DEPARTAMENTO
DE
MATEMÁTICA APLICADA

FACULTAD
DE
CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

PERTURBACIONES DE MEDIDAS MATRICIALES Y POLINOMIOS ORTOGONALES

TESIS DOCTORAL

Hossain Oulad Yakhlef

Granada, 2000

Perturbaciones de Medidas Matriciales
y
Polinomios Ortogonales

Memoria presentada en el Departamento de Matemática Aplicada por D. Hossain Oulad Yakhlef, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Vº Bº
Directores de la Tesis doctoral

Dr. D. Francisco Marcellán Español

Dr. D. Miguel Angel Piñar González

Aspirante al grado de Doctor

D. Hossain Oulad Yakhlef

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Perturbaciones de Medidas Matriciales
y
Polinomios Ortogonales

TESIS DOCTORAL
por
Hossain Oulad Yakhlef

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Directores:

Dr. D. Francisco Marcellán Español
Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Dr. D. Miguel A. Piñar González
Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Granada

Granada, Febrero 2000

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Tesis presentada para optar al grado de
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática Aplicada

PERTURBACIONES DE MEDIDAS MATRICIALES Y POLINOMIOS ORTOGONALES

Hossain Oulad Yakhlef

Defendida el 30 de Julio de 2000 ante el Tribunal:

ANTONIO DURÁN G.,
Catedrático,
Universidad de Sevilla
(España).

WALTER VAN ASSCHE,
Catedrático,
Universidad Catholique de
LEUVEN (Bélgica).

VICTORIANO RAMIREZ,
Catedrático,
Universidad de Granada
(España).

LUCAS JÓDAR,
Catedrático,
Universidad de Valencia
(España).

TERESA E.PÉREZ FERNÁNDEZ,
Profesor titular,
Universidad de Granada (España),
Secretaria.

Calificación: Sobresaliente "Cum laude".

Hossain Oulad Yakhlef

PERTURBACIONES DE MEDIDAS MATRICIALES Y POLINOMIOS ORTOGONALES

30 de Julio de 2000

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud y agradecimiento a todos aquellos que han colaborado de una u otra forma en llevar a cabo este trabajo de investigación y en mi formación en el campo científico. En particular expreso mi reconocimiento:

De forma especial, y con gran afecto a mi hermana Habiba y al resto de mi familia por su compresión, cariño y confianza que me ha mantenido en los momentos difíciles.

A mis directores, los profesores, Dr. D. Francisco Marcellán y Dr. D. Miguel A. Piñar González, por el entusiasmo, la dedicación y el esfuerzo que en todo momento me han prestado, así como sus sugerencias y observaciones en relación con los problemas estudiados.

A los profesores, Dr. D. Jesús Dehesa y Dr. D. Walter Van Assche, por la gran calidad humana y científica de ambos, y, por sus discusiones fructuosas sobre algunos problemas de investigación que aparecen tratados en esta Tesis.

También, he de agradecer al Departamento de Matemática Aplicada, y especialmente a su director, Dr. D. Victoriano Ramírez González por haberme facilitado muchos medios materiales necesarios para la realización de esta memoria, al administrador del departamento, Javier Rivera García por su colaboración y su amabilidad, y a mi amigo y compañero del departamento Dr. D. A. Kouibia por su ayuda moral.

Introducción

Una sucesión de polinomios ortogonales $p_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ en la recta real, ortonormal con respecto a una medida probabilidad γ, satisface una relación de recurrencia a tres términos

$$xp_n(x;\gamma) = a_{n+1}p_{n+1}(x;\gamma) + b_np_n(x;\gamma) + a_np_{n-1}(x;\gamma), \tag{®}$$

con las condiciones iniciales

$$p_{-1}(x;\gamma) = 0 \quad y \quad p_0(x;\gamma) = 1.$$

Los coeficientes de la relación recurrencia vienen dados por

$$a_n = \int xp_{n-1}(x;\gamma)p_n(x;\gamma)d\gamma > 0,$$

y

$$b_n = \int xp_n^2(x;\gamma)d\gamma \in \mathbb{R}.$$

Recíprocamente, un sistema de polinomios que satisfacen la relación de recurrencia (®) con $a_{n+1} > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ es siempre un sistema de polinomios ortonormales con respecto a una medida de probabilidad γ soportada en la recta real. Este último resultado fue obtenido por Favard en 1935 [Fav35], pero se conoció antes apareciendo en los textos de Stone [Sto32, Theorem 10.27, pp. 545-546], Perron [Per77, §36, Satz 4.6/4.7] y Wintner [Win29, §§32,87], quien atribuyó el caso en el que la medida asociada sea de soporte finito a Heine [Hei78, §108].

La importancia del teorema de Favard es que polinomios ortonormales y polinomios satisfaciendo una relación de recurrencia a tres términos significan lo mismo. Así, propiedades como las de los ceros (reales y simples) puede ser estudiadas desde dos puntos de vista: por una parte desde la ortogonalidad, y por otra usando la relación de recurrencia.

Recientemente (a finales de la década de los ochenta), el estudio de un tipo de ortogonalidad más amplio que cuando la medida asociada es positiva, ha atraído la atención: productos escalares de tipo Sobolev discreto. Los polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar de tipo Sobolev discreto, no satisfacen una relación de recurrencia a tres términos, sino una relación de tipo más general que involucra un número impar de términos mayor que tres. El recíproco no es cierto: no toda sucesión de polinomios satisfaciendo una relación de este tipo es de tipo Sobolev discreto. En [DV95], se expresan los polinomios que satisfacen la relación de recurrencia a $(2p+1)$-términos, a partir de polinomios matriciales ortogonales cuyos coeficientes matriciales son de orden $p \times p$, y en este sentido, se puede estudiar los polinomios ortogonales de tipo Sobolev discreto, en términos de polinomios ortogonales con respecto a una medida matricial con una masa matricial en el punto del origen (ver también [SV96]).

Los polinomios matriciales ortogonales han sido estudiados desde los años cincuenta: Krein consideró con detalle el teorema de Favard para los polinomios matriciales ortonormales [Kre70] (véase algunos trabajos recientes de Aptekarev y Nikishin

[AN84], Geronimo [Ger82] y, Durán y López-Rodríguez [DL96]). También obtuvo algunos resultados sobre el problema de los momentos matriciales desde el punto de vista de la teoría de los operadores [Kre70]. Recientemente, y durante los 80, los polinomios matriciales ortogonales han sido conectados con la teoría de "scattering" por Geronimo [Ger82]. Algunos resultados algebraicos y otros sobre los ceros han sido encontrados por Zhani [Zha83]. Más recientemente, los ceros y la fórmula de cuadratura de los polinomios matriciales ortogonales han sido estudiados por Sinap-Van Assche [SV94], y resultados sobre los ceros, fórmula de cuadratura, asintótica de los polinomios matriciales ortogonales han sido encontrados por Durán-López-Rodríguez [Dur99, Dur96, DL96].

La teoría de los polinomios matriciales ortogonales en la recta real como en la circunferencia unidad aparece como herramienta natural en varios problemas de física-matemática [AN84], álgebra lineal [YK78], la teoría de los circuitos y de los sistemas [DGK78], la teoría espectral de operadores [GLR82] y otros varios (véase [SV96] para las aplicaciones).

Esta memoria está estructurada en cinco capítulos que describiremos brevemente a continuación. En el *Capítulo 1*, preliminares, se introducen las notaciones necesarias y algunos resultados de interés para el estudio de la teoría de los polinomios matriciales ortonormales que se propone, el marco espectral en el que se desarrolla, diferentes propiedades y resultados clásicos de los polinomios matriciales ortonormales en la recta real y en la circunferencia unidad.

En el *Capítulo 2*, dedicado a la asintótica relativa de los polinomios matriciales ortonormales en la recta real, con la hipótesis adicional de la convergencia de los parámetros matriciales de la relación de recurrencia, estudiamos, en primer lugar, el comportamiento asintótico del cociente $\{A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\}$ cuando las medidas matriciales asociadas a las familias de polinomios ortonormales $\{P_n(x,.) = A_n(.)x^n +$ términos de menor grado$\}$ están relacionadas por $d\beta(u) = d\alpha(u) + \sum_{k=1}^{N} M_k\delta(u - c_k)$, donde M_k es una matriz definida positiva, δ es la medida matricial de Dirac y c_k se encuentra fuera del soporte de la medida $d\alpha$ $(k = 1, \cdots, N)$. En segundo lugar, deducimos el comportamiento asintótico de $\{P_n(x,\beta)P_n^{-1}(x,\alpha)\}$ bajo las mismas hipótesis. Por ultimo, y cuando las medidas matriciales asociadas están relacionadas por $d\beta(u) = d\alpha(u)+\delta(u-c)$, donde c se encuentra fuera del soporte de $d\alpha$, deducimos el comportamiento asintótico del producto $\{P_n(x,\beta)P_n^{*}(x,\alpha)\}$.

El *Capítulo 3* está dedicado al estudio de la clase matricial de Nevai bajo una perturbación espectral. Deducimos en primer lugar una relación entre la matriz truncada de Jacobi por bloques y su perturbación, cuando, a la medida matricial espectral asociada, se le añade una masa matricial de Dirac. En segundo lugar, encontramos una forma explícita de los coeficientes matriciales perturbados, y finalmente, deducimos el comportamiento asintótico de dichos coeficientes matriciales.

En el *Capítulo 4*, centrado en la asintótica relativa de polinomios ortonormales en la circunferencia unidad, estudiamos la asintótica relativa de dos familias de polinomios matriciales ortonormales con respecto a dos medidas matriciales en la circunferencia unidad, tal que la diferencia es la medida matricial atómica soportada en el conjunto $\{w\}$ que se encuentra fuera del disco unidad. Así, asumiendo que ambas medidas matriciales pertenecen a la clase de Szegő, se deduce la asintótica relativa exterior (véase Teorema 4.7). Comienza este capítulo con el estudio del comportamiento asintótico del cociente de los polinomios ortonormales a izquierda y de los polinomios ortonormales a derecha. A continuación, se analiza una relación entre ambas familias de polinomios, y finalmente, se deduce la expresión de la asintótica relativa exterior tanto del cociente de los coeficientes principales, como del cociente y del producto de los polinomios matriciales ortonormales bajo la condición de Szegő.

Finaliza esta memoria con el *Capítulo 5*, en el que se presenta la conexión entre parámetros matriciales de la relación de recurrencia en intervalo real finito y circunferencia unidad, donde se obtiene una expresión explícita de los coeficientes matriciales de la relación de recurrencia en términos de los parámetros matriciales de reflexión. Comienza el capítulo con la definición de la medida matricial inducida y soportada en la circunferencia unidad a partir de la medida matricial soportada en $[-1, 1]$. A continuación, encontramos el resultado principal: Partiendo de una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a una medida soportada en $[-1, 1]$, deducimos los parámetros matriciales de reflexión de la sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a una medida matricial inducida y soportada en la circunferencia unidad. También obtenemos un resultado recíproco.
Por último, deducimos la asintótica del cociente de polinomios matriciales ortonormales con respecto a medidas matriciales con una parte singular, y cuyo parte absolutamente continua pertenece a la clase de Erdös.

Cada uno de los capítulos de la Memoria se estructura en secciones, donde la primera de ellas es siempre una introducción, que describe el contenido del capítulo e incluye las referencias correspondientes.

La numeración de cada resultado o expresión está de acuerdo con la sección del texto donde se encuentra. Así, el Lema 2.8 indica el octavo lema del segundo capítulo, y la fórmula (5.2.3) indica la tercera expresión de la sección 2 del quinto capítulo.

Índice

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

En este capítulo, se introducen los elementos necesarios para el desarrollo de la memoria.

Estos elementos abarcan desde las notaciones que estimamos adecuadas y serán uniformes a lo largo de este trabajo, hasta la introducción de varios resultados y propiedades algebraicas y analíticas de los polinomios matriciales ortonormales en la recta real o en la circunferencia unidad.

Como textos clásicos en el tema de los polinomios ortogonales asociados a productos escalares estándar, podemos citar [Fre71], [Chi78], [Nev79] y [Sze75] que ofrecen una visión global y bastante completa.

Los conceptos que aparecen en este capítulo se han desarrollado posteriormente en [Ros64], [SV94, SV96, Zha83] y [Ger81, DGK78].

En la sección 1.2 introducimos la definición de la medida matricial, y la de espacio prehilbertiano de funciones con valores matriciales asociado a un producto escalar matricial. En la sección 1.3 resumiremos las propiedades habituales de la sucesión de polinomios matriciales ortonormales de primer y segundo tipo: relación de recurrencia a tres términos; fórmulas de Green, Liouville-Ostrogadski, y Christoffel-Darboux; y propiedad reproductora de los núcleos. Finalmente en la sección 1.4, estudiaremos los polinomios matriciales ortonormales en la circunferencia unidad con el mismo planteamiento que en [DGK78]: construir explícitamente una sucesión de polinomios matriciales ortonormales a partir de los coeficientes matriciales de Fourier de la medida matricial o, equivalentemente, de la matriz de Toeplitz, encontrar las relaciones de recurrencia, la fórmula de Christoffel-Darboux en la circunferencia unidad, localizar los raíces y destacar la propiedad reproductora de los núcleos y otros resultados analíticos relacionados con dichos polinomios.

1.2 Medidas y productos escalares matriciales

En primer lugar daremos algunas definiciones y resultados previos sobre medidas matriciales e integrabilidad de funciones matriciales.

Sea $\mathcal{B}$ una σ-álgebra de subconjuntos de un espacio Ω, decimos que λ es una medida matricial, hermitiana, definida no negativa en $(\Omega, \mathcal{B})$ si

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{p,1} & \cdots & \lambda_{p,p} \end{pmatrix}$$

es una función definida sobre $\mathcal{B}$, con valores matriciales verificando

1. Para todo subconjunto medible A de Ω,

$$\lambda(\mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{A})^*.$$

2. La matriz $\lambda(\mathrm{A}) = [\lambda_{i,j}(\mathrm{A})]$ es definida no negativa para todo $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$.

3. Para toda colección numerable de elementos disjuntos de $\mathcal{B}$,

$$\lambda_{i,j}(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{i,j}(\mathrm{A}_k) \quad i,j = 1, \cdots, p.$$

Hemos de destacar que si λ es una medida matricial definida positiva, entonces los elementos de la diagonal principal $\lambda_{i,i}$ son medidas positivas, y el resto son medidas complejas satisfaciendo $\lambda_{i,j} = \overline{\lambda}_{j,i}$ $(i \neq j)$.

Definición 1.1 .- *Sea υ una medida real definida no negativa, y $\Phi = [\Phi_{i,j}]$ una función con valores matriciales.*

- *Diremos que Φ es $\mathcal{B}$-medible si cada función $\Phi_{i,j}$ es $\mathcal{B}$-medible.*

- $\mathrm{L}_{1,\upsilon}$ *es la clase de aquellas $\Phi = [\Phi_{i,j}]$ tales que $\Phi_{i,j}$ es integrable con respecto a υ.*

- *Para $\Phi \in \mathrm{L}_{1,\upsilon}$ definimos $\int_\Omega \Phi d\upsilon = \left[\int_\Omega \Phi_{i,j} d\upsilon\right]$.*

Dado que, para una matriz hermitiana no negativa M, se verifica

$$0 \leq M \leq (\tau M)I \quad (\tau M \text{ es la traza de } M),$$

entonces cada medida compleja $\lambda_{i,j}$ es absolutamente continua con respecto a la medida real $(\tau\lambda)$, y las derivadas de Radon-Nikodym $\frac{d\lambda_{i,j}}{d(\tau\lambda)}$ $\left(\frac{d\lambda_{i,j}}{d(\tau\lambda)}\right.$ son $\mathcal{B}$-medibles respecto a $d(\tau\lambda))$ quedan definidas, excepto en conjuntos de $(\tau\lambda)$-medida nula. Así, llamamos a

$$\acute{\lambda_\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{d\lambda_{i,j}}{d(\tau\lambda)}\right] \tag{1.2.1}$$

la derivada de Radon-Nykodym de λ con respecto a $(\tau\lambda)$ o, también, derivada traza de λ. Se sigue que $\acute{\lambda_\tau}$ es $\mathcal{B}$-medible e integrable respecto a $(\tau\lambda)$ y

$$\lambda(A) = \int_A \acute{\lambda_\tau}(w)d(\tau\lambda)(w), \ \ \forall A \in \mathcal{B}. \tag{1.2.2}$$

El propósito de [Ros64] es definir la integral $\int_\Omega \Phi d\lambda \Psi^*$ donde Φ y Ψ son funciones matriciales en Ω de forma que el espacio $\mathrm{L}_{2,\lambda}$ de funciones Φ con valores matriciales, para las que existe $\int_\Omega \Phi d\lambda \Phi^*$, sea un espacio de Hilbert. Las dificultades del problema se muestran en el siguiente ejemplo.

