, c\,\|^2_{\ell^2_s(\mathbb{Z})} := \sum_{j=1}^{s} \|D_{\varepsilon,j}\, c\,\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}$, para cada $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Teorema 3.6 *Supongamos que $g_j \in L^\infty(0,1)$, $j = 1,2,\dots,s$, y que $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$. Si la sucesión de perturbaciones $\varepsilon := \{\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ verifica la desigualdad*

$$\|D_\varepsilon\|^2 < \alpha_{\mathbf{G}}/r \,,$$

entonces existe un frame $\{S^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ en V_φ tal que, para cada $f \in V_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big(\mathcal{L}_j f\big)(rn + \varepsilon_{j,n}) S^\varepsilon_{j,n}(t) \,, \tag{3.30}$$

donde la convergencia de la serie es en $L^2(\mathbb{R})$, absoluta y uniforme en $t \in \mathbb{R}$. Además si $r = s$, entonces la sucesión $\{S^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ verificando (3.30) *en $L^2(\mathbb{R})$ es única, forma una base de Riesz de V_φ y satisface la propiedad interpolatoria $(\mathcal{L}_l S^\varepsilon_{j,n})(sm + \varepsilon_{j,m}) = \delta_{j,l}\delta_{n,m}$.*

Demostración. Sabemos que la sucesión $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(0,\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* (una base de Riesz si $r=s$) de V_φ con cotas $\alpha_{\mathbf{G}}/r$, $\beta_{\mathbf{G}}/r$.

Para $F(w)=\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l e^{-2\pi ilw}$ en $L^2(0,1)$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big|\big\langle\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}-\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(0,\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\,,\,F(\cdot)\big\rangle_{L^2(0,1)}\big|^2\\
&=\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big|\big\langle\sum_{k\in\mathbb{Z}}[\overline{\mathcal{L}_j\varphi}(k+\varepsilon_{j,n})-\overline{\mathcal{L}_j\varphi}(k)]e^{-2\pi i(rn-k)\cdot}\,,\,\sum_{l\in\mathbb{Z}}c_le^{-2\pi il\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}\big|^2\\
&=\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}[\overline{\mathcal{L}_j\varphi}(k+\varepsilon_{j,n})-\overline{\mathcal{L}_j\varphi}(k)]\,\overline{c}_{rn-k}\big|^2\\
&=\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}[\mathcal{L}_j\varphi(rn-k+\varepsilon_{j,n})-\mathcal{L}_j\varphi(rn-k)]c_k\big|^2\\
&=\sum_{j=1}^{s}\|D_{\varepsilon,j}\{c_l\}_{l\in\mathbb{Z}}\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\\
&\le\|D_\varepsilon\|^2\|\{c_l\}_{l\in\mathbb{Z}}\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}=\|D_\varepsilon\|^2\|F\|^2_{L^2(0,1)}\,.
\end{aligned}\tag{3.31}$$

Del Lema 3.4 resulta que si se verifica la desigualdad $\|D_\varepsilon\|^2<\alpha_{\mathbf{G}}/r$, entonces la sucesión $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$ (base de Riesz si $r=s$). Sea $\{H^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ el *frame* dual canónico de este *frame* (la base de Riesz dual si $r=s$). Se tiene que, para cada $F\in L^2(0,1)$,

$$\begin{aligned}
F&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big\langle F(\cdot),\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)}H^\varepsilon_{j,n}\\
&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_jf\big)(rn+\varepsilon_{j,n})H^\varepsilon_{j,n}\,.
\end{aligned}$$

Aplicando el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ se obtiene que se verifica (3.30) en $L^2(\mathbb{R})$, donde $S^\varepsilon_{j,n}=\mathcal{T}_\varphi H^\varepsilon_{j,n}$. La sucesión $\{S^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* de V_φ (base de Riesz en el caso $r=s$), ya que $\{H^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$ (base de Riesz en el caso $r=s$) y $\mathcal{T}_\varphi$ es un isomorfismo de $L^2(0,1)$ en V_φ. La convergencia es absoluta debido al carácter incondicional de la convergencia de los desarrollos en un *frame* y es uniforme pues la convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ de sucesiones de V_φ implica, con las condiciones impuestas, su convergencia uniforme.

Supongamos ahora que $r = s$ y que se verifica (3.30). Entonces aplicando $\mathcal{T}_{\varphi}^{-1}$ a (3.30), y teniendo en cuenta el Lema 3.2, se obtiene que para cada $F \in L^2(0,1)$,

$$F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \left\langle F(\cdot), \overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n}, \cdot)e^{-2\pi irn\cdot} \right\rangle_{L^2(0,1)} \mathcal{T}_{\varphi}^{-1} S_{j,n}^{\varepsilon} \,.$$

Entonces, $\{\mathcal{T}_{\varphi}^{-1} S_{j,n}^{\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ es necesariamente la única base de Riesz dual de $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n}, \cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$. Así pues la sucesión $\{S_{j,n}^{\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ verificando (3.30) es única. De la unicidad de los coeficientes de un desarrollo con respecto a una base de Riesz se deduce la propiedad interpolatoria $(\mathcal{L}_l S_{j,n}^{\varepsilon})(sm + \varepsilon_{j,m}) = \delta_{j,l}\delta_{n,m}$. □

Obtenemos a continuación una cota uniforme de la norma $\|D_{\varepsilon}\|$ supuesto la sucesión $\{\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ está en $[\alpha_j, \beta_j] \subset [-r, r]$, para $j = 1, 2, \ldots, s$, que facilita la aplicación del teorema anterior.

Teorema 3.7 *Para cualquier* $\{\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ *, tal que* $\{\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset [\alpha_j, \beta_j]$*,* $j = 1, 2, \ldots, s$*, se verifica*

$$\|D_{\varepsilon}\|^2 \le \sum_{j=1}^{s} \Lambda_j \Gamma_j \,, \tag{3.32}$$

donde, para $j = 1, 2, \ldots, s$*, las constantes* Λ_j *y* Γ_j *vienen dadas por*

$$\begin{aligned} \Lambda_j &:= \sup_{\substack{l=0,1,\ldots,r-1 \\ \{d_k\}\subset[\alpha_j,\beta_j]}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{L}_j\varphi(rk + l + d_k) - \mathcal{L}_j\varphi(rk + l)| \,, \\ \Gamma_j &:= \sup_{d\in[\alpha_j,\beta_j]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{L}_j\varphi(k + d) - \mathcal{L}_j\varphi(k)| \,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Demostración. Suponemos $\sum_{j=1}^{s} \Lambda_j\Gamma_j$ es finito, ya que en caso contrario la desigualdad se verifica trivialmente. Notaremos

$$d_{n,k}^{(j)} := \mathcal{L}_j\varphi(a + n - k + \varepsilon_{j,n}) - \mathcal{L}_j\varphi(a + n - k) \,.$$

Para $k, n \in \mathbb{Z}$ se verifica que

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |d_{l,k}^{(j)}| \le \Lambda_j \quad \text{y} \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}} |d_{n,l}^{(j)}| \le \Gamma_j \,.$$

Para cualquier sucesión $c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|D_\varepsilon c\|^2_{\ell^2_s(\mathbb{Z})} &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} d^{(j)}_{n,k}\ c_k\Big|^2 \le \sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l,k\in\mathbb{Z}} |d^{(j)}_{n,l}c_l\overline{d}^{(j)}_{n,k}\overline{c}_k| \\
&= \sum_{j=1}^{s}\sum_{l,k\in\mathbb{Z}} |c_l|\ |c_k|\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d^{(j)}_{n,l}d^{(j)}_{n,k}| \le \sum_{j=1}^{s}\sum_{l,k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_l|^2+|c_k|^2}{2}\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d^{(j)}_{n,l}d^{(j)}_{n,k}| \\
&= \sum_{j=1}^{s}\sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l|^2 \sum_{k,n\in\mathbb{Z}} |d^{(j)}_{n,l}d^{(j)}_{n,k}| \le \sum_{j=1}^{s}\sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l|^2\Gamma_j \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d^{(j)}_{n,l}| \\
&\le \sum_{j=1}^{s}\sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_l|^2\Gamma_j\Lambda_j = \Big(\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j\Gamma_j\Big)\ \|c\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})}\,,
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Damos ahora un ejemplo donde el Teorema 3.7 se aplica fácilmente. Concretamente, supongamos que para cada $j = 1, 2, \ldots, s$, la función $\mathcal{L}_j\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y para algún $\epsilon_j > 0$ se verifica $(\mathcal{L}_j\varphi)'(t) = O(|t|^{-(1+\epsilon_j)})$ cuando $|t| \to \infty$. Entonces es fácil probar que, para $\delta_j > 0$,

$$M_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j) := \sum_k \max_{t\in[k-\delta_j,k+\delta_j]} |(\mathcal{L}_j\varphi)'(t)| < \infty\,.$$

Corolario 3.2 *Supongamos que para $j = 1, 2, \ldots, s$, se verifica $\mathcal{L}_j\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $M_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j) < \infty$ donde $\delta_j := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_{j,n}|$. Sea*

$$N_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j) := \sup_{l=0,1,\ldots,r-1}\sum_k \max_{t\in[rk+l-\delta_j,rk+l+\delta_j]} |(\mathcal{L}_j\varphi)'(t)|\,.$$

Entonces la condición

$$\sum_{j=1}^{s}\delta_j^2\ N_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j)M_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j) < \frac{\alpha_{\mathbf{G}}}{r}$$

implica la existencia de un frame $\{S^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ *de V_φ tal que, para cada $f \in V_\varphi$,*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big(\mathcal{L}_jf)(rn+\varepsilon_{j,n})S^\varepsilon_{j,n}(t)\,,\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

La convergencia de la serie es uniformemente en $t \in \mathbb{R}$. Además si $r = s$, entonces $\{S^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ es una base de Riesz de V_φ.

Demostración. Para $j = 1, 2, \ldots, s$, del teorema del valor medio se deduce que

$$\sup_{d\in[-\delta_j,\delta_j]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{L}_j\varphi(k+d) - \mathcal{L}_j\varphi(k)| \le \delta_j \; M_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j)\,,$$

y

$$\sup_{\substack{l=0,1,\ldots,r-1\\ \{d_k\}\subset[-\delta_j,\delta_j]}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{L}_j\varphi(rk+l+d_k) - \mathcal{L}_j\varphi(rk+l)| \le \delta_j \; N_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j)\,.$$

El resultado se concluye del Teorema 3.6. □

Nótese que $N_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j) \le M_{(\mathcal{L}_j\varphi)'}(\delta_j)$ y que en el caso $r = 1$ se da la igualdad.

3.4.2. Adaptación del algoritmo frame

Dado un *frame* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$, se puede obtener una aproximación a las funciones $f \in \mathcal{H}$ a partir de los productos escalares $\langle f, \eta_n\rangle_{\mathcal{H}}$, $n \in \mathbb{Z}$ mediante el denominado algoritmo *frame*, que enunciamos en el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [42] o en [53]. Este algoritmo se obtiene como un caso particular del método de extrapolación de Richardson (un algoritmo iterativo para encontrar una solución de un sistema lineal $\mathcal{A}f = h$) cuando el operador $\mathcal{A}$ es un múltiplo del operador frame S, concretamente $\mathcal{A} := 2/(A+B)\,S$ (ver [Sección III.F][53]).

Teorema 3.8 *Sea $\{\eta_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ un frame de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con cotas frame A y B. Sea $\mathcal{A} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ el operador definido por*

$$\mathcal{A}\xi := \frac{2}{A+B} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \langle \xi, \eta_l\rangle_{\mathcal{H}} \eta_l\,, \quad \xi \in \mathcal{H}\,.$$

Para $\xi \in \mathcal{H}$ definimos ξ_k mediante $\xi_0 = \mathcal{A}\xi$, y recursivamente

$$\xi_{k+1} := \xi_k + \mathcal{A}(\xi - \xi_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Entonces

$$\|\xi - \xi_k\|_{\mathcal{H}} \le \gamma^{k+1} \|\xi\|_{\mathcal{H}}\,,$$

donde $\gamma := \dfrac{B-A}{B+A}$.

Para garantizar la recuperación de las funciones $f \in V_\varphi$ a partir de las muestras $\big\{\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n})\big\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$, suponemos en esta sección que $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$, que las funciones $g_j \in L^\infty(0,1)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, y que $\sum_{j=1}^s \Lambda_j\Gamma_j < \alpha_{\mathbf{G}}/r$, donde Λ_j y Γ_j están definidos en (3.33) con $[\alpha_j, \beta_j] = [-\delta, \delta]$ (Teoremas 3.6 y 3.7), donde

$$\delta := \sup_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s} |\varepsilon_{j,n}| < \infty\,.$$

La fórmula de muestreo (3.30) en el Teorema 3.6, para recuperar las funciones $f \in V_\varphi$, a partir de las muestras $\big\{\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n})\big\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$, tiene un interés puramente teórico ya que es difícil, si no imposible, determinar explícitamente un *frame* $\{S^{\varepsilon}_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ para el que se verifique dicha fórmula. Sin embargo es posible, como veremos a continuación, obtener una aproximación a $f \in V_\varphi$ a partir de las muestras $\big\{\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n})\big\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$, mediante la aplicación del algoritmo *frame* correspondiente a un conveniente *frame* de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Señalemos en primer lugar que $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$ con cotas

$$A := \frac{\alpha_{\mathbf{G}}}{r}\left(1-\sqrt{\frac{r}{\alpha_{\mathbf{G}}}\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j\Gamma_j}\,\right)^2, \quad B := \frac{\beta_{\mathbf{G}}}{r}\left(1+\sqrt{\frac{r}{\beta_{\mathbf{G}}}\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j\Gamma_j}\,\right)^2. \tag{3.34}$$

En efecto, la sucesión $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(0,\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es un *frame* de V_φ de cotas $\alpha_{\mathbf{G}}/r$ y $\beta_{\mathbf{G}}/r$. Por perturbación de este *frame* (véase (3.31) y el Lema 3.4) y utilizando el Teorema 3.7 se sigue el resultado.

Consideramos la isometría canónica,

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{U}: & \ell^2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & L^2(0,1) \\ & \{a_l\}_{l\in\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathcal{U}\{a_l\}_{l\in\mathbb{Z}} := \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l e^{-2\pi i l w} \end{array}$$

Para $f(t) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l\varphi(t-l) \in V_\varphi$ denotamos por $\mathbb{F}$ la sucesión

$$\mathbb{F} := \mathcal{U}^{-1}F = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{T}_\varphi^{-1}f = \{a_l\}_{l\in\mathbb{Z}}\,.$$

Las muestras $\big\{\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n})\big\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n}) &= \big\langle F(\cdot), \overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\big\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \big\langle \mathcal{U}^{-1}F(\cdot), \mathcal{U}^{-1}(\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot})\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \\ &= \big\langle \mathbb{F}, \mathbb{L}_{j,n}\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} \end{aligned}$$

donde para $j = 1,2,\dots,s$ y $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{L}_{j,n} := \mathcal{U}^{-1}\big[\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\big] = \Big\{\overline{(\mathcal{L}_j\varphi)}(rn-l+\varepsilon_{j,n})\Big\}_{l\in\mathbb{Z}},$$

Como $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ es un *frame* de $L^2(0,1)$ y $\mathcal{U}^{-1}$ es un operador unitario, la sucesión $\{\mathbb{L}_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ es un *frame* de $\ell^2(\mathbb{Z})$ con las mismas cotas A y B. El correspondiente algoritmo frame permite aproximar $\mathbb{F}$ (y así $f=\mathcal{T}_\varphi\mathcal{U}\,\mathbb{F}$), a partir de los productos escalares (o muestras generalizadas)

$$\Big\{\langle\mathbb{F},\mathbb{L}_{j,n}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}\Big\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}=\big\{\big(\mathcal{L}_jf\big)(rn+\varepsilon_{j,n})\big\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}\,.$$

En la siguiente proposición se proporciona explícitamente este algoritmo y su tasa de convergencia.

Proposición 3.5 *Para $f\in V_\varphi$ se definen recursivamente las sucesiones*

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0&=\frac{2}{A+B}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}(\mathcal{L}_jf)(rn+\varepsilon_{j,n})\,\mathbb{L}_{j,n}\\ \mathbb{F}_{k+1}&=\mathbb{F}_k+\frac{2}{A+B}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\big[(\mathcal{L}_jf)(rn+\varepsilon_{j,n})-\langle\mathbb{F}_k,\mathbb{L}_{j,n}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}\big]\,\mathbb{L}_{j,n}\quad k\in\mathbb{N}\,,\end{aligned}$$

donde las constantes A y B están definidas por (3.34). *Entonces, para $f_k(t)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}a_l^{(k)}\varphi(t-l)$, $k\in\mathbb{N}$, donde $\mathbb{F}_k=\big\{a_l^{(k)}\big\}_{l\in\mathbb{Z}}$, se tiene*

$$\|f-f_k\|_2\le\sqrt{\frac{\|\Phi_\varphi\|_0}{\|\Phi_\varphi\|_\infty}}\,\gamma^{k+1}\|f\|_2\,,$$

donde

$$\gamma:=\frac{\beta_{\mathbf{G}}-\alpha_{\mathbf{G}}+2\big(\sqrt{r\beta_{\mathbf{G}}}+\sqrt{r\alpha_{\mathbf{G}}}\big)\sqrt{\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j\Gamma_j}}{\beta_{\mathbf{G}}+\alpha_{\mathbf{G}}+2r\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j\Gamma_j+2\big(\sqrt{r\beta_{\mathbf{G}}}-\sqrt{r\alpha_{\mathbf{G}}}\big)\sqrt{\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j\Gamma_j}}\,.$$

Demostración. La aplicación del algoritmo *frame* al *frame* $\{\mathbb{L}_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$ de $\ell^2(\mathbb{Z})$ (Teorema 3.8), da la sucesión $\{\mathbb{F}_k\}_{k=0}^\infty$ definida en la proposición. En efecto, el operador $\mathcal{A}$ de este algoritmo *frame* es

$$\mathcal{A}\,\xi:=\frac{2}{A+B}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\langle\xi,\mathbb{L}_{j,n}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}\mathbb{L}_{j,n}\,,\quad\xi\in\ell^2(\mathbb{Z})\,,$$

y así

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0 := \mathcal{A}\,\mathbb{F} &= \frac{2}{A+B}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\langle \mathbb{F}, \mathbb{L}_{j,n}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}\mathbb{L}_{j,n}\\ &= \frac{2}{A+B}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}(\mathcal{L}_j f)(rn+\varepsilon_{j,n})\mathbb{L}_{j,n}\,,\\ \mathcal{A}\,\mathbb{F}_k &:= \frac{2}{A+B}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}\langle \mathbb{F}_k, \mathbb{L}_{j,n}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}\mathbb{L}_{j,n}\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

La sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dada por $f_k = \mathcal{T}_\varphi \mathcal{U}\,\mathbb{F}_k\,,\ k\in\mathbb{N}$ verifica

$$\begin{aligned}\|f-f_k\|_2 &\le \|\mathcal{T}_\varphi\|\ \|\mathbb{F}-\mathbb{F}_k\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \le \|\mathcal{T}_\varphi\|\,\gamma^{k+1}\,\|\mathbb{F}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}\\ &\le \|\mathcal{T}_\varphi\|\ \|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\|\ \gamma^{k+1}\ \|f\|_2\,,\end{aligned}$$

donde $\gamma := (B-A)/(B+A)$. Teniendo en cuenta que $\|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\|^{-2} = \|\Phi_\varphi\|_0$ y $\|\mathcal{T}_\varphi\|^2 = \|\Phi_\varphi\|_\infty$ se obtiene la proposición. □

Nótese que la proposición anterior proporciona una acotación uniforme del error. En efecto, según el Teorema 1.4,

$$\begin{aligned}\big\|f-f_k\big\|_\infty^2 &\le \frac{\|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\varphi(\cdot-n)|^2\|_\infty}{\|\Phi_\varphi\|_0}\|f-f_k\|_2^2\\ &\le \frac{\|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\varphi(\cdot-n)|^2\|_\infty}{\|\Phi_\varphi\|_\infty}\gamma^{2k+2}\|f\|_2^2\,.\end{aligned}$$

En algunos ejemplos importantes, el valor de $\sum_{j=1}^{s}\Lambda_j\Gamma_j$ se puede calcular explícitamente en función de δ. A continuación, vemos algunos ejemplos para la fórmula de muestreo clásica, i.e., con $s=1$ y muestras de la propia función. En la siguiente sección veremos ejemplos donde las muestras se toman de versiones filtradas de la función.

• **Splines lineales.** Para la recuperación de los *splines* lineales a partir de las muestras $\{f(n+\varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ($\varphi = N_2$, $r=s=1$, $\mathcal{L}_1 f = f$), se tiene, según lo calculado en el primer ejemplo de la Sección 2.3.1, que $\Lambda_1\Gamma_1 = 6\,\delta^2$ y $\alpha_{\mathbf{G}} = \beta_{\mathbf{G}} = 1$. Entonces para $\delta := \sup_{n\in\mathbb{Z}}|\varepsilon_n| < 1/\sqrt{6} \approx 0{,}408$ el algoritmo propuesto converge con una tasa de convergencia menor que

$$\gamma = \frac{2\sqrt{6}\,\delta}{1+6\,\delta^2}\,.$$

Figura 3.4: γ en función de δ en el caso de splines lineales.

Como $\|\Phi_{N_2}\|_0 = 1/3$ y $\|\Phi_{N_2}\|_\infty = 1$, se tiene que la sucesión $\{f_k\}$ calculada mediante este algoritmo verifica

$$\|f - f_k\|_2 \leq \sqrt{3}\,\gamma^{k+1}\|f\|_2 \,.$$

Para una δ pequeña, se alcanza una buena precisión en pocas iteraciones, lo cual es debido a que en este caso el *frame*

$$\{\overline{(Z\mathcal{L}_1\varphi)}(0,w)e^{-2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{e^{-2\pi i(n-1)w}\}_{n\in\mathbb{Z}}\,,$$

es una base ortonormal de $L^2(0,1)$, y por tanto, si la perturbación es pequeña, el *frame* perturbado estará cercano a un *frame* ajustado (para $\delta = 0$ es ajustado y se alcanza pues la solución en un sólo paso).

Nótese que las sucesiones $\mathbb{L}_n = \big\{N_2(n - l + \varepsilon_n)\big\}_{l\in\mathbb{Z}}$ tienen a lo sumo tres elementos no nulos, y por lo tanto el cálculo de los productos escalares $\langle\mathbb{F}_k, \mathbb{L}_n\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}$ implica muy pocas operaciones.

• **Splines cúbicos.** Para la recuperación de los *splines* cúbicos a partir de las muestras $\{f(n+\varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ($\varphi = N_4$, $r = s = 1$, $\mathcal{L}_1 f = f$), se tiene, según lo calculado en el segundo ejemplo del Sección 2.3.1 que

$$\Lambda_1\Gamma_1 = \frac{7\delta^6}{9} - \frac{5\delta^5}{2} + \frac{\delta^4}{6} + 3\delta^3 + \delta^2$$

y

$$\alpha_{\mathbf{G}} = \operatorname*{inf}_{w\in(0,1)} |(ZN_4)(0,w)|^2 = \frac{1}{9}, \quad \beta_{\mathbf{G}} = \sup_{w\in(0,1)} |(ZN_4)(0,w)|^2 = 1\,.$$

Por tanto, si $\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_n| < C \approx 0{,}253$, donde C es el cero del polinomio $7d^6/9 - 5d^5/2 + d^4/6 + 3d^3 + d^2 - 1/9$ en $(0, 1/2)$ el algoritmo converge con una tasa de convergencia

$$\gamma = \frac{4 + 12\sqrt{L}}{5 + 9L + 6\sqrt{L}}\,, \quad L = 7\delta^6/9 - 5\delta^5/2 + \delta^4/6 + 3\delta^3 + \delta^2\,.$$

Figura 3.5: γ en función de δ en el caso de splines cúbicos.

Figura 3.6: γ en función de δ en el caso de splines cuadráticos.

Como $\|\Phi_{N_4}\|_0 = 17/315$ y $\|\Phi_{N_4}\|_\infty = 1$, se tiene que la sucesión $\{f_k\}$ calculada mediante este algoritmo verifica

$$\|f - f_k\|_2 \leq \sqrt{\frac{315}{17}}\,\gamma^{k+1}\|f\|_2\,.$$

• **Splines cuadráticos.** Para la recuperación de los *splines* cuadráticos a partir de las muestras $\{f(n+1/2+\varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ($\varphi = N_3$, $r = s = 1$, $(\mathcal{L}_1 f)(t) = f(t+1/2)$), se tiene, según lo calculado en el tercer ejemplo de la Sección 2.3.1 que

$$\Lambda_1\Gamma_1 = \delta^2 + 3\delta^3 + 2\delta^4$$

y

$$\alpha_{\mathbf{G}} = \operatorname*{ínf}_{w\in(0,1)} |(ZN_3)(1/2,w)|^2 = \frac{1}{4}\,, \quad \beta_{\mathbf{G}} = \sup_{w\in(0,1)} |(ZN_3)(1/2,w)|^2 = 1\,.$$

Por tanto, si $\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}}|\varepsilon_n| < C \approx 0{,}334$, donde C es el cero del polinomio $d^2 + 3d^3 + 2d^4 - 1/4$ en $(0, 1/2)$ el algoritmo converge con una tasa de convergencia

$$\gamma = \frac{3 + 12\sqrt{L}}{5 + 8L + 4\sqrt{L}}\,, \qquad L = \delta^2 + 3\delta^3 + 2\delta^4.$$

Como $\|\Phi_{N_3}\|_0 = 2/15$ y $\|\Phi_{N_3}\|_\infty = 1$, se tiene que el elemento calculado en la iteración k, f_k, verifica

$$\|f - f_k\|_2 \leq \sqrt{\frac{15}{2}}\,\gamma^{k+1}\|f\|_2\,.$$

Error cometido al considerar un número finito de muestras

Analizamos ahora, el error cometido cuando se considera únicamente un número finito de muestras. Para $f \in V_\varphi$ y un conjunto finito de índices $\Omega \subset \mathbb{Z}\times\{1,2,\dots,s\}$, consideramos la sucesión de muestras truncada $\{T\mathcal{L}_j f(nr+\varepsilon_{n,j})\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ donde

$$T\mathcal{L}_j f(nr+\varepsilon_{n,j}) := \begin{cases}\mathcal{L}_j f(nr+\varepsilon_{n,j}), & \text{si}\,(n,j)\in\Omega\\ 0, & \text{si}\,(n,j)\notin\Omega\end{cases}$$

La función que el algoritmo aproxima, a partir del conjunto de muestras truncada, es

$$f_\Omega(t) := \sum_{(n,j)\in\Omega} \big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n})S^\varepsilon_{j,n}(t)\,,$$

donde $S^\varepsilon_{j,n} = \mathcal{T}_\varphi H^\varepsilon_{j,n}$ siendo $\{H^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ el *frame* dual canónico del *frame* $\{\overline{(Z\mathcal{L}_j\varphi)}(\varepsilon_{j,n},\cdot)e^{-2\pi i r n\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$. Dado que $1/A$, donde A está dada por (3.34), es una cota frame superior de $\{H^\varepsilon_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ se tiene

$$\begin{aligned}\|f-f_\Omega\|_2^2 &= \Big\|\sum_{(n,j)\notin\Omega}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n})S^\varepsilon_{j,n}(t)\Big\|_2^2\\ &\leq \|\mathcal{T}_\varphi\|^2\Big\|\sum_{(n,j)\notin\Omega}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n})H^\varepsilon_{j,n}(t)\Big\|_{L^2(0,1)}^2\\ &\leq \frac{\|\Phi\|_\infty}{A}\sum_{(n,j)\notin\Omega}\big|\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn+\varepsilon_{j,n})\big|^2\,,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema A.1. Por tanto, si el conjunto de muestras no considerado, tiene poca energía, la función que el algoritmo aproxima, f_Ω, es una buena aproximación en $L^2(\mathbb{R})$, y por tanto uniforme, de f.

Si el generador φ y las respuestas al impulso de los sistemas $\mathcal{L}_j$ tienen soporte compacto, entonces las sucesiones $\mathbb{L}_{j,n}$ contienen un número finito de elementos no nulos. Así pues los productos $\langle\mathbb{F}_k,\mathbb{L}_{j,n}\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})}$ pueden calcularse con un número finito de productos y sumas. Si además, sólo se considera un número finito de muestras entonces las sucesiones $\mathbb{F}_k$ y las sumas en el cálculo de $\mathbb{F}_{k+1}$, serán finitas. Por tanto el algoritmo en este caso es directamente implementable.

Variantes del algoritmo

En el caso que las sucesiones $\mathbb{L}_{j,n}$ sean infinitas se puede aplicar para el cálculo de una aproximación a $\mathbb{F}$ la técnica de truncamiento descrita y analizada por A. Teolis y J.J. Benedetto [118, Sección 5].

El algoritmo descrito, puede ser mejorado, especialmente cuando la razón B/A es muy grande, con los métodos de aceleración de la convergencia del algoritmo *frame* (adaptaciones del método de Chebyshev y del método del gradiente conjugado) descritos en Gröchenig [62].

Otros algoritmos

Para la recuperación a partir de muestras irregulares de la propia función se han propuesto diferentes algoritmos eficientes (véase por ejemplo [2, 3, 41, 43, 42, 89]). Para garantizar la convergencia de estos algoritmos, que implican *oversampling*, es necesario que los puntos de muestreo $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ verifiquen $\delta = \sup_{n\in\mathbb{Z}}(t_{n+1} - t_n) < D \leq 1$ donde D depende del espacio V_φ. La tasa de convergencia de estos algoritmos es δ.

Cuando $V_\varphi = PW_{1/2}$, $D = 1$. Cuando $V_\varphi = V_{N_4}$, $0{,}936 < D < 0{,}982$. Para espacios generales la densidad D es difícil de determinar. Similares algoritmos se han propuesto también para la recuperación a partir de medias locales en [1, 4, 42, 115].

3.4.3. Ejemplos en espacios de Splines

Finalizamos este capítulo, con dos ejemplos en el espacio de los *splines* cúbicos de $L^2(\mathbb{R})$ con nodos en los enteros, $\mathcal{S}^3 \cap L^2(\mathbb{R})$, que ilustran los resultados obtenidos en las Secciones 3.4 y 3.4.2. Recuérdese que un generador de este espacio es el B-*spline* cúbico,

$$\begin{aligned} N_4(t) =& \frac{t^3}{6}\mathcal{X}_{[0,1)}(t) + \Big(\frac{2}{3} - 2t + 2t^2 - \frac{t^3}{2}\Big)\mathcal{X}_{[1,2)}(t) \\ &+ \Big(-\frac{22}{3} + 10t - 4t^2 + \frac{t^3}{2}\Big)\mathcal{X}_{[2,3)}(t) + \Big(\frac{32}{3} - 8t + 2t^2 - \frac{t^3}{6}\Big)\mathcal{X}_{[3,4)}(t)\,. \end{aligned}$$

• **Muestreo con medias locales.** Para $r = s = 1$ y el sistema

$$(\mathcal{L}_1 f)(t) := \int_{t-a}^{t-a+1} f(x)dx\,, \quad f \in V_{N_4}\,,$$

Figura 3.7: La función $(\mathcal{L}_1 N_4)(t) := \int_{t-1/2}^{t+1/2} N_4(x)dx$.

los Teoremas 3.6 y 3.7, proporcionan resultados de muestreo irregular para el caso en que las muestras disponibles sean las medias

$$(\mathcal{L}_1 f)(n) = \int_{n-a}^{n-a+1} f(x)dx\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Para $a = 0$, se tiene

$$\mathbf{G}(w) = g_1(w) = \sum_{n=0}^{3} (\mathcal{L}_1 N_4)(n) e^{-2\pi niw} = \frac{1 + 11e^{-2\pi iw} + 11e^{-4\pi iw} + e^{-6\pi iw}}{24}$$

Como $\det \mathbf{G} = \mathbf{G}$ se anula para $w = 1/2$, resulta que $\alpha_{\mathbf{G}} = 0$, y no es posible pues aplicar los Teoremas 3.6 y 3.7 en este caso.

Tomemos $a = 1/2$. En la figura 3.7 se puede ver la representación gráfica de la función $\mathcal{L}_1 N_4(t)$ para este caso.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}_1 N_4(t)$ es simétrica respecto a $t = 2$, se obtiene que para $d \in [0, 1/2]$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(\mathcal{L}_1 N_4)(k-d) - (\mathcal{L}_1 N_4)(k)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(\mathcal{L}_1 N_4)(k+d) - (\mathcal{L}_1 N_4)(k)| \\
&= \sum_{k=0}^{4} |(\mathcal{L}_1 N_4)(k+d) - (\mathcal{L}_1 N_4)(k)| = \frac{23d}{24} + \frac{5d^2}{8} - \frac{d^3}{6} - \frac{d^4}{4}\,.
\end{aligned}$$

Así, para $[\alpha_1, \beta_1] = [-\delta, \delta]$, donde $\delta \leq 1/2$, se tiene

$$\Gamma_1 = \frac{23\delta}{24} + \frac{5\delta^2}{8} - \frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^4}{4}\,.$$

Figura 3.8: γ en función de δ en el ejemplo con medias locales.

Usando de nuevo la simetría de $\mathcal{L}_1 N_4(t)$ se obtiene

$$\begin{aligned}\Lambda_1 =& 2 \sup_{d\in[-\delta,\delta]} \big|(\mathcal{L}_1 N_4)(d) - (\mathcal{L}_1 N_4)(0)\big| + 2 \sup_{d\in[-\delta,\delta]} \big|(\mathcal{L}_1 N_4)(1+d) - (\mathcal{L}_1 N_4)(1)\big| \\ &+ \sup_{d\in[-\delta,\delta]} \big|(\mathcal{L}_1 N_4)(2) - (\mathcal{L}_1 N_4)(2+d)\big| \\ =& \, 2\left[\mathcal{L}_1 N_4)(\delta) - (\mathcal{L}_1 N_4)(0)\right] + 2\left[\mathcal{L}_1 N_4)(1+\delta) - (\mathcal{L}_1 N_4)(1)\right] \\ &+ (\mathcal{L}_1 N_4)(2) - (\mathcal{L}_1 N_4)(2+\delta) \\ =& \frac{5\delta^2}{4} - \frac{\delta^3}{6} - \frac{\delta^4}{2} + \frac{23\delta}{24}\,.\end{aligned}$$

Entonces para cualquier sucesión de perturbaciones $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset [-\delta, \delta]$, $\delta \leq 1$, se tiene que

$$\|D_\varepsilon\|^2 \leq \Lambda_1 \Gamma_1 = \frac{529\delta^2}{576} + \frac{115\delta^3}{64} + \frac{133\delta^4}{288} - \frac{33\delta^5}{32} - \frac{43\delta^6}{72} + \frac{\delta^7}{8} + \frac{\delta^8}{8}\,.$$

Además

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathbf{G}} &= \operatorname*{ínf}_{w\in(0,1)} |g_1(w)|^2 \\ &= \operatorname*{ínf}_{w\in(0,1)} \left|\frac{1 + 76e^{-2\pi iw} + 230e^{-4\pi iw} + 76e^{-6\pi inw} + e^{-8\pi inw}}{384}\right|^2 = \frac{25}{576}\,,\end{aligned}$$

y $\beta_{\mathbf{G}} = \sup_{w\in(0,1)} |g_1(w)|^2 = 1\,.$

Por tanto, según el Teorema 3.6, para las sucesiones de perturbaciones verificando

$$\sup_n |\varepsilon_n| < C \approx 0{,}185\,,$$

donde C es la raíz de $529\delta^2/576 + 115\delta^3/64 + 133\delta^4/288 - 33\delta^5/32 - 43\delta^6/72 + \delta^7/8 + \delta^8/8 - 25/576 = 0$ en $(0, 1/2)$, existe una base de Riesz $\{S_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de

Figura 3.9: *Splines* N_4 y N_4'

V_{N_4} verificando la siguiente fórmula de muestreo: Para $f \in V_{N_4}$ se tiene que

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-1/2+\varepsilon_n}^{n+1/2+\varepsilon_n} f(x)dx \; S_n^{\varepsilon}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

La tasa de convergencia del algoritmo *frame*, dado en la Proposición 3.5, es menor que

$$\gamma := \frac{29(19+48\sqrt{L})}{601+1152L+912\sqrt{L}}\,,$$

siendo $L := \Lambda_1\Gamma_1$ (véase figura 3.8). Como $\|\Phi_{N_4}\|_0 = 17/315$ y $\|\Phi_{N_4}\|_\infty = 1$, se tiene que la sucesión $\{f_k\}$ calculada mediante el algoritmo verifica

$$\|f - f_k\|_2 \le \sqrt{\frac{315}{17}}\,\gamma^{k+1}\|f\|_2\,.$$

• **Muestreo con derivadas.** Para $r = s = 2$ y los canales

$$(\mathcal{L}_1 f)(t) := f(t+a)\,, \quad (\mathcal{L}_2 f)(t) := f'(t+a)\,,$$

los Teoremas 3.6 y 3.7, proporcionan resultados de muestreo irregular para el caso de que las muestras disponibles sean

$$\{f(2n+a+\varepsilon_{1,n})\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f'(2n+a+\varepsilon_{2,n})\}_{n\in\mathbb{Z}}\,.$$

Para $a = 1/2$ se tiene que

$$\begin{aligned} g_1(w) &= (ZN_4)(1/2,w) = \frac{1}{48} + \frac{23}{48}e^{-2\pi i w} + \frac{23}{48}e^{-4\pi i w} + \frac{1}{48}e^{-6\pi i w} \\ g_2(w) &= (ZN_4')(1/2,w) = \frac{1}{8} + \frac{5}{8}e^{-2\pi i w} - \frac{5}{8}e^{-4\pi i w} - \frac{1}{8}e^{-6\pi i w}\,. \end{aligned}$$

Los autovalores de la matriz $\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)$ son

$$1 + \frac{157}{288}\,\mathrm{sen}^2\, 2\pi w \pm \frac{7}{288}\sqrt{576\,\mathrm{sen}^2\, 2\pi w + 265\,\mathrm{sen}^4\, 2\pi w}\,.$$

El mínimo valor del menor autovalor y el máximo valor del mayor autovalor se alcanzan en $w = (1/2\pi)\arctan\sqrt{392/403}$ y $1/4$ y valen respectivamente

$$\alpha_{\mathbf{G}} = \frac{216}{265} \quad \text{y} \quad \beta_{\mathbf{G}} = \frac{9}{4}\,.$$

En la figura 3.9 se puede ver la representación gráfica del B-*spline* $N_4(t)$ y de su derivada que facilitan el seguimiento de los cálculos de las constantes Γ_1, Γ_2, Λ_1 y Λ_2, desarrollados a continuación.

Para $d \in [0, 1/2]$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{3} |N_4(k+1/2-d) - N_4(k)| &= \sum_{k=0}^{3} |N_4(k+1/2+d) - N_4(k)| \\ &= \frac{3}{2}d - \frac{2}{3}d^3\,,\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la simetría de N_4. Teniendo en cuenta que si $d \in (0, 1/3)$ entonces $N'(5/2) > N'(5/2+d)$, para $d \in [0, 1/3)$, se obtiene

$$\sum_{k=0}^{3} |N_4'(k+1/2-d) - N_4'(k)| = \sum_{k=0}^{3} |N_4'(k+1/2+d) - N_4'(k)| = 2d\,,$$

donde la primera igualdad es consecuencia de la simetría de N_4'. Entonces, considerando la notación del Teorema 3.7 $[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_2, \beta_2] = [-\delta, \delta]$ con $0 < \delta < 1/3$ obtenemos que

$$\Gamma_1 = (3/2)\delta - (2/3)\delta^3 \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = 2\delta\,.$$

Teniendo en cuenta la simetría de N_4 y que

$$\begin{aligned}N_4(1/2+\delta) - N_4(1/2) &> N_4(1/2) - N_4(1/2-\delta), \\ N_4(5/2) - N_4(5/2+d) &> N_4(5/2-d) - N_4(5/2)\,,\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}&\sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4(3/2+\delta) - N_4(3/2)| + \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4(7/2+\delta) - N_4(7/2)| \\ &= \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4(1/2+\delta) - N_4(1/2)| + \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4(5/2+\delta) - N_4(5/2)| \\ &= \frac{3\delta}{4} + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3}\,.\end{aligned}$$

Figura 3.10: γ en función de $\delta = \sup |\varepsilon_{j,n}|$ en el caso de muestreo con derivadas.

Teniendo en cuenta la simetría de N_4' y que

$$N_4'(1/2+\delta) - N_4'(1/2) > N_4'(1/2) - N_4'(1/2-\delta)\,,$$
$$\sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4'(5/2+d) - N_4(5/2)| = N_4'(5/2-\delta) - N_4(5/2),$$

se obtiene

$$\begin{aligned}&\sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4'(3/2+\delta) - N_4'(3/2)| + \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4'(7/2+\delta) - N_4'(7/2)|\\ &= \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4'(1/2+\delta) - N_4'(1/2)| + \sup_{d\in[-\delta,\delta]} |N_4'(5/2+\delta) - N_4'(5/2)|\\ &= \delta + 2\delta^2\,.\end{aligned}$$

Por tanto $\Lambda_1 = (3/4)\,\delta + (1/2)\,\delta^2 - (1/3)\,\delta^3$ y $\Lambda_2 = \delta + 2\delta^2$.

Aplicando el Teorema 3.7, para $\varepsilon = \{\varepsilon_{j,n}\}_{j=1,2,\,n\in\mathbb{Z}} \subset [-\delta,\delta]$, donde $\delta < 1/3$, se verifica

$$\|D_\varepsilon\|^2 \le \Lambda_1\Gamma_1 + \Lambda_2\Gamma_2 = \frac{25\,\delta^2}{8} + \frac{19\,\delta^3}{4} - \delta^4 - \frac{\delta^5}{3} + \frac{2\,\delta^6}{9}\,,$$

Por tanto, según el Teorema 3.6, si

$$\delta = \sup_{j=1,2,\,n\in\mathbb{Z}} |\varepsilon_{j,n}| < C \approx 0{,}3022\,,$$

donde C es la raíz en $(0,1/3)$ de $25\delta^2/8+19\delta^3/4-\delta^4-\delta^5/3+2\delta^6/9-108/265 = 0$, entonces existe una base de Riesz $\{S_{1,n}^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{Z}} \cap \{S_{2,n}^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_{N_4} tal que, para cada $f \in V_{N_4}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[f(2n+1/2+\varepsilon_{1,n})S_{1,n}^\varepsilon(t) + f'(2n+1/2+\varepsilon_{2,n})S_{2,n}^\varepsilon(t)\right], \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

donde la convergencia de la serie es en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$, absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$.

El algoritmo dado en la Proposición 3.5 tiene tasa de convergencia menor que

$$\gamma = \frac{1521 + (3180\sqrt{2} + 96\sqrt{795})\sqrt{L}}{3249 + 4240L + (3180\sqrt{2} - 96\sqrt{795})\sqrt{L}}\,,$$

donde $L = \Lambda_1\Gamma_1 + \Lambda_2\Gamma_2 = 25\,\delta^2/8 + 19\,\delta^3/4 - \delta^4 - \delta^5/3 + 2\,\delta^6/9$ y $\delta := \sup_{n\in\mathbb{Z},j=1,2}|\varepsilon_{j,n}|$. En la figura 3.10 se representa esta tasa en función del supremo de perturbaciones δ. Como en el ejemplo anterior se tiene que la sucesión de aproximantes $\{f_k\}$ calculada mediante el algoritmo *frame* verifica

$$\|f - f_k\|_2 \leq \sqrt{\frac{315}{17}}\,\gamma^{k+1}\|f\|_2\,.$$

Capítulo 4

Errores de truncamiento, amplitud y aliasing

En la aplicación práctica de las fórmulas de muestreo se presentan diversos errores. Este capítulo está dedicado al estudio de los errores que pueden aparecer en la aplicación de las fórmulas de muestreo de los Capítulos 2 y 3.

En primer lugar, no es posible en la práctica tomar infinitas muestras. Así, salvo que las funciones de reconstrucción tengan soporte compacto, aparece un error de truncamiento. En la Sección 4.1 se estudia este error para la fórmula de muestreo generalizado en un espacio invariante por traslación V_φ. Se presta especial atención al caso en que el generador del espacio φ tenga soporte compacto, demostrándose que en este caso el desarrollo muestral converge con velocidad exponencial.

En segundo lugar, la perturbación de las muestras, debida a la imprecisión de los instrumentos de medida y al redondeo a un número finito de dígitos, produce el denominado error de amplitud. En la Sección 4.2 se obtiene una estimación de este error. Esta estimación muestra como el oversampling considerado en el capítulo anterior mejora el comportamiento de este error.

En tercer lugar, si la fórmula de muestreo válida para las funciones de un espacio V_φ, se aplica a una función de $L^2(\mathbb{R})$ que no pertenece al espacio V_φ aparece el denominado error de aliasing. En la Sección 4.3 se obtienen acotaciones de la norma de la energía y uniforme del error de aliasing cuando la función a la que se aplica la fórmula de muestreo pertenece al subespacio V_1 o al subespacio V_2 de un análisis multirresolución con función de escala φ.

A menudo, los sistemas $\mathcal{L}_j$ con los que se filtra la señal antes de ser muestreada, dependen de algunos parámetros que pueden fijarse antes de realizar el muestreo. Por ejemplo, suele ser posible elegir el *shift* de muestreo. Ilustraremos con algunos ejemplos, cómo las estimaciones obtenidas en este capítulo proporcionan criterios para la elección del valor de estos parámetros.

4.1. Error de truncamiento

Si en la aplicación de la fórmula de muestreo generalizado (véase Teorema 3.4), para $f \in V_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big(\mathcal{L}_j f\big)(sn)\ S_j(t - sn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{4.1}$$

sólo se considera un número finito de términos, se comete un error de truncamiento

$$E_N f(t) := f(t) - \sum_{|n|<N} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(sn) S_j(t - sn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Para la fórmula de Shannon este error ha sido muy estudiado en la literatura matemática. En [80] se puede encontrar una recopilación de los principales resultados en esta dirección. Es destacable una cota debida a Beutler [19] que muestra que, bajo ciertas condiciones débiles se tiene que, $E_N f(t) = O(1/N)$ cuando $N \mapsto \infty$ uniformemente en $t \in \mathbb{R}$ (véase también [81, 87]).

Atreas y Karanikas [8, 9] estudiaron este error para la fórmula de muestreo regular en espacios invariantes por traslación ($s = 1$ y $\mathcal{L}_1 f(t) = f(t + a)$), cuando el generador verifica $\varphi(t) = O(|t|^{-p})$, para algún $p \geq 1$. Demostraron que en este caso $E_N f(t) = O(N^{-p+1/2})$ cuando $N \mapsto \infty$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}$.