Sean $\Omega = [0,1]$, y $\mathcal{B}$ la familia de los borelianos. Si definimos el producto escalar matricial $< \Phi, \Psi >_\lambda = \int_\Omega \Phi d\lambda \Psi^*$ como suma de las cuatro integrales

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\Omega \Phi d\lambda \Psi^* &= \textstyle\int_\Omega (\Phi_1, \Phi_2) \begin{pmatrix} d\lambda_{1,1} & d\lambda_{1,2} \\ d\lambda_{2,1} & d\lambda_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 \\ \overline{\Psi}_2 \end{pmatrix} \\ &= \textstyle\int_\Omega \Phi_1 \overline{\Psi}_1 d\lambda_{1,1} + \int_\Omega \Phi_1 \overline{\Psi}_2 d\lambda_{1,2} \\ &\qquad \textstyle + \int_\Omega \Phi_2 \overline{\Psi}_1 d\lambda_{2,1} + \int_\Omega \Phi_2 \overline{\Psi}_2 d\lambda_{2,2}, \end{aligned}$$

donde $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2]$, $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2] \in L_{1,\lambda_{i,j}}$ $(i,j = 1,2)$, el espacio resultante $\mathrm{L}_{2,\lambda}$ es un espacio no completo. En efecto, tomando la medida λ concentrada en $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ tal que

$$\lambda(\{1/k\}) = \frac{1}{k^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{k^2} \end{pmatrix},$$

se puede ver que la sucesión $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$, $\Phi_n = \sum_{k=1}^n \Psi_k$ con $\Psi_k(\frac{1}{k}) = [-k, k]$, $\Psi_k(w) = 0$, $w \neq \frac{1}{k}$ es de Cauchy pero no tiene límite en $\mathrm{L}_{2,\lambda}$.

Consideramos la derivada traza de λ. A partir de (1.2.2), se tiene

$$0 \leq \lambda'_\tau \leq I \ \ c.p.d. \ \ \tau\lambda,$$

y $\sqrt{\lambda'_\tau}$ es $\mathcal{B}$-medible [Ros64].

Definición 1.2 .- *Sean Φ, Ψ dos funciones con valores matriciales de orden $m \times p$ en Ω. Decimos que (Φ, Ψ) es integrable con respecto a λ si $\Phi\, \lambda'_\tau\, \Psi^* \in \mathrm{L}_{1,\tau\lambda}$ y en esta situación definimos la integral de (Φ, Ψ) con respecto a λ por*

$$\int_\Omega \Phi d\lambda \Psi^* = \int_\Omega \Phi \lambda'_\tau \Psi^* \ \ d(\tau\lambda) = \int_\Omega (\Phi\sqrt{\lambda'_\tau})(\Psi\sqrt{\lambda'_\tau})^* \ \ d(\tau\lambda) \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Observación 1.1 .-

$$\Phi \in \mathrm{L}_{2,\lambda} \Leftrightarrow \Psi\sqrt{\lambda'_\tau} \in \mathrm{L}_{2,\tau\lambda}; \tag{1.2.3a}$$

$$\Phi, \ \ \Psi \in \mathrm{L}_{2,\lambda} \Rightarrow \Phi\lambda'_\tau\Psi^* \in \mathrm{L}_{1,\tau\lambda}; \tag{1.2.3b}$$

$$\Phi \in \mathrm{L}_{2,\lambda} \ \ y \ \ A \in \mathbb{C}^{m\times m} \Rightarrow A\Phi \in \mathrm{L}_{2,\lambda}. \tag{1.2.3c}$$

De (1.2.3b) se deduce que, $\int_\Omega \Phi\, d\lambda \Psi^*$ existe para todo Φ, $\Psi \in \mathrm{L}_{2,\lambda}$, y se comporta como un producto escalar matricial. Por tanto, denotamos por

$$< \Phi, \Psi >_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \Phi\, d\lambda\, \Psi^*,$$

el producto escalar matricial (por extensión) para el espacio $\mathrm{L}_{2,\lambda}$.

Consideramos el producto escalar (ordinario) para el espacio $\mathrm{L}_{2,\lambda}$ definido por

$$< \Phi, \Psi >_{(\tau\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \tau(\Phi\, d\lambda\, \Psi^*).$$

A partir de (1.2.3a), se deduce que $\mathrm{L}_{2,\lambda}$ es un espacio prehilbertiano respecto a $< .,. >_\lambda$.

Teorema 1.3 [Ros64].-

$\mathrm{L}_{2,\lambda}$ *es un espacio de Hilbert respecto al producto escalar* $< .,. >_{(\tau\lambda)}$.

1.3 Polinomios ortogonales matriciales en la recta real

En el conjunto $\mathbb{C}^{p\times p}$ consideramos las operaciones habituales

$$A+B,\ \ AB,\ \ \alpha A,\quad \forall A,B\in\mathbb{C}^{p\times p},\ \ \forall\alpha\in\mathbb{C}.$$

Con ellas $\mathbb{C}^{p\times p}$ es un álgebra no conmutativa sobre $\mathbb{C}$; además posee elemento unidad I_p. Representamos por $\mathbb{P}_n$ el conjunto de los polinomios de grado a lo más n con coeficientes en $\mathbb{C}^{p\times p}$, es decir

$$\mathbb{P}_n=\mathbb{C}_n^{p\times p}[x]=\left\{A_0+A_1x+\cdots+A_nx^n,\quad A_i\in\mathbb{C}^{p\times p}\right\}.$$

$\mathbb{P}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_n$ es un $\mathbb{C}^{p\times p}$-módulo con las leyes

◇ $\forall P(x),\ \ Q(x)\in\mathbb{P}\quad (P(x)=\sum\limits_{i=0}^{r}A_ix^i,\ \ Q(x)=\sum\limits_{i=0}^{s}B_ix^i)$

$$P(x)+Q(x)=\sum_{i=0}^{r\curlywedge s}(A_i+B_i)x^i,\ \ r\curlywedge s=\max(r,s)$$

y con el convenio de que los coeficientes son nulos cuando aparece un sumando de grado superior al del polinomio.

◇ $\forall A\in\mathbb{C}^{p\times p},\ \ \forall P(x)\in\mathbb{P}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} AP(x) & = & \sum\limits_{i=0}^{r}(AA_i)x^i \\ P(x)A & = & \sum\limits_{i=0}^{r}(A_iA)x^i. \end{array}\right.$$

$\mathbb{P}$ es un módulo libre pues $\left\{I_p x^k,\;\; k = 0, 1, 2, \cdots\right\}$ es base de $\mathbb{P}$. Se dice que el polinomio $P_k(x) \in \mathbb{P}$ es de grado k si $P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} A_i x^i$ con $A_k \neq 0$. Resulta así que $\mathbb{P}_k$ es submódulo de $\mathbb{P}$ libre y de tipo finito, ya que $\left\{I_p, I_p x, I_p x^2, \cdots, I_p x^k\right\}$ es base de $\mathbb{P}_k$.

Consideramos el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B}$ es la familia de los borelianos. Para cada medida matricial α definida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, introducimos la forma bilineal

$$\langle P, Q\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{R}} P(x)d\alpha(x)Q(x)^* \tag{1.3.1}$$

que satisface

(a) $\langle P, Q\rangle_\alpha = \langle Q, P\rangle_\alpha^*$.

(b) $\langle xP, Q\rangle_\alpha = \langle P, xQ\rangle_\alpha$.

(c) $\langle P, P\rangle_\alpha$ es una matriz definida no-negativa. Si $\det P \neq 0$, es definida positiva.

(d) $\langle P, P\rangle_\alpha = 0$ si y solo si $P = 0$.

Usando el proceso de ortonormalización (generalizado) de Gram-Schmidt para $\{I_p, xI_p, x^2 I_p, \cdots\}$ obtenemos una sucesión de polinomios ortonormales $P_n(x;\alpha)$ con respecto a la medida matricial α

$$\langle P_n(x;\alpha), P_m(x;\alpha)\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{R}} P_n(x;\alpha)d\alpha(x)P_m^*(x;\alpha) = \delta_{n,m} I_p \tag{1.3.2}$$

donde I_p es la matriz identidad de $\mathbb{C}^{p\times p}$. La siguiente sucesión de polinomios matriciales

$$\begin{aligned} S_0(t) &= I_p; \\ S_n(t) &= t^n I_p - \sum_{k=0}^{n-1} \langle t^n I_p, S_k\rangle_\alpha \langle S_k, S_k\rangle_\alpha^{-1} S_k(t) \quad \text{si } n \geq 1, \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

es ortogonal con respecto al producto escalar matricial $\langle .,. \rangle_\alpha$. En efecto,

- ◇ suponemos que $\langle S_i, S_j \rangle_\alpha = 0$ para $0 \leq i,j \leq n-1,\ i \neq j$. Entonces para $0 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned}
&\langle S_n, S_k \rangle_\alpha \\
&\quad = \langle t^n I_p, S_k \rangle_\alpha - \sum_{i=0}^{n-1} \langle t^n I_p, S_i \rangle_\alpha \langle S_i, S_i \rangle_\alpha^{-1} \langle S_i, S_k \rangle_\alpha \\
&\quad = \langle t^n I_p, S_k \rangle_\alpha - \langle t^n I_p, S_k \rangle_\alpha \langle S_k, S_k \rangle_\alpha^{-1} \langle S_k, S_k \rangle_\alpha = 0.
\end{aligned}$$

- ◇ Teniendo en cuenta (1.3.3) y el hecho de que el coeficiente principal de S_n es la matriz unidad, se puede probar por inducción que $\langle S_n, S_n \rangle_\alpha$ es inversible.

Así, una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\alpha)\}$ con respecto a la medida matricial α puede ser definida de la siguiente forma

$$P_n(x;\alpha) = \langle S_n, S_n \rangle_\alpha^{-\frac{1}{2}} S_n(x)$$

donde $\langle S_n, S_n \rangle_\alpha^{-\frac{1}{2}}$ son los coeficientes principales.

Observación 1.2 .-

Si $\{U_n\}$ es una sucesión de matrices unitarias, entonces $\{U_n P_n(x;\alpha)\}$ es también una sucesión de polinomios matriciales ortonormales respecto a α.

Como en el caso escalar ($p=1$), los polinomios matriciales ortonormales $P_n(x;\alpha)$ son ortogonales con todo polinomio matricial de grado menor que n, puesto que $\{P_0(x;\alpha), P_1(x;\alpha), \cdots, P_n(x;\alpha)\}$ es una base de $\mathbb{P}_n$, y además satisfacen la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$xP_n(x;\alpha) = D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(x;\alpha) + E_n(\alpha)P_n(x;\alpha) + D_n^*(\alpha)P_{n-1}(x;\alpha) \tag{1.3.4}$$

donde $P_{-1} = 0$, $P_0 = I_p$, $E_n(\alpha) = \langle xP_n, P_n\rangle_\alpha = \langle P_n, xP_n\rangle_\alpha = \langle xP_n, P_n\rangle_\alpha^* = E_n^*(\alpha)$ (A^* es el conjugado de la transpuesta de la matriz A), esto es, $E_n(\alpha)$ es una matriz hermitiana; y $D_{n+1} = \langle xP_n, P_{n+1}\rangle_\alpha = \langle S_n, S_n\rangle_\alpha^{-\frac{1}{2}} \langle S_{n+1}, S_{n+1}\rangle_\alpha^{\frac{1}{2}}$.

Notamos que a partir de (1.3.4), la sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{Q_n(x;\alpha) = U_nP_n(x;\alpha)\}$ satisface la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$\begin{aligned} xQ_n(x;\alpha) = &\left(U_nD_{n+1}(\alpha)U_{n+1}^*\right)Q_{n+1}(x;\alpha)+ \\ &\left(U_nE_n(\alpha)U_n^*\right)Q_n(x;\alpha)+ \\ &\left(U_nD_n^*(\alpha)U_{n-1}^*\right)P_{n-1}(x;\alpha). \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Lema 1.4 .-

Sea $\{P_n(x;\alpha) = A_n(\alpha)x^n + B_n(\alpha)x^{n-1} + \textit{términos de menor grado}\}$ *una sucesión de polinomios matriciales que satisface la relación de recurrencia (1.3.4). Entonces*

$$\begin{aligned} D_n(\alpha) &= A_{n-1}(\alpha)A_n^{-1}(\alpha), \\ E_n(\alpha) &= A_n(\alpha)\left[A_n^{-1}(\alpha)B_n(\alpha) - A_{n+1}^{-1}(\alpha)B_{n+1}(\alpha)\right]A_n^{-1}(\alpha). \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Demostración.-

Usando la relación de recurrencia (1.3.4) y la propiedad de ortogonalidad (1.3.1), tenemos

$$\begin{aligned} D_{n+1}(\alpha) =& \langle xP_n(x;\alpha), P_{n+1}(x;\alpha)\rangle_\alpha \\ =& \int \left[A_n(\alpha)x^{n+1} + \cdots\right] d\alpha(x)P_{n+1}^*(x;\alpha) \\ =& A_n(\alpha)A_{n+1}^{-1}(\alpha)\times \\ & \int \left[A_{n+1}(\alpha)x^{n+1} + \cdots\right] d\alpha(x)P_{n+1}^*(x;\alpha) \\ =& A_n(\alpha)A_{n+1}^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
E_n(\alpha) =& \langle xP_n(x;\alpha), P_n(x;\alpha)\rangle_\alpha \\
=& \int \left[A_n(\alpha)x^{n+1} + B_n(\alpha)x^n + \cdots\right] d\alpha(x) P_n^*(x;\alpha) \\
=& A_n(\alpha)A_{n+1}^{-1}(\alpha)\times \\
& \quad \int \left[A_{n+1}(\alpha)x^{n+1} + B_{n+1}(\alpha)x^n + \cdots\right] d\alpha(x) P_n^*(x;\alpha) \\
& \quad - A_n(\alpha)A_{n+1}^{-1}(\alpha) \int \left[B_{n+1}(\alpha)x^n + \cdots\right] d\alpha(x) P_n^*(x;\alpha) \\
& \quad + B_n(\alpha)A_n^{-1}(\alpha) \int \left[A_n(\alpha)x^n + \cdots\right] d\alpha(x) P_n^*(x;\alpha) \\
=& A_n(\alpha)\left[A_n^{-1}(\alpha)B_n(\alpha) - A_{n+1}^{-1}(\alpha)B_{n+1}(\alpha)\right] A_n^{-1}(\alpha). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

En el caso matricial ($p > 1$) al igual que en el caso escalar ($p = 1$), la relación de recurrencia (1.3.4) es equivalente a la ortogonalidad (ver [Chi78, Capítulo IV], [AN84, Dur95]), es decir, que para toda sucesión de polinomios $\{P_n\}$ que satisface una relación de tipo (1.3.4), existe una medida (escalar, ó matricial) con respecto a la cual, la sucesión de polinomios $\{P_n\}$ es ortonormal.

Destacamos en la siguiente proposición algunos resultados clásicos de los polinomios ortogonales escalares cuya versión matricial aparece en [Zha83]. Denotamos por $P_n^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^n A_{n,j}^* x^j$ si $P_n(x) = \sum_{j=0}^n A_{n,j}x^j$.