En esta sección, estudiamos el error de truncamiento, considerando el caso generalizado y prestando especial atención al caso en que el generador tiene soporte compacto. En este caso, frecuente en las aplicaciones prácticas, se puede decir mucho más acerca del error de truncamiento. Concretamente, $E_N f(t) = o(N^p \rho^{sN})$ cuando $N \to \infty$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}$, donde la tasa $\rho \in (0, 1)$ y el exponente $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dependen del generador y de los sistemas.

Algunos de los resultados obtenidos son válidos, con ligeras modificaciones, para las fórmulas de muestreo generalizado con posible *oversampling*, es decir cuando se consideran las muestras $\{\mathcal{L}_j f(rn)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ con $s > r$ (véase Teorema 3.2). Limitamos la exposición por motivos de simplicidad al caso $r = s$. Por otra parte, utilizando oversampling es posible, en algunos casos, encontrar una fórmula de muestreo cuyas funciones de reconstrucción tienen soporte compacto. En este caso tiene poco interés el estudio del error de truncamiento (véase Sección 3.3.4).

En ocasiones los sistemas $\mathcal{L}_j$ dependen de uno o varios parámetros que pueden fijarse antes de realizar el muestreo, un criterio para elegir el valor de estos parámetros, con el fin de disminuir los errores de truncamiento, es tomar el valor de los parámetros cuya correspondiente tasa ρ, en la estimación $E_N f(t) = o(N^p \rho^{sN})$, sea mínima. Ilustraremos esta optimización con algunos ejemplos.

Suponemos las mismas hipótesis y utilizamos la misma notación que en el Capítulo 3. Suponemos además que

$$g_j(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j\varphi)(n) e^{-2\pi i n w} \in L^\infty(0,1) \quad \text{y} \quad \alpha_{\mathbf{G}} > 0\,.$$

Así, se verifica la fórmula de muestreo generalizado (4.1) en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$ y uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo $S_j = s\mathcal{T}_\varphi a_j$, donde $a_j(w)$ es el j-ésimo elemento de la primera fila de $\mathbf{G}^{-1}(w)$ (Teorema 3.4). Además, la sucesión de funciones de reconstrucción $\{S_j(t-sn)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,\cdots,s}$, forman una base de Riesz de V_φ.

4.1.1. Cotas del error de truncamiento

Obtenemos en este apartado cotas del error cometido al truncar la serie en la fórmula de muestreo (4.1). Para cada $f \in V_\varphi$ y $N \in \mathbb{N}$ el error de truncamiento viene definido por

$$\begin{aligned} E_N f(t) &:= f(t) - \sum_{|n|<N} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(sn) S_j(t-sn) \\ &= \sum_{|n|\geq N} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(sn) S_j(t-sn), \quad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz proporciona una acotación de este error

$$|E_N f(t)|^2 \leq \sum_{|n|\geq N} \sum_{j=1}^{s} |(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2 \sum_{|n|\geq N} \sum_{j=1}^{s} |S_j(t-sn)|^2\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.2}$$

Como $\{(\mathcal{L}_j f)(sn)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$ son los coeficientes de f en la base de Riesz $\{S_j(t-sn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$ de V_φ, el factor $\sum_{|n|\geq N}\sum_{j=1}^{s} |(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2$ en (4.2) tiende a 0, cuando $N\to\infty$, pero sin un conocimiento añadido de la función $f \in V_\varphi$, nada más se puede decir acerca de su rapidez de convergencia. Sin embargo, si conocemos una estimación de $\|f\|_2^2$ podemos obtener una cota para este factor utilizando las muestras conocidas, $\{(\mathcal{L}_j f)(sn)\}_{|n|<N, j=1,2,\ldots,s}$.

En efecto, a partir del desarrollo en base de Riesz (4.1) y utilizando el Teorema A.2 se tiene

$$\sum_{|n|\geq N}\sum_{j=1}^{s}|(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2 \leq \frac{1}{A}\|f\|_2^2 - \sum_{|n|<N}\sum_{j=1}^{s}|(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2\,, \tag{4.3}$$

donde A es una cota inferior de la base de Riesz $\{S_j(t-sn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,\cdots,s}$. Véase [58, 59, 122] y la Secciones 2.2.3 y 3.3.2 para el cálculo de la cotas óptimas de Riesz de $\{S_j(t-sn)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\cdots,s}$. Bajo suposiciones extra sobre la función f se pueden obtener resultados interesantes. Por ejemplo, en Sun y Zhou [116] se obtiene una acotación de este factor para el caso en que las muestras son medias locales y se satisface que $f' \in L^2(\mathbb{R})$. En Jagerman [75] se puede encontrar la siguiente acotación: Si $f \in PW_{1/2}$ y $t^k f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{|n|\geq N}|f(n)|^2 \leq \frac{2\|t^k f(t)\|_2^2}{(1-4^{-k})N^{2k}}\,.$$

El factor $\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|S_j(t-sn)|^2$, en la desigualdad (4.2) es el que proporciona información sobre el error de truncamiento sin un conocimiento previo de la función que se pretende recuperar. La siguiente proposición permite obtener, si las funciones de reconstrucción S_j tienen ciertas propiedades de decrecimiento, una acotación de este factor.

Proposición 4.1 *Sea S una función compleja de variable real. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) Si $|S(t)| \leq L\,\mu^{|t|}$, *para* $|t|\geq b$, *donde* $\mu\in(0,1)$ *y* $L>0$, *entonces*

$$\sum_{|n|\geq N}|S(t-sn)|^2 \leq \frac{2L^2\mu^{-2|t|}}{1-\mu^{2s}}\mu^{2sN}\,, \qquad |t|\leq sN-b\,.$$

(ii) Si $|S(t)| \leq L\,|t|^{-\mu}$, *para* $|t|\geq b$, *donde* $\mu>1/2$, $b>s$ *y* $L>0$, *entonces*

$$\sum_{|n|\geq N}|S(t-sn)|^2 \leq \frac{2L^2}{s(2\mu-1)(sN-s-|t|)^{2\mu-1}}\,, \quad |t|\leq sN-b\,.$$

Demostración. Nótese que si $|t|\leq sN-b$ y $|n|\geq N$ entonces $|t-sn|\geq b$. Por tanto para $|t|\leq sN-b$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\geq N}|S(t-sn)|^2 &\leq L^2\sum_{|n|\geq N}\mu^{2|t-sn|} \leq 2L^2\mu^{-2|t|}\sum_{n=N}^{\infty}\mu^{2sn}\\ &= \frac{2L^2\mu^{-2|t|}}{1-\mu^{2s}}\mu^{2sN}\end{aligned}$$

utilizando las hipótesis de (i). Si se utilizan las hipótesis de (ii) se verifica

$$\sum_{|n|\geq N} |S(t-sn)|^2 \leq L^2 \sum_{|n|\geq N} \frac{1}{(|sn|-|t|)^{2\mu}} \leq \frac{2L^2}{s} \int_{sN-s-|t|}^{\infty} \frac{dx}{x^{2\mu}}$$
$$= \frac{2L^2}{s(2\mu-1)(sN-s-|t|)^{2\mu-1}}\,,$$

para $|t| \leq sN - b$. □

El uso de esta proposición, permite obtener acotaciones para el error de truncamiento en algunos casos particulares de la fórmula de muestreo (4.1).

• **Fórmula de Shannon.** Consideremos la formula de muestreo: Para $f \in PW_{1/2}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\,\mathrm{senc}(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Como $\{\mathrm{senc}(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $PW_{1/2}$, entonces sus cotas óptimas de Riesz coinciden y valen 1. Además

$$|\,\mathrm{senc}(t)| = \left|\frac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t}\right| \leq \frac{1}{\pi|t|}\,, \quad |t| > 0\,.$$

Entonces, aplicando la Proposición 4.1, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.3) se obtiene que para $f \in PW_{1/2}$,

$$|E_N f(t)|^2 \leq \frac{2}{\pi^2}\Big(\|f\|_2^2 - \sum_{|n|<N} |f(n)|^2\Big)\frac{1}{N-1-|t|}\,, \quad |t| \leq N\,.$$

• **Fórmula de muestreo para los splines cúbicos.** Consideremos la fórmula de muestreo (véase Sección 2.2.4): Para $f \in V_{N_4}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) L_4(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $L_4(t) = \sqrt{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n(2-\sqrt{3})^{|n|}N_4(t-n+2)$ es el *spline* cardinal fundamental cúbico.

Teniendo en cuenta que el soporte de N_4 es $[0,4]$ y que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} N_4(t+n) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, se obtiene

$$|L_4(t)| \leq \sqrt{3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2-\sqrt{3}\,)^{|t|-2}N_4(x-n+2) \leq \sqrt{3}\,(2-\sqrt{3}\,)^{|t|-2} \quad |t| > 2\,.$$

Aplicando la Proposición 4.1 se obtiene que

$$\sum_{|n|\geq N} |L_4(t-n)|^2 \leq K(2-\sqrt{3}\,)^{2(N-|t|-2)}\,, \quad |t|<N-2\,.$$

donde $K := 6/(1-[2-\sqrt{3}]^2) \approx 6{,}46$. La cota inferior de Riesz óptima de $\{L_4(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es 17/35 (Sección 2.2.4). Por tanto,

$$|E_N f(t)|^2 \leq K\left(\frac{35}{17}\|f\|_2^2 - \sum_{|n|<N} |f(n)|^2\right)(2-\sqrt{3}\,)^{2(N-|t|-2)},\ \ |t|<N-2\,.$$

• **Una función de escala cardinal.** Sea φ la función de escala cardinal

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen}\pi(1-c)t + \operatorname{sen}\pi(1+c)t}{2\pi t(1+2ct)}\,,$$

donde $0<c<1/3$ (véase Sección 2.2.4). En V_φ se verifica la fórmula de muestreo: Para $f\in V_\varphi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\varphi(t-n)\,, \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

Se comprueba fácilmente que

$$|\varphi(t)| \leq \frac{2}{3\,c\,t^2}, \quad |t|>\frac{2}{c}\,.$$

Por tanto, para $f\in V_\varphi$,

$$|E_N f(t)|^2 \leq \big(\|f\|^2 - \sum_{|n|<N} |f(n)|^2\big)\frac{8}{27c^2(N-1-|t|)^3}\,, \quad |t|<N-2/c\,.$$

Nótese que esta acotación es mejor que en el ejemplo de Shannon.

• **Fórmula de Jagerman y Fogel.** Consideremos la fórmula de muestreo con derivadas en $PW_{1/2}$: Para $f\in PW_{1/2}$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[f(2n)S_1(t-2n) + f'(2n)S_2(t-2n)\big]\,, \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

donde $S_1(t) = \operatorname{senc}^2(t/2)$ y $S_2(t) = t\operatorname{senc}^2(t/2)$ (véase Sección 3.3.3). Esta fórmula es la correspondiente al generador $\varphi = \operatorname{senc}$ y los sistemas $\mathcal{L}_1 f = f$ y $\mathcal{L}_2 f = f'$ (Sección 3.3.3). Para $|t|>0$, se tiene

$$|S_1(t)| \leq \frac{4}{\pi^2 t^2} \quad \text{y} \quad |S_2(t)| \leq \frac{4}{\pi^2|t|}\,.$$

Entonces, aplicando la Proposición 4.1 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que para $f \in PW_{1/2}$, y $|t| < 2N$,

$$|E_N f(t)|^2 \le \frac{2}{\pi^4}\Big(\frac{1}{3(N-1-|t/2|)^3}+\frac{4}{N-1-|t/2|}\Big)\sum_{|n|\ge N}|f(2n)|^2+|f'(2n)|^2\,.$$

La sucesión formada por los trasladados del generador $\{\mathrm{senc}(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $V_{\mathrm{senc}} = PW_{1/2}$, y por tanto las cotas óptimas de la base de Riesz formada por las funciones de reconstrucción $\{S_j(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\dots,s}$ son $2/\beta_{\mathbf{G}}$ y $2/\alpha_{\mathbf{G}}$ (véase Sección 3.3.2). La desigualdad (4.3) para este caso se escribe

$$\sum_{|n|\ge N}\big[|f(2n)|^2+|f'(2n)|^2\big] \le \frac{\beta_{\mathbf{G}}}{2}\|f\|_2^2 - \sum_{|n|<N}\big[|f(2n)|^2+|f'(2n)|^2\big]\,.$$

Calculemos por último el valor explícito de las constantes $\alpha_{\mathbf{G}}$ y $\beta_{\mathbf{G}}$. Se tiene que

$$g_1(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{senc}(n)e^{-2\pi i n w} = 1\,,\quad w\in\mathbb{R}\,.$$

Aplicando la fórmula sumatoria de Poisson, se obtiene

$$\begin{aligned} g_2(w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{senc}'(n)e^{-2\pi i n w} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\mathrm{senc}'}(w+n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}2\pi i w\mathcal{X}_{(-1/2,1/2)}(w+n) = 2\pi i w\,,\quad |w|\le 1/2\,. \end{aligned}$$

Entonces, para $w \in (-1/2, 1/2)$,

$$\mathbf{G}(w) := \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2\pi i w & 2\pi i[w-\mathrm{sg}(w)/2]\end{pmatrix}\,.$$

Cuando $w \in (0, 1/2)$, los autovalores de la matriz $\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)$ son

$$\begin{aligned} &\frac{\pi^2}{2}+4\pi^2w^2-2\pi^2w+1\\ &\pm\frac{\sqrt{\pi^4+4+32\pi^2w^2(\pi^2+1)+64\pi^4w^4+8\pi^4w(-1-2\pi)-64\pi^4w^3}}{2} \end{aligned}$$

El máximo del mayor autovalor y el mínimo del menor autovalor de la matriz $\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)$ en el intervalo $(0, 1/2)$, se alcanzan ambos en $w = 0$ y valen

$1+\pi^2/2+\sqrt{\pi^4+4}/2$ y $1+\pi^2/2-\sqrt{\pi^4+4}/2$ respectivamente. Análogamente, en el intervalo $(-1/2,0)$ se obtiene el mismo máximo y mínimo. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{\mathbf{G}}}{2} &= \frac{1}{2}\operatorname*{ess\,inf}_{w\in[-1/2,1/2]}\lambda_{\text{mín}}\big[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)\big] = \frac{1}{2}\lambda_{\text{mín}}\big[\mathbf{G}^*(0)\mathbf{G}(0)\big] \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\pi^2-\sqrt{\pi^4+4}}{4} \approx 0{,}45\,, \\
\frac{\beta_{\mathbf{G}}}{2} &= \frac{1}{2}\operatorname*{ess\,sup}_{w\in[-1/2,1/2]}\lambda_{\text{máx}}\big[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)\big] = \frac{1}{2}\lambda_{\text{máx}}\big[\mathbf{G}^*(0)\mathbf{G}(0)\big] \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\pi^2+\sqrt{\pi^4+4}}{4} \approx 5{,}48\,.
\end{aligned}$$

Una deducción diferente del valor de la cota $\beta_{\mathbf{G}}$ se puede encontrar en [58].

• **Muestreo con derivadas para los splines cúbicos.** En el espacio V_{N_4} se verifica la fórmula de muestreo: Para cada $f\in V_{N_4}$,

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big[f(2n+1/2)S_1(t-2n)+f'(2n+1/2)S_2(t-2n)\big]\,,\quad t\in\mathbb{R}\,,$$

donde $S_1(t)=\dfrac{1}{\sqrt{22}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}b^{|n+1|}l_1(t-2n)$, $S_2(t)=\dfrac{1}{6\sqrt{22}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}b^{|n+1|}l_2(t-2n)$, siendo $b:=\dfrac{19-4\sqrt{22}}{3}$, y

$$\begin{aligned}
l_1(t) &= N_4(t+1)-5N_4(t)-5N_4(t-1)+N_4(t-2)\,,\\
l_2(t) &= N_4(t+1)-23N_4(t)+23N_4(t-1)-N_4(t-2)
\end{aligned}$$

(véase Sección 3.3.3). Teniendo en cuenta que supp $l_1=[-1,6]$, y que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|l_1(t-2n)|\le\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big[N_4(t+n)+5N_4(t+n)\big]=6\,,$$

se obtiene que

$$|S_1(t)|\le\frac{1}{\sqrt{22}}\,b^{|t/2|-7/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|l_1(t-2n)|\le\frac{6}{\sqrt{22}}b^{|t/2|-2}\,,\quad |t|>4\,.$$

Aplicando la Proposición 4.1 se tiene

$$\sum_{|n|>N}|S_1(t-n)|^2\le\frac{36\,b^{2N-b-4}}{11(1-b^2)}\,,\quad |t|<2N-4\,.$$

Análogamente se obtiene

$$\sum_{|n|>N} |S_2(t-n)|^2 \leq \frac{16\, b^{2N-b-4}}{11(1-b^2)}\,, \quad |t| < 2N-4\,.$$

Por otra parte, utilizando que $\beta_{\mathbf{G}} = 9/4$ (Sección 3.4.3) y $\|\Phi_{N_4}\|_0 = 17/315$ (Sección 1.6.2) se obtiene que (véase Sección 3.3.2)

$$A := \frac{2\|\Phi_{N_4}\|_0}{\beta_{\mathbf{G}}} = \frac{136}{2835}\,,$$

es una cota inferior para la base de Riesz $\{S_j(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2}$.

Por tanto, para $f \in V_{N_4}$,

$$|E_N f(t))|^2 \leq K\Big(\frac{1}{A}\|f\|_2^2 - \sum_{|n|<N}\sum_{j=1}^{s}|(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2\Big)\, b^{2N-|t|-4}\,, \quad |t| < 2N-4\,,$$

donde $K := 52/(11-11b^2)$ y $b := (19-4\sqrt{22})/3 \approx 0{,}079$.

4.1.2. Rapidez de convergencia

La Proposición 4.1 informa sobre la rapidez de convergencia de la serie muestral cuando las funciones de reconstrucción, S_j, son conocidas. Sin embargo, para escoger parámetros de los sistemas $\mathcal{L}_j$ optimizando la rapidez de convergencia, es necesario obtener la información sobre esta rapidez de una forma más directa, que no implique el conocimiento previo de las funciones de reconstrucción S_j.

Generador de soporte compacto

Estudiamos primero el caso en que el generador φ y las respuestas al impulso de los sistemas $\mathcal{L}_j$ tienen soporte compacto, lo cual suponemos en este apartado. Para $j = 1, 2, \ldots, s$, denotamos

$$\mathsf{g}_j(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}_j\varphi(n) z^n \qquad \text{y} \qquad \mathsf{G}(z) := \big[\mathsf{g}_j(e^{-2\pi i(k-1)/s}\, z)\big]_{j,k=1,2,\ldots,s}\,.$$

Nótese que $g_j(w) = \mathsf{g}_j(e^{-2\pi i w})$, $\mathbf{G}(w) = \mathsf{G}(e^{-2\pi i w})$ y en consecuencia $a_j(w) = \mathsf{a}_j(e^{-2\pi i w})$, donde $a_j(w)$ y $\mathsf{a}_j(z)$ son el j-ésimo elemento de la primera fila de $\mathbf{G}^{-1}(w)$ y de $\mathsf{G}^{-1}(z)$ respectivamente.

Como el generador φ y las respuestas al impulso de los sistemas $\mathcal{L}_j$ tienen soporte compacto, sólo un número finito de elementos de la sucesión $\{\mathcal{L}_j\varphi)(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son no nulos. Entonces las funciones

$$\mathsf{g}_j(e^{-2\pi i(k-1)/s}\, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j\varphi)(n) e^{-2\pi i n(k-1)/s} z^n\,, \quad j,k = 1,2,\ldots,s$$

y $\det \mathsf{G}(z)$ son polinomios de Laurent. En este caso, la hipótesis $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$ implica, por continuidad, que $\det \mathbf{G}(w) \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{R}$. Por tanto $\det \mathsf{G}(z)$ no se anula sobre la circunferencia unidad.

Los siguientes resultados muestran que la rapidez de convergencia de la serie de muestreo depende de la distancia de los ceros del polinomio de Laurent $\det \mathsf{G}(z)$ a la circunferencia unidad.

La situación más favorable se presenta cuando $\det \mathsf{G}(z)$ no tiene ceros en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. En la siguiente proposición se prueba que en este caso las funciones de reconstrucción tienen soporte compacto. Así, tomando un número suficiente de términos, el error de truncamiento es nulo. Véase [36] y la Sección 3.3.4 para ejemplos de fórmulas de muestreo generalizado con esta cualidad.

Proposición 4.2 *Supongamos que el generador φ y las respuestas impulsionales de los sistemas $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2, \cdots, s$ tienen soporte compacto. Si $\det \mathsf{G}(z)$ no tiene ceros en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces las funciones de reconstrucción S_j, $j = 1, 2, \ldots, s$, tienen soporte compacto.*

Demostración. Las funciones de reconstrucción $S_j(t)$ se pueden calcular a partir del desarrollo de Laurent de $\mathsf{a}_j(z)$ en una corona conteniendo a la circunferencia unidad

$$\mathsf{a}_j(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{j,n} z^n \,.$$

En efecto, para $j = 1, 2, \ldots, s$,

$$\begin{aligned} S_j(t) &= s[\mathcal{T}_\varphi a_j](t) = s[\mathcal{T}_\varphi \mathsf{a}_j(e^{-2\pi i\cdot})](t) = s\Big[\mathcal{T}_\varphi \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{j,n} e^{-2\pi n i\cdot}\Big](t) \\ &= s \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{j,n} (\mathcal{T}_\varphi e^{-2\pi i n\cdot})(t) = s \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{j,n} \varphi(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

supuesto $\{c_{j,n}\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Si el polinomio de Laurent $\det \mathsf{G}(z)$ no tiene ceros en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces necesariamente es de la forma $\det \mathsf{G}(z) = Kz^n$ para alguna constante $K \in \mathbb{C}$ y algún $n \in \mathbb{Z}$. Así, los términos de la matriz $\mathsf{G}^{-1}(z)$, y en particular las funciones $\mathsf{a}_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, son polinomios de Laurent. En consecuencia sólo un número finito de los coeficientes $\big\{c_{j,n}\big\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son no nulos. Como el generador φ tiene soporte compacto, las funciones de reconstrucción S_j, $j = 1, 2 \ldots, s$, tienen soporte compacto. □

Cuando el polinomio de Laurent $\det \mathsf{G}(z)$ tiene ceros en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, consideramos el menor número $\rho \in (0, 1)$ tal que $\det \mathsf{G}(z)$ no se anula en la corona

$$C_\rho := \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < 1/\rho\}\,.$$

El siguiente teorema proporciona una acotación del error de truncamiento cuando los ceros de $\det \mathsf{G}(z)$ en la frontera de C_ρ son simples.

Teorema 4.1 *Supongamos que el generador φ y las respuestas impulsionales de los sistemas $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2, \cdots, s$ tienen soporte compacto con* $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [c, d]$. *Si* $\det \mathsf{G}(z)$ *no se anula en la corona C_ρ y no tiene ceros múltiples en la frontera de C_ρ, entonces para toda $f \in V_\varphi$,*

$$|E_N f(t)| \leq K\, h_f(N)\, \rho^{-|t|}\, \rho^{sN}, \qquad |t| \leq sN - \text{máx}\{|c|, |d|\},$$

donde $h_f^2(N) := \sum_{|n|\geq N} \sum_{j=1}^{s} |(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2$ *y la constante K viene dada por*

$$K := \frac{s\|\varphi\|_\infty (d-c)}{\rho^{\text{máx}\{|c|,|d|\}}} \sqrt{\frac{2\sum_{j=1}^{s} \Upsilon_j^2}{1-\rho^{2s}}}$$

siendo

$$\Upsilon_j := \text{máx}\Big\{ \max_{|z|=\rho} |f_j(z)| + \sum_{k=1}^{m_j^{(\rho)}} |\operatorname{Res}(\mathsf{a}_j, z_{j,k}^{(\rho)})| \rho^{-1},$$
$$\max_{|z|=1/\rho} |f_j(z)| + \sum_{k=1}^{m_j^{(1/\rho)}} |\operatorname{Res}(\mathsf{a}_j, z_{j,k}^{(1/\rho)})| \rho \Big\}, \quad j = 1, 2, \ldots, s$$

y

$$f_j(z) := \mathsf{a}_j(z) - \sum_{k=1}^{m_j^{(\rho)}} \frac{\operatorname{Res}(\mathsf{a}_j, z_{j,k}^{(\rho)})}{z - z_{j,k}^{(\rho)}} - \sum_{k=1}^{m_j^{(1/\rho)}} \frac{\operatorname{Res}(\mathsf{a}_j, z_{j,k}^{(1/\rho)})}{z - z_{j,k}^{(1/\rho)}},$$

donde para $\mu = \rho, 1/\rho$ y $j = 1, 2, \ldots, s$, los puntos $z_{j,1}^{(\mu)}, \ldots, z_{j,m_j^{(\mu)}}^{(\mu)}$ son los polos de $\mathsf{a}_j(z)$ en la circunferencia $|z| = \mu$.