Proposición 1.5 .- *Sea $\{P_n(x;\alpha)\}$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial α, y sean*

$$
Q_n(x;\alpha) \stackrel{def}{=} \int \frac{P_n(x;\alpha) - P_n(t;\alpha)}{x-t} d\alpha(t) \tag{1.3.9}
$$

los correspondientes polinomios matriciales de segundo tipo. Entonces se verifica *(a)* $xQ_n(x;\alpha) = D_{n+1}(\alpha)Q_{n+1}(x;\alpha) + E_n(\alpha)Q_n(x;\alpha) + D_n^*(\alpha)Q_{n-1}(x;\alpha)$

donde $Q_0 = 0$, $Q_1 = D_1^{-1}$; *obsérvese que grad* $Q_n = n-1$;

(b) $$P_{n-1}^*(x;\alpha)D_n(\alpha)Q_n(w;\alpha) - P_n^*(x;\alpha)D_n^*(\alpha)Q_{n-1}(w;\alpha) = I_p + (w-x)\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(x;\alpha)Q_k(w;\alpha);$$

(c) $Q_n(x;\alpha)P_{n-1}^*(x;\alpha) - P_n(x;\alpha)Q_{n-1}^*(x;\alpha) = D_n^{-1}(\alpha)$.

El polinomio matricial en dos variables

$$K_{n+1}(x,y;\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} P_j^*(y;\alpha)P_j(x;\alpha) \tag{1.3.10}$$

recibe el nombre de $n+1$-*ésimo núcleo asociado* a la sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\alpha)\}$ y verifica las siguientes propiedades

Proposición 1.6 .-

(1) Fórmula de Christoffel-Darboux

$$\begin{aligned}(x-y)K_{n+1}(x,y;\alpha) = P_n^*(y;\alpha)D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(x;\alpha) - \\ P_{n+1}^*(y;\alpha)D_{n+1}^*(\alpha)P_n(x;\alpha).\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

(2) Fórmula confluente

$$\begin{aligned}K_{n+1}(x,x;\alpha) = P_{n+1}^*(x;\alpha)'D_{n+1}^*(\alpha)P_n(x;\alpha) - \\ P_n^*(x;\alpha)'D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(x;\alpha).\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

(3) Propiedad reproductora de los núcleos

$$\langle \Pi(x), K_n(x,y;\alpha)\rangle_\alpha = \Pi(y), \quad \forall \Pi \in \mathbb{P}_{n-1}. \tag{1.3.13}$$

Demostración.-

(1) (1.3.4) $\Rightarrow$ (1.3.11).

(2) (1.3.11) $\Rightarrow$ (1.3.12)

(3) Utilizando (1.3.2) y el hecho de que $\{P_0(x;\alpha), P_1(x;\alpha), \cdots, P_m(x;\alpha)\}$ es una base de $\mathbb{P}_m$, se deduce (1.3.13). $\blacksquare$

Ahora, si utilizamos (1.3.10) y (1.3.11) haciendo $x = y$, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.7 .-

- *La matriz $K_n(x, x; \alpha)$ es definida positiva;*
- *La matriz $P_n^*(x;\alpha)D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(x;\alpha)$ es hermitiana.*

Definición 1.8 .- *Sea α una medida matricial definida positiva. El soporte de α ($sop(\alpha)$) viene definido como el soporte de la medida traza*

$$sop(\alpha) \stackrel{def}{=} sop(\tau\alpha) = sop(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2} + \cdots + \alpha_{p,p}).$$

Consideramos la matriz de $(2p+1)$-diagonal, de dimensión infinita, y definida a partir de los parámetros de la relación de recurrencia de tipo (1.3.4)

$$\mathbb{J}(.) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} E_0(.) & D_1(.) & 0 & \\ D_1^*(.) & E_1(.) & D_2(.) & \ddots \\ 0 & D_2^*(.) & E_2(.) & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.3.14}$$

$\mathbb{J}$ se llama matriz de Jacobi por bloques asociada a la sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;.)\}$. Si el operador $\mathcal{J}$ definido sobre el espacio de Hilbert l^2 por

$$\mathcal{J} : l^2 \to l^2$$

$$\mathcal{J}((a_n)_n) = (a_n)_n \mathbb{J}$$

es acotado, entonces la medida matricial asociada a $\{P_n(x;\alpha)\}$ es única y su soporte coincide con el espectro de $\mathcal{J}$. Además si

$$\Delta_n(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_{n,k}, \quad 1 \leq k \leq \ np; \ \det P_n(x_{n,k};\alpha) = 0\}$$

denota el conjunto de los ceros del polinomio $P_n(x;\alpha)$, entonces

$$sop(\alpha) \subseteq \bigcap_{p>o} \overline{\bigcup_{n\geq p} \Delta_n(\alpha)} = \Gamma. \tag{1.3.15}$$

1.4 Polinomios ortogonales matriciales en la circunferencia unidad

Consideramos una medida matricial Ω definida positiva sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y con valores matriciales de dimensión p. Una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial Ω, está definida por

$$< \Phi_n(\Omega), \Phi_m(\Omega) >_L \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(z;\Omega) d\Omega(z) \Phi_m(z;\Omega)^* = \delta_{n,m} I_p, \qquad n,m = 0,1,2,\cdots, \tag{1.4.1}$$

o,

$$< \Psi_n(\Omega), \Psi_m(\Omega) >_R \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Psi_n(z;\Omega)^* d\Omega(z)\Psi_m(z;\Omega) = \delta_{n,m} I_p, \qquad n,m = 0,1,2,\cdots, \quad (1.4.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathit{\Phi}_n(z;\mathit{\Omega}) &= L_n(\mathit{\Omega})z^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n,k} z^k \\ \mathit{\Psi}_n(z;\mathit{\Omega}) &= R_n(\mathit{\Omega})z^n + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n,k} z^k, \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

I_p es la matriz unidad de dimensión p y $L_n(\mathit{\Omega})$, $R_n(\mathit{\Omega})$ son los coeficientes principales de dimensión p. Los polinomios matriciales $\mathit{\Phi}_n(z;\mathit{\Omega})$ y $\mathit{\Psi}_n(z;\mathit{\Omega})$ se llaman respectivamente, polinomios matriciales ortonormales a izquierda y polinomios matriciales ortonormales a derecha. Notemos que para toda familia $\{U_n, V_n\}$ de matrices unitarias, las familias $\{U_n\mathit{\Phi}_n(z;\mathit{\Omega})\}$ y $\{\mathit{\Psi}_n(z;\mathit{\Omega})V_n\}$ son también polinomios matriciales ortonormales a izquierda y a derecha respectivamente, y bajo las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} L_n(\mathit{\Omega}) > 0, \quad L_n(\mathit{\Omega}) = L_n(\mathit{\Omega})^* \\ R_n(\mathit{\Omega}) > 0, \quad R_n(\mathit{\Omega}) = R_n(\mathit{\Omega})^*, \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

las familias de polinomios $\{\mathit{\Phi}_n(z;\mathit{\Omega})\}$ y $\{\mathit{\Psi}_n(z;\mathit{\Omega})\}$ están unívocamente determinadas. En efecto, sea $\{S_n\}$ una familia de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial $\mathit{\Omega}$ soportada en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, y cuyos coeficientes principales vienen denotados por $\mathrm{s_n}$. Entonces si $\Phi_n = \mathrm{a}_n S_n$, de la condición de ortonormalización se deduce que

$$\begin{aligned} I_p &= \mathrm{a}_n\mathrm{a}_n^* &= (\mathrm{a}_n\mathrm{s_n})\ \mathrm{s_n}^{-1}\mathrm{s_n}^{-*}\ (\mathrm{a}_n\mathrm{s_n})^* \\ & &= L_n(\mathit{\Omega})\ \mathrm{s_n}^{-1}\mathrm{s_n}^{-*}\ L_n(\mathit{\Omega})^*, \end{aligned}$$

es decir,

$$L_n(\Omega)^* L_n(\Omega) = \mathrm{s_n}^* \mathrm{s_n}. \tag{1.4.5}$$

Utilizando el teorema de las raíces cuadradas de las matrices hermitianas definidas positivas, (1.4.5) admite una única solución satisfaciendo las condiciones (1.4.4), y, por tanto, se sigue la unicidad de Φ_n.

Definición 1.9 .- *Sea $\varphi_n(z)$ un polinomio matricial de grado n. Denotamos por*

$$\widehat{\varphi}_n(z) \overset{def}{=} z^n \varphi_n(\frac{1}{\bar{z}})^* \tag{1.4.6}$$

el polinomio recíproco asociado a $\varphi_n(z)$.

Sean $\{C_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ los coeficientes matriciales de Fourier asociados a Ω,

$$C_s \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}} z^s \, d\Omega(z), \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{1.4.7}$$

Teniendo en cuenta que Ω es una medida matricial hermitiana, entonces $C_{-s} = C_s^*$, y la matriz cuadrada de Toeplitz $\Gamma_k(\Omega)$ de orden $p(k+1)$ asociada es

$$\Gamma_k(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} C_0 & C_{-1} & C_{-2} & \cdots & C_{-k} \\ C_1 & C_0 & C_{-1} & \cdots & C_{1-k} \\ \vdots & & & \cdots & \vdots \\ C_k & C_{k-1} & C_{k-2} & \cdots & C_0 \end{bmatrix}. \tag{1.4.8}$$

En [DGK78] se propone una versión matricial de la teoría de los polinomios ortogonales en la circunferencia unidad, introducida por Szegő. Otras alternativas de este desarrollo se encuentran en [Ger81, YK78, SV96]. Podemos destacar el siguiente teorema [DGK78, Thm. 1].

Teorema 1.10 .- *Dada una matriz de Toeplitz (1.4.8) definida a partir de una sucesión* $\{C_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ *de elementos de* $\mathbb{C}^{p\times p}$ *que verifica* $C_{-s} = C_s^*$*, existe una única medida matricial* Ω *satisfaciendo (1.4.7) si y solo si* Γ_k *es una matriz definida positiva para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Como se ha mencionado anteriormente, los polinomios matriciales ortonormales $\Phi_n(z;\Omega)$ y $\Psi_n(z;\Omega)$ se pueden obtener usando el proceso de ortonormalización-generalizado de Gram-Schmidt (ver página 7), pero también de forma explícita (ver[DGK78]) en términos de la matriz de Toeplitz por bloques:

$$\Phi_n(z;\Omega) = z^n M_n A_n(\frac{1}{\bar{z}})^*, \qquad \text{con } M_n^* M_n = A_n(0)^{-1} \tag{1.4.9}$$

$$\Psi_n(z;\Omega) = z^n B_n(\frac{1}{\bar{z}})^* N_n, \qquad \text{con } N_n N_n^* = B_n(0)^{-1}, \tag{1.4.10}$$

donde

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} A_n(z) & = & U_n(z)\Gamma_n^{-1}(\Omega)U_n(0)^T, & & U_n(z) & = & [I_p, zI_p, z^2I_p, \cdots, z^nI_p]\,; \\ \\ B_n(z) & = & V_n(0)\Gamma_n^{-1}(\Omega)V_n(z)^T, & & V_n(z) & = & z^nU_n(\frac{1}{z}), \end{array}\right. \tag{1.4.11}$$

y

$$\begin{aligned} A_n(z) &= A_{n,n}z^n + \textit{términos de menor grado} \\ B_n(z) &= B_{n,n}z^n + \textit{términos de menor grado} \end{aligned}$$

están relacionados mediante

$$A_n(z) - z^n B_n(\frac{1}{\bar{z}})^* B_n(0)^{-1} A_{n,n} = A_{n-1}(z), \tag{1.4.12}$$

$$B_n(z) - z^n B_{n,n} A_n(0)^{-1} A_n(\frac{1}{\bar{z}})^* = B_{n-1}(z). \tag{1.4.13}$$

Sustituyendo (1.4.9)-(1.4.10) en (1.4.12)-(1.4.13), los polinomios matriciales ortonormales $\Phi_n(z;\Omega)$ y $\Psi_n(z;\Omega)$ satisfacen

$$\Phi_n(z;\Omega) - \mathrm{H}_n\widehat{\Psi}_n(z;\Omega) = z(I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^*)^{\frac{1}{2}}\Phi_{n-1}(z;\Omega) \tag{1.4.14}$$

$$\Psi_n(z;\Omega) - \widehat{\Phi}_n(z;\Omega)\mathrm{H}_n = z\Psi_{n-1}(z;\Omega)(I_p - \mathrm{H}_n^*\mathrm{H}_n)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4.15}$$

donde

$$\mathrm{H}_n = M_n A_{nn}^* N_n = M_n B_{nn}^* N_n \tag{1.4.16a}$$

se denominan coeficientes de reflexión, y de

$$I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^* = M_n M_{n-1}^{-1} M_{n-1}^{-1^*} M_n^*, \tag{1.4.16b}$$

se sigue que $I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^*$ es una matriz definida positiva ó equivalentemente $0 \leq \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^* < I_p$ (comparar con el caso escalar). Otra alternativa para encontrar (1.4.14)-(1.4.15), es utilizar el desarrollo de la serie de Fourier. En efecto, consideramos el polinomio matricial definido a partir de (1.4.3)

$$P_{n-1}(z;\Omega) = \frac{\Psi_n(z;\Omega) - \widehat{\Phi}_n(z;\Omega)\lambda_{n,n}^{-*}\mu_{n,0}}{z} \quad (\lambda_{n,n} \stackrel{\text{def}}{=} L_n(\Omega)), \tag{1.4.17}$$

si desarrollamos $P_{n-1}(z;\Omega)$ en la serie de Fourier asociada a los polinomios matriciales ortonormales a derecha,

$$P_{n-1}(z;\Omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k(z;\Omega)\mathrm{B}_{n,k}, \tag{1.4.18}$$

entonces los coeficientes de Fourier vienen dados por

$$\mathrm{B}_{n,k} =< \Psi_k(z;\Omega), \bar{z}\Psi_n(z;\Omega) >_R - < \Psi_k(z;\Omega), \bar{z}\widehat{\Phi}_n(z;\Omega) >_R \lambda_{n,n}^{-*}\mu_{n,0}.$$

Teniendo en cuenta la propiedad de ortonormalización, se tiene

$$< \Psi_k(z;\Omega), \bar{z}\Psi_n(z;\Omega) >_R = \begin{cases} < z\Psi_k(z;\Omega), \Psi_n(z;\Omega) >_R = 0 & \text{si } k \leq n-2 \\ \mu^*_{n-1,n-1}\,\mu^{-*}_{n,n} & \text{si } k = n-1, \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} < \Psi_k(z;\Omega), \bar{z}\widehat{\Phi}_n(z;\Omega) >_R &= < \Psi_k(z;\Omega), z^{n-1}\Phi_n(z;\Omega)^* >_R \\ &= < z^{n-1}\Psi_k(z;\Omega)^*, \Phi_n(z;\Omega) >_L \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $k < n$. Así, de (1.4.17) y (1.4.18) se deducen las siguientes relaciones de recurrencia.

Proposición 1.11 .- *Sean $\Phi_n(z;\Omega)$ y $\Psi_n(z;\Omega)$ los polinomios (1.4.3) ortonormales con respecto a la medida matricial Ω. Entonces se verifica*

(a) $\Psi_n(z;\Omega)\mu^*_{n,n} = z\Psi_{n-1}(z;\Omega)\mu^*_{n-1,n-1} + \widehat{\Phi}_n(z;\Omega)\lambda^*_{n,n}\mu_{n,0}\mu^*_{n,n}$;

(b) $\lambda^*_{n,n}\Phi_n(z;\Omega) = z\lambda^*_{n-1,n-1}\Phi_{n-1}(z;\Omega) + \lambda^*_{n,n}\lambda_{n,0}\mu^{-*}_{n,n}\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)$.

Observamos que, de $< \Psi_n(z;\Omega), \widehat{\Phi}_n(z;\Omega) >_R = < \widehat{\Psi}_n(z;\Omega), \Phi_n(z;\Omega) >_L$, se deduce $\mu^{-1}_{n,n}\lambda^*_{n,0} = \mu^*_{n,0}\lambda^{-1}_{n,n}$, y el coeficiente de reflexión se puede introducir mediante

$$\mathrm{H}_n = \lambda^{-*}_{n,n}\mu_{n,0} = \lambda_{n,0}\mu^{-*}_{n,n}. \tag{1.4.19}$$

Después de algunos cálculos, se tiene

$$\begin{aligned} (I_p - \mathrm{H}^*_n\mathrm{H}_n)^{\frac{1}{2}} &= \mu^{-1}_{n,n}\,\mu_{n-1,n-1} \\ (I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}^*_n)^{\frac{1}{2}} &= \lambda^{-*}_{n,n}\,\lambda^*_{n-1,n-1}, \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que, usando la proposición 1.11, deducimos (1.4.14)-(1.4.15). Ahora, si combinamos (1.4.14)-(1.4.15) y teniendo en cuenta la identidad $(I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}^*_n)^{\frac{1}{2}}$

$\mathrm{H}_n = \mathrm{H}_n(I_p - \mathrm{H}_n^*\mathrm{H}_n)^{\frac{1}{2}}$, obtenemos las siguientes relaciones de recurrencia

$$(I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^*)^{\frac{1}{2}}\mathit{\Phi}_n(z;\mathit{\Omega}) = z\,\mathit{\Phi}_{n-1}(z;\mathit{\Omega}) + \mathrm{H}_n\widehat{\mathit{\Psi}}_{n-1}(z;\mathit{\Omega}) \tag{1.4.21}$$

$$\mathit{\Psi}_n(z;\mathit{\Omega})(I_p - \mathrm{H}_n^*\mathrm{H}_n)^{\frac{1}{2}} = z\,\mathit{\Psi}_{n-1}(z;\mathit{\Omega}) + \widehat{\mathit{\Phi}}_{n-1}(z;d\mathit{\Omega})\mathrm{H}_n. \tag{1.4.22}$$

Notamos que, para cada medida matricial $\mathit{\Omega}$, los coeficientes de reflexión $\{\mathrm{H}_n\}$ están determinados de forma única, salvo multiplicación a izquierda y a derecha por matrices unitarias independiente de n. Recíprocamente, a partir de una familia $\{\mathrm{H}_n\}$ de elementos de $\mathbb{C}^{p\times p}$ tal que $I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^*$ son matrices definidas positivas para todo $n \in \mathbb{N}$, y de las relaciones de recurrencia (1.4.21)-(1.4.22) inicializadas por Φ_0 *y* Ψ_0 satisfaciendo $\Phi_0^*\Phi_0 = \Psi_0\Psi_0^*$, se obtienen las sucesiones de polinomios matriciales ortonormales $\{\Phi_n\}$ y $\{\Psi_n\}$ con respecto a una única medida matricial $\mathit{\Omega}$ (ver [DGK78, Thm. 15]). A continuación, enunciaremos la versión matricial de la fórmula de Christoffel-Darboux que aparece en la literatura en varias formas (ver por ejemplo [YK78]).

Si utilizamos (1.4.21)-(1.4.22) y la identidad $(I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^*)^{-1}\mathrm{H}_n = \mathrm{H}_n(I_p - \mathrm{H}_n^*\mathrm{H}_n)^{-1}$, obtenemos

$$\widehat{\mathit{\Phi}}_k(z;\mathit{\Omega})\,\mathit{\Phi}_k(\xi;\mathit{\Omega}) - \xi\,\widehat{\mathit{\Phi}}_{k-1}(z;\mathit{\Omega})\,\mathit{\Phi}_{k-1}(\xi;\mathit{\Omega}) = \\ \mathit{\Psi}_k(z;\mathit{\Omega})\,\widehat{\mathit{\Psi}}_k(\xi;\mathit{\Omega}) - z\mathit{\Psi}_{k-1}(z;\mathit{\Omega})\,\widehat{\mathit{\Psi}}_{k-1}(\xi;\mathit{\Omega}). \tag{1.4.23}$$

Multiplicando en ambos miembros de (1.4.23) por z^{-k}, sumando para $k = 0, 1, \cdots, n$ y teniendo en cuenta (1.4.6), tenemos

$$z^{-n}\mathit{\Psi}_n(z;\mathit{\Omega})\,\widehat{\mathit{\Psi}}_n(\xi;\mathit{\Omega}) = \left(1 - \frac{\xi}{z}\right)\sum_{k=0}^{n}\mathit{\Phi}_k(\frac{1}{\bar{z}};\mathit{\Omega})^*\,\mathit{\Phi}_k(\xi;\mathit{\Omega}) + \frac{\xi}{z}\,\mathit{\Phi}_n(\frac{1}{\bar{z}};\mathit{\Omega})^*\,\mathit{\Phi}_n(\xi;\mathit{\Omega}).$$

Sustituyendo z por $\frac{1}{\bar{z}}$, se obtiene la fórmula de Christoffel-Darboux en la circunferencia unidad

$$(1-\bar{z}\xi)\,\mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\bar{z}\xi)\sum_{k=0}^{n} \Phi_k(z;\Omega)^*\Phi_k(\xi;\Omega) \tag{1.4.24}$$

$$= \widehat{\Psi}_n(z;\Omega)^*\widehat{\Psi}_n(\xi;\Omega) - \bar{z}\xi\Phi_n(z;\Omega)^*\Phi_n(\xi;\Omega).$$

De forma análoga, se obtiene la fórmula dual

$$(1-\bar{z}\xi)\,\mathcal{H}_{n+1}(z,\xi;\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\bar{z}\xi)\sum_{k=0}^{n} \Psi_k(\xi;\Omega)\Psi_k(z;\Omega)^* \tag{1.4.25}$$

$$= \widehat{\Phi}_n(\xi;\Omega)\widehat{\Phi}_n(z;\Omega)^* - \bar{z}\xi\,\Psi_n(\xi;\Omega)\Psi_n(z;\Omega)^*.$$

En primer lugar, vamos a enunciar la propiedad reproductora de los núcleos $\{\mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega)\}$ y $\{\mathcal{H}_{n+1}(z,\xi;\Omega)\}$.

Proposición 1.12 .-

Consideramos los polinomios matriciales $\{\mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega)\}$ y $\{\mathcal{H}_{n+1}(z,\xi;\Omega)\}$ en las variables z e ξ dados por (1.4.24) y (1.4.25), entonces se cumple

$$< \Pi_m(\xi), \mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega) >_L = \Pi_m(z); \quad m \leq n \tag{1.4.26}$$

$$< \mathcal{H}_{n+1}(z,\xi;\Omega), \Pi_m(\xi) >_R = \Pi_m(z); \quad m \leq n, \tag{1.4.27}$$

para todo polinomio matricial $\Pi_m(z)$ de grado menor ó igual que m.

Demostración.-

Como $\{\Phi_0(z;\Omega), \Phi_1(z;\Omega), \cdots, \Phi_m(z;\Omega)\}$ es una base del espacio $\mathbb{P}_m$ de los polinomios matriciales de grado menor o igual que m, entonces si desarrollamos $\Pi_m(\xi)$ en serie de Fourier respecto a dicha base

$$\Pi_m(\xi) = \sum_{r=0}^{m} A_{m,r}\Phi_r(\xi;\Omega),$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
< \Pi_m(\xi), \mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega) >_L &= \int_{\mathbb{T}} \Pi_m(\xi) d\Omega(\xi) \mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega)^* \\
&= \sum_{r=0}^{m} A_{m,r} \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{T}} \Phi_r(\xi;\Omega) d\Omega(\xi) \Phi_k(\xi;\Omega)^* \ \Phi_k(z;\Omega) \\
&= \sum_{r=0}^{m} A_{m,r} \Phi_r(z;\Omega) = \Pi_m(z).
\end{aligned}$$

Análogamente, si desarrollamos $\Pi_m(\xi)$ en serie de Fourier respecto a los polinomios matriciales ortonormales a izquierda

$$\Pi_m(\xi) = \sum_{r=0}^{m} \Psi_r(\xi;\Omega) B_{m,r},$$

entonces

$$\begin{aligned}
< \mathcal{H}_{n+1}(z,\xi;\Omega), \Pi_m(\xi) >_R &= \int_{\mathbb{T}} \mathcal{H}_{n+1}(z,\xi;\Omega)^* d\Omega(\xi) \Pi_m(\xi) \\
&= \sum_{r=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \Psi_k(z;\Omega) \int_{\mathbb{T}} \Psi_k(\xi;\Omega)^* d\Omega(\xi) \Psi_r(\xi;\Omega) B_{m,r} \\
&= \sum_{r=0}^{m} \Psi_r(z;\Omega) B_{m,r} = \Pi_m(z).
\end{aligned}$$

■

Ahora, tomando $\xi = z$ en (1.4.24), se tiene

$$|z|^2 \Phi_n(z;\Omega)^* \Phi_n(z;\Omega) = \left(|z|^2 - 1\right) \mathcal{K}_{n+1}(z,z;\Omega) + \widehat{\Psi}_n(z;\Omega)^* \widehat{\Psi}_n(z;\Omega). \qquad (1.4.28)$$

Es claro que el término de la derecha de (1.4.28) es una matriz definida positiva para todo $|z| > 1$, y eso implica que $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$ es una sucesión de polinomios matriciales no-singulares cuando z se encuentra fuera del disco unidad $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Para ver que $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$ no posee ceros en $\mathbb{T}$ (z_0 es un cero de $\Phi_n(z;\Omega)$ si $\det \Phi_n(z_0;\Omega) = 0$), suponemos que para cada $z \in \mathbb{T}$, existe un vector $u \in \mathbb{C}^p, u \neq 0$ tal que $\Phi_n(z;\Omega)u = 0$. En virtud de (1.4.28) se verifica que $\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)u = 0$, y teniendo en cuenta (1.4.14) se deduce que $\Phi_{n-1}(z;\Omega)u = 0$. Así por inducción se obtiene que $\Phi_0(z;\Omega)u = 0$ en contradicción con el hecho de que Φ_0 es no-singular. De forma similar, se puede probar que $\{\Psi_n(z;\Omega)\}$ satisface la misma propiedad que enunciamos en la siguiente proposición, usando (1.4.25) y (1.4.15).

Proposición 1.13 .-

Los ceros de los polinomios ortonormales matriciales $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$ *y* $\{\Psi_n(z;\Omega)\}$ *están contenidos en el disco unidad* $\mathbb{D}$.

Sea $W(\theta) = \frac{d\Omega(\theta)}{d\theta}$ *c.p.d.* la derivada de Radon-Nikodym de la parte absolutamente continua de la medida matricial Ω con respecto a la medida escalar de Lebesgue, $\{A_k(z)\}$ la sucesión de polinomios matriciales dada por (1.4.11) y $\| \, . \, \|_E$ la norma matricial de Frobenius. A continuación, de acuerdo con la relación (1.4.9), enunciamos una condición necesaria y suficiente para la convergencia de los polinomios $\{A_k(z)\}$ (vase [DGK78]).

Definición 1.14 *Sea* $G(z)$ *una función matricial analítica sobre* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, *y de tamaño p. Se dice que* $G(z)$ *pertenece a la clase* $H_2^{p\times p}$ *si*

$$\sup_{0\le r<1} \int_0^{2\pi} \| \, G(r\, e^{i\theta}) \, \|_E^2 \, < \infty.$$

Teorema 1.15 .- *La sucesión* $\{A_k(z)\}$ *converge uniformemente en todo subconjunto compacto de* $\mathbb{D}$ *si y solo si* $\{\det A_k(0)\}$ *está acotada superiormente. En este caso,* $A(z) = \lim_{n\to\infty} A_n(z)$ *es una función matricial analítica que no posee ceros en* $\mathbb{D}$*; su inversa* $A(z)^{-1}$ *pertenece a la clase* $H_2^{p\times p}$.

Demostración.-

($\Rightarrow$) Condición suficiente: es evidente.

($\Leftarrow$) Condición necesaria: Tomando $\xi = z$ en la relación (1.4.25), se obtiene para $z \in \mathbb{D}$ y $0 \leq s \leq k$ la siguiente desigualdad matricial

$$\begin{aligned}(1- \mid z \mid^2) \sum_{i=0}^{s} \Psi_i(z;\Omega)\Psi_i(z;\Omega)^* \\ &\leq (1- \mid z \mid^2) \sum_{i=0}^{k} \Psi_i(z;\Omega)\Psi_i(z;\Omega)^* \\ &\leq \widehat{\Phi}_k(z;\Omega)\widehat{\Phi}_k(z;\Omega)^* = A_k(z)A_k^{-1}(0)A_k(z)^*.\end{aligned}$$

Utilizando la versión matricial del teorema de Montel (cf. [DGK78, Appendix III]) para la sucesión de funciones $T_k(z) = A_k(z)A_k^{-\frac{1}{2}}$, existe una función $T(z)$ analítica sobre $\mathbb{D}$, y satisfaciendo

$$(1- \mid z \mid^2) \sum_{i=0}^{s} \Psi_i(z;\Omega)\Psi_i(z;\Omega)^* \leq T(z)\,T(z)^* \tag{1.4.29}$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Usando la norma matricial Euclidiana $\parallel X \parallel_E^2 = \tau(X\,X^*)$, de (1.4.29) se deduce

$$\sum_{i=0}^{s} \parallel \Psi_i(z;\Omega) \parallel_E^2 \leq (1- \mid z \mid^2)^{-1} \parallel T(z) \parallel_E^2 \tag{1.4.30}$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Usando el criterio de Cauchy para la serie (1.4.30), existe un real $\varepsilon > 0$ y un compacto $\mathbb{K} \subset \mathbb{D}$ con $0 \in \mathbb{K}$, así como un entero positivo n tal que para $k > s \geq n$, se tiene

$$\sum_{i=s+1}^{k} \parallel \Psi_i(z;\Omega) \parallel_E^2 \leq \varepsilon \tag{1.4.31}$$

para $z \in \mathbb{K}$. Usando la formula de Christoffel-Darboux (1.4.25) con $\xi = 0$,

$$\sum_{i=0}^{k} \Psi_i(z;\Omega)\Psi_i(0;\Omega)^* = \widehat{\Phi}_k(z;\Omega)\widehat{\Phi}_k(0;\Omega)^* = A_k(z), \tag{1.4.32}$$

y teniendo en cuenta (1.4.31) y la desigualdad de Cauchy, se tiene

$$\|A_k(z) - A_s(z)\|_E^2 \leq \sum_{i=s+1}^{k} \|\Psi_i(z;\Omega)\|_E^2 \sum_{i=s+1}^{k} \|\Psi_i(0;\Omega)\|_E^2 \leq \varepsilon^2$$

para $z \in \mathbb{K}$. Eso significa que la sucesión $\{A_k(z)\}$ converge uniformemente en $\mathbb{K}$ a una función analítica $A(z)$. Además, puesto que $\{\det A_k(z)\}$ no tiene ceros en $\mathbb{D}$ y que $\det A(0) \neq 0$ (cf. [DGK78, Thm 3]), se sigue que $\det A(z)$ no posee ceros en $\mathbb{D}$.

■

En el estudio de la convergencia de los polinomios ortogonales matriciales en la circunferencia unidad, aparecen las siguientes condiciones necesarias y suficientes

$$\log\, \det W \in L^1(\mathbb{T}) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} [\det\, A_k(0)] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \parallel \mathrm{H}_k \parallel_E^2 < \infty \tag{1.4.33}$$

cuya equivalencia se deduce de la combinación de los siguientes teoremas.

Teorema 1.16 .- *Sea $W(\theta)$ la derivada de Radon-Nikodym de la parte absolutamente continua de $\Omega(\theta)$. La sucesión $\{\det A_k(0)\}$ está acotada superiormente si y solo si el logaritmo del determinante de $W(\theta)$ es integrable sobre $[0, 2\pi]$, y en este caso*

$$\lim_{k\to\infty} \log\det A_k(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\det W(\theta) d\theta.$$

Demostración.-

($\Rightarrow$) Condición suficiente: Suponemos que $\log\det W(\theta)$ es integrable; entonces se tiene

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} \log\det W(\theta) d\theta + \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\det A_k(e^{i\,\theta})|^2 d\theta \\ &\qquad = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} \log\det\left[A_k(e^{i\,\theta})^* W(\theta) A_k(e^{i\,\theta})\right] d\theta. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio para la función armónica $\log \mid \det A_k(z) \mid$, la versión matricial de la desigualdad de Jensen y el carácter creciente de $\log\det$ (cf.

[DGK78, Apendix I]), se deduce

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\det W(\theta)d\theta + 2\log\ \det A_k(0) \\
&\quad \leq \log\ \det\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_k(e^{i\,\theta})^* W(\theta) A_k(e^{i\,\theta})d\theta\right] \\
&\quad \leq \log\ \det\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_k(e^{i\,\theta})^* d\Omega(\theta) A_k(e^{i\,\theta})\right]
\end{aligned} \tag{1.4.34a}$$

El segundo miembro de (1.4.34a) es igual a $\det A_k(0)$. Así, de (1.4.34) se tiene

$$\log\ \det A_k(0) \leq -\frac{1}{2\pi}\log\ \det W(\theta)d\theta.$$

($\Leftarrow$) El recíproco se deduce usando el teorema 1.15 y [DGK78, Thm 8].