Demostración. Dividimos la demostración en tres pasos:

Paso 1: Probamos en primer lugar que, para $j = 1, 2, \ldots, s$, los coeficientes $c_{j,n}$ del desarrollo de Laurent $\mathsf{a}_j(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{j,n} z^n$ en la corona C_ρ verifican

$$|c_{j,n}| \leq \Upsilon_j \rho^{|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

Para ello nótese que $\mathsf{a}_j(z)$, j-ésimo elemento de la primera fila de $\mathsf{G}^{-1}(z)$, es en este caso una función racional sin polos en C_ρ que no tiene polos múltiples en la frontera de C_ρ. Entonces

$$\mathsf{a}_j(z) = f_j(z) + \sum_{k=1}^{m_j^{(\rho)}} \frac{\operatorname{Res}(\mathsf{a}_j, z_{j,k}^{(\rho)})}{z - z_{j,k}^{(\rho)}} + \sum_{k=1}^{m_j^{(1/\rho)}} \frac{\operatorname{Res}(\mathsf{a}_j, z_{j,k}^{(1/\rho)})}{z - z_{j,k}^{(1/\rho)}},$$

donde $f_j(z)$ es una función racional que no tiene polos en C_ρ ni en su frontera. Así, $f_j(z)$ es analítica en una corona que contiene estrictamente a C_ρ. Entonces los coeficientes de Laurent en el desarrollo

$$f_j(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_{j,n} z^n, \quad z \in C_\rho\,,$$

se pueden expresar como

$$d_{j,n} := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{f_j(z)}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1/\rho} \frac{f_j(z)}{z^{n+1}}\,dz\,,$$

de donde se obtiene

$$|d_{j,n}| \le \max_{|z|=1/\rho} |f_j(z)|\rho^{|n|}\,, \quad n \ge 0\,, \qquad |d_{j,n}| \le \max_{|z|=\rho} |f_j(z)|\rho^{|n|}\,, \quad n < 0\,.$$

Teniendo en cuenta además los desarrollos

$$\frac{1}{z - z^{(\rho)}_{j,k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[z^{(\rho)}_{j,k}\right]^{n-1}}{z^n}\,, \quad |z| > \rho\,, \quad \frac{1}{z^{(1/\rho)}_{j,k} - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\left[z^{(1/\rho)}_{j,k}\right]^{n+1}}\,, \quad |z| < 1/\rho$$

se obtiene que los coeficientes de Laurent de $\mathsf{a}_j(z)$ verifican

$$|c_{j,n}| \le \Big[\max_{|z|=1/\rho} |f_j(z)| + \sum_{k=1}^{m_j^{(1/\rho)}} |\operatorname{Res}(\mathsf{a}_j, z^{(1/\rho)}_{j,k})|\rho\Big]\rho^{|n|}\,, \quad n \ge 0\,,$$
$$|c_{j,n}| \le \Big[\max_{|z|=\rho} |f_j(z)| + \sum_{k=1}^{m_j^{(\rho)}} |\operatorname{Res}(\mathsf{a}_j, z^{(\rho)}_{j,k})|\rho^{-1}\Big]\rho^{|n|}\,, \quad n < 0\,,$$

lo que demuestra la desigualdad (4.4).

Paso 2: Probamos ahora que, para $j = 1, 2, \dots, s$, la función de reconstrucción S_j verifica

$$|S_j(t)| \le s\|\varphi\|_\infty \rho^{-\max\{|c|,|d|\}}(d-c)\Upsilon_j \rho^{|t|}\,, \quad |t| \ge \max\{|c|,|d|\} \tag{4.5}$$

Como $S_j(t) = s\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{j,n}\varphi(t-n)$ (véase la demostración de la proposición anterior) y $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [c,d\,]$ se tiene

$$|S_j(t)| \le s\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{j,n}\varphi(t-n)| = s\sum_{n=[t-d]+1}^{[t-c]} |c_{j,n}\varphi(t-n)|$$
$$\le s\|\varphi\|_\infty \Upsilon_j \sum_{n=[t-d]+1}^{[t-c]} \rho^{|n|}\,,$$

donde $[t-d]$ y $[t-c]$ denotan respectivamente la parte entera de $t-d$ y $t-c$. Si $t \geq |d|$ y $n \in [t-d, t-c]$ se tiene que $n \geq t-d = |t|-d \geq |t|-|d| \geq 0$, y así $|n| = n \geq |t|-|d|$. Si $t \leq -|c|$ y $n \in [t-d, t-c]$ se tiene que $n \leq t-c \leq t+|c| \leq 0$, y así $|n| = -n \geq -t-|c| = |t|-|c|$. Por tanto, para $|t| > \text{máx}\{|c|, |d|\}$ se verifica

$$|S_j(t)| \leq s\|\varphi\|_\infty \Upsilon_j \sum_{n=[t-d]+1}^{[t-c]} \rho^{|t|-\text{máx}\{|c|,|d|\}} \leq s\|\varphi\|_\infty (d-c)\Upsilon_j \rho^{-\text{máx}\{|c|,|d|\}} \rho^{|t|}.$$

Paso 3: De la desigualdad (4.5) y utilizando la Proposición 4.1 deducimos ahora el resultado dado en el teorema. En efecto, aplicando la Proposición 4.1 para $\mu = \rho$ y $L = s\|\varphi\|_\infty (d-c)\Upsilon_j \rho^{-\text{máx}\{|c|,|d|\}}$ de la desigualdad (4.5) se obtiene

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{|n|\geq N} |S_j(t-sn)|^2 \leq \sum_{j=1}^{s} \frac{2\big(s\|\varphi\|_\infty (d-c)\Upsilon_j \rho^{-\text{máx}\{|c|,|d|\}}\big)^2 \rho^{-2|t|}}{1-\rho^{2s}} \rho^{2sN},$$

para $|t| \leq sN - \text{máx}\{|c|, |d|\}$. La desigualdad (4.2) proporciona el resultado buscado. □

Nótese que la sucesión $h_f(N)$ tiende a 0 cuando $N \to \infty$, y que $h_f^2(N)$ está acotada por $\frac{1}{A}\|f\|_2^2 - \sum_{|n|<N} \sum_{j=1}^{s} |(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2$ (véase (4.3)). Como consecuencia del teorema anterior se deduce el siguiente corolario.

Corolario 4.1 *En las hipótesis del teorema anterior, para cada $f \in V_\varphi$ se verifica que $E_N f(t) = o\left(\rho^{sN}\right)$ cuando $N \to \infty$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$.*

Demostración. En las hipótesis del teorema, si $t \in [-C, C]$

$$|E_N f(t)| \leq K\, h_f(N)\, \rho^{-C}\ \rho^{sN}, \qquad \text{para todo } N \geq \frac{C + \text{máx}\{|c|, |d|\}}{s}.$$

□

Por ejemplo, consideremos la fórmula clásica para los *splines* de grado impar m (véase Sección 2.2.4), es decir la correspondiente a tomar $\varphi = N_{m+1}$ y el sistema $\mathcal{L}f = f$. Se tiene

$$\mathsf{G}(z) = \frac{z}{m!} E_m(z),$$

donde E_m es el polinomio de Euler-Fröbenius de grado $m-1$. Este polinomio se puede expresar como

$$E_m(z) = \prod_{k=1}^{(m-1)/2} (z - x_k)(z - 1/x_k),$$

donde $-1 < x_{(m-1)/2} < \ldots < x_1 < 0$. Por lo tanto,

$$E_N f(t) = o\big(x_{(m-1)/2}^N\big) \quad \text{cuando } N \to \infty\,,$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$.

El corolario anterior admite la siguiente generalización al caso general:

Teorema 4.2 *Supongamos que el generador φ y las respuestas impulsionales de los sistemas $\mathcal{L}_j$, $j = 1, 2, \cdots, s$, tienen soporte compacto. Si* $\det \mathsf{G}(z)$ *tiene ceros en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces*

$$E_N f(t) = o\big(N^{\upsilon-1} \rho^{sN}\big) \quad \textit{cuando } N \to \infty\,,$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$, donde ρ es el menor número en $(0,1)$ tal que $\det \mathsf{G}(z)$ *no se anula en la corona $C_\rho := \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < 1/\rho\}$ y υ es el mayor orden de los ceros de* $\det \mathsf{G}(z)$ *en la frontera de C_ρ.*

Demostración. Dividimos la demostración en tres pasos análogos a los dados en la prueba del teorema anterior:

Paso 1: En primer lugar demostramos que para $j = 1, 2, \ldots, s$, existe una constante $\Theta_j > 0$, tal que los coeficientes de Laurent del desarrollo $\mathsf{a}_j(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{j,n} z^n$ en la corona C_ρ verifican la siguiente desigualdad:

$$|c_{j,n}| \le \Theta_j |n|^{\upsilon-1} \rho^{|n|}\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.6}$$

Obsérvese que, en las hipótesis del teorema, la función $\mathsf{a}_j(z)$, $j = 1, 2 \ldots, s$ no tiene polos de orden mayor a υ en la frontera de C_ρ. La descomposición en fracciones simples de $\mathsf{a}_j(z)$ permite expresar esta función racional como

$$\mathsf{a}_j(z) = f_j(z) + \frac{K_1}{(z - z_1)^{\sigma_1}} + \ldots + \frac{K_{m_j}}{(z - z_{m_j})^{\sigma_{m_j}}}$$

donde $f_j(z)$ es una función analítica en una corona que contiene estrictamente a C_ρ (esta función podría tener polos fuera de esta corona), $K_l \in \mathbb{C}$, $\sigma_l \in \mathbb{N}$, $\sigma_l \le \upsilon$ y los puntos $z_1, \ldots, z_{m_j}$ (no necesariamente distintos) están en la frontera de C_ρ. Como $f_j(z)$ es una función analítica en una corona que contiene estrictamente a C_ρ, se obtiene como en el primer paso de la demostración del teorema anterior que los coeficientes de Laurent $d_{j,n}$ de $f_j(z)$ en la corona C_ρ verifican

$$|d_{j,n}| \le \max_{\rho \le |z| \le 1/\rho} |f_j(z)|\, \rho^{|n|}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Teniendo en cuenta además los desarrollos

$$\frac{1}{(z_l - z)^{\sigma_l}} = \sum_{n=\sigma_l}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\sigma_l+1)\, z^{n-\sigma_l}}{(\sigma_l - 1)!\, z_l^n}, \quad |z| < 1/\rho,$$

válido cuando el módulo de z_l es $1/\rho$, y

$$\frac{1}{(z - z_l)^{\sigma_l}} = \sum_{n=\sigma_l}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-\sigma_l+1)\, z_l^{n-\sigma_l}}{(\sigma_l - 1)!\, z^n}, \quad |z| > \rho,$$

válido cuando el módulo de z_l es ρ, se obtiene la estimación (4.6).

Paso 2: Sea $b > 0$ de modo que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-b, b]$. Demostramos ahora que, para $j = 1, 2, \ldots, s$, existe una constante Ψ_j tal que

$$|S_j(t)| \leq \Psi_j |t|^{v-1} \rho^{|t|}, \quad |t| \geq b. \tag{4.7}$$

Como $S_j(t) = s \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{j,n}\varphi(t-n)$ (véase la demostración de la Proposición 4.2), se tiene que

$$\begin{aligned} |S_j(t)| &\leq s \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{j,n}\varphi(t-n)| = s \sum_{n=[t-b]+1}^{[t+b]} |c_{j,n}\varphi(t-n)| \\ &\leq s\Theta_j \|\varphi\|_\infty \sum_{n=[t-b]+1}^{[t+b]} |n|^{v-1}\rho^{|n|}, \end{aligned}$$

donde $[t \pm b]$ denota la parte entera de $t \pm b$ y $\|\varphi\|_\infty = \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$. Si $t \geq b$, entonces $|n| = n \geq t - b = |t| - b$ para $n \in [t-b, t+b]$. Si $t \leq -b$ entonces $|n| = -n \geq -t - b = |t| - b$ para $n \in [t-b, t+b]$. Entonces para $|t| \geq b$ se verifica

$$\begin{aligned} |S_j(t)| &\leq s\Theta_j \rho^{|t|-b} \|\varphi\|_\infty \sum_{n=[t-b]+1}^{[t+b]} (|t| + b)^{v-1} \\ &\leq s\Theta_j \rho^{|t|-b} (|t| + b)^{v-1} \|\varphi\|_\infty 2b, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la estimación (4.7).

Paso 3: Utilizando la Proposición 4.1 de la desigualdad (4.7) se deduce el teorema cuando $v = 1$. Obtenemos ahora una generalización de la Proposición 4.1 para $v \in \mathbb{N}$, de la cual deducimos el teorema cuando $v \in \mathbb{N}$.

Si $|t| \leq sN - b$ y $|n| \geq N$ entonces $|t - sn| \geq b$. Por tanto utilizando la desigualdad (4.7) se obtiene que, para $|t| \leq sN - b$,

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\geq N} |S_j(t-sn)|^2 &\leq \Psi_j^2 \sum_{|n|\geq N} |t-sn|^{2v-2}\rho^{2|t-sn|} \\ &\leq \Psi_j^2 \sum_{|n|\geq N} (|t|+|sn|)^{2v-2}\rho^{2|sn|-2|t|} \\ &\leq 2\Psi_j^2\rho^{-2|t|}\sum_{n=N}^{\infty}(|t|+sn)^{2v-2}\rho^{2sn}\,.\end{aligned}$$

Sea C cualquier número positivo. Para $t \in [-C, C]$ se tiene

$$\sum_{|n|\geq N} |S_j(t-sn)|^2 \leq 2\Psi_j^2\rho^{-2C}\sum_{n=N}^{\infty}(C+sn)^{2v-2}\rho^{2sn}$$

para $N > (C+b)/s$.

Derivando con respecto a x la igualdad

$$\sum_{n=N}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x}, \quad |x| < 1\,,$$

se obtiene que, para $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum_{n=N}^{\infty} n^l x^n = p_l(N)x^N$ donde p_l es un polinomio de grado l cuyos coeficientes dependen de x. Como consecuencia, para x, l fijos, se verifica que $\sum_{n=N}^{\infty} n^l x^n = O(N^l x^N)$ cuando $N \to \infty$. En nuestro caso

$$\sum_{n=N}^{\infty}(C+sn)^{2v-2}\rho^{2sn} = O\big(N^{2v-2}\rho^{2sN}\big)\,.$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{|n|\geq N} |S(t-sn)|^2 = O(N^{2v-2}\rho^{2sN})$$

uniformemente para $t \in [-C, C]$.

Teniendo en cuenta que $\sum_{|n|\geq N}\sum_{j=1}^{s} |(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2$ tiende a 0, cuando $N \to \infty$ y la desigualdad (4.2) se sigue el teorema. □

En las dos siguientes proposiciones vemos que el número ρ en los teoremas anteriores juega también un papel importante en el cálculo de las funciones de reconstrucción. Éstas quedan determinadas a partir de los coeficientes de Fourier $\{c_{n,j}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de a_j en la base ortonormal $\{e^{-2\pi i n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1)$,

$$S_j(t) = s\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,j}\varphi(t-n), \quad j = 1, 2, \ldots, s\,, \tag{4.8}$$

o también mediante su transformada de Fourier, $\widehat{S}_j(w) = sa_j(w)\widehat{\varphi}(w)$. Sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones no es posible encontrar una expresión explícita de $S_j(t)$, debido a la imposibilidad de sumar la serie en (4.8) o de encontrar la transformada inversa de Fourier de $sa_j(w)\widehat{\varphi}(w)$. Una alternativa es calcular una aproximación truncando la serie en (4.8)

$$S_{j,M}(t) := s \sum_{|n| \le M} c_{n,j}\varphi(t-n), \quad j = 1, 2, \ldots, s\,.$$

Recuérdese que hemos supuesto que las funciones de V_φ son continuas y en consecuencia $\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 < \infty$ (Teorema 1.3).

Proposición 4.3 *En las hipótesis del Teorema 4.1, para cada* $j = 1, 2, \ldots, s$*, y* $M \in \mathbb{N}$ *se verifica que*

$$|S_j(t) - S_{j,M}(t)| \le s\rho\Upsilon_j \sqrt{\frac{2}{1-\rho^2} \sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2}\; \rho^M\,,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. En la demostración del Teorema 4.1 se probó que $|c_{n,j}| \le \Upsilon_j \mu^{|n|}$ para $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{|n|>M} c_{j,n}\varphi(t-n)\Big|^2 &\le \sum_{|n|>M} \Upsilon_j^2 \rho^{2|n|} \sum_{|n|>M} |\varphi(t-n)|^2 \\ &= 2\Upsilon_j^2 \frac{\rho^{2M+2}}{1-\rho^2} \sum_{|n|>M} |\varphi(t-n)|^2\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue la proposición. □

Proposición 4.4 *En las hipótesis del Teorema 4.2, para cada* $j = 1, 2, \ldots, s$*, se tiene que*

$$|S_j(t) - S_{j,M}(t)| \le O\big(M^{\upsilon-1}\rho^M\big) \quad \textit{cuando}\, M \to \infty\,,$$

uniformemente en $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. En la demostración del Teorema 4.2 se probó que existe una constante Θ_j tal que $|c_{n,j}| \le \Theta_j |n|^{\upsilon-1}\rho^{|n|}$ para $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\Big| \sum_{|n|>M} c_{j,n}\varphi(t-n)\Big|^2 \le \sum_{|n|>M} \Theta_j^2 |n|^{2\upsilon-2}\rho^{2|n|} \sum_{|n|>M} |\varphi(t-n)|^2$$

Utilizando que $\sum_{|n|>M} |n|^{2v-2}\rho^{2|n|} = O\big(M^{2v-2}\rho^{2M}\big)$ (véase la demostración del Teorema 4.2) y que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotado en $\mathbb{R}$ se obtiene el resultado. □

Nótese que si $\det \mathsf{G}(z)$ no tiene ceros en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ entonces sólo un número finito de los coeficientes $\{c_{j,n}\}$ son no nulos y en consecuencia $S_j = S_{j,M}$ para M suficientemente grande.

Generador con soporte no compacto

En el siguiente teorema tratamos el caso de que el generador tenga dos derivadas continuas, con ciertas propiedades de decrecimiento.

Teorema 4.3 *Supongamos que $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$ y que existan constantes $\varepsilon>0$ y $v\in\mathbb{N}$, tales que*

$$\varphi^{(n)}(t) = O\left(|t|^{-1-v-\varepsilon}\right), \qquad \mathcal{L}_j\varphi(t) = O\left(|t|^{-1-v-\varepsilon}\right), \quad \textit{cuando}\, |t|\to\infty\,,$$

para $n=0,1,2$ y $j=1,2,\ldots,s$. Entonces, para $f\in V_\varphi$,

$$E_N f(t) = o(N^{-v+1/2}) \quad \textit{cuando}\, N\to\infty\,,$$

uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}$.

Demostración. Como $\mathcal{L}_j\varphi(t) = O\left(|t|^{-1-v-\varepsilon}\right)$ entonces $g_j\in C^v(\mathbb{R})$, $j=1,2,\ldots,s$. Como $\det\mathbf{G}$ es una función continua, la condición $\alpha_{\mathbf{G}}>0$ implica que $\det\mathbf{G}(w)\neq 0$ para todo $w\in\mathbb{R}$, de donde se deduce que las componentes $\mathbf{G}^{-1}(w)$, y en particular $a_j(w)$, pertenecen a $C^v(\mathbb{R})$. Como además la función a_j es 1-periódica, tiene v derivadas acotadas.

Por otra parte $[t^k\varphi(t)]^{(n)} = O(|t|^{-1-\varepsilon})$ para $k=0,1,\cdots,v$ y $n=0,1,2$. Entonces (véase [60, Prop. 17.2.1]) $\mathcal{F}\big([t^k\varphi(t)]^{(2)}\big)(w) = (2\pi i w)^2\widehat{t^k\varphi(t)}(w)$. Como $[t^k\varphi(t)]^{(2)}\in L^1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier es acotada y entonces $\widehat{t^k\varphi(t)}(w) = O(|w|^{-2})$. Además como $t^k\varphi(t)\in L^1(\mathbb{R})$, $k=0,\cdots,v$ se tiene $\widehat{\varphi}^{(k)} = (-2\pi i)^k\widehat{t^k\varphi(t)}$, y entonces $\widehat{\varphi}^{(k)}(w) = O\left(|w|^{-2}\right)$, para $k=0,1,\cdots,v$.

Por tanto, para $k=0,1,..,v$ y $j=1,2,\ldots,s$,

$$[a_j(w)\widehat{\varphi}(w)]^{(k)} = O\left(|w|^{-2}\right) \quad \text{cuando}\, |w|\to\infty\,.$$

Entonces $\mathcal{F}^{-1}\big(\,[a_j(w)\widehat{\varphi}(w)]^{(v)}\,\big)(t) = (-2\pi i t)^v\mathcal{F}^{-1}\big(a_j(w)\widehat{\varphi}(w)\big)(t)$. Como la función $[a_j(w)\widehat{\varphi}(w)]^{(v)}\in L^1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier es acotada y entonces para $j=1,2,\ldots,s$,

$$S_j(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(a_j(w)\widehat{\varphi}(w)\right)(t) = O\left(|t|^{-v}\right) \quad \text{cuando}\, |t|\to\infty\,.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (4.2), la Proposición 4.1, que la función $\sum_{|n|\geq N}\sum_{j=1}^{s}|(\mathcal{L}_j f)(sn)|^2$ tiende a 0, cuando $N\to\infty$, y que $1/(sN-C)\geq 1/(sN-|t|)$ para $t\in[-C,C]$, se sigue el teorema. □

Corolario 4.2 *Si el generador φ pertenece a la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y las respuestas impulsionales de los sistemas $\mathcal{L}_j$, $j=1,2,\cdots,s$, tienen soporte compacto, entonces para todo $v\in\mathbb{N}$ se verifica que $E_N f(t)=o(N^{-v})$ cuando $N\to\infty$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Con las hipótesis del corolario se comprueba fácilmente que $\mathcal{L}_j\varphi(t)=O\left(|t|^{-1-v-\varepsilon}\right)$ para todo $v\in\mathbb{N}$. El corolario es pues consecuencia del teorema anterior. □

4.1.3. Elección de parámetros que intervienen en el muestreo

Suponemos que el generador φ y las respuestas impulsionales de los sistemas $\mathcal{L}_j$, $j=1,2,\cdots,s$ tienen soporte compacto, y notamos por ρ el mínimo número en $[0,1)$ tal que $\det\mathsf{G}(z)$ no se anula en la corona C_ρ. Si $\rho=0$ entonces el error de truncamiento $E_N(t)$ es nulo en un intervalo acotado si se toma N suficientemente grande (Proposición 4.2). Si $\rho>0$ entonces $E_N f(t)=o\big(N^{v-1}\rho^{sN}\big)$ cuando $N\to\infty$ uniformemente sobre compactos, donde v es el mayor orden de los ceros de $\det\mathsf{G}(z)$ en la frontera de C_ρ (Teorema 4.2). En particular si $\det\mathsf{G}(z)$ tiene únicamente ceros simples en C_ρ entonces $E_N f(t)=o(\rho^{sN})$.