$\blacksquare$

Teorema 1.17 .- *La sucesión* $\{\det A_k(0)\}$ *está acotada superiormente si y solo si los coeficientes de reflexión* $\{\mathrm{H}_k\}$ *satisfacen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \parallel \mathrm{H}_k \parallel_E^2 < \infty. \tag{1.4.35}$$

Demostración.-

A partir de (1.4.9) y (1.4.16b), se deduce por inducción que

$$\det A_k^{-1}(0) = \det C_0 \prod_{s=1}^{k} \det(I_p - \mathrm{H}_s\mathrm{H}_s^*). \tag{1.4.36}$$

Sea λ_s el valor propio máximo de $\mathrm{H}_s\mathrm{H}_s^*$; a partir de (1.4.36) se deduce

$$\prod_{s=1}^{k}(1-\lambda_s)^{-1} \leq \det C_0\ \det A_k(0) \leq \prod_{s=1}^{k}(1-\lambda_s)^{-p}. \tag{1.4.37}$$

Así, la sucesión $\{\det A_k(0)\}$ está acotada si y solo si el producto infinito $\prod(1-\lambda_s)^{-1}$ converge, y eso es equivalente a $\sum \lambda_s < \infty$, es decir (1.4.35), puesto que $\lambda_s \leq\parallel \mathrm{H}_s \parallel_E\leq p\lambda_s$.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Asintótica relativa de polinomios ortogonales con respecto a una medida matricial soportada en la recta real

2.1 Introducción

En [Nev79], se ha analizado el comportamiento asintótico de una sucesión de polinomios ortogonales respecto a medidas que presentan masas de Dirac en un número finito de puntos de la recta real, de manera que la matriz de Jacobi asociada es una perturbación compacta de la matriz tridiagonal infinita

$$\begin{pmatrix} b & a & & \\ a & b & a & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Más recientemente, se ha establecido en [GH97] una conexión entre la transformación de Darboux de la matriz de Jacobi y la existencia de una masa.

En este capitulo, estamos interesados en el estudio de algunos problemas análogos para medidas matriciales y sus correspondientes sucesiones de polinomios matriciales ortogonales. Sea $\{P_n(x;.) = A_n(.)x^n + \cdots\}$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial α y β relacionadas por

$$d\beta(u) = d\alpha(u) + \sum_{k=1}^{N} M_k \delta(u - c_k), \tag{2.1.1}$$

donde M_k son matrices definidas positivas de dimensión p, δ es la medida matricial de Dirac y c_k son números reales que se encuentran fuera del soporte de α para $k = 1, \cdots, N$. En [YMPb] hemos obtenido el comportamiento asintótico de los cocientes $A_n(\beta)A_n(\alpha)^{-1}$ y $P_n(x;\beta)P_n(x;\alpha)^{-1}$ cuando los parámetros matriciales en la relación de recurrencia a tres términos (1.3.4) son convergentes

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\alpha) = D, \quad \lim_{n\to\infty} E_n(\alpha) = E \tag{2.1.2}$$

en el caso que D sea no-singular. Deducimos también el comportamiento asintótico del producto $P_n(c;\beta)P_n(c;\alpha)^*$ bajo la misma hipótesis cuando α y β están relacionadas por $d\beta(u) = d\alpha(u) + \delta(u - c)$ donde $c \in \mathbb{R}$ se encuentra fuera del soporte de α.

En la sección 2.2 comenzaremos por enunciar una relación que conecta ambos polinomios. A continuación, bajo la hipótesis de convergencia de los parámetros matriciales en la relación de recurrencia a tres términos, se obtiene la asintótica del cociente de los coeficientes principales cuando las medidas asociadas están relacionadas por (2.1.1) con $N = 1$. Teniendo en cuenta [YMPa, Cor. 4.1], se extiende dicho resultado para $N > 1$.

Por último, en la sección 2.3, se deduce, bajo la misma hipótesis, la asintótica relativa de los polinomios matriciales ortonormales cuando la medida asociada es perturbada con la suma de la medida de Dirac (véase (2.1.1) con $N = 1$). De forma similar, se extiende este resultado para $N > 1$. Finalmente, se obtiene la asintótica del producto de una sucesión de polinomios matriciales ortonormales y su perturbación en el soporte de la medida de Dirac añadida.

2.2 Asintótica del cociente de los coeficientes principales

Lema 2.1 .- *Sean α y β dos medidas matriciales, y M una matriz definida positiva de dimensión p tal que $d\beta(u) = d\alpha(u) + M\delta(u-c)$, donde c es número real. Entonces se cumple*

$$P_n(x;\beta) = \mathcal{M}_n \left[P_n(x;\alpha) - \mathcal{V}_n M K^*_{n+1}(c,x;\alpha) \right] \tag{2.2.1}$$

donde

$$\begin{cases} \mathcal{M}_n = A_n^{-*}(\beta) A_n^*(\alpha) \\ \mathcal{V}_n = P_n(c;\alpha) \left(I_p + M K_{n+1}(c,c;\alpha) \right)^{-1}. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Demostración.-

Usando la propiedad reproductora de los núcleos (1.3.13), tenemos

$$\begin{aligned}
P_n(x;\beta) &= \int P_n(u;\beta)d\alpha(u)K^*_{n+1}(u,x;\alpha)\\
&= \int P_n(u;\beta)d\beta(u)K^*_{n+1}(u,x;\alpha) - \int P_n(u;\beta)MK^*_{n+1}(u,x;\alpha)d\delta(u-c)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left[\int P_n(u;\beta)d\beta(u)P^*_j(u;\alpha)\right]P_j(x;\alpha) - P_n(c;\beta)MK^*_{n+1}(c,x;\alpha)\\
&= \int P_n(u;\beta)d\beta(u)P^*_n(u;\alpha).P_n(x;\alpha) - P_n(c;\beta)MK^*_{n+1}(c,x;\alpha)\\
&= A_n(\beta)^{-*}A_n(\alpha)^*P_n(x;\alpha) - P_n(c;\beta)MK^*_{n+1}(c,x;\alpha).
\end{aligned}$$

Si $x = c$ entonces

$$P_n(c;\beta)\left\{I_p + MK^*_{n+1}(c,c;\alpha)\right\} = A_n(\beta)^{-*}A_n(\alpha)^*P_n(c;\alpha).$$

Puesto que M y $K_{n+1}(c,c;\alpha)$ son matrices definidas positivas, entonces

$$I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha) = (K^{-1}_{n+1}(c,c;\alpha) + M)K_{n+1}(c,c;\alpha)$$

es una matriz no-singular, al ser producto de dos matrices definidas positivas.

Así,

$$P_n(c;\beta) = A_n(\beta)^{-*}A_n(\alpha)^*P_n(c;\alpha)\left\{I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right\}^{-1}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&P_n(x;\beta) = \mathcal{M}_nP_n(x;\alpha) -\\
&\qquad -\mathcal{M}_nP_n(c;\alpha)\left\{I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right\}^{-1}MK^*_{n+1}(c,x;\alpha),
\end{aligned}$$

es decir,

$$P_n(x;\beta) = \mathcal{M}_n\left[P_n(x;\alpha) - \mathcal{V}_nMK^*_{n+1}(c,x;\alpha)\right].$$

■

Antes de empezar con la demostración del teorema principal de esta sección, necesitamos enunciar algunos resultados auxiliares. Recordemos que si H es una matriz definida positiva, entonces existe una única raíz cuadrada $H_0 = H^{\frac{1}{2}}$ de H dada como sigue: Escribiendo $H = UDU^*$, donde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$; $(\lambda_i)_{i=1,n}$ son los valores propios de H (que son positivos), entonces $H_0 = UD_0U^*$, donde $D_0 = diag(+\sqrt{\lambda_1}, +\sqrt{\lambda_2}, \dots, +\sqrt{\lambda_n})$.

En la siguiente proposición, destacamos algunos resultados (véase [Dur99]) que utilizaremos posteriormente.

Proposición 2.2 .- *Sea $\{P_n(x;\alpha)\}$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales que satisface la relación de recurrencia (1.3.4). Suponemos que se verifica*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D_n(\alpha) = D \quad y \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} E_n(\alpha) = E,$$

donde D es una matriz no-singular. Entonces se cumple

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_{n-1}(z;\alpha)P_n^{-1}(z;\alpha)D_n^{-1}(\alpha) = \int \frac{dW_{D,E}(t)}{z-t}; \;\; z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma, \tag{2.2.3}$$

donde $W_{D,E}(t)$ es la matriz de peso de los polinomios matriciales de Chebyshev de segundo tipo y Γ viene dada por (1.3.15). Además, la convergencia es uniforme en todo subconjunto compacto de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$.

La función matricial de Markov a derecha de (2.2.3) es analítica y tiene la siguiente forma explícita

- *Si D es una matriz definida positiva, entonces*

$$\begin{aligned}\int \frac{dW_{D,E}(t)}{x-t} &= \frac{1}{2}D^{-1}(xI_p - E)D^{-1} \\ &\quad -\frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{D^{-\frac{1}{2}}(E-xI_p)D^{-1}(E-xI_p)D^{-\frac{1}{2}} - 4I_p}\right]D^{-\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

cuando $x \notin sop(dW_{D,E}) = \Big\{x \in \mathbb{R}; D^{-\frac{1}{2}}(E - xI_p)D^{-\frac{1}{2}}$ *tiene al menos un valor propio en* $[-2, 2]\Big\}$.

- *Si D es una matriz simétrica, entonces*

$$\int \frac{dW_{D,E}(t)}{x-t} = \frac{1}{2}D^{-1}(xI_p - E)D^{-1} - \frac{1}{2}D^{-1}(E - xI_p)^{\frac{1}{2}}. \\ \left[\sqrt{I_p - 4(E - xI_p)^{-\frac{1}{2}}D(E - xI_p)^{-1}D(E - xI_p)^{-\frac{1}{2}}}\right](E - xI_p)^{\frac{1}{2}}D^{-1} \tag{2.2.5}$$

cuando $x \notin sop(dW_{D,E}) = \Big\{x \in \mathbb{R} \setminus [b_1, b_p]\,; (E - xI_p)^{\frac{1}{2}}D^{-1}(E - xI_p)^{\frac{1}{2}}$ *tiene al menos un valor propio en* $[-2, 2]\Big\}$, *y* $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_p$ *son valores propios de E.*

Lema 2.3 .- *Sea* $\{P_n(x; \alpha)\}$ *una sucesión de polinomios matriciales ortonormales cuyos parámetros matriciales en la relación de recurrencia (1.3.4) son convergentes. Existe una constante positiva* $a > 0$ *tal que si* $x_{n,k}$ *es un cero de* P_n $(x_{n,k} \in \Delta_n(\alpha))$ *entonces* $| x_{n,k} | \leq a$, *y* $sop(\alpha)$ *está contenido en* $[-a, a]$.

Demostración.-

Sea $\mathbb{J}(\alpha)$ la matriz de Jacobi por bloques (1.3.14) asociada a $\{P_n(x; \alpha)\}$ tal que las sucesiones de parámetros matriciales $\{E_i(\alpha)\}$ *y* $\{D_i(\alpha)\}$ son convergentes. Utilizando la proposición 3.2, los ceros $\{x_{n,k},\ k = 1, \cdots, np\}$ son valores propios de $\mathbb{J}_n$ ($\mathbb{J}_n$ es la matriz truncada de $\mathbb{J}$ de dimensión np). Usando el teorema de Gershgorin para la localización de los valores propios, existe un número real positivo a tal que $| x_{n,k} | \leq a$, y teniendo en cuenta (1.3.15), deducimos que $sop(\alpha) \subset \Gamma \subset [-a, a]$.

∎

Durante toda la memoria, denotamos por $\hat{\Gamma}$ el máximo intervalo cerrado de la recta real que está contenido en todos los intervalos que contienen a $sop(\alpha)$ (clausura de la envolvente convexa de $sop(\alpha)$).

Proposición 2.4 .- *La función matricial de Markov* $\int \frac{dW_{D,E}(t)}{z-t}$ *es definida positiva ó es definida negativa para cada* $z \in \mathbb{R} \setminus \hat{\Gamma}$. *Además, es diferenciable y su derivada es la función matricial* $-\int \frac{dW_{D,E}(t)}{(z-t)^2}$ *que es definida negativa cuando* $z \notin sop(dW_{D,E})$.

Demostración.-

Consideramos los conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > c; \ \ \forall c \in \hat{\Gamma} \right\}$$

y

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < c; \ \ \forall c \in \hat{\Gamma} \right\}.$$

La función escalar $\frac{1}{z-t}$ es positiva (resp. negativa) cuando $z \in A$ (resp. $z \in B$) y $t \in sop(dW_{D,E}) = sop(\alpha) \subset \hat{\Gamma}$. Puesto que $dW_{D,E}$ es una medida matricial definida positiva, entonces la derivada traza de $W_{D,E}$ ($W'_{D,E} = \left[\frac{dW_{D,E}}{d\tau W_{D,E}}\right]$, veáse página 5) es definida positiva. Para todo vector $u \in \mathbb{R}^p$, tenemos

$$\begin{aligned} u\left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{z-t}\right)u^* &= u\left(\int \frac{W'_{D,E}(t)}{z-t} d\tau W_{D,E}\right)u^* \\ &= \int \frac{\left(uW'_{D,E}(t)u^*\right)}{z-t} d\tau W_{D,E}. \end{aligned}$$

Así, la función matricial de Markov es definida positiva (resp. definida negativa) cuando $z \in A$ (resp. $z \in B$).

De forma similar, podemos probar que la derivada de la función matricial de Markov $-\int \frac{dW_{D,E}(t)}{(z-t)^2}$ es definida negativa cuando $z \notin sop(dW_{D,E})$.

■

Teorema 2.5 .- *Si $\{W_n\}_n$ es una sucesión de funciones holomorfas sobre un abierto G que converge casi uniformemente hacia W, entonces W es también una función holomorfa sobre G. Además, si $\infty \notin G$ entonces*

$$W_n^{(k)}(z) \rightsquigarrow W^{(k)}(z)$$

sobre G para todo $k = 1, 2, \cdots$.

Demostración.- ver [SZ71] ∎

Recordamos que $\{W_n\}_n$ converge casi uniformemente hacia W sobre un abierto G ($W_n(z) \rightsquigarrow W(z)$) si $\{W_n\}_n$ converge uniformemente hacia W sobre cada subconjunto cerrado de G.

Corolario 2.6 .- *Bajo las hipótesis de la proposición 2.2, se cumple*

$$\left(P_{n-1}(z;\alpha)P_n^{-1}(z;\alpha)\right)^{(k)} D_n^{-1}(\alpha) \rightsquigarrow \left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{z-t}\right)^{(k)} \tag{2.2.6}$$

sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, para $k = 1, 2, \cdots$.

La convergencia casi uniforme en (2.2.6) significa que cada componente de la matriz del primer miembro de (2.2.6) converge casi uniformemente hacia su correspondiente componente de la matriz del segundo miembro de (2.2.6).

Demostración.-

Puesto que $P_{n-1}(z;\alpha)P_n^{-1}(z;\alpha)$ es una función matricial holomorfa sobre $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, es decir que todas sus componentes son funciones escalares holomorfas sobre $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, y a partir de la hipótesis, $\{P_{n-1}(z;\alpha)P_n^{-1}(z;\alpha)D_n^{-1}(\alpha)\}$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, es decir que todas sus componentes convergen uniformemente en todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, entonces $\{P_{n-1}(z;\alpha)P_n^{-1}(z;\alpha)\}$

converge casi uniformemente sobre todo subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ puesto que todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto. Aplicando el teorema 2.5, se tiene

$$(P_{n-1}(z;\alpha)P_n^{-1}(z;\alpha)D_n^{-1}(\alpha))^{(k)} \rightsquigarrow \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{z-t}\right)^{(k)},$$

es decir (2.2.6).