En ocasiones los sistemas $\mathcal{L}_j$ dependen de un parámetro $a\in\Omega\subseteq\mathbb{R}$, cuyo valor podemos fijar antes de realizar el muestreo. Un criterio para minimizar el error de truncamiento es elegir el valor del parámetro, a, cuyo correspondiente ρ es mínima. Ilustraremos esta optimización con algunos ejemplos. La misma técnica, con la ayuda de algún método de optimización numérica, podría seguirse si los sistemas $\mathcal{L}_j$ dependen de varios parámetros.

• **Muestreo entrelazado.** Consideremos la recuperación de un *spline* cúbico a partir de sus muestras en $2n$ y $2n+a$, $n\in\mathbb{Z}$. Por simetría, se puede asumir sin perdida de generalidad que el parámetro de entrelazado $a\in(0,1]$. Para $s=2$, los sistemas $\mathcal{L}_1 f=f$, $\mathcal{L}_2 f(t)=f(t+a)$, y el generador $\varphi=N_4$ se tiene

$$\det\mathsf{G}(z)=\frac{a^3}{18}\,z+\Big(\frac{8a^3}{9}-a^2-\frac{2a}{3}\Big)z^3+\Big(\frac{7a^3}{18}-a^2+\frac{2a}{3}\Big)z^5\,.$$

Los ceros de $\det\mathsf{G}(z)$ son $-\sqrt{\lambda}$, $-\sqrt{\mu}$, 0, $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\lambda}$ donde $\mu<1<\lambda$ son los ceros de $a^3/18+(8a^3/9-a^2-2a/3)x+(7a^3/18-a^2+2a/3)x^2$. Como $1/\lambda>\mu$,

(a) Ejemplo con muestreo entrelazado (b) Ejemplo con medias locales (c) Ejemplo con medias ponderadas

Figura 4.1: La tasa ρ en función del parámetro a

y ambos ceros son simples, el Teorema 4.1 da la tasa de convergencia

$$\rho^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{12 - 18a + 7a^2}{6 + 9a - 8a^2 + \sqrt{36 + 108a - 27a^2 - 126a^3 + 57a^4}}\,.$$

La tasa ρ es una función decreciente del parámetro de entrelazado $a \in (0,1]$, y así la tasa mínima se alcanza cuando $a = 1$. Por tanto, la mejor situación se da en el caso de muestreo uniforme ($a = 1$) para el cual $\rho^2 = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}26$. En la sección anterior se dio una acotación que muestra la estimación $E_N f(t) = o(\rho^{2N})$, para este valor de a, de forma más explícita. Unser y Zerubia [122] mostraron que la mejor situación en relación con la estabilidad se da también cuando $a = 1$, es decir, para este valor del parámetro a el cociente entre las cotas óptimas de Riesz B/A es mínima. En Janssen [79] se puede encontrar una aplicación de este modelo en procesado de la imagen.

• **Muestreo con medias locales.** Consideremos ahora la recuperación de un *spline* cuadrático, $f \in V_{N_3}$, a partir de las medias locales

$$(\mathcal{L}f)(n) := \int_n^{n+a} f(x)\,dx\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Dado el sistema $(\mathcal{L}f)(t) := \displaystyle\int_t^{t+a} f(x)\,dx$, $t \in \mathbb{R}$, para $a \in (0,1]$ se obtiene que

$$\det \mathsf{G}(z) = \frac{a^3}{6} + \Big(\frac{a}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\Big)z + \Big(\frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}\Big)z^2\,.$$

Este polinomio cuadrático tiene dos ceros x_1, x_2 que verifican $x_2 < -1 < x_1 < 0$, $|x_1| \le 1/|x_2|$. Entonces $\rho = 1/|x_2|$. Como ρ es una función decreciente de $a \in (0,1]$, alcanza su mínimo valor, $2 - \sqrt{3}$, en $a = 1$. Se puede comprobar que cuando $a \in (1,2)$, se cumple la condición $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$ (no así para $a = 2$), pero las correspondientes tasas ρ son mayores que la tasa para $a = 1$.

• **Muestreo con medias ponderadas.** Dados s sistemas $\widetilde{\mathcal{L}}_j$, $j = 1, 2, \dots, s$, se pueden recuperar las funciones f del espacio V_φ a partir de las muestras $\{\widetilde{\mathcal{L}}_j f(sn+a)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ (en lugar de a partir de $\{\widetilde{\mathcal{L}}_j f(sn)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$) utilizando para ello, los sistemas trasladados $(\mathcal{L}_j f)(t) := (\widetilde{\mathcal{L}}_j f)(t+a)$. En muchas ocasiones podemos elegir el *shift* de muestreo a. Nótese que como consecuencia de la propiedad de invarianza por traslación podemos suponer sin perdida de generalidad que $a \in [0,1)$.

Consideremos como ejemplo de esta elección, el espacio $V_{N_2} := \mathcal{S}^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ de *splines* lineales y el sistema

$$(\mathcal{L}f)(t) := \widetilde{\mathcal{L}}f(t+a) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x-t-a)dx\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

donde $\psi(x) = x^2 \mathcal{X}_{(0,1)}(x)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{G}(z) = \mathsf{g}(z) &= \sum_{n=-1}^{1} \big(\mathcal{L}N_2\big)(n) z^n \\
&= \Big(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{12}\Big)\frac{1}{z} + \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{2a^3}{3} - \frac{a^4}{6} + \Big(\frac{1}{12} - \frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{12}\Big)z.
\end{aligned}$$

Cuando $a \in [0,1)$, el polinomio cuadrático $z \det \mathsf{G}(z)$ tiene dos ceros negativos $x_2 \le -3 \le x_1 < 0$. Cuando $a = a_0$ donde $a_0 \approx 0{,}74$ es el cero de $1 + 4a - 12a^2 + 8a^3 - 2a^4$ en $(0,1)$, entonces $x_1 = -1$ y así $\det \mathsf{G}(-1) = 0$, por lo que no se satisface la condición necesaria $\alpha_{\mathbf{G}} = 0$. Cuando $a \le 1/4$ (véase figura 4.2(a)), $\rho = 1/|x_2|$ es una función decreciente de a, cuando $1/4 \le a < a_0$, $\rho = |x_1|$ es creciente y cuando $a_0 < a \le 1$, $\rho = 1/|x_1|$ es decreciente. La tasa ρ tiene para $a = 0$ y para $a = 1$ el mismo valor. Por tanto ρ alcanza su mínimo valor en $a = 1/4$. Para este valor de a,

$$\rho = |x_1| = 1/|x_2| = \frac{81}{431 + 160\sqrt{7}} \approx 0{,}094\,.$$

• **Muestreo con derivadas.** Consideremos la recuperación de los *splines* cúbicos a partir de las muestras $\{f(a+2n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \{f'(a+2n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Para ello, consideramos los sistemas $\mathcal{L}_1 f(t) = f(t+a)$, $\mathcal{L}_2 f(t) = f'(t+a)$, y el generador $\varphi = N_4$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $a \in [0,1)$. Se tiene,

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{G}(z) = &\Big(\frac{2}{3} - 2a + \frac{13}{6}a^2 - a^3 + \frac{1}{6}a^4\Big)z^5 \\
&+ \Big(-\frac{2}{3} - 2a + \frac{5}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{3}a^4\Big)z^3 + \Big(\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{6}a^4\Big)z\,.
\end{aligned}$$

(a) Ejemplo con derivadas

(b) Ejemplo con muestras de la propia función

Figura 4.2: La tasa ρ en función del parámetro a.

Cuando $a = 0$, $\det \mathsf{G}(1) = 0$ y entonces no se cumple la condición necesaria $\det \mathsf{G}(z) \neq 0$, $|z| = 1$.

Para $a \in (0, 1)$ los ceros de $\det \mathsf{G}(z)$ son $-\sqrt{\lambda}$, $-\sqrt{\mu}$, 0, $\sqrt{\mu}$, $\sqrt{\lambda}$, donde $\mu < 1 < \lambda$ son los ceros del polinómio

$$a^2 + 2a^3 + a^4 + (10a^2 - 4 - 12a + 4a^3 - 2a^4)x + (4 - 12a + 13a^2 - 6a^3 + a^4)x^2 .$$

Si $a \leq 1/2$ entonces $1/\lambda$ es una función decreciente de a y $1/\lambda > \mu$. Si $a = 1/2$ entonces $1/\lambda = \mu$. Si $a \geq 1/2$ entonces μ es una función creciente de a y $\mu > 1/\lambda$. Entonces

$$\rho^2 = \begin{cases} 1/\lambda & a \in (0, 1/2] \\ \mu & a \in (1/2, 1) \end{cases} .$$

El mínimo valor de ρ es $\rho = \sqrt{(19 - 4\sqrt{22})/3} \approx 0{,}28$ y ocurre cuando $a = 1/2$ (ver figura 4.2(b)) . En el Sección 3.3.3 se puede encontrar la correspondiente fórmula de muestreo y en la sección anterior una acotación que muestra la estimación $E_N f(t) = O(\rho^{2N})$ de forma más explícita.

• **Muestras de la propia función.** Consideremos la recuperación de los *splines* cúbicos a partir de sus muestras en $n + a$, $n \in \mathbb{Z}$. Por simetría, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $a \in [0, 1/2]$. Consideremos el sistema $\mathcal{L}_1 f(t) = f(t + a)$ y el generador $\varphi = N_4$. Con cálculos similares a los realizados en anteriores ejemplos se obtiene que cuando $a = 1/2$ no se verifica la condición necesaria $\det \mathbf{G}(z) \neq 0$, $|z| = 1$, y que para $a \in [0, 1/2)$ la tasa ρ es el valor absoluto del cero del polinomio $a^3 + (1 + 3a + 3a^2 - 3a^3)z + (4 - 6a^2 + 3a^3)z^2 + (1 - a)^3 z^3$ en $(-1, \sqrt{3} - 2]$. La tasa ρ es una función creciente de a y entonces el mínimo se alcanza cuando $a = 0$. La optimización conduce pues a la misma fórmula que en el ejemplo con muestras entrelazadas.

4.2. Error de amplitud

El error de amplitud es el error producido por perturbaciones de las muestras. Estas se deben habitualmente a la imprecisión de los aparatos de medida y al uso de un número finito de dígitos en el cálculo numérico.

En esta sección obtenemos estimaciones del error de amplitud para la fórmula de muestreo generalizado (Teorema 3.2). Mostramos también como utilizar un periodo de muestreo, r, más pequeño que el número de canales, s, o equivalentemente utilizar más canales de los necesarios (*oversampling*) tiende a disminuir el error de amplitud. Suponemos que se verifican las hipótesis del Teorema 3.2, y seguiremos la notación utilizada en este teorema.

Obtenemos una acotación del error de amplitud, en la que se considera la aleatoriedad de los errores al tomar las muestras. Por simplicidad, y dada la imposibilidad en la práctica de tomar infinitas muestras, consideramos únicamente el error de amplitud debido a los errores en las finitas muestras $\{\mathcal{L}_j f(nr)\}_{|n|\le M, j=1,2,\ldots,s}$. Para $j = 1,2,\ldots,s$ y $|n| \le M$, denotamos por $\Delta_{k,n}$ el error al tomar la muestra $\mathcal{L}_k f(nr)$. Denotamos por

$$\Delta_M f(t) := \sum_{|n|\le M} [\Delta_{1,n} S_1(t-rn) + \cdots + \Delta_{s,n} S_s(t-rn)] \,. \qquad (4.9)$$

el correspondiente error de amplitud.

Teorema 4.4 *Sea $\Delta_M f$ el error de amplitud definido por* (4.9) *donde los errores $\Delta_{j,n},\ |n| \le M, j = 1,2,\ldots,s$ son variables aleatorias de media nula, incorreladas y con varianza σ^2. Entonces*

$$\|\Phi_\varphi\|_0 (2M+1)\sigma^2 r^2 K \le E\big[\, \|\Delta_M f\|_2^2 \big] \le \|\Phi_\varphi\|_\infty (2M+1)\sigma^2 r^2 K \,,$$

donde $K := \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \int_0^1 |a_j(w)|^2 dw$ *, y E denota la esperanza matemática.*

Demostración. Como $S_j(t-n) = \mathcal{T}_\varphi\big[r a_j(\cdot) e^{-2\pi i n \cdot}\big](t)$, la definición (4.9) se puede escribir como

$$\Delta_M f := \sum_{|n|\le M} \sum_{j=1}^{s} \Delta_{j,n} \mathcal{T}_\varphi\Big(r a_j(\cdot) e^{-2\pi i n \cdot}\Big) \,.$$

Entonces

$$\big(\mathcal{T}_\varphi^{-1}\Delta_M f\big)(w) = \sum_{|n|\le M}\sum_{j=1}^{s}\Delta_{j,n} r a_j(w) e^{-2\pi i n w}\,.$$

Por tanto

$$\big\|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\Delta_M f\big\|^2_{L^2(0,1)} = \sum_{\substack{j,k=1,2,\dots,s\\|n|,|m|\le M}} \Delta_{j,n}\overline{\Delta_{k,m}}\int_0^1 r^2 a_j(w)\overline{a}_k(w)e^{2\pi i(m-n)w}dw\,,$$

de donde, teniendo en cuenta que $E[\Delta_{j,n}\overline{\Delta_{k,m}}]=0$ si $j\neq k$ o si $n\neq m$ y que $E[\,|\Delta_{j,n}|^2]=\sigma^2$ se obtiene

$$E\big[\,\big\|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\Delta_M f\big\|^2_{L^2(0,1)}\big] = \sum_{|n|\le M}\sum_{j=1}^{s}\sigma^2 r^2\int_0^1 |a_j(w)|^2 dw = (2M+1)\sigma^2 r^2 K\,.$$

Teniendo en cuenta que $\|\Delta_M f\|_2^2 = \|\mathcal{T}_\varphi\mathcal{T}_\varphi^{-1}\Delta_M f\|_2^2 \le \|\Phi_\varphi\|_\infty\|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\Delta_M f\|^2_{L^2(0,1)}$ y que $\|\Delta_M f\|_2 \ge \|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\Delta_M f\|^2_{L^2(0,1)}/\|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\|^2 = \|\Phi_\varphi\|_0\|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\Delta_M f\|^2_{L^2(0,1)}$, se obtiene la acotación buscada. □

Nótese que si $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de V_φ entonces la acotación dada en el teorema se convierte en una igualdad

$$E[\|\Delta_M f\|_2^2] = (2M+1)\sigma^2 r^2 K\,.$$

Consideremos ahora el caso en que se muestrea en los enteros $r=1$, y que entre las posibles elecciones de a_j, $j=1,2,\dots,s$, se toma la dada por la primera fila de la pseudo-inversa,

$$a_j(w) = \frac{\overline{g_j(w)}}{\sum_{l=1}^{s}|g_l(w)|^2}\,,\quad j=1,2,\dots,s\,.$$

La constante K que aparece en la acotación del error de amplitud en el Teorema 4.4 en este caso vale

$$K = \int_0^1 \frac{dw}{\sum_{j=1}^{s}|g_j(w)|^2}\,.$$

Por tanto, al aumentar el número de canales, s, el error de amplitud disminuye.

Por ejemplo en el caso

$$\varphi = \operatorname{senc}\,,\quad \big(\mathcal{L}_j f\big)(t) = f(t+d_j)\,,\quad j=1,2,\dots,s$$

(muestreo no uniforme periódico) se tiene que

$$g_j(w) = e^{2\pi i d_j w}\,, \quad w \in [-1/2, 1/2)\,.$$

Entonces,

$$E[\,\|\Delta_M f\|_2^2] = \frac{(2M+1)\sigma^2}{s}.$$

Así, al pasar de un canal a dos, $E[\,\|\Delta_M f\|_2^2]$ se reduce a la mitad.

4.3. Error de aliasing en subespacios wavelet

Sea $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ un análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$ con función de escala ortonormal $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Si la fórmula de muestreo para recuperar las funciones f del espacio $V_0 = V_\phi$,

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a) S_a(t-n)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{4.10}$$

donde $\widehat{S_a}(w) = \widehat{\phi}(w)/(Z\phi)(a,w)$, se aplica a una función f que no pertenece al espacio V_0, se comete el denominado error de aliasing,

$$E_a f(t) := f(t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a) S_a(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Con respecto a este error en el caso de Shannon ($\phi = \operatorname{senc}$), un resultado clásico establecido por Weiss [130] y probado por Brown [25] afirma que si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\Big|f(t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \operatorname{senc}(t-n)\Big| \le 2 \int_{|w|>1/2} |\widehat{f}(w)| dw\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.11}$$

Brown proporcionó además la solución extremal $f(t) = \operatorname{senc}(2t-1)$ para (4.11) (i.e., existe un valor de t para la cual la desigualdad (4.11) es una igualdad). Nótese que si $f \in V_1 = PW_1$, entonces la desigualdad (4.11) se puede escribir como

$$|E_0 f(t)| \le 2 \|\widehat{P_{W_0} f}\|_1\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde P_{W_0} denota la proyección ortogonal sobre W_0, el complemento ortogonal de V_0 en V_1. Walter [126] ha probado un resultado similar para funciones en el espacio V_1 de un análisis multirrresolución general. Concretamente, que existe una constante C tal que, para cualquier $f \in V_1$,

$$|E_0 f(t)| \le C \|P_{W_0} f\|_2, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.12}$$

Obsérvese que $\|P_{W_0}f\|_2$ se puede escribir en función de los coeficientes wavelets de f.

Por otro lado, Janssen [78] ha probado las desigualdades

$$K_0\|P_{W_0}f\|_2 \le \|E_af\|_2 \le K_\infty\|P_{W_0}f\|_2, \quad f \in V_1\,,$$

dando la mayor constante K_0 y la menor constante K_∞ que verifican dicha acotación, es decir las cotas óptimas.

En la Sección 4.3.1 tratamos el error de aliasing E_af, para $f \in V_1$. Comenzaremos deduciendo una expresión para la transformada de Fourier de $E_a(f)$ en función de $P_{W_0}f$. Esta expresión da origen, además de a las desigualdades de Janssen, a una acotación precisa del tipo (4.12), para la cual proporcionamos soluciones extremales. Cuando ϕ es una función de escala cardinal, i.e., cuando verifica $\phi(n) = \delta_{n,0}$, la norma $L^2(\mathbb{R})$ del error de aliasing es especialmente simple: $\|E_0f\|_2 = \sqrt{2}\|P_{W_0}f\|_2$. En la Sección 4.3.2, tratamos con un método similar el error de aliasing para funciones del espacio V_2. En la Sección 4.3.3 ilustraremos los resultados obtenidos en algunos análisis multirresolución clásicos.

Damos a continuación algunos preliminares necesarios en lo que sigue. Recuérdese que para $f \in V_1$ existe una función 1-periódica m_f de $L^2(0,1)$ (Sección 1.6), tal que

$$\widehat{f}(w) = m_f(w/2)\widehat{\phi}(w/2)\,. \tag{4.13}$$

Recíprocamente, si una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ verifica (4.3.1) para alguna función 1-periódica, $m_f \in L^2(0,1)$ de $L^2(0,1)$ entonces pertenece a V_1. Además,

$$\|f\|_2^2 = 2\|m_f\|_{L^2(0,1)}^2\,. \tag{4.14}$$

Notamos por ψ la wavelet madre cuya transformada de Fourier es

$$\widehat{\psi}(w) := e^{i\pi w}\overline{m_\phi(w+1/2)}\widehat{\phi}(w/2)\,,$$

o equivalentemente, $m_\psi(w) = e^{2\pi iw}\overline{m_\phi(w/2+1/2)}$. Las funciones m_ϕ y m_ψ verifican las relaciones:

$$\begin{aligned}
&|m_\phi(w)|^2 + |m_\phi(w+1/2)|^2 = 1,\\
&|m_\psi(w)|^2 + |m_\psi(w+1/2)|^2 = 1,\\
&m_\phi(w/2)\overline{m_\psi(w/2)} + m_\phi(w/2+1/2)\overline{m_\psi(w/2+1/2)} = 0\,.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Para cada $f \in V_1$, las funciones dadas por

$$\begin{aligned}
u_f(w) &:= m_f(w/2)\overline{m_\phi(w/2)} + m_f(w/2+1/2)\overline{m_\phi(w/2+1/2)},\\
v_f(w) &:= m_f(w/2)\overline{m_\psi(w/2)} + m_f(w/2+1/2)\overline{m_\psi(w/2+1/2)}\,,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

son las únicas funciones 1-periódicas de $L^2(0,1)$ verificando

$$\widehat{P_{V_0}f}(w) = u_f(w)\widehat{\phi}(w) \quad \text{y} \quad \widehat{P_{W_0}f}(w) = v_f(w)\widehat{\psi}(w)\,. \tag{4.17}$$

Además para $f \in V_1$ se tiene

$$\|P_{W_0}f\|_2^2 = \|v_f\|_{L^2(0,1)}^2\,. \tag{4.18}$$

Para que se verifique la fórmula de muestreo (4.10) suponemos en esta sección que las funciones de V_0 son continuas y que

$$0 < \|(Z\phi)(a,\cdot)\|_0 \leq \|(Z\phi)(a,\cdot)\|_\infty < \infty\,.$$

Para aplicar la fórmula de Poisson a las funciones de $V_1 = DV_\phi$ suponemos además que la función

$$H_\phi(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w+n)| \in L^\infty(0,1)$$

(véase Sección 2.4). Esta condición se satisface si por ejemplo $\widehat{\phi}(w) = O\big((1+|w|)^{-p}\big),\quad w \in \mathbb{R}$, para algún $p > 1$.

4.3.1. Error de aliasing para las funciones de V_1

Obtenemos en esta sección un expresión para la transformada de Fourier del error de aliasing para las funciones del espacio V_1, a partir de la cual deducimos estimaciones para la norma en $L^\infty(\mathbb{R})$ y para la norma en $L^2(\mathbb{R})$ de dicho error.

Transformada de Fourier del error de aliasing

Consideremos el subespacio de V_1 definido por

$$M_a := \{f \in V_1 : f(n+a) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Para cada $f \in V_1$, construiremos dos funciones $Q_{V_0}f \in V_0$ y $Q_{M_a}f \in M_a$, tales que $f = Q_{V_0}f + Q_{M_a}f$. La función $Q_{M_a}f$ será precisamente el error de aliasing E_af ya que

$$E_af = E_aQ_{V_0}f + E_aQ_{M_a}f = E_aQ_{M_a}f = Q_{M_a}f\,. \tag{4.19}$$

Se puede obtener una caracterización de las funciones de M_a, de la misma forma que en la Sección 2.4. En efecto, como hemos supuesto que se verifica $\|H_\phi\|\| < \infty$ entonces, para cada $f \in V_1$,

$$(Zf)(t,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(w+n)e^{2\pi i(w+n)t} \quad \text{c.t.p.}\, w \in \mathbb{R}\,. \tag{4.20}$$

de donde se deduce la expresión para la transformada de Zak de las funciones $f \in V_1$ (Lema 2.3),

$$(Zf)\Big(\frac{t}{2}, w\Big) = m_f\Big(\frac{w}{2}\Big)(Z\phi)\Big(t, \frac{w}{2}\Big) + m_f\Big(\frac{w}{2} + \frac{1}{2}\Big)(Z\phi)\Big(t, \frac{w}{2} + \frac{1}{2}\Big), \quad (4.21)$$

en c.t.p. $w \in \mathbb{R}$. Una función $f \in V_1$ pertenece a M_a si y sólo si $(Zf)(a, w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n + a)e^{-2\pi inw} = 0$. Por tanto, una función $f \in V_1$ pertenece a M_a si y sólo si

$$m_f(w/2)(Z\phi)(2a, w/2) + m_f(w/2 + 1/2)(Z\phi)(2a, w/2 + 1/2) = 0, \quad (4.22)$$

en c.t.p. $w \in \mathbb{R}$. Utilizando esta caracterización, obtenemos en el próximo teorema, una expresión para la transformada de Fourier $\widehat{E_a f} = \widehat{Q_{M_a} f}$.

Nótese que de la ecuación (4.20) se deduce $|(Z\phi)(t, w)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w+n)|$ c.t.p. $w \in \mathbb{R}$. Entonces, la hipótesis $\||H_\phi|\|_\infty < \infty$ implica que $\|(Z\phi)(t, \cdot)\|_\infty < \infty$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, la hipótesis $\|(Z\phi)(a, \cdot)\|_\infty < \infty$ es superflua en este caso.

Teorema 4.5 *Sea $f \in V_1$ y sea v_f la única función 1-periódica de $L^2(0, 1)$ que verifica $\widehat{P_{W_0} f} = v_f(w)\widehat{\psi}(w)$. Entonces*

$$\widehat{E_a f}(w) = e^{\pi iw} \frac{(Z\phi)(2a, w/2 + 1/2)}{(Z\phi)(a, w)} v_f(w)\widehat{\phi}(w/2). \quad (4.23)$$

Demostración. La caracterización (4.22) conduce a considerar la función $\varphi_a \in M_a$, cuya transformada de Fourier es

$$\widehat{\varphi}_a(w) := e^{-\pi iw}(Z\phi)(2a, w/2 + 1/2)\widehat{\phi}(w/2)\,. \quad (4.24)$$

Para $f \in V_1$ definimos

$$\widehat{Q_{V_0} f}(w) := \alpha_f(w)\widehat{\phi}(w), \quad \widehat{Q_{M_a} f}(w) := \beta_f(w)\widehat{\varphi}_a(w), \quad (4.25)$$

donde

$$\alpha_f(w) := \frac{m_f(w/2)(Z\phi)(2a, w/2) + m_f(w/2 + 1/2)(Z\phi)(2a, w/2 + 1/2)}{(Z\phi)(a, w)}$$

y

$$\beta_f(w) := e^{2\pi iw} \frac{m_f(w/2)\overline{m_\psi(w/2)} + m_f(w/2 + 1/2)\overline{m_\psi(w/2 + 1/2)}}{(Z\phi)(a, w)}\,. \quad (4.26)$$

La función α_f es 1-periódica, y pertenece a $L^2(0,1)$ pues $0 < \|(Z\phi)(a,\cdot)\|_0$ y $\|(Z\phi)(2a,\cdot)\|_\infty < \infty$. Por tanto $Q_{V_0}f \in V_0$. Similarmente, se prueba que $Q_{M_a}f \in V_1$. Como $Q_{M_a}f$ satisface (4.22), se sigue que pertenece a M_a. Utilizando (4.21) se comprueba que

$$\widehat{f} = \widehat{Q_{V_0}f} + \widehat{Q_{M_a}f}, \tag{4.27}$$

y como consecuencia, (4.19) implica que $\widehat{E_a f} = \widehat{Q_{M_a}f}$. Comparando (4.16) con (4.26) se observa que $\beta_f(w) = e^{2\pi i w} v_f(w)/(Z\phi)(a,w)$. Substituyendo β_f y $\widehat{\varphi}_a$ en (4.25), se obtiene el teorema. □

Nótese que el espacio V_1 se puede expresar como la suma directa de los espacios V_0 y M_a, y que Q_{V_0} y Q_{M_a} son las correspondientes proyecciones. Esto es consecuencia de (4.27) y de la fórmula de muestreo (4.10).

Corolario 4.3 *Sea ϕ una función de escala cardinal. Entonces, para cada $f \in V_1$,*

$$\|E_0 f\|_2 = \sqrt{2}\ \|P_{W_0}f\|_2\,.$$

Demostración. Como en este caso $(Z\phi)(0,w) = 1$, la fórmula (4.23) se reduce a la fórmula $\widehat{E_0 f}(w) = e^{\pi i w} v_f(w)\widehat{\phi}(w/2)$, de donde se obtiene el resultado. □

Acotación uniforme del error de aliasing

El próximo teorema proporciona una acotación uniforme del error de aliasing. Recuérdese que hemos supuesto que la función definida por $H_\phi(w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w+n)|$ está esencialmente acotada en $(0,1)$.

Teorema 4.6 *Para cada $f \in V_1$ se tiene que $\widehat{E_a f}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, y se verifica la siguiente desigualdad*

$$|E_a f(t)| \le 2\left\| \frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)H_\phi(w)}{(Z\phi)(a,2w)} \right\|_{L^2(0,1)} \|P_{W_0}f\|_2, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.28}$$

Demostración. Para $f \in V_1$, consideremos la función v_f tal que $\widehat{P_{W_0}f} =$

$v_f(w)\widehat{\psi}(w)$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Big| & \frac{(Z\phi)(2a, w/2+1/2)}{(Z\phi)(a,w)} v_f(w)\widehat{\phi}(w/2)\Big| dw \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \Big|\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)}{(Z\phi)(a,2w)} v_f(2w)\widehat{\phi}(w)\Big| dw \\
&= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \Big|\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)}{(Z\phi)(a,2w)} v_f(2w)\widehat{\phi}(w+n)\Big| dw \\
&= 2\int_0^1 \Big|\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)}{(Z\phi)(a,2w)} v_f(2w)\Big| H_\phi(w) dw\,.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Big| & \frac{(Z\phi)(2a, w/2+1/2)}{(Z\phi)(a,w)} v_f(w)\widehat{\phi}(w/2)\Big| dw \\
&\le 2\bigg\|\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)H_\phi(w)}{(Z\phi)(a,2w)}\bigg\|_{L^2(0,1)} \|P_{W_0}f\|_2.
\end{aligned}
$$

Entonces, $\widehat{E_a f}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, y de la transformada inversa de Fourier se sigue (4.28). □

Existe, además, una representación integral de $E_a f(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Corolario 4.4 *Sea $f \in V_1$ y sea v_f la única función 1-periódica de $L^2(0,1)$ que satisface $\widehat{P_{W_0} f} = v_f(w)\widehat{\psi}(w)$. Entonces, $E_a f \in C_0(\mathbb{R})$ y*

$$
E_a f(t) = 2\int_0^1 e^{2\pi i w}\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)}{(Z\phi)(a,2w)}(Z\phi)(2t,w)v_f(2w)dw, \quad t\in\mathbb{R}.
\tag{4.30}
$$

Demostración. Del Teorema 4.6 se obtiene que $\widehat{E_a f}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R})$ y entonces, $E_a f \in C_0(\mathbb{R})$. Utilizando la transformada inversa de Fourier y un cálculo similar a (4.29) se obtiene

$$
\begin{aligned}
E_a f(t) &= 2\int_{\mathbb{R}} \widehat{E_a f}(2w) e^{2\pi i 2wt} dw \\
&= 2\int_0^1 e^{2\pi i w}\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)}{(Z\phi)(a,2w)} v_f(2w)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(w+n)e^{4\pi i(w+n)t} dw\,,
\end{aligned}
$$

y entonces la fórmula (4.30) se deduce de (4.20). □

Para $z \in \mathbb{C}$ denotamos por arg z el número $w_0 \in [-\pi, \pi)$ tal que $z = |z|e^{iw_0}$. En el siguiente coralario, se dan soluciones extremales de la acotación (4.28) en el caso de que arg $\widehat{\phi}(w)$ sea una fúnción 2π-periódica. Nótese que éste es el caso si $\widehat{\phi}(w) \geq 0$ (por ejemplo en el caso de Shannon y de Meyer) o si ϕ tiene fase lineal con fase $p \in \mathbb{Z}$. Siguiendo el libro de Chui [34, pág. 160]) se dice que $f \in L^2(\mathbb{R})$ tiene fase lineal, con fase a, si su transformada de Fourier verifica

$$\widehat{f}(w) = \pm|\widehat{f}(w)|e^{-2\pi iaw}\,,$$

donde el signo + o − es independiente de w. Por ejemplo, si $m > 0$ es par el B-spline de grado $m-1$, N_m tiene fase lineal, con fase $m/2 \in \mathbb{N}$, ya que $\widehat{N}_m(w) = \operatorname{senc}^m(w)e^{-\pi imw}$.

Corolario 4.5 *Si* arg $\widehat{\phi}(w)$ *es una función* 2π*-periódica entonces, para cada* $f \in V_1$ *se verifica*

$$|E_af(t)| \leq 2\left\|\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)(Z\phi)(0,w)}{(Z\phi)(a,2w)}\right\|_{L^2(0,1)} \|P_{W_0}f\|_2\,, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.31}$$

Cuando $a = 0$ *o* $a = 1/2$ *las funciones* $f \in V_1$ *tales que*

$$\overline{v_f(w)} := \lambda e^{\pi iw(1\pm 1)}(Z\phi)(2a, w/2+1/2)(Z\phi)(2a, w/2)/(Z\phi)(a,w), \quad \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

son soluciones extremales para (4.31).

Demostración. Nótese primero que debido a (4.20) se verifica que

$$|(Z\phi)(0,w)| = \Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(w+n)|e^{2\pi i \arg\widehat{\phi}(w)}\Big| = H_\phi(w)\,.$$

Por tanto, la desigualdad (4.28) se puede escribir en la forma (4.31).

Sea $f \in V_1$, verificando que, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\overline{v_f(w)} := \lambda e^{\pi iw(1\pm 1)}(Z\phi)(2a, w/2+1/2)(Z\phi)(2a, w/2)/(Z\phi)(a,w)\,.$$

Existe tal f en V_1 porque $(Z\phi)(2a, w/2+1/2)(Z\phi)(2a, w/2)/(Z\phi)(a,w)$ es una función 1-periódica en $L^2(0,1)$. Utilizando (4.30) y la periodicidad de la transformada de Zak, i.e., $(Z\phi)(\pm 1 + 2a, w) = e^{\pm 2\pi iw}(Z\phi)(2a, w)$, se obtiene

$$\begin{aligned}|E_af(\pm 1/2 + a)| &= 2\Big|\int_0^1 v_f(2w)e^{2\pi iw(1\pm 1)}\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)(Z\phi)(2a,w)}{(Z\phi)(a,2w)}dw\Big| \\ &= 2\left\|\frac{(Z\phi)(2a, w+1/2)(Z\phi)(2a,w)}{(Z\phi)(a,2w)}\right\|_{L^2(0,1)} \|P_{W_0}f\|_2.\end{aligned}$$

Finalmente, observando que $|(Z\phi)(1,w)| = |(Z\phi)(0,w)|$ se obtiene el resultado buscado. □

Acotación de la energía del error de aliasing

Para cada $f \in V_1$, el Teorema 4.5 proporciona la norma en $L^2(\mathbb{R})$ del error de aliasing

$$\|E_a f\|_2 = \sqrt{2}\left\| v_f(2w)\frac{(Z\phi)(2a,w+1/2)}{(Z\phi)(a,2w)}\right\|_{L^2(0,1)} \tag{4.32}$$

la cual permite deducir el siguiente resultado:

Teorema 4.7 *Existen dos constantes K_0 y K_∞ tales que*

$$K_0\|P_{W_0}f\|_2^2 \le \|E_a f\|_2^2 \le K_\infty\|P_{W_0}f\|_2^2, \quad f \in V_1. \tag{4.33}$$

Además, las constantes óptimas en las desigualdades anteriores son

$$\begin{aligned} K_0 &:= \left\| \frac{|(Z\phi)(2a,w)|^2 + |(Z\phi)(2a,w+1/2)|^2}{|(Z\phi)(a,2w)|^2} \right\|_0, \\ K_\infty &:= \left\| \frac{|(Z\phi)(2a,w)|^2 + |(Z\phi)(2a,w+1/2)|^2}{|(Z\phi)(a,2w)|^2} \right\|_\infty. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Demostración. A partir de (4.32) se obtiene

$$\begin{aligned} \|E_a f\|_2^2 =& 2\int_0^{1/2} \left| v_f(2w)\frac{(Z\phi)(2a,w+1/2)}{(Z\phi)(a,2w)}\right|^2 dw \\ &+ 2\int_{1/2}^{1} \left| v_f(2w)\frac{(Z\phi)(2a,w+1/2)}{(Z\phi)(a,2w)}\right|^2 dw \\ =& 2\int_0^{1/2} |v_f(2w)|^2 \frac{|(Z\phi)(2a,w)|^2 + |(Z\phi)(2a,w+1/2)|^2}{|(Z\phi)(a,2w)|^2} dw\,. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Como $\|P_{W_0}f\|_2^2 = 2\int_0^{1/2}|v_f(2w)|^2 dw$, se sigue (4.33) para los valores de las constantes K_0 y K_∞ dados en (4.34).

Para demostrar la optimalidad de la constante K_∞, consideremos $\lambda < K_\infty$. Existe un conjunto $\Omega \subseteq (0,1/2)$ con medida de Lebesgue positiva tal que $(|(Z\phi)(2a,w)|^2 + |(Z\phi)(2a,w+1/2)|^2)/|(Z\phi)(a,2w)|^2 > \lambda$, para todo $w \in \Omega$. Sea $f \in V_1$ tal que $v_f(w) = 0$ cuando $w/2 \in (0,1/2) \setminus \Omega$. Entonces, de (4.35), se obtiene

$$\|E_a f\|_2^2 \ge 2\lambda \int_0^{1/2} |v_f(2w)|^2 dw = \lambda\,\|P_{W_0}f\|_2^2.$$

Esto prueba que (4.34) da el menor valor de K_∞ en (4.33). Similarmente se prueba la optimabilidad de K_0. $\square$

Las constantes óptimas para (4.33) calculadas por Janssen en [78] son

$$K_0 = 1 + \left\| \frac{(Z\psi)(a,w)}{(Z\phi)(a,w)} \right\|_0^2, \quad K_\infty = 1 + \left\| \frac{(Z\psi)(a,w)}{(Z\phi)(a,w)} \right\|_\infty^2,$$

las cuales necesariamente deben coincidir con las dadas en (4.34). Una demostración directa de este resultado es como sigue: Utilizando la expresión (4.21) para $f = \phi$ y $f = \psi$ y las relaciones (4.15), se obtiene que

$$\overline{m_\phi}(w)(Z\phi)(a,2w) + \overline{m_\psi}(w)(Z\psi)(a,2w) = (Z\phi)(2a,w)\,.$$

De aquí, un cálculo directo da

$$|(Z\phi)(2a,w)|^2 + |(Z\phi)(2a,w+1/2)|^2 = |(Z\phi)(a,2w)|^2 + |(Z\psi)(a,2w)|^2\,,$$

de donde se deduce fácilmente la coincidencia de las constantes.

El espacio $V_1 = DV_\varphi$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor, cuyo núcleo reproductor es

$$k_1(t,s) = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(2t-n)\overline{\phi(2s-n)}\,.$$

Así, para cada $t \in \mathbb{R}$, se tiene $|h(t)|^2 \le k_1(t,t)\|h\|_2^2$, $h \in V_1$. Por tanto, de (4.33) se obtiene una nueva cota para el error de aliasing de las funciones $f \in V_1$,

$$|E_a f(t)|^2 \le 2K_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\phi(2t-n)|^2 \|P_{W_0} f\|_2^2, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.36}$$

4.3.2. Error de aliasing para las funciones de V_2

En esta sección tratamos el error de aliasing cometido al aplicar la fórmula de muestreo a las funciones del subespacio V_2 del análisis multirresolución. Como en la sección anterior comenzamos obteniendo una expresión para la transformada de Fourier de dicho error. Para hacer más simple la exposición, nos limitamos al caso $a = 0$. Notaremos $G_f(w) := (Zf)(0,w)$ y $Ef := E_0 f$. Recuérdese que D denota el operador de dilatación, $Df(t) := \sqrt{2}f(2t)$.

Cualquier función h en V_2 se puede expresar como $h = P_{V_1}h + P_{W_1}h$ y entonces, $Eh = EP_{V_1}h + EP_{W_1}h$. Como el Teorema 4.5 proporciona $\widehat{Ef}$ para $f \in V_1$, será suficiente obtener $\widehat{Ef}$ cuando $f \in W_1$.

Teorema 4.8 *Sea f una función de W_1 y sea $v_{D^{-1}f}$ la única función 1-periódica de $L^2(0,1)$ que verifica $\widehat{D^{-1}f} = v_{D^{-1}f}(w)\widehat{\psi}(w)$. Entonces,*

$$\widehat{Ef}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[a_1(w/4)v_{D^{-1}f}(w/2) - a_2(w/4)v_{D^{-1}f}(w/2+1/2)\big]\widehat{\phi}(w/4), \tag{4.37}$$

donde

$$a_1(w) := \frac{G_\phi(w+1/2)}{G_\phi(2w)}e^{2\pi iw} + \frac{G_\phi(2w+1/2)G_\psi(2w)}{G_\phi(4w)G_\phi(2w)}m_\phi(2w+1/2)m_\phi(w), \tag{4.38}$$

y

$$a_2(w) := \frac{G_\psi(2w+1/2)}{G_\phi(4w)}m_\phi(2w)m_\phi(w).$$

Demostración. Para una función $f \in W_1$ se tiene $D^{-1}f \in V_1$. Así, $D^{-1}f = Q_{V_0}D^{-1}f + Q_{M_0}D^{-1}f$, y entonces $f = DQ_{V_0}D^{-1}f + DQ_{M_0}D^{-1}f$. Como $DQ_{V_0}D^{-1}f \in V_1$ se puede descomponer f como

$$f = Q_{V_0}DQ_{V_0}D^{-1}f + Q_{M_0}DQ_{V_0}D^{-1}f + DQ_{M_0}D^{-1}f\,.$$

Como $Q_{V_0}DQ_{V_0}D^{-1}f \in V_0$ y $Q_{M_0}DQ_{V_0}D^{-1}f(n) = DQ_{M_0}D^{-1}f(n) = 0$ para $n \in \mathbb{Z}$, el error de aliasing para f está dado por

$$Ef = Q_{M_0}DQ_{V_0}D^{-1}f + DQ_{M_0}D^{-1}f. \tag{4.39}$$

Tomando la transformada de Fourier, y teniendo en cuenta que $Q_{M_0}D^{-1}f = ED^{-1}f$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(DQ_{M_0}D^{-1}f)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}(Q_{M_0}D^{-1}f)(w/2)\\ &= \frac{G_\phi(w/4+1/2)}{\sqrt{2}G_\phi(w/2)}e^{\pi iw/2}v_{D^{-1}f}(w/2)\widehat{\phi}(w/4),\end{aligned} \tag{4.40}$$

y

$$\mathcal{F}(Q_{M_0}DQ_{V_0}D^{-1}f)(w) = \frac{G_\phi(w/2+1/2)}{G_\phi(w)}e^{\pi iw}v_{DQ_{V_0}D^{-1}f}(w)\widehat{\phi}(w/2).$$

Ahora obtenemos $v_{DQ_{V_0}D^{-1}f}$ en términos de $v_{D^{-1}f}$. Para ello, utilizando (4.25) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(DQ_{V_0}D^{-1}f)(w) &= (1/\sqrt{2})\mathcal{F}(Q_{V_0}D^{-1}f)(w/2)\\ &= (1/\sqrt{2})\alpha_{D^{-1}f}(w/2)\widehat{\phi}(w/2)\,.\end{aligned}$$

Como consecuencia, $m_{DQ_{V_0}D^{-1}f} = (1/\sqrt{2})\alpha_{D^{-1}f}$. Por tanto, de (4.16) se deduce

$$v_{DQ_{V_0}D^{-1}f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha_{D^{-1}f}\Big(\frac{w}{2}\Big)\overline{m_\psi\Big(\frac{w}{2}\Big)} + \alpha_{D^{-1}f}\Big(\frac{w}{2}+\frac{1}{2}\Big)\overline{m_\psi\Big(\frac{w}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big]\,.$$

Encontramos ahora la relación entre $\alpha_{D^{-1}f}$ y $v_{D^{-1}f}$. En efecto de (4.24) y (4.25) se tiene

$$m_{D^{-1}f}(w/2) = \alpha_{D^{-1}f}(w)m_\phi(w/2) + \beta_{D^{-1}f}(w)e^{-\pi i w}G_\phi(w/2+1/2)\,.$$

Como $D^{-1}f \in W_0$, se tiene $m_{D^{-1}f}(w/2) = v_{D^{-1}f}(w)m_\psi(w/2)$. Por tanto,

$$v_{D^{-1}f}(w)m_\psi(w/2) = \alpha_{D^{-1}f}(w)m_\phi(w/2) + \beta_{D^{-1}f}(w)G_\phi(w/2+1/2)e^{-\pi i w}\,.$$

Multiplicando esta igualdad por $G_\phi(w/2)$ y sumando la igualdad obtenida consigo misma trasladada por 1, se obtiene que

$$\alpha_{D^{-1}f}(w) = \frac{G_\psi(w)}{G_\phi(w)}v_{D^{-1}f}(w)\,,$$

donde hemos utilizado (4.21). Substituyendo en (4.40) y teniendo en cuenta (4.39), se obtiene finalmente (4.37). □

Utilizando este teorema deducimos a continuación acotaciones de las normas L^2 y L^∞ del error de aliasing para funciones del espacio V_2.

Utilizando (4.37), para todo $f \in W_1$ se obtiene

$$\begin{aligned}\|Ef\|_2 &= \|\widehat{DEf}\|_2 \\ &= \big\|\big[a_1(w/2)v_{D^{-1}f}(w) - a_2(w/2)v_{D^{-1}f}(w+1/2)\big]\widehat{\phi}(w/2)\big\|_2 \\ &= \sqrt{2}\big\|a_1(w)v_{D^{-1}f}(2w) - a_2(w)v_{D^{-1}f}(2w+1/2)\big\|_{L^2(0,1)}.\end{aligned} \tag{4.41}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\|P_{W_0}D^{-1}f\|_2 = \|P_{W_1}f\|_2$, el segundo término en (4.33) permite deducir la acotación

$$\|Ef\|_2 \le \sqrt{K}_\infty\|P_{W_0}f\|_2 + \sqrt{2}\big(\|a_1\|_\infty + \|a_2\|_\infty\big)\|P_{W_1}f\|_2\,,$$

para todo $f \in V_2$.