■

Teorema 2.7 .- *Sean $A_n(\beta)$ y $A_n(\alpha)$ los coeficientes principales del polinomio matricial ortonormal $\{P_n(x,.) = A_n(.)x^n + \text{términos de menor grado}\}$ con respecto a las medidas matriciales β y α, relacionadas por $d\beta(u) = d\alpha(u) + M\delta(u-c)$, donde $c \in \mathbb{R} \setminus \hat{\Gamma}$ y M es una matriz definida positiva. Suponemos que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D_n(\alpha) = D, \;\; y \;\; \lim_{n\longrightarrow\infty} E_n(\alpha) = E,$$

donde $D_n(\alpha)$ y $E_n(\alpha)$ son los parámetros matriciales en la relación de recurrencia (1.3.4) y D es una matriz no-singular. Entonces se cumple

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} &\left[A_n(\beta)A_n(\alpha)^{-1}\right]^* \left[A_n(\beta)A_n(\alpha)^{-1}\right] = \\ &I_p + \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)\cdot\left\{\tfrac{d}{dx}\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)(c)\right\}^{-1}\cdot\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right).\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Para demostrar (2.2.7), necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.8 .- Sea $\{P_n(x;\alpha)\}$ *una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial α. Sean $\{D_n(\alpha), E_n(\alpha)\}$ los parámetros matriciales que aparecen en la relación de recurrencia (1.3.4), y satisfacen*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D_n(\alpha) = D, \;\; y \;\; \lim_{n\longrightarrow\infty} E_n(\alpha) = E,$$

donde D es una matriz no-singular. Entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n^{-1}(x;\alpha) = 0, \tag{2.2.8}$$

para $x \in \mathbb{R}\setminus\hat{\Gamma}$.

Demostración.-

Notamos que a partir de (1.3.9) y usando el apartado (c) de la proposición 1.5, tenemos

$$\begin{aligned}
&P_n^{-1}(x;\alpha)D_n^{-1}(\alpha)P_{n-1}^{-*}(x;\alpha)\\
&= P_n^{-1}(x;\alpha).\left(Q_n(x;\alpha)P_{n-1}^{*}(x;\alpha) - P_n(x;\alpha)Q_{n-1}^{*}(x;\alpha)\right).P_{n-1}^{-*}(x;\alpha)\\
&= P_n^{-1}(x;\alpha)Q_n(x;\alpha) - (P_{n-1}^{-1}(x;\alpha)Q_{n-1}(x;\alpha))^{*}.
\end{aligned}$$

Pero recordando (1.3.9), se tiene

$$\begin{aligned}
&P_n^{-1}(x;\alpha)Q_n(x;\alpha)\\
&= \int P_n^{-1}(x;\alpha)\frac{P_n(x;\alpha)-P_n(t;\alpha)}{x-t}d\alpha(t)\\
&= \int P_n^{-1}(x;\alpha)\frac{P_n(x;\alpha)-P_n(t;\alpha)}{x-t}d\alpha(t)\left(P_n^{*}(x;\alpha)-P_n^{*}(t;\alpha)\right)P_n^{-*}(x;\alpha)\\
&= \int d\alpha(t)\frac{P_n^{*}(x;\alpha)-P_n^{*}(t;\alpha)}{x-t}P_n^{-*}(x;\alpha)\\
&= \left(P_n^{-1}(x;\alpha)Q_n(x;\alpha)\right)^{*}.
\end{aligned}$$

Puesto que $\{P_n^{-1}(x;\alpha)Q_n(x;\alpha)\}$ es una sucesión matricial convergente cuando $x \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ (ver [Dur96]), entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n^{-1}(x;\alpha)D_n^{-1}(\alpha)P_{n-1}^{-*}(x;\alpha) = 0. \tag{2.2.9}$$

Sea $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de números naturales tal que existe el límite

$$L(x;\alpha) = \lim_{n\longrightarrow\infty} P_{\varphi(n)}^{-1}(x;\alpha)$$

ó es igual a ∞ $(L(x;\alpha) = \infty$ significa que al menos una de sus componentes es ∞).

Entonces

$$\begin{aligned} & P^{-1}_{\varphi(n)}(x;\alpha)D^{-1}_{\varphi(n)}(\alpha)P^{-*}_{\varphi(n)-1}(x;\alpha) \\ = \; & P^{-1}_{\varphi(n)}(x;\alpha)D^{-1}_{\varphi(n)}(\alpha).P^{-*}_{\varphi(n)-1}(x;\alpha)P^{*}_{\varphi(n)}(x;\alpha)P^{-*}_{\varphi(n)}(x;\alpha) \qquad (2.2.10) \\ = \; & P^{-1}_{\varphi(n)}(x;\alpha)D^{-1}_{\varphi(n)}(\alpha).\left(P_{\varphi(n)}(x;\alpha)P^{-1}_{\varphi(n)-1}(x;\alpha)\right)^{*}P^{-*}_{\varphi(n)}(x;\alpha). \end{aligned}$$

A partir de (2.2.3) obtenemos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(P_{\varphi(n)}(x;\alpha)P^{-1}_{\varphi(n)-1}(x;\alpha)\right)^{*} = \left(\int\frac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-*}D^{-*}.$$

De (2.2.9) y (2.2.10), se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\longrightarrow\infty}P^{-1}_{\varphi(n)}(x;\alpha)D^{-1}_{\varphi(n)}(\alpha)P^{-*}_{\varphi(n)-1}(x;\alpha) \\ &= L(x;\alpha)D^{-1}\left(\int\tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-*}D^{-*}L(x;\alpha)^{*} \\ &= \left(L(x;\alpha)D^{-1}\right)\left(\int\tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-*}\left(L(x;\alpha)D^{-1}\right)^{*} \\ &= \left(L(x;\alpha)D^{-1}\left(\int\tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-1}\right) \\ &\qquad\qquad \times\int\tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\left(L(x;\alpha)D^{-1}\left(\int\tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-1}\right)^{*}. \end{aligned}$$

Puesto que $x \in \mathbb{R}\setminus\hat{\Gamma}$ y $sop(dW_{D,E}) = sop(\alpha) \subset \hat{\Gamma}$, entonces de la proposición 2.4, se deduce que la función matricial de Markov $\int\frac{dW_{D,E}(t)}{x-t}$ es definida positiva ó definida negativa. Así $L(x;\alpha)D^{-1}\left(\int\frac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-1} = 0$, y, en consecuencia,

$$L(x;\alpha) = 0.$$

Finalmente, puesto que no existe ninguna subsucesión de $\{P_n^{-1}(x;\alpha)\}$ que converge hacia una matriz (ó hacia ∞) distinta de 0, entonces se tiene (2.2.8).

■

Demostración del teorema 2.7.-

Procederemos en varios pasos

Paso 1.

$$\mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*} = I_p - \left[P_n^{-*}(c;\alpha)M^{-1}P_n^{-1}(c;\alpha) + P_n^{-*}(c;\alpha)K_{n+1}^*(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right]^{-1}, \tag{2.2.11}$$

$$\sqrt{p} > \|\mathcal{M}_n^{-*}\|_E$$

donde $\|.\|_E$ denota la norma de Frobenius.

<u>Demostración</u>**.-**

Si utilizamos el lema 2.1, tenemos

$$\int P_n(x;\beta)d\alpha(x)P_n^*(x;\alpha) = \mathcal{M}_n\left\{I_p - \mathcal{V}_nM\int K_{n+1}^*(c,x;\alpha)d\alpha(x)P_n^*(x;\alpha)\right\}.$$

Eso significa que

$$\mathcal{M}_n^{-*} = \mathcal{M}_n\left\{I_p - \mathcal{V}_nMP_n^*(c;\alpha)\right\}, \tag{2.2.12a}$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*} = I_p - P_n(c;\alpha)\left(I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right)^{-1}MP_n^*(c;\alpha). \tag{2.2.12b}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
&I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*} \\
&\quad = P_n(c;\alpha)\left(I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right)^{-1} MP_n^*(c;\alpha) \\
&\quad = \left[P_n^{-1}(c;\alpha)\right]^{-1}\left(I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right)^{-1}\left[P_n^{-*}(c;\alpha)M^{-1}\right]^{-1} \\
&\quad = \left[P_n^{-1}(c;\alpha) + MK_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right]^{-1}\left[P_n^{-*}(c;\alpha)M^{-1}\right]^{-1} \\
&\quad = \left[P_n^{-*}(c;\alpha)M^{-1}P_n^{-1}(c;\alpha) + P_n^{-*}(c;\alpha)K_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Puesto que M y $K_n(c,c;\alpha)$ son matrices definidas positivas, entonces también lo es $I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*}$, es decir que $\mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*} < I_p$.

Sean $\|.\|_E$ y $\|.\|_2$, respectivamente, la norma de Frobenius y la norma espectral definidas por

$$\|A\|_E^2 = \sum_{i,j=1}^{p} |a_{i,j}|^2 \quad y \quad \|A\|_2^2 = \mu_{(A^*A)},$$

donde μ_L denota el radio espectral de L ($\mu_L = \max_{1\le j\le p}|\lambda_j|$; λ_j valor propio de L).

Estas normas matriciales satisfacen

(a) $\|A\|_E^2 = tr(A^*A)$.

(b) Si A es simétrica, entonces $\|A\|_2 = \mu_A$.

Finalmente,

$$\left\|\mathcal{M}_n^{-*}\right\|_E^2 = tr(\mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*}) \le p\mu_{\mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*}} = p\left\|\mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*}\right\|_2 < p,$$

y, por lo tanto, se cumple (2.2.11). □

Paso 2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n^{-*}(c;\alpha)K_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) = \\
&\quad -\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-1} \tfrac{d}{dx}\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)(c)\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Demostración.-

Tomando $\Upsilon_n(c) \overset{\text{def}}{=} P_n^{-*}(c;\alpha)K_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)$, y teniendo en cuenta (1.3.12) así como

$$\begin{aligned} P_n(x)P_n^{-1}(x) = I_p \quad &\Rightarrow \quad \left(P_n(x)\right)' P_n^{-1}(x) + P_n(x)\left(P_n^{-1}(x)\right)' = (I_p)' = 0 \\ &\Rightarrow \quad \left(P_n(x)\right)' P_n^{-1}(x) = -P_n(x)\left(P_n^{-1}(x)\right)', \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \Upsilon_n(c) &= P_n^{-*}(c;\alpha)\left[P_n^*(c;\alpha)D_{n+1}\left(P_{n+1}(c;\alpha)\right)'\right. \\ &\qquad\qquad \left.-P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*\left(P_n(c;\alpha)\right)'\right]P_n^{-1}(c;\alpha) \\ &= D_{n+1}\left(P_{n+1}(c;\alpha)\right)' P_n^{-1}(c;\alpha) \\ &\qquad\qquad -P_n^{-*}(c;\alpha)P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*\left(P_n(c;\alpha)\right)' P_n^{-1}(c;\alpha) \\ &= D_{n+1}\left(P_{n+1}(c;\alpha)\right)' P_n^{-1}(c;\alpha) \\ &\qquad\qquad +P_n^{-*}(c;\alpha)P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*P_n(c;\alpha)\left(P_n^{-1}(c;\alpha)\right)' \\ &= D_{n+1}\left(P_{n+1}(c;\alpha)\right)' P_n^{-1}(c;\alpha) \\ &\qquad\qquad +P_n^{-*}(c;\alpha)P_n^*(c;\alpha)D_{n+1}P_{n+1}(c;\alpha)\left(P_n^{-1}(c;\alpha)\right)' \\ &= D_{n+1}\left(\left(P_{n+1}(c;\alpha)\right)' P_n^{-1}(c;\alpha) + P_{n+1}(c;\alpha)\left(P_n^{-1}(c;\alpha)\right)'\right) \\ &= D_{n+1}\left(P_{n+1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right)' \\ &= D_{n+1}\left[\left(P_n(c;\alpha)P_{n+1}^{-1}(c;\alpha)\right)^{-1}\right]' \\ &= -D_{n+1}\left(P_n(c;\alpha)P_{n+1}^{-1}(c;\alpha)\right)^{-1} \\ &\qquad\qquad \times\left(P_n(c;\alpha)P_{n+1}^{-1}(c;\alpha)\right)'\left(P_n(c;\alpha)P_{n+1}^{-1}(c;\alpha)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Usando (2.2.3) y (2.2.6), tenemos

$$\begin{aligned} &\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n^{-*}(c;\alpha)K_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) = \\ &\qquad -\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-1}\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)'\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Así, para demostrar el teorema 2.7, usamos el lema 2.8 y tenemos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n^{-1}(c;\alpha) = 0,$$

$$\|P_n^{-*}(c;\alpha)M^{-1}P_n^{-1}(c;\alpha)\|_2 \leq \|P_n^{-1}(c;\alpha)\|_2^2 . \|M^{-1}\|_2\,,$$

donde $\|.\|_2$ denota la norma espectral. En consecuencia deducimos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n^{-*}(c;\alpha)M^{-1}P_n^{-1}(c;\alpha) = 0, \tag{2.2.14}$$

y se cumple (2.2.7).

■

Para encontrar la asintótica del cociente del coeficiente principal $A_n(\alpha)$ del polinomio matricial ortonormal $P_n(x;\alpha)$, y el coeficiente principal $A_n(\beta)$ del polinomio matricial ortonormal $P_n(x;\beta)$, podemos suponer que $[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)]^*$ es una matriz triangular inferior con elementos diagonales reales positivos. En efecto, si $[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)]$ no fuera una matriz triangular superior con elementos diagonales reales positivos, recordamos que los polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial α y β tienen, respectivamente, la forma $\{U_nP_n(x;\alpha)\}$ y $\{V_nP_n(x;\beta)\}$ (U_n y V_n son matrices unitarias). Entonces los coeficientes principales están relacionados por

$$\begin{cases} \lambda_n(\alpha) = U_nA_n(\alpha) \\ \lambda_n(\beta) = V_nA_n(\beta). \end{cases}$$

Por tanto,

$$\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^* V_n^* = U_n^* \left[\lambda_n(\beta)\lambda_n^{-1}(\alpha)\right]^* \tag{2.2.15}$$

y

$$\begin{aligned} &\left[\lambda_n(\beta)\lambda_n^{-1}(\alpha)\right]^* \left[\lambda_n(\beta)\lambda_n^{-1}(\alpha)\right] = \\ &\qquad U_n\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^* \left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right] U_n^*. \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Tomando $U_n = I_p$, entonces se cumple (2.1.2). A continuación, consideramos la sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{S_n^* P_n(x;\beta\}$ donde $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son matrices unitarias dadas por la factorización QR de Francis y Kublanovskaja [HJ91] de $[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)]$,

$$\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right] = \tilde{S}_n \tilde{R}_n$$

donde $\tilde{S}_n$ son matrices unitarias y $\tilde{R}_n$ son matrices triangulares superiores. Entonces tomando $S_n = \tilde{S}_n J_n$ y $R_n = J_n \tilde{R}_n$, donde

$$[J_n]_{i,j} = \begin{cases} \frac{[\tilde{R}_n]_{i,i}}{|[\tilde{R}_n]_{i,i}|} & si \;\; i = j \\ \\ 0 & si \;\; i \neq j, \end{cases}$$

obtenemos $\left[\lambda_n(\beta)\lambda_n^{-1}(\alpha)\right]^*$ matrices triangulares inferiores cuyos elementos diagonales son reales positivos, puesto que a partir de (2.2.15) se tiene

$$\left[\lambda_n(\beta)\lambda_n^{-1}(\alpha)\right]^* = \left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^* S_n = \tilde{R}_n^{\;*} J_n.$$

Teniendo en cuenta (2.2.11), sea n_ν una sucesión creciente de números enteros positivos tal que existe

$$\Lambda(c) = \lim_{\nu\to\infty} \left[A_{n_\nu}(\;\beta)A_{n_\nu}^{-1}(\alpha)\right]^*.$$

A partir de (2.2.7), tenemos

$$\Lambda(c).\Lambda^*(c) = I_p + \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}. \left\{ \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right)' \right\}^{-1} . \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}. \tag{2.2.17}$$

La función matricial

$$\begin{aligned} I_p + \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}. \left\{ \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right)' \right\}^{-1} . \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} = \\ I_p - \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}. \left\{ \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{(c-t)^2} \right\}^{-1} . \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

es definida positiva cuando $c \in \mathbb{R} \setminus \hat{\Gamma}$. En efecto, a partir de (2.2.17), es suficiente probar que dicha matriz es no-singular.