Procediendo como en el Teorema 4.6, de la expresión (4.37) se obtiene que para cada $f \in W_1$

$$|Ef(t)| \le 2\sqrt{2}\Big(\|a_1(w)H_\phi(w)\|_{L^2(0,1)} + \|a_2(w)H_\phi(w)\|_{L^2(0,1)}\Big)\|f\|_2, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Ahora, para $f \in V_2$ utilizando la acotación (4.28), se obtiene que

$$|Ef(t)| \le L_1 \|P_{W_0} f\|_2 + L_2 \|P_{W_1} f\|_2, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde

$$L_1 := 2 \left\| \frac{G_\phi(w+1/2) H_\phi(w)}{G_\phi(2w)} \right\|_{L^2(0,1)}$$

y

$$L_2 := 2\sqrt{2} \Big(\|a_1(w) H_\phi(w)\|_{L^2(0,1)} + \|a_2(w) H_\phi(w)\|_{L^2(0,1)} \Big).$$

4.3.3. Ejemplos

A continuación, ilustramos los resultados obtenidos con algunos ejemplos clásicos:

• **Análisis multirresolución de Shannon.** Tomando el seno cardinal como función de escala $\phi = $ senc, el correspondiente análisis multirresolución contiene los espacios de Paley-Wiener (Sección 1.6.1)

$$V_j = PW_{2^{j-1}} = \big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-2^{j-1}, 2^{j-1}] \big\}\,.$$

Entonces, para $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\widehat{P_{W_0} f}(w) = \mathcal{X}_{\{1/2<|w|<1\}}(w) \widehat{f}(w), \qquad \widehat{P_{W_1} f}(w) = \mathcal{X}_{\{1<|w|<2\}}(w) \widehat{f}(w),$$

Para $f \in PW_1$, del Corolario 4.3 se obtiene

$$\|Ef(t)\|_2^2 = 2 \int_{|w|>1/2} |\widehat{f}(w)|^2 dw. \tag{4.42}$$

Mediante un cambio de variable, la recuperación de una función bandalimitada al intervalo $[-\sigma, \sigma]$ por medio de sus muestras $\{f(n/\sigma)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ produce un error de aliasing

$$\Big\| f(t) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n/\sigma) \operatorname{senc}(\sigma t - n) \Big\|_2^2 = 2 \int_{|w|>\sigma} |\widehat{f}(w)|^2 dw\,.$$

Como $\widehat{\phi}(w) = \mathcal{X}_{\{|w|<1/2\}}(w) \ge 0$ y $G_\phi(w) := (Z\phi)(0, w) = 1$, la desigualdad (4.31) conduce a: Para $f \in PW_1$,

$$|Ef(t)|^2 \le 4 \int_{|w|>1/2} |\widehat{f}(w)|^2 dw, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4.43}$$

Nótese que la acotación anterior se deduce también de (4.36) ya que en este caso $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\operatorname{senc}(t-n)|^2 = 1$ y $K_\infty = 1$. Soluciones extremales para (4.43), teniendo en cuenta el Corolario 4.5, son, por ejemplo, funciones f tales que $v_f(w) = \lambda$ o $v_f(w) = \lambda e^{-2\pi i w}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. En particular , la wavelet madre ψ, y también la solución extremal dada por Brown [25] $f(t) = \operatorname{senc}(2t-1)$ para la acotación (4.11) (ya que $v_{\operatorname{senc}(2t-1)}(w) = 1/2\ e^{-2\pi i w}$).

Deducimos, ahora, una acotación óptima de $\|Ef\|_2$ para $f \in V_2$. Utilizando que

$$\widehat{\psi}(w) = e^{\pi i w}\mathcal{X}_{\{1/2<|w|<1\}}(w) \quad \text{y} \quad G_\psi(w) = -e^{-\pi i w},\ |w| < 1/2\,,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} a_1(w) &= e^{2\pi i w}\left[\mathcal{X}_{\{|w|<1/8\}}(w) + \mathcal{X}_{\{1/4<|w|\}}(w)\right], \\ a_2(w) &= \operatorname{sgn}(w) i e^{2\pi i w}\mathcal{X}_{\{|w|<1/8\}}(w), \qquad |w| < 1/4\,. \end{aligned}$$

Así, de (4.41), se obtiene que, cuando $h \in W_1$,

$$\begin{aligned} \|Eh\|_2^2 =& 2\int_{|w|<1/8} |v_{D^{-1}h}(2w) - i\operatorname{sgn}(w) v_{D^{-1}h}(2w+1/2)|^2 dw \\ &+ 2\int_{1/4<|w|<1/2} |v_{D^{-1}h}(2w)|^2 dw \\ \leq& 4\int_{|w|<1/8} (|v_{D^{-1}h}(2w)|^2 + |v_{D^{-1}h}(2w+1/2)|^2) dw + \|h\|_2^2 \\ \leq& 3\,\|h\|_2^2. \end{aligned}$$

Para $f \in PW_2$, como $Ef = EP_{V_1}f + EP_{W_1}f$, se tiene

$$\|Ef\|_2 \leq \sqrt{2}\ \|P_{W_0}f\|_2 + \sqrt{3}\ \|P_{W_1}f\|_2\,.$$

Las constantes $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son óptimas pues $\|Ef\|_2 = \sqrt{2}\ \|P_{W_0}f\|_2$ cuando $f \in V_1$, y $\|Ef\|_2 = \sqrt{3}\ \|P_{W_1}f\|_2$ para $f \in W_1$ verificando $v_{D^{-1}f}(w+1/2) = i\operatorname{sgn}(w) v_{D^{-1}f}(w)$, $|w| < 1/4$.

• **Análisis multirresolución de splines de grado impar.** El B-*spline* de grado $2r-1$, N_{2r}, es una función de escala de Riesz del análisis multirresolución de *splines* de grado $2r-1$ (ver Sección 1.6.2). Sea ϕ_{2r} la correspondiente función de escala ortonormal, cuya transformada de Fourier es $\widehat{\phi}_{2r}(w) := \widehat{N}_{2r}(w)/\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{N}_{2r}(w+n)|^2\big)^{1/2}$ (véase Sección 1.3).

Utilizando las igualdades

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{N}_k(2w+n)|^2 &= e^{2\pi i 2kw}\sum_{n\in\mathbb{Z}} N_{2k}(n) e^{-2\pi i n 2w} \\ &= \frac{-\sin^{2k} 2\pi w}{(2k-1)!}\cot^{(2k-1)} 2\pi w, \end{aligned} \tag{4.44}$$

para $k \in \mathbb{N}$, donde $\cot^{(2k-1)}$ denota la derivada $2k-1$-ésima de la función cotangente (ver [34, p. 88-89]), y la fórmula de Poisson se obtiene

$$|G_{\phi_{2r}}(2w)|^2 = \frac{-(4r-1)!(\cot^{(2k-1)} 2\pi w)^2}{[(2r-1)!]^2 \cot^{(4r-1)} 2\pi w}\,. \tag{4.45}$$

La función ϕ_{2r} tiene transformada de Fourier con argumento 2π-periódico, y como consecuencia se verifica la acotación (4.31) con soluciones extremales. Aproximaciones numéricas a la constante en esta acotación

$$2\big\|G_{\phi_{2r}}(w+1/2)G_{\phi_{2r}}(w)/G_{\phi_{2r}}(2w)\big\|_{L^2(0,1)}\,,$$

se pueden obtener utilizando (4.45). Por ejemplo, para $r = 1, 2, 3, 4$ se obtienen los valores 2,678, 2,253, 2,169 y 2,128 respectivamente.

Utilizando (4.34) y (4.45), después de algunos cálculos se puede comprobar que, para $r = 1, 2, 3, 4$, las constantes óptimas para la acotación (4.33) son

$$K_0 = 1, \quad K_\infty = 1 + G^2_{\phi_{2r}}(1/2)\,.$$

Los valores de la constante K_∞ son 4, $52/17 \approx 3{,}0588$, $2077/691 \approx 3{,}0057$, y $2789284/929569 \approx 3{,}0006$ para $r = 1, 2, 3, 4$ respectivamente.

Finalmente tratamos de la elección del *shift* de muestreo a, es decir de la elección de los puntos de muestreo $\{n+a\}_{n\in\mathbb{Z}}$, para optimizar la constante

$$\left\|\frac{(Z\phi_{2r})(2a, w+1/2)(Z\phi_{2r})(0,w)}{(Z\phi_{2r})(a,2w)}\right\|_{L^2(0,1)} \tag{4.46}$$

que aparece en la acotación del error de aliasing (4.31). Se puede comprobar fácilmente que para $a \in [0,1)$ y $a \neq 1/2$ se satisface la condición $0 < \|(Z\phi_{2r})(a,\cdot)\|_0 \leq \|(Z\phi_{2r})(a,\cdot)\|_\infty < \infty$. Se verifica pues la fórmula de muestreo (4.10). Para esta fórmula el error de aliasing verifica la acotación (4.31) con soluciones extremales (Corolario 4.5). Un posible criterio para elegir el *shift* de muestreo a, consiste en tomar aquella que minimiza la constante (4.46) que aparece en esta acotación. Un cálculo numérico, utilizando (4.44) da $a \approx 0{,}18$ para los *splines* lineales, y $a \approx 0{,}21$ para los cúbicos.

• **Análisis multirresolución de Meyer.** Sea ϕ la función de escala de un MRA de Meyer (véase el Sección 1.6.3)

Nótese que $1 \leq G_\phi(w) \leq \sqrt{2}$. En efecto,

$$G_\phi(w) := \begin{cases} 1, & \text{si } w \in [0,1/3] \cup [2/3,1] \\ \widehat{\phi}(w) + \widehat{\phi}(w-1), & \text{si } w \in [1/3,2/3)\,. \end{cases}$$

Utilizando que $\widehat{\phi}^2(w)+\widehat{\phi}^2(w-1)=1$, se obtiene la conclusión. Denotando

$$h(w):=\big[G_\phi^2(w)+G_\phi^2(w+1/2)\big]/G_\phi^2(2w)\,,$$

se prueba fácilmente que $1\le h(w)\le 3$, para $w\in\mathbb{R}$. Como $\widehat{\phi}$ es continua, $\widehat{\phi}(1/3)=1$, and $\widehat{\phi}(2/3)=0$, existe $w_0\in(1/3,2/3)$ tal que $\widehat{\phi}(w_0)=1/\sqrt{2}$, y finalmente, $h(w_0/2)=1$ y $h(w_0)=3$. Entonces $K_0=1$ y $K_\infty=3$. Por tanto, (4.33) se escribe como

$$\|P_{W_0}f\|_2^2\le\|Ef\|_2^2\le 3\|P_{W_0}f\|_2^2,\quad f\in V_1\,,$$

siendo las constantes 1 y 3 óptimas en estas desigualdades.

Como $\widehat{\phi}$ es positiva, se verifica la desigualdad (4.31), existiendo además soluciones extremales para ella. Con respecto a la constante en (4.31), nótese que

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{G_\phi^2(w+1/2)G_\phi^2(w)}{G_\phi^2(2w)}dw\\&=2\int_0^{1/6}G_\phi^2(w+1/2)dw+2\int_{1/6}^{1/3}\frac{1}{G_\phi^2(2w)}dw+2\int_{1/3}^{1/2}G_\phi^2(w)dw\\&=\int_{1/3}^{2/3}\big[2G_\phi^2(w)+\frac{1}{G_\phi^2(w)}\big]dw.\end{aligned}$$

Utilizando que $1\le G_\phi(w)\le\sqrt{2}$ y $3\le 2x^2+1/x^2\le 9/2$, cuando $x\in[1,\sqrt{2}]$, se obtiene que

$$2\le 2\Big\|\frac{G_\phi(w+1/2)G_\phi(w)}{G_\phi(2w)}\Big\|_{L^2(0,1)}\le\sqrt{6}\,.$$

Apéndice A

Sucesiones de Bessel, bases de Riesz y frames

En este apéndice $\big(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ denotará un espacio de Hilbert separable y $\|\cdot\|$ su norma asociada. La demostración de los resultados incluidos en este apéndice, así como un estudio más completo de estas cuestiones, se pueden encontrar en los libros de Christensen [33] y de Young [135].

A.1. Sucesiones Bessel

Definición A.1 *Se dice que la sucesión $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$ es una sucesión de Bessel con cota B si*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, \eta_n\rangle|^2 \le B\|f\|^2 \qquad \textit{para todo } f \in \mathcal{H}\,.$$

Teorema A.1 (Teorema 3.2.3 [33]) *Sea $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$ una sucesión de $\mathcal{H}$ y $B > 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$ *es una sucesión de Bessel de cota B*

(ii) Para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (con un número finito de elementos no nulos) se verifica

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\eta_n\Big\|^2 \le B\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2\,.$$

(iii) El operador

$$T : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{H}\,, \qquad T\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\eta_n\,,$$

está bien definido y es acotado con $\|T\|^2 \leq B$.

La condición (ii) de este teorema es independiente de como se ordenen los elementos de $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Esto lleva a que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\eta_n$ converge incondicionalmente para toda $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. En consecuencia utilizaremos la notación $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\eta_n$.

Si $\{\eta_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel, el operador definido en el apartado (iii) del teorema anterior se denomina operador *preframe* u operador de síntesis asociado a $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Su operador adjunto es

$$T^* : \mathcal{H} \to \ell^2(\mathbb{Z}) , \qquad T^*f := \big\{\langle f, \eta_n\rangle_{\mathcal{H}}\big\}_{n\in\mathbb{Z}} ,$$

denominado operador de análisis.

A.2. Bases de Riesz

Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, las bases ortonormales de $\mathcal{H}$ están descritas por $\{\mathcal{U}e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $\mathcal{H}$ y $\mathcal{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador unitario. Debilitando el carácter unitario del operador $\mathcal{U}$ se definen las bases de Riesz:

Definición A.2 *Una base de Riesz de $\mathcal{H}$ es una sucesión que tiene la forma $\{Ue_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador lineal acotado y biyectivo (isomorfismo).*

Se dice que dos sucesiones $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}$ son biortogonales si

$$\langle \eta_n, \xi_m\rangle = \delta_{n,m} , \quad n, m \in \mathbb{Z} .$$

El siguiente teorema proporciona tres caracterizaciones de las bases de Riesz.

Teorema A.2 (Teorema 3.6.6 [33]) *Sea $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de $\mathcal{H}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base de Riesz de* $\mathcal{H}$.

(b) $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una sucesión completa en $\mathcal{H}$ y existen constantes $A, B > 0$, tales que para cada sucesión finita, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, se verifica*

$$A\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\eta_n\Big\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 . \tag{A.1}$$

(c) $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una sucesión de Bessel completa de $\mathcal{H}$ y tiene una sucesión biortogonal $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que es también una sucesión de Bessel completa de $\mathcal{H}$.*

(d) $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una sucesión completa de* $\mathcal{H}$ *y la matriz* $\{\langle \eta_k, \eta_j\rangle\}_{j,k=-\infty}^{\infty}$ *(denominada matriz de Gram) define un isomorfismo en* $\ell^2(\mathbb{Z})$.

En caso de cumplirse estas equivalentes condiciones, se verifica (A.1) *para cada* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Los números A y B verificando (A.1) se denominan cotas de Riesz inferior y superior respectivamente. El supremo de las cotas inferiores y el ínfimo de las superiores, son también cota inferior y superior respectivamente, y se denomina las cotas de Riesz óptimas

Teorema A.3 (Teorema 3.6.8 [33]) *Si* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{Ue_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *donde la sucesión* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal de* $\mathcal{H}$ *y* $U : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ *un isomorfismo entre dos espacios de Hilbert, entonces las cotas óptimas de la base de Riesz* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *son*

$$A = \frac{1}{\|U^{-1}\|^2} \quad y \quad B = \|U\|^2 .$$

Teorema A.4 (Teorema 3.6.3 [33]) *Sea* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *una base de Riesz de* $\mathcal{H}$. *Entonces existe una única sucesión* $\{\eta_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathcal{H}$ *tal que para cada* $f \in \mathcal{H}$ *se tiene*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \eta_n^*\rangle\, \eta_n .$$

Si $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{Ue_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *donde* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal de* $\mathcal{H}$ *y* $U : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ *un isomorfismo, entonces*

$$\eta_n^* = (U^{-1})^* e_n , \quad n \in \mathbb{Z} ,$$

donde $(U^{-1})^*$ *es el operador adjunto a* U^{-1}. *Además* $\{\eta_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es la única sucesión biortogonal a* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Como $(U^{-1})^*$ es un isomorfismo, entonces la sucesión biortogonal $\{\eta_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es también base de Riesz. Se denomina la base de Riesz dual de $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. La denominación dual se debe a que la base de Riesz dual $\{\eta_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es de nuevo $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Aplicando el Teorema A.4 a $\{\eta_n^*\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se obtiene que para cada $f \in \mathcal{H}$,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \eta_n\rangle\, \eta_n^* . \tag{A.2}$$

Además aplicando el Teorema A.3 se obtiene la siguiente relación entre las cotas óptimas:

Proposición A.1 *Sea* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *una base de Riesz de* $\mathcal{H}$ *con cotas óptimas* A *y* B. *Entonces su base de Riesz dual tiene cotas óptimas* $1/B$ *y* $1/A$.

De la propiedad de biortogonalidad se obtiene que los coeficientes de un elemento en una base de Riesz son únicos.

Proposición A.2 (Proposición 3.6.9 [33]) *Si la sucesión $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$ con cotas óptimas $A = B = 1$ entonces $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.*

A.3. Frames

Definición A.3 *Una sucesión $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$ es un* frame *de $\mathcal{H}$ si existen constantes $A, B > 0$ verificando la desigualdad*

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, \eta_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 , \quad \textit{talespara cada } f \in \mathcal{H} .$$

Los números A y B verificando esta desigualdad se denominan cotas *frame* inferior y superior respectivamente. El supremo de las cotas inferiores y el ínfimo de las superiores, son también cota inferior y superior respectivamente, y se denomina las cotas *frame* óptimas. Si las cotas *frame* óptimas son iguales se dice que el *frame* es ajustado. Un *frame* es evidentemente una sucesión de Bessel. El operador

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H} , \qquad Sf = TT^* f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \eta_n\rangle \eta_n .$$

se denomina el operador *frame* asociado a $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Una *frame* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}$ permite representar cada elemento de $f \in \mathcal{H}$ en la forma $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\eta_n$, aunque esta representación no es necesariamente única. Otra ventaja de un *frame*, $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, es que cualquier elemento de $f \in \mathcal{H}$ queda determinado de manera estable a partir de la sucesión de productos escalares $\{\langle f, \eta_n\rangle_{\mathcal{H}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ como pone de manifiesto el siguiente teorema.

Teorema A.5 (Lema 5.1.5 y Teorema 5.1.6 [33]) *Sea $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un frame de $\mathcal{H}$ con cotas frame óptimas A y B, y operador frame S. Entonces*

(i) S es invertible, $\{S^{-1}\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un frame con cotas frame óptimas B^{-1} y A^{-1} y con operador frame S^{-1}

(ii) Para $f \in \mathcal{H}$,

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, S^{-1}\eta_n\rangle \eta_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \eta_n\rangle S^{-1}\eta_n . \tag{A.3}$$

El frame $\{S^{-1}\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se denomina el operador *frame* dual canónico del frame $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Existen otros frame verificando los desarrollos (A.3):

$$f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f,\xi_n\rangle\eta_n=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f,\eta_n\rangle\xi_n. \quad \text{para todo } f\in\mathcal{H}\,.$$

Son los denominados frame duales de $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Proposición A.3 (Lema 5.6.2 [33]) *Supongamos que* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *son sucesiones de Bessel en* $\mathcal{H}$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f,\eta_n\rangle_{\mathcal{H}}\xi_n\,,\quad f\in\mathcal{H}\,.$

(b) $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f,\xi_n\rangle_{\mathcal{H}}\eta_n\,,\quad f\in\mathcal{H}\,.$

(c) $\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f,\xi_n\rangle_{\mathcal{H}}\langle\eta_n,g\rangle_{\mathcal{H}}\,,\quad f,g\in\mathcal{H}\,.$

En el caso de que se verifiquen alguna de estas condiciones equivalentes, entonces $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *son frame duales en* $\mathcal{H}$*.*

Proposición A.4 (Corolario 5.5.3 [33]) *Una sucesión* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathcal{H}$ *es un frame si y sólo si es una sucesión de Bessel y el operador preframe*

$$f\to\{\langle f,f_n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

es un isomorfismo entre $\mathcal{H}$ *y un subespacio cerrado de* $\ell^2(\mathbb{Z})$*.*

La propiedad *frame* se mantiene por operadores acotados suprayectivos:

Proposición A.5 (Corolario 5.3.2 [33]) *Supongamos que* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *un* frame *para* $\mathcal{H}$ *con cotas frame óptimas* A *y* B*, y que* $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ *es un operador acotado suprayectivo. Entonces la sucesión* $\{U\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es un frame para* $\mathcal{H}$*. Si* U *es un isomorfismo, entonces* $A\|U^{-1}\|^{-2}$ *y* $B\|U\|^2$ *son cotas frame inferior y superior respectivamente del frame* $\{U\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*.*

Teorema A.6 (Proposición 5.3.5 [33]) *Si* V *es un subespacio cerrado de* $\mathcal{H}$ *y* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es un frame de* V *con operador frame* S *entonces la proyección ortogonal de* $f\in\mathcal{H}$ *sobre* V *viene dada por*

$$P_Vf=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f,S^{-1}\eta_n\rangle\,\eta_n\,.$$

Teorema A.7 (Teorema 5.5.5 [33]) *Sea* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *una base ortonormal de* $\mathcal{H}$*. Los frame de* $\mathcal{H}$ *son exactamente las sucesiones de la forma* $\{Ue_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *donde* $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ *es un operador acotado y suprayectivo.*

Teorema A.8 (Teorema 5.4.1 [33]) *Una base de Riesz* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* $\mathcal{H}$ *es un frame de* $\mathcal{H}$*, las cotas frame óptimas coinciden con las cotas de Riesz óptimas, y la base de Riesz dual coincide con el frame dual canónico.*

Sobre el recíproco de este resultado se tiene:

Teorema A.9 (Teorema 6.1.1 [33]) *Sea* $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *un frame de* $\mathcal{H}$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base de Riesz de* $\mathcal{H}$*.*

(b) $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *tiene una sucesión biortogonal.*

Conclusiones y trabajos futuros

Conclusiones

En la presente memoria se hace un estudio de la teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación con un generador estable y en una variable utilizando muestras de la función o de versiones filtradas de ésta. En nuestra opinión, los resultados más relevantes son los siguientes:

- Un espacio invariante por traslación con un generador estable V_φ, de funciones continuas es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Los desarrollos muestrales convergentes en V_φ convergen uniformemente sobre $\mathbb{R}$.

- Los resultados de muestreo en un espacio invariante por traslación V_φ se derivan de ciertas sucesiones de $L^2(0,1)$ mediante el isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi : L^2(0,1) \to V_\varphi$ que transforma la base ortonormal $\{e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(0,1)$ en la base de Riesz $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_φ. Concretamente, de sucesiones del tipo $\{a_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$. Se caracteriza cuando estas sucesiones son una sucesión Bessel, un frame o una base de Riesz de $L^2(0,1)$. En caso de ser sucesiones frame se obtienen sus cotas frame óptimas y los frames duales con la misma estructura. Estos últimos conducen a fórmulas de muestreo generalizado regular, estables y fácilmente implementables.

- El uso de *oversampling* en el muestreo generalizado regular proporciona mayor estabilidad numérica y flexibilidad en la elección de las funciones de reconstrucción. Si el generador del espacio tiene soporte compacto esta flexibilidad permite obtener funciones de reconstrucción con soporte compacto.

- Se obtienen resultados de muestreo irregular en V_φ mediante técnicas perturbativas estándar aplicadas a los frame $\{a_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},j=1,2,\ldots,s}$, mencionados anteriormente. En los ejemplos usuales se traducen en resultados de muestreo irregular tipo Kadec. La recuperación se lleva a cabo mediante un algoritmo frame implementado en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

- Se obtienen estimaciones del error de truncamiento. Estas estimaciones muestran que, cuando el generador del espacio tiene soporte compacto, el desarrollo muestral converge con velocidad exponencial. Se obtienen estimaciones del error de amplitud y del error de aliasing. Las estimaciones obtenidas se aplican a la elección óptima de ciertos parámetros que intervienen en el muestreo.

- Los resultados teóricos obtenidos en la presente memoria se aplican a los espacios más utilizados en las aplicaciones prácticas: Los espacios de Paley-Wiener y los espacios de *splines*.

Publicaciones

Los contenidos de esta memoria han dado origen a trabajos que han sido publicados o están siendo evaluados en revistas especializadas. Teniendo en cuenta su relación con los capítulos de la memoria éstos son:

- **Capítulo 2**
  - *Riesz bases in* $L^2(0,1)$ *related to sampling in shift-invariant spaces* [51]
  - *Regular sampling in shift-invariant spaces involving two sequences of sampling points* [50]
- **Capítulo 3**
  - *Dual frames in* $L^2(0,1)$ *connected with generalized sampling in shift-invariant spaces* [46]
  - *Generalized irregular sampling in shift-invariant spaces* [47]
- **Capítulo 4**
  - *On the truncation error of generalized sampling expansions in shift-invariant spaces* [49]
  - *On the aliasing error in wavelet subspaces* [48]

Trabajos futuros

Nos planteamos, en un futuro inmediato, el estudio de varios problemas que están directamente relacionados con el trabajo realizado en esta memoria:

• El primero de estos problemas es el muestreo generalizado en un espacio invariante por traslación con *varias variables*:

$$V_\varphi := \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_n \varphi(t-n) \;:\; \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \Big\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)\,,$$

donde $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ es un generador estable de V_φ, es decir la sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ es base de Riesz de V_φ.

Para $n = (n_1, \ldots, n_d)$ y $w = (w_1, \ldots, w_d)$ denotamos $nw := n_1 w_1 + \ldots + n_d w_d$. Para $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_n \varphi(t-n)$ denotamos $F(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_n e^{-2\pi i n w}$. De forma similar al Lema 3.2 se obtiene que un sistema lineal e invariante por traslación $\mathcal{L}$ sobre V_φ admite la representación:

$$\mathcal{L}f(t) = \langle F, \overline{Z\mathcal{L}\varphi}(t,\cdot)\rangle_{L^2(Q)}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $Q = (0,1) \times \ldots \times (0,1)$ (d veces) y Z denota la transformada de Zak, $Zf(t,w) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(t+n) e^{-2\pi i n w}$, $t, w \in \mathbb{R}^d$. Así, dado un retículo $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$, el problema de recuperar las funciones $f \in V_\varphi$ a partir de las muestras

$$\{\mathcal{L}_j f(m)\}_{m\in\mathcal{M}, j=1,2,\ldots,s}$$

conduce al estudio de las propiedades frame de las sucesiones de $L^2(Q)$

$$\{\overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(m,w)\}_{m\in\mathcal{M}, j=1,2,\ldots,s}\,.$$

Cuando $\mathcal{M}$ es un retículo rectangular este problema puede tratarse de forma análoga al caso univariable. Estudiaremos también el caso en que $\mathcal{M}$ sea otro tipo de retículos (e.g. hexagonal) y el muestreo irregular mediante la perturbación del frame $\{\overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(m,w)\}_{m\in\mathcal{M}, j=1,2,\ldots,s}$.

• El segundo de estos problemas es el muestreo generalizado en un espacio invariante por traslación con *varios generadores*:

$$V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_l} := \Big\{ \sum_{k=1}^{l} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{k,n} \varphi_k(t-n) \;:\; \{a_{k,n}\} \in \ell^2_l(\mathbb{Z}) \Big\}\,,$$

donde $\{\varphi_k(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}, k=1,2,\ldots,l}$ es base de Riesz de $V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_l}$.

Asociadas a la función $f(t) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{k,n} \varphi_k(t-n) \in V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_l}$ consideramos las funciones

$$F_k(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{k,n} e^{-2\pi i n w} \in L^2(0,1)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, l\,.$$

De forma similar al Lema 3.2 se obtiene que un sistema lineal e invariante por traslación $\mathcal{L}$ sobre $V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_l}$ admite la representación:

$$\mathcal{L}f(t) = \sum_{k=1}^{l} \langle F_k, \overline{Z\mathcal{L}\varphi_k}(t,\cdot)\rangle_{L^2(0,1)} = \langle F, \overline{Z\mathcal{L}\varphi}(t,\cdot)\rangle_{L^2_l(0,1)}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $F = (F_1, \ldots, F_l)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ y $Z\mathcal{L}\varphi = (Z\mathcal{L}\varphi_1, \ldots, Z\mathcal{L}\varphi_l)$. Por tanto el problema de recuperar las funciones $f \in V_{\varphi_1,\ldots,\varphi_l}$ a partir de las muestras

$$\{\mathcal{L}_j f(nr)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}$$

conduce al estudio de las propiedades frame de las sucesiones de $L^2_l(0,1)$

$$\{\overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(nr,w)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots,s}\,.$$

Debido a cuestiones de densidad, es de esperar que, bajo hipótesis convenientes, el sistema sea completo cuando $r < s/l$, una base de Riesz cuando $r = s/l$ y sea un *overcomplete frame* cuando $r > s/l$.

Considerar varias variables ($t \in \mathbb{R}^d$) nos lleva al estudio de las sucesiones de $L^2_l(Q)$

$$\{\overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(m,w)\}_{m\in\mathcal{M}, j=1,2,\ldots,s}\,,$$

donde $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$ es el conjunto de los puntos de muestreo.

• Pretendemos también obtener el valor de las *cotas óptimas frame* (de Riesz si $r = s$) de algunos importantes desarrollos muestrales para funciones banda-limitada.

Como $\{\mathrm{senc}(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $PW_{1/2}$, el isomorfismo $\mathcal{T}_{\mathrm{senc}}$ es un operador unitario entre $L^2(0,1)$ y $PW_{1/2}$, y así el Teorema 3.1 proporciona una expresión para las cotas óptimas frame (de Riesz si $r = s$) de los distintos desarrollos muestrales, a partir de la cual se puede, en algunos casos, calcular explícitamente su valor. Tal procedimiento fue seguido en la Sección 4.1.1 en el cálculo de estas cotas para la fórmula de Jagerman y Fogel.

Bibliografía

[1] A. Aldroubi. Non-uniform weighted average sampling and reconstruction in shift-invariant and wavelet spaces. *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, 13:151–161, 2002.

[2] A. Aldroubi and H. G. Feichtinger. Exact iterative reconstruction algorithm for multivariate irregularly sampled functions in spline-like spaces: the L^p-theory. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126:2677–2686, 1998.

[3] A. Aldroubi and K. Gröchenig. Nonuniform sampling and reconstruction in shitf-invariant spaces. *SIAM Review*, 43:585–620, 2001.

[4] A. Aldroubi, Q. Sun, and W. S. Tang. Nonuniform average sampling and reconstruction in multitly generated shift-invariant spaces. *Construct. Approx.*, 20:173–189, 2004.

[5] A. Aldroubi, Q. Sun, and W. S. Tang. Convolution, average sampling, and a Calderon resolution of the identity for shift-invariant spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 11(2):215–244, 2005.

[6] A. Aldroubi and M. Unser. Sampling procedures in funtion spaces and asymptotic equivalence with Shannon's sampling theory. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 15(1), 1994.

[7] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68:337–404, 1950.

[8] N. Atreas. New bounds for truncation-type errors on regular sampling expansions. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 23(7):695–704, 2002.

[9] N. Atreas and C. Karanikas. Truncation error on wavelet sampling expansions. *J. Comp. Anal. Appl.*, 2(1):89–102, 2000.

[10] G. Bachman, L. Narici, and E. Beckenstein. *Fourier and Wavelet Analysis*. Springer, New York, 2000.

[11] J. J. Benedetto. Irregular frames and sampling. In C. K. Chui, editor, *Wavelets-A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, San Diego, CA, 1992. pp. 445–507.

[12] J. J. Benedetto. Frame decompositions, sampling, and uncertainty principle inequalities. In Benedetto and Frazier [16]. Ch. 7.

[13] J. J. Benedetto. *Harmonic Analysis and Applications*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.

[14] J. J. Benedetto and P. J. S. G. Ferreira. Introduction to modern sampling theory. In *Modern sampling theory: mathematics and applications* [15]. Ch. 1.

[15] J. J. Benedetto and P. J. S. G. Ferreira, editors. *Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications*. Birkhäuser, Boston, 2001.

[16] J. J. Benedetto and M. W. Frazier, editors. *Wavelets: Mathematics and Applications*. CRC Press, Boca Raton, 1994.

[17] J. J. Benedetto and S. Li. The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 5:389–427, 1998.

[18] J. J. Benedetto and A.I. Zayed, editors. *Sampling, Wavelets, and Tomography*. Birkhäuser, Boston, 2003.

[19] F. J. Beutler. On the truncation error of the cardinal sampling expansion. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 22(5):568–573, 1976.

[20] T. Blu and M. Unser. Approximation error for quasi-interpolators and multi-wavelets expansions. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 6:219–251, 1999.

[21] C. Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer, New York, 1978.

[22] C. Boor, R. A. DeVore, and A. Ron. Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 341:787–806, 1994.

[23] C. Boor, R. A. DeVore, and A. Ron. The structure of finetely genereted shift-invariant spaces in $L_2(\mathbb{R}^d)$. *J. Funct. Anal.*, 119:37–78, 1994.

[24] M. Bownik. The structure of shift-invariant spaces of $L_2(\mathbb{R}^n)$. *J. Funct. Anal.*, 177:282–309, 2000.

[25] J. L. Brown, Jr. On the error in reconstructing non-bandlimited function by means of the bandpass sampling theorem. *J. Math. Anal. Appl.*, 18:75–84, 1967.

[26] P. L. Butzer. A survey of Whittaker–Shannon sampling theorem and some of its extensions. *J. Math. Res. Exposition*, 3:185–212, 1983.

[27] P. L. Butzer and G.Nasri-Roudsari. Kramer's sampling theorem in signal analysis and its role in mathematics. In *Image Processing: Mathematical Methods and Applications*. Oxford University Press, 1997.

[28] P. L. Butzer and R. L. Stens. Sampling theory for not necessarily band–limited functions: A historical overview. *SIAM Review*, 34:40–53, 1992.

[29] P. G. Casazza, O. Christensen, and N. J. Kalton. Frames of translates. *Collectanea Mathematica*, 1:35–54, 2001.

[30] W. Chen and S. Itoh. A sampling theorem for shift-invariant subspaces. *IEEE Trans. Signal Process.*, 46(10):2822–2824, 1998.

[31] W. Chen, S. Itoh, and J. Shiki. Irregular sampling theorems for Wavelets subspaces. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44(3):1131–1142, 1998.

[32] W. Chen, S. Itoh, and J. Shiki. On sampling in shift invariant spaces. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 48(10):2802–2810, 2002.

[33] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[34] C. K. Chui. *An Introduction to Wavelets.* Academic Press, San Diego, CA, 1992.

[35] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[36] I. Djokovic and P. P. Vaidyanathan. Generalized sampling theorems in multiresolution subspaces. *IEEE Trans. Signal Process.*, 45(3), 1997.

[37] R. Duffin and A. Schaeffer. A class of nonharmonic Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72:341–366, 1952.

[38] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, San Diego, 1972.

[39] W.N. Everitt and G.Nasri-Roudsari. Sturm-Liouville problems with coupled boundary conditions and Lagrange interpolation series. *J. Comp. Anal. Appl.*, 1(4):319–347, 1999.

[40] W.N. Everitt and G.Nasri-Roudsari. Sturm-Liouville problems with coupled boundary conditions and Lagrange interpolation series: II. *Rend. di Mat. Roma*, 20(7):199–238, 2000.

[41] H. G. Feichtinger and K. Gröchenig. Iterative reconstruction of multivariate band-limited functions from irregular sampling values. *SIAM J. Math. Anal.*, 23:244–261, 1992.

[42] H. G. Feichtinger and K. Gröchenig. Theory and practice of irregular sampling. In Benedetto and Frazier [16]. Ch. 8.

[43] H. G. Feichtinger, K. Gröchenig, and T. Strohmer. Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory. *Numer. Math.*, 69:423–440, 1995.

[44] A. Fischer. Sampling theory and wavelets. In Higgins and Stens [72]. Ch. 7.

[45] M. W. Frazier. *An Introduction to Wavelets through Linear Algebra.* Springer, New York, 1999.

[46] A. G. García and G. Pérez-Villalón. Dual frames in $L^2(0,1)$ connected with generalized sampling in shift-invariant spaces. To appear in *Appl. Comput. Harmonic Anal.* 2005.

[47] A. G. García and G. Pérez-Villalón. Generalized irregular sampling in shift-invariant spaces. Submitted. 2005.

[48] A. G. García and G. Pérez-Villalón. On the aliasing error in wavelet subspaces. *J. Comp. Appl. Math.*, 183(1):153–167, 2005.

[49] A. G. García and G. Pérez-Villalón. On the truncation error of generalized sampling expansion in shift-invariant spaces. Submitted. 2005.

[50] A. G. García and G. Pérez-Villalón. Regular sampling in shift-invariant spaces involving two sequences of sampling points. Submitted. 2005.

[51] A. G. García, G. Pérez-Villalón, and A. Portal. Riesz bases in $L^2(0,1)$ related to sampling in shift-invariant spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 308(2):703–713, 2005.

[52] A. G. García. Orthogonal sampling formulas: a unified approach. *SIAM Review*, 42(3):499–512, 2000.

[53] A. G. García. A brief walk through sampling theory. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 124:63–137, 2002.

[54] A. G. García and M. A. Hernández-Medina. A general sampling theorem asociated with differential operators. *J. Comp. Anal. Appl.*, 1(3):147–161, 1999.

[55] A. G. García and M. A. Hernández-Medina. Sampling theorems and difference Sturm-Liouville problems. *J. Differ. Equ. Appl.*, 6:695–717, 2000.

[56] A. G. García and M. A. Hernández-Medina. The discrete Kramer sampling theorem and indeterminate moment problems. *J. Comp. Appl. Math.*, 134:13–22, 2001.

[57] A. G. García and M. A. Hernández-Medina. Discrete Sturm-Liouville problems, Jacobi matrices and Lagrange interpolation series. *J. Math. Anal. Appl.*, 280(2):221–231, 2003.

[58] A. G. García, M. A. Hernández-Medina, and A. Portal. An estimation of the truncation error for the two-channel sampling formulas. *J. Fourier Anal. Appl.*, 11(2), 2005.

[59] A. G. García and A. Portal. Hypercircle inequalities and sampling theory. *Appl. Anal.*, 82(12):1111–1125, 2003.

[60] C. Gasquet and P. Witonski. *Fourier Analysis and Applications*. Springer, New York, 1991.

[61] K. Gröchenig. Reconstruction algorithms in irregular sampling. *Math. Comp.*, 59:181–194, 1992.

[62] K. Gröchenig. Acceleration of the frame algorithm. *IEEE Trans. Signal Process.*, 41:3331–3340, 1993.

[63] K. Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2001.

[64] G. H. Hardy. Notes on special systems of orthogonal functions, IV: The orthogonal functions of Whittaker's cardinal. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 37:331–348, 1941.

[65] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge University Press, London, 1952.

[66] E. Hernández and G. Weiss. *A First Course on Wavelets.* CRC Press, Boca Raton, 1996.

[67] M. A. Hernández-Medina. *Teoremas de Muestreo Asociados a Problemas Diferenciales y en Diferencias.* Tesis Doctoral UPM, Madrid, 1997.

[68] J. R. Higgins. *Completeness and Bases of sets of Special Functions.* Cambridge University Press, London.

[69] J. R. Higgins. Five short stories about cardinal series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12:45–89, 1985.

[70] J. R. Higgins. *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Foundations.* Oxford University Press, Oxford, 1996.

[71] J. R. Higgins. Derivative sampling–a paradigm example of multichannel methods. In Higgins and Stens [72]. Ch. 3.

[72] J. R. Higgins and R. L. Stens, editors. *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Advanced Topics.* Oxford University Press, Oxford, 1999.

[73] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, London.

[74] J. Jaffard. A density criterion for frames of complex exponentials. *Mich. Math.*, 38:339–348, 1991.

[75] D. Jagerman. Bounds for truncation error of the sampling expansion. *SIAM J. Appl. Math.*, 14:714–723, 1966.

[76] D. L. Jagerman and L. J. Fogel. Some general aspects of the sampling theorem. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2:139–156, 1956.

[77] A. J. E. M. Janssen. The Zak transform: a signal transform for sampledd time-continuous signals. *Philips J. Res.*, 43:23–69, 1988.

[78] A. J. E. M. Janssen. The Zak transform and sampling theorems for wavelet subspaces. *IEEE Trans. Signal Process.*, 41(12):3360–3364, 1993.

[79] A. J. E. M. Janssen and T. Kalker. A note on Unser-Zerubia sampling theory applied to the linear interpolator. *IEEE Trans. Signal Process.*, 47(8), 1999.

[80] A. Jerri. The Shannon sampling theorem and its various extensions and applications: a tutorial review. *Proc. IEEE*, 68(11):1565–1596, 1977.

[81] L. Jingfan and F. Gensun. On uniform truncation error bounds and aliasing error for multidimensional sampling expansion. *Samp. Theory in Signal and Image Process.*, 2:103–115, 2003.

[82] M. I. Kadec. The exact value of the Paley–Wiener constant. *Soviet Math. Dokl.*, 5:559–561, 1964.

[83] A. Kohlenberg. Exact interpolation of band-limited functions. *Journal of Appled Physics*, 24:1432–1436, 1953.

[84] V. Kotel'nikov. On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications, Material for the first All–Union Conference on Questions of Communications. *Izd. Red. Upr. Svyazy RKKA*, 1933.

[85] H. P. Kramer. A generalized sampling theorem. *J. Math. Phys.*, 63:68–72, 1957.

[86] N. Levinson. *Gap and Density Theorems.* AMS Colloq. Publ., Vol. 26, New York, 1940.

[87] X. M. Li. Uniform bounds for sampling expansions. *J. Approx. Theory*, 93:100–113, 1998.

[88] D. A. Linden and N. M. Abramson. A gerneralization of the sampling theorem. *Inform. Contr.*, 3:95–96, 1960.

[89] Y. Liu. Irregular sampling for spline wavelet subspaces. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 42(2):623–627, 1996.

[90] Y. M. Liu and G. G. Walter. Irregular sampling in wavelet subspaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2:181–189, 1995.

[91] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthogonal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1), 1989.

[92] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, San Diego, 2001.

[93] R. J. Marks II. *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*. Springer Verlag, New York, 1991.

[94] R. J. Marks II, editor. *Avanced topics in Shannon Sampling and Interpolation Theory*. Springer Verlag, New York, 1992.

[95] Y. Meyer. *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press, 1992.

[96] H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *AIEE Trans.*, 47:617–644, 1928.

[97] R.E.A.C. Paley and N. Wiener. *Fourier Transforms in the Complex Domain*. AMS Colloq. Publ., Vol. 19. AMS, New York, 1934.

[98] A. Papoulis. Generalized sampling expansion. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 24(11), 1977.

[99] E. Parzen. A simple proof and some extensions of sampling theorems. *Tech. Rep. Stanford Univ.*, 7, 1956.

[100] B. S. Pavlov. Basicity of an exponential system and Muckenhoupt's condition. *Math. Dokl.*, 20:655–659, 1979.

[101] A. Portal. *Teoría de Muestreo y Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductor*. Tesis Doctoral UCIIIM, Madrid, 2004.

[102] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill, 1987.

[103] S. Saitoh. *Integral transforms, reproducing kernels and their applications*. Longman, Essex, England, 1997.

[104] I. J. Schoenberg. Contribution to the problem of a approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*, 4:45–99, 1946.

[105] I. J. Schoenberg. *Cardinal Spline Interpolation*. SIAM, Philadelphia, PA, 1993.

[106] L. L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley, New York, 1981.

[107] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proc. IRE*, 137:10–21, 1949.

[108] D. Slepian. On bandwidth. *Second Shannon Lecture. Proc. IEEE*, 64:292–300, 1976.

[109] D. Slepian. Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modelling. *SIAM Review*, 28:389–393, 1983.

[110] D. Slepian and H. O. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. *Bell Systems Tech. J.*, 40:43–64, 1961.

[111] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[112] W. Sun. On the stability of multivariate trigonometric systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 235:159–167, 1999.

[113] W. Sun. Sampling theorems for multivariate shift invariant subspaces. *Samp. Theory in Signal and Image Process.*, 4(1):73–98, 2005.

[114] W. Sun and X. Zhou. Sampling theorem for wavelet subspaces: error estimate and irregular sampling. *IEEE Trans. Signal Process.*, 48(1), 2000.

[115] W. Sun and X. Zhou. Reconstruction of band-limited signals from local averages. *Construct. Approx*, 18:185–202, 2002.

[116] W. Sun and X. Zhou. Average sampling in shift invariant subspaces with symmetric averaging functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 287:279–295, 2003.

[117] W. Sun and X. Zhou. Reconstruction of functions in spline subspaces from local averages. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131:2561–2571, 2003.

[118] A. Teolis and J. J. Benedetto. Local frames and noise redution. *Signal Processing*, 45:369–387, 1995.

[119] M. Unser. A perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal Process. Magazine*, 1999.

[120] M. Unser. Sampling–50 years after Shannon. *Proc. IEEE*, 88(4):569–587, 2000.

[121] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. On the asymptotic convergence of B-spline wavelets to Gabor function. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 38(2).

[122] M. Unser and J. Zerubia. Generalized sampling: stability and performance analysis. *IEEE Trans. Signal Process.*, 45(12), 1997.

[123] M. Unser and J. Zerubia. A generalized sampling theory without band-limiting constraints. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 45(8), 1998.

[124] R. Venkataramani and Y. Bresler. Sampling theorems for uniform and periodic nonuniform mimo sampling of multiband signals. *IEEE Trans. Signal Process.*, 51(12), 2003.

[125] D. F. Walnut. *Wavelet Analysis.* Birkäuser, Boston, 2004.

[126] G. G. Walter. A sampling theorem for wavelet subspaces. *IEEE Tran. on Inf. Theory.*, 38:881–884, 1992.

[127] G. G. Walter. Wavelets and sampling. In Benedetto and Ferreira [15]. Ch. 3.

[128] G. G. Walter and Y-M Liu. A class of band-limited cardinal wavelets. *Adv. in Math.*, 26(6):523–528, 1997.

[129] G. G. Walter and X. Shen. *Wavelets and other Orthogonal Systems.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.

[130] P. Weiss. An estimation of the error ariasing from misapplication of the sampling theorem. *Notices AMS*, 10:351, 1963.

[131] E. T. Whittaker. On the functions which are represented by the expansion on the interpolation theory. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, sec. A 35:181–194, 1915.

[132] J. M. Whittaker. *Interpolatory Function Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1935.

[133] P. Wojtaszczyk. *A Mathematical Introduction to Wavelets.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[134] X-G Xia and Z. Zhang. On sampling theorems waveles and wavelet transforms. *IEEE Trans. on Signal Process.*, 42, 1994.

[135] R. M. Young. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series.* Academic Press, New York, 2001.

[136] A. I. Zayed. On Kramer sampling theorem associated with general Sturm-Liouville problems and Lagrange interpolation. *SIAM J. Appl. Math.*, 51:575–604, 1991.

[137] A. I. Zayed. *Advances in Shannon's Sampling Theory.* CRC Press, Boca Raton, 1993.

[138] A. I. Zayed, G. Hinsen, and P. L. Butzer. On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 50:893–909, 1990.

[139] X. Zhou and W. Sun. On the sampling theoren for wavelet subspaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 5(4):347–354, 1999.

[140] A. Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, London.