Suponemos que existe un vector no nulo $x \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$\left(I_p + \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} . \left\{ \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right)' \right\}^{-1} . \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right) x = 0,$$

es decir,

$$\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} . \left\{ \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{(c-t)^2} \right\}^{-1} . \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right) x = x.$$

Puesto que la función matricial de Markov $\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}$ y su derivada son funciones matriciales no-singulares cuando $c \in \mathbb{R} \setminus \hat{\Gamma}$, entonces

$$\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{(c-t)^2} . \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right)^{-1} x = \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right)^2 . \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right)^{-1} x. \tag{2.2.19}$$

Escribiendo

$$\begin{cases} \int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathcal{F}_{D,E}(c) \\ \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \right)^{-1} x & = & y, \end{cases}$$

entonces (2.2.19) resulta ser

$$\mathcal{F}'_{D,E}(c) y = -\left(\mathcal{F}_{D,E}(c) \right)^2 y; \quad y \neq 0. \tag{2.2.20}$$

A partir de (1.3.4), tenemos

$$(tI_p - E_n(\alpha)) P_n(t;\alpha) = D_{n+1}(\alpha) P_{n+1}(t;\alpha) + D_n^*(\alpha) P_{n-1}(t;\alpha)$$

y, entonces,

$$\begin{aligned} D_n^*(\alpha) & \left(P_{n-1}(t;\alpha) P_n^{-1}(t;\alpha) D_n^{-1}(\alpha) \right) \\ & \times D_n(\alpha) \left(P_n(t;\alpha) P_{n+1}^{-1}(t;\alpha) D_{n+1}^{-1}(\alpha) \right) \\ & \qquad + (E_n(\alpha) - tI_p) \left(P_n(t;\alpha) P_{n+1}^{-1}(t;\alpha) D_{n+1}^{-1}(\alpha) \right) + I_p = 0, \end{aligned}$$

para $t \in \mathbb{R} \setminus \Gamma$. Teniendo en cuenta (2.1.2) y (2.2.3),

$$D^*\mathcal{F}_{D,E}(t)D\mathcal{F}_{D,E}(t) + (E - tI_p)\mathcal{F}_{D,E}(t) + I_p = 0. \tag{2.2.21}$$

Derivando la expresión (2.2.21) en el punto c, obtenemos

$$D^*\mathcal{F}'_{D,E}(c)D\mathcal{F}_{D,E}(c) + D^*\mathcal{F}_{D,E}(c)D\mathcal{F}'_{D,E}(c) \\ -\mathcal{F}_{D,E}(c) + (E - cI_p)\mathcal{F}'_{D,E}(c) = 0.$$

De (2.2.20), la anterior expresión se convierte en

$$D^*\mathcal{F}'_{D,E}(c)D\mathcal{F}_{D,E}(c)y - D^*\mathcal{F}_{D,E}(c)D\left(\mathcal{F}_{D,E}(c)\right)^2 y \\ -\mathcal{F}_{D,E}(c)y - (E - cI_p)\left(\mathcal{F}_{D,E}(c)\right)^2 y = 0,$$

es decir,

$$\left(D^*\mathcal{F}'_{D,E}(c)D\right)\mathcal{F}_{D,E}(c)y \\ - \left\{D^*\mathcal{F}_{D,E}(c)D\mathcal{F}_{D,E}(c) + (E - cI_p)\mathcal{F}_{D,E}(c) + I_p\right\}\mathcal{F}_{D,E}(c)y = 0,$$

y, por lo tanto,

$$\left(D^*\mathcal{F}'_{D,E}(c)D\right)x = 0.$$

Así, (2.2.18) es una función matricial definida positiva cuando $c \in \mathbb{R}\setminus\hat{\Gamma}$. Usando la factorización de Cholesky para (2.2.18), el límite $\Lambda(c)$ es una matriz finita, sus elementos diagonales son reales positivos, y, por lo tanto, está definida de manera unívoca. Eso significa que $[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)]^*$ no admite subsucesiones convergentes hacia cualquier matriz distinta de $\Lambda(c)$. En conclusión

$$\lim_{n\to\infty}\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^* = \Lambda(c). \tag{2.2.22}$$

Notamos que también podemos suponer que $[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)]^*$ son matrices triangulares superiores cuyos elementos diagonales son reales positivos. En efecto basta obtener una sucesión de matrices unitarias $(S_n)_n$ usando la factorización QL en lugar de la factorización QR. Puesto que la matriz del segundo miembro de (2.2.18) es definida positiva, entonces existe una única matriz triangular superior $\tilde{\Lambda}(c)$, cuyos elementos diagonales son reales positivos, y tal que

$$\tilde{\Lambda}(c).\tilde{\Lambda}(c)^* = I_p + \int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}.\left\{\left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)'\right\}^{-1}.\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^* = \tilde{\Lambda}(c). \ \square$$

A continuación, obtenemos una generalización del teorema 2.7, considerando la medida matricial

$$d\beta(u) = d\alpha(u) + \sum_{k=1}^{N} M_k\delta(u-c_k) \tag{2.2.23}$$

donde M_k son matrices definidas positivas de dimensión p y $c_k \in \mathbb{R}\setminus\hat{\Gamma}$. Si consideramos las medidas matriciales β_n, $n = 0,\cdots,N$ definidas por

$$\begin{cases} d\beta_n(u) = d\alpha(u) + \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\delta(u-c_k), \;\; n = 1,\cdots,N-1, \\ \\ d\beta_0 = d\alpha, \;\; d\beta_N = d\beta. \end{cases} \tag{2.2.24}$$

De una reiterada aplicación de los resultados anteriores, obtenemos la asintótica de $A_n(\beta)$.

Teorema 2.9 .- *Sean $A_n(\alpha)$ los coeficientes principales de los polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\alpha) = A_n(\alpha)x^n$+términos de menor grado$\}$ asociados a α. Suponemos que los parámetros matriciales en (1.3.4) son convergentes*

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\alpha) = D, \;\; y \;\; \lim_{n\to\infty} E_n(\alpha) = E,$$

donde D es una matriz no-singular. Entonces existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\beta) = A_n(\beta)x^n +$ términos de menor grado$\}$ con respecto a la medida matricial β definida por (2.2.23) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^* = \Lambda_1(c_1).\Lambda_2(c_2).\ldots.\Lambda_N(c_N),$$

donde

$$\Lambda_k(c_k) = \lim_{n\to\infty} \left[A_n\left(\beta_k\right)A_n^{-1}\left(\beta_{k-1}\right)\right]^*, \tag{2.2.25}$$

para $k = 1, \ldots, N$.

Demostración.-

La familia de medidas matriciales definidas por (2.2.24) se puede generalizar de la siguiente manera

$$d\beta_{m+1}(u) = d\beta_m(u) + M_{m+1}\delta(u - c_{m+1}); \;\; m = 0, 1, \cdots, N-1.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha) &= A_n(\beta_N)A_n^{-1}(\beta_0) \\ &= A_n(\beta_N)A_n^{-1}(\beta_{N-1}) \\ &\qquad \times A_n(\beta_{N-1})\cdots A_n^{-1}(\beta_1) \times A_n(\beta_1)A_n^{-1}(\beta_0), \end{aligned}$$

entonces a partir del Corolario 3.6 , si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D_n(\beta_m) = D_{(m)}, \;\; y \;\; \lim_{n\longrightarrow\infty} E_n(\beta_m) = E_{(m)}; \;\; D_{(m)} \text{ no-singular}$$

para cada $m = 0, 1, \cdots, N-1$, existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\beta_{m+1})\}$ con respecto a β_{m+1}, tal que los parámetros matriciales de la relación de recurrencia satisfacen

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D_n(\beta_{m+1}) = \Lambda_{m+1}^*(c_{m+1})D_{(m)}\Lambda_{m+1}^{-*}(c_{m+1})$$

y

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\longrightarrow\infty} E_n(\beta_{m+1}) = \\
&\qquad \Lambda^*_{m+1}(c_{m+1}).\Big\{E_{(m)} \\
&\qquad +D_{(m)}\left[\Lambda^{-*}_{m+1}(c_{m+1}).\Lambda^{-1}_{m+1}(c_{m+1})-I_p\right]D^*_{(m)}\int\frac{dW_{D_{(m)},E_{(m)}}(t)}{c_{m+1}-t} \\
&\qquad\qquad -\left[\Lambda^{-*}_{m+1}(c_{m+1}).\Lambda^{-1}_{m+1}(c_{m+1})-I_p\right]D^*_{(m)}\int\frac{dW_{D_{(m)},E_{(m)}}(t)}{c_{m+1}-t}D_{(m)}\Big\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Lambda^{-*}_{m+1}(c_{m+1}).
\end{aligned}
$$

Así, repetimos aplicación de (2.2.22) y teniendo en cuenta (2.2.25) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^* = \Lambda_1(c_1).\Lambda_2(c_2).\ldots.\Lambda_N(c_N).$$

■

Ejemplo 1:

Tomamos

$$D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{1}{9}\end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Tras unos cálculos sencillos, se tiene

$$\frac{1}{2}D^{-1}(cI_p-E)D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1+c}{32} & 0\\ 0 & \frac{81\,(-1+c)}{2}\end{pmatrix}$$

y

$$D^{-\frac{1}{2}}(E-cI_p)D^{-1}(E-cI_p)D^{-\frac{1}{2}}-4I_p=\begin{pmatrix}\frac{-63-2\,c+c^2}{16} & 0\\ 0 & 77-162\,c+81\,c^2\end{pmatrix}.$$

A partir de la ecuación (2.2.4), obtenemos

$$\int\frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_1 & 0\\ 0 & u_2\end{pmatrix} \tag{2.2.26}$$

donde

$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{16}\left(-1+c-\sqrt{-63-2\,c+c^2}\right) \\ u_2 &= \left(-81\,(1-c)-9\sqrt{77-162\,c+81\,c^2}\right), \end{cases}$$

$sop(dW_{D,E}) = [-7,9]\bigcup[\frac{7}{9},\frac{11}{9}] = [-7,9]$, y las raíces cuadradas están elegidas de manera que $\int \frac{dW_{D,E}(t)}{z-t}$ es una función matricial analítica en $z \in \mathbb{C}\backslash[-7,9]$.

Derivando el segundo miembro de (2.2.26) y calculando su inverso, obtenemos

$$\left(\frac{d}{dz}\int\frac{dW_{D,E}(t)}{z-t}\right)^{-1}(c) = \begin{pmatrix} x_1(c) & 0 \\ 0 & x_2(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} x_1(c) &= -\frac{(-9+c)\,(7+c)+(-1+c)\,\sqrt{(-9+c)\,(7+c)}}{2} \\ x_2(c) &= -\frac{77}{162}+c-\frac{c^2}{2}-\frac{(-1+c)\,\sqrt{(-11+9\,c)\,(-7+9\,c)}}{18}. \end{cases}$$

Computando los términos de (2.2.17), obtenemos

$$\Lambda(c).\Lambda^*(c) = \begin{pmatrix} y_1(c) & 0 \\ 0 & y_2(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} y_1(c) &= \frac{1}{32}\left(-31-2\,c+c^2-(-1+c)\,\sqrt{(-9+c)\,(7+c)}\right) \\ y_2(c) &= \frac{1}{2}\left(79-162\,c+81\,c^2-9\,(-1+c)\,\sqrt{(-11+9\,c)\,(-7+9\,c)}\right). \end{cases}$$

Finalmente, usando la descomposición de Cholesky, se obtiene

$$\Lambda(c) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z_1(c) & 0 \\ 0 & z_2(c) \end{pmatrix} \tag{2.2.27}$$

donde

$$\begin{cases} z_1(c) &= \sqrt{-31 - 2\,c + c^2 - (-1+c)\,\sqrt{(-9+c)\,(7+c)}} \\ z_2(c) &= 4\sqrt{79 - 162\,c + 81\,c^2 - 9\,(-1+c)\,\sqrt{(-11+9\,c)\,(-7+9\,c)}}. \ \square \end{cases}$$

2.3 Asintótica del cociente de los polinomios matriciales ortogonales

Teorema 2.10 .- *Sea $\{P_n(x;\alpha)\}$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial α. Suponemos que los parámetros matriciales en (1.3.4) satisfacen*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D_n(\alpha) = D, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} E_n(\alpha) = E; \quad D \quad \textit{no-singular}.$$

Entonces existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x,\beta)\}$ con respecto a la medida matricial β, tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(x;\beta)P_n^{-1}(x;\alpha) = \Lambda(c)^{-1} + \tfrac{1}{c-x}\left\{\Lambda(c)^* - \Lambda(c)^{-1}\right\} \times \\ \left\{\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-*} - \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-1}\right\} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\hat{\Gamma} \cup \{c\}\right\}$, donde $\Lambda(c)$ viene dada por (2.2.22).

Demostración.-

Si multiplicamos en (2.2.1) por $P_n^{-1}(x;\alpha)$, tenemos

$$P_n(x;\beta)P_n^{-1}(x;\alpha) = \left[I_p - \mathcal{V}_n M K_{n+1}^*(c,x;\alpha)P_n(x;\alpha)^{-1}\right].$$

Pero,

$$(c-x)K^*_{n+1}(c,x;\alpha) = P^*_{n+1}(c;\alpha)D^*_{n+1}P_n(x;\alpha) - P^*_n(c;\alpha)D_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha),$$

de manera que

$$\begin{aligned}
&MK^*_{n+1}(c,x;\alpha)P_n^{-1}(x;\alpha) = \\
&\qquad \frac{1}{c-x}M\left[P^*_{n+1}(c;\alpha)D^*_{n+1} - P^*_n(c;\alpha)D_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha)P_n^{-1}(x;\alpha)\right]
\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&P_n(x;\beta)P_n^{-1}(x;\alpha) \\
&\quad = \mathcal{M}_n\left\{I_p - \mathcal{V}_n\tfrac{1}{c-x}M\times\right. \\
&\qquad \left.\left[P^*_{n+1}(c;\alpha)D^*_{n+1} - P^*_n(c;\alpha)D_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha)P_n^{-1}(x;\alpha)\right]\right\} \\
&\quad = \mathcal{M}_n\left\{I_p - \tfrac{1}{c-x}\mathcal{V}_nMP^*_n(c;\alpha)\times\right. \\
&\qquad \left.\left[P_n^{-*}(c;\alpha)P^*_{n+1}(c;\alpha)D^*_{n+1} - D_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha)P_n^{-1}(x;\alpha)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.2.12b),

$$\mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*} = I_p - \mathcal{V}_nMP^*_n(c;\alpha)$$

entonces

$$\begin{aligned}
P_n(x;\beta)P_n^{-1}(x;\alpha) = \mathcal{M}_n&\left\{I_p - \tfrac{1}{c-x}\left(I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*}\right)\times\right. \\
&\left.\left[P_n^{-*}(c;\alpha)P^*_{n+1}(c;\alpha)D^*_{n+1} - D_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha)P_n^{-1}(x;\alpha)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Escribiendo

$$\Xi_n(x;\alpha) = \left[D_{n+1}P_{n+1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right]^* - \left[D_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha)P_n^{-1}(x;\alpha)\right],$$

entonces (2.3.2) resulta ser

$$\begin{aligned} & P_n(x;\beta)P_n^{-1}(x;\alpha) \\ &= \mathcal{M}_n\left\{I_p - \tfrac{1}{c-x}\left(I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*}\right).\,\Xi_n(x;\alpha)\right\} \\ &= \mathcal{M}_n - \tfrac{1}{c-x}\mathcal{M}_n\,\Xi_n(x;\alpha) + \tfrac{1}{c-x}\mathcal{M}_n^*\,\Xi_n(x;\alpha) \\ &= \mathcal{M}_n + \tfrac{1}{c-x}\left\{\mathcal{M}_n^{-*} - \mathcal{M}_n\right\}.\,\Xi_n(x;\alpha). \end{aligned}$$

A partir de (2.2.3), tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\Xi_n(x;\alpha) = \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-*} - \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-1}.$$

Puesto que

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{M}_n^{-1} = \Lambda(c)$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(x;\beta)P_n^{-1}(x;\alpha) = \Lambda(c)^{-1} + \tfrac{1}{c-x}\left\{\Lambda(c)^* - \Lambda(c)^{-1}\right\}\times \\ \left\{\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-*} - \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-1}\right\}. \end{aligned}$$

■

Ahora, vamos a generalizar el teorema 2.10 asumiendo que las medidas matriciales β y α están relacionadas por (2.2.23).

Teorema 2.11 .- *Sea $\{P_n(x;\alpha)\}$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial α. Suponemos que los parámetros matriciales en (1.3.4) satisfacen*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D_n(\alpha) = D, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} E_n(\alpha) = E; \;\; D \quad \textit{no-singular.}$$

Entonces existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\beta)\}$ *con respecto a la medida matricial* β*, tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(x;\beta)P_n^{-1}(x;\alpha) = \overset{\curvearrowright}{\prod_{k=N}^{1}} \left\{\Lambda_k(c_k)^{-1} + \tfrac{1}{c_k-x}\left[\Lambda_k(c_k)^{*} - \Lambda_k(c_k)^{-1}\right] \times \right.$$
$$\left. \left[\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c_k-t}\right)^{-*} - \left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-1}\right]\right\}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\hat{\Gamma} \cup \{c_k; k=1,\cdots,N\}\right\}$*, con* $\Lambda_k(c_k)$ *dadas por (2.2.25) y* $\overset{\curvearrowright}{\prod_{k=N}^{1}}$ $\Omega_k = \Omega_N \times \Omega_{N-1} \times \cdots \times \Omega_1$.

Demostración.-

Se deduce a partir del teorema 2.10 usando una demostración similar a la del teorema 2.9.

■

A continuación, obtenemos en el punto en el que está concentrada la masa, la asintótica del producto de los polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial α, y de los polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial β, satisfaciendo $d\beta(u) = d\alpha(u) + M\delta(u-c)$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \hat{\Gamma}$ y donde $M = I_p$.

Teorema 2.12 .- *Sea* $\{P_n(x;\alpha)\}$ *una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial* α*. Suponemos que los parámetros matriciales en (1.3.4) satisfacen*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} D_n(\alpha) = D, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} E_n(\alpha) = E; \;\; D \textit{ es no-singular.}$$

Entonces existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\beta)\}$ *con respecto a la medida matricial* β*, tal que*

$$\begin{aligned}&\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(c;\beta)P_n^*(c;\alpha) = \\ &\qquad -\Lambda(c)^{-1}.\left\{\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right\}\left\{\left(\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)'\right\}^{-1}.\left\{\int \tfrac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right\}.\end{aligned}$$

Para probar el teorema 2.12, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.13 .- *Sean* α *y* β *dos medidas satisfaciendo* $d\beta(u) = d\alpha(u) + M\delta(u-c)$*, con* $c \in \mathbb{R}\setminus\Gamma$ *y donde* M *es una matriz definida positiva. Sean* $\{P_n(x;\beta)\}$ *y* $\{P_n(x;\alpha)\}$ *los polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial* β *y* α*, respectivamente. Entonces*

$$\begin{aligned}&P_n(c;\beta)P_n^*(c;\alpha) = \\ &\qquad \mathcal{M}_n\left\{P_n^{-*}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) + P_n^{-*}(c;\alpha)MK_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right\}^{-1}.\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Demostración.-

Multiplicando a la derecha por $P_n^*(c;\alpha)$ en los dos miembros de (2.2.1), obtenemos

$$\begin{aligned}P_n(c;\beta)P_n^*(c;\alpha) = \mathcal{M}_n\{&P_n(c;\alpha)P_n^*(c;\alpha) - \\ &\mathcal{V}_nMK_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^*(c;\alpha)\}.\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Pero

$$\begin{aligned}P_n(c;\alpha)P_n^*(c;\alpha) = \mathcal{V}_nP_n^*(c;\alpha)& \\ +\mathcal{V}_nMK_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^*(c;\alpha)&,\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}&P_n(c,\beta)P_n^*(c;\alpha) = \mathcal{M}_n\times \\ &\qquad .\left\{P_n(c;\alpha)\left(I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right)^{-1}P_n^*(c;\alpha)\right\},\end{aligned}$$

es decir, que

$$P_n(c;\beta)P_n^*(c;\alpha) = \mathcal{M}_n \times$$
$$\left\{P_n^{-*}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) + P_n^{-*}(c;\alpha)MK_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right\}^{-1}.$$

■

Demostración del Teorema 2.12.-

A partir de (2.3.3) y tomando $M = I_p$ tenemos

$$P_n(c;\beta)P_n^*(c;\alpha) = \mathcal{M}_n$$
$$\left\{P_n^{-*}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) + P_n^{-*}(c;\alpha)K_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right\}^{-1}.$$

Como en la demostración de (2.2.14), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-*}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) = 0,$$

y a partir de (2.2.13)

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-*}(c;\alpha)K_{n+1}(c,c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) =$$
$$-\left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-1}\left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)'\left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-1}.$$

Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_n^{-1} = \Lambda(c)$$

entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(c;\beta)P_n^*(c;\alpha) =$$
$$-\Lambda(c)^{-1}.\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}.\left\{\left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)'\right\}^{-1}.\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}.$$

■

Observación 2.3 .- *Si consideramos la medida matricial β definida por $d\beta(u) = d\alpha(u)+M\delta(u-c)$, con $c \in \mathbb{R}\backslash\hat{\Gamma}$ y donde M es una matriz definida positiva cualquiera, entonces*

1. $$P_n(c;\beta)P_n^*(c;\alpha) = \mathcal{M}_n \left\{P_n^{-*}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) + P_n^{-*}(c;\alpha)MP_n^*(c;\alpha)D_{n+1}(P_{n+1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha))'\right\}^{-1}.$$

2. $$P_n(c;\beta)P_n(c;\alpha) = \mathcal{M}_n \left\{P_n^{-1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha) + P_n^{-1}(c;\alpha)MP_n^*(c;\alpha)D_{n+1}(P_{n+1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha))'\right\}^{-1}.$$

En conclusión, deducimos el comportamiento asintótico del producto de los polinomios matriciales ortonormales evaluado en el punto de la masa si se conoce el comportamiento asintótico de $P_n^{-*}(c;\alpha)MP_n^*(c;\alpha)$ y $P_n^{-1}(c;\alpha)MP_n^*(c;\alpha)$ respectivamente.

Ejemplo 2:

Vamos a determinar la asintótica relativa de los polinomios matriciales ortonormales cuyos parámetros matriciales en la relación de recurrencia convergen hacia

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando (2.2.26) del ejemplo 1, tenemos

$$\left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t}\right)^{-*} - \left(\int \frac{dW_{D,E}(t)}{x-t}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha(c,x) & 0 \\ 0 & \beta(c,x) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} \alpha(c,x) &= \frac{c+\sqrt{(-9+c)\,(7+c)}-x-\sqrt{(-9+x)\,(7+x)}}{2} \\ \beta(c,x) &= \frac{9\,c+\sqrt{(-11+9\,c)\,(-7+9\,c)}-9\,x-\sqrt{(-11+9\,x)\,(-7+9\,x)}}{18}. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(x;\beta)P_n^{-1}(x;\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma(c,x)}{\lambda(c,x)} & 0 \\ 0 & \frac{\mu(c,x)}{\nu(c,x)} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} \gamma(c,x) &= 64 - \left(63 + 2\,c - c^2 + (-1+c)\ \sqrt{(-9+c)\ (7+c)}\right) \times \\ & \qquad \frac{\left(c+\sqrt{(-9+c)\,(7+c)}-x-\sqrt{(-9+x)\,(7+x)}\right)}{c-x} \\ \\ \lambda(c,x) &= \frac{16}{\sqrt{2}}\sqrt{-31 - 2\,c + c^2 - (-1+c)\ \sqrt{(-9+c)\ (7+c)}} \\ \\ \mu(c,x) &= -9\ (-1+c)\ (77 + 81\,c\ (-1+x) - 81\,x) + \\ & \quad \sqrt{(-11+9\,c)\ (-7+9\,c)}\ (77 + 81\,c\ (-1+x) - 81\,x) - \\ & \quad (-11+9\,c)\ (-7+9\,c)\ \sqrt{(-11+9\,x)\ (-7+9\,x)} + \\ & \quad 9\ (-1+c)\ \sqrt{(-11+9\,c)\ (-7+9\,c)}\sqrt{(-11+9\,x)\ (-7+9\,x)} \\ \\ \nu(c,x) &= \frac{36}{\sqrt{2}}\ (c-x) \times \\ & \quad \sqrt{79 - 162\,c + 81\,c^2 - 9\ (-1+c)\ \sqrt{(-11+9\,c)\ (-7+9\,c)}}. \end{cases}$$

Ejemplo 3:

Ahora calculamos la asintótica del producto de los polinomios matriciales ortonormales evaluada en el punto de la masa cuando los parámetros matriciales en la relación de recurrencia convergen hacia

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Computando los términos dados en (2.2.4), se obtiene

$$\int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a_1(c) & a_2(c) \\ a_2(c) & a_1(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} a_1(c) &= -2+2\,c-\sqrt{(-4+c)\;c}-\sqrt{-4+c^2} \\ a_2(c) &= -2-\sqrt{(-4+c)\;c}+\sqrt{-4+c^2}, \end{cases}$$

$sop(dW_{D,E}) = [0,4]\bigcup[-2,2] = [-2,4]$, y las raíces cuadradas se eligen de manera que $\int \frac{dW_{D,E}(t)}{z-t}$ es una función analítica en $z \in \mathbb{C}\backslash[-2,4]$.

Como en el ejemplo 1, obtenemos

$$\Lambda(c) = \begin{pmatrix} u_1(c) & 0 \\ u_2(c) & u_3(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} u_1(c) &= \frac{1}{2}\sqrt{2\;(-2+c)\;c-(-2+c)\;\sqrt{(-4+c)\;c}-c\,\sqrt{-4+c^2}} \\ u_2(c) &= \frac{4-4\,c-(-2+c)\;\sqrt{(-4+c)\,c}+c\,\sqrt{-4+c^2}}{2\,\sqrt{2\,(-2+c)\,c-(-2+c)\;\sqrt{(-4+c)\,c}-c\,\sqrt{-4+c^2}}} \\ u_3(c) &= \frac{1}{2}\sqrt{-4-2\,c+c^2-\frac{(2+c)\,(2+(-4+c)\,c)}{\sqrt{-4+c^2}}+ \\ +\sqrt{(-4+c)\;c}\,\sqrt{-4+c^2}-\frac{\sqrt{(-4+c)\,c}\,(-2+c^2)}{c}}. \end{cases}$$

Así,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(c;\beta)P_n^*(c;\alpha) \;=\; \begin{pmatrix} w_1(c) & w_2(c) \\ w_3(c) & w_4(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
w_1(c) & = & \frac{4-2\,(-2+c)\,c+(-2+c)\,\sqrt{(-4+c)\,c}+c\,\sqrt{-4+c^2}}{2\,\sqrt{2\,(-2+c)\,c-(-2+c)\,\sqrt{(-4+c)\,c}-c\,\sqrt{-4+c^2}}} \\[3em]
w_2(c) & = & \frac{4\,(-1+c)+(-2+c)\,\sqrt{(-4+c)\,c}-c\,\sqrt{-4+c^2}}{2\,\sqrt{2\,(-2+c)\,c-(-2+c)\,\sqrt{(-4+c)\,c}-c\,\sqrt{-4+c^2}}} \\[3em]
4u_1^2(c)u_3(c)w_3(c) & = & 4\,(-1+c)+(-2+c)\,\sqrt{(-4+c)\,c}-c\,\sqrt{-4+c^2} \\[3em]
4u_1^2(c)u_3(c)w_4(c) & = & 4-12\,c+2\,c^2+4\,c^3-c^4- \\
 & & \qquad -\,(-2+c)\,c\,\sqrt{(-4+c)\,c}\,\sqrt{-4+c^2}+ \\
 & & \qquad\quad +c\,(1+(-4+c)\,c)\,\sqrt{-4+c^2}+ \\
 & & \qquad\qquad +(-2+c)\,\sqrt{(-4+c)\,c}\,(-3+c^2)\,.
\end{array}
\right.
$$

Capítulo 3

Perturbaciones en la clase matricial de Nevai

3.1 Introducción

En el estudio de las propiedades analíticas de polinomios ortogonales con respecto a una medida soportada en la recta real, la existencia de una masa juega un papel muy importante. En [Nev79] se ha analizado el comportamiento asintótico de una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una perturbación α_t de una medida α perteneciente a la clase de Nevai, es decir, una medida tal que los parámetros de la relación de recurrencia a tres términos que satisface dicha sucesión convergen, añadiendo una masa concentrada en el punto $t \in \mathbb{R}$. Dicho comportamiento asintótico depende de la localización de la masa respecto al soporte de la medida inicial α. Asimismo se ha deducido una expresión explícita de los nuevos parámetros de la relación de recurrencia a tres términos. Más recientemente, se ha encontrado una relación entre las correspondientes matrices de Jacobi [AAMK98].

Por todo ello, estamos interesados en el estudio de algunos problemas análogos para una medida matricial y su correspondiente sucesión de polinomios matriciales ortogonales.

En este capítulo estudiaremos la matriz de Jacobi por bloques y el comportamiento asintótico de sus componentes matriciales cuando la medida matricial espectral asociada se perturba añadiendo una masa matricial de Dirac.

En la sección 3.2, deducimos una relación entre las matrices de Jacobi truncadas cuando las medidas matriciales asociadas están relacionadas por

$$d\beta(u) = d\alpha(u) + M\delta(u-c) \tag{3.1.1}$$

donde M es una matriz definida positiva y δ es la medida de Dirac soportada en el punto c fuera de cualquier intervalo cerrado que contenga el soporte de α.

En la sección 3.3, se trata, en primer lugar, de encontrar una forma explícita para los parámetros matriciales de la relación de recurrencia a tres términos (1.3.4) cuando la medida matricial asociada está perturbada como en (3.1.1). Finalmente se deduce el comportamiento asintótico de dichos parámetros por dos caminos diferentes.

Finaliza el capítulo con la sección 3.4 en la que se presentan algunos ejemplos.

3.2 Perturbación de la matriz de Jacobi por bloques

Teorema 3.1 .- *Sea $\mathbb{J}(.)$ la matriz de Jacobi por bloques (1.3.14) asociada a los polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x,.)\}$ con respecto a la medida matricial α y β relacionadas por (3.1.1), y $\mathbb{J}_n(.)$ la matriz truncada de dimensión np. Entonces $\mathbb{J}_{n+1}(\beta)$ es una perturbación de rango p de la matriz $\mathbb{J}_{n+1}(\alpha)$.*

Antes de demostrar el teorema 3.1, destacamos el siguiente resultado.

Proposición 3.2 .- *Los ceros del polinomio matricial $P_n(x;\alpha)$ coinciden con los del polinomio $\det(tI_{np}-\mathbb{J}_n)$ (incluso en el orden de multiplicidad), donde I_{np} es la matriz unidad de dimensión np.*

Demostración.-

Multiplicando a derecha en la relación de recurrencia (1.3.4) por $v \in \mathbb{R}^p$, se obtiene la forma matricial

$$\begin{pmatrix} E_0 & D_1 & & & \\ D_1^* & E_1 & D_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D_{n-2}^* & E_{n-2} & D_{n-1} \\ & & & D_{n-1}^* & E_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(x)v \\ P_1(x)v \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{n-1}(x)v \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$
$$= x \begin{pmatrix} P_0(x)v \\ P_1(x)v \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{n-1}(x)v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ D_n \end{pmatrix} P_n(x)v.$$

Sea a un cero de $P_n(x)$, entonces existe un vector $w_0 \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ tal que

$$P_n(a)w_0 = 0.$$

Por tanto, de (3.2.1) se obtiene

$$\mathbb{J}_n w = aw; \qquad w = \begin{pmatrix} P_0(a)w_0 \\ P_1(a)w_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{n-1}(a)w_0 \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, si a es un valor propio de $\mathbb{J}_n$, y sea

$$v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{np} \setminus \{0\}$$

el correspondiente vector propio donde $v_i \in \mathbb{R}^p$. De la ecuación

$$\mathbb{J}_n v = av$$

podemos escribir

$$\begin{array}{ccccccc} & & E_0 v_0 & + & D_1 v_1 & = & a v_0 \\ D_1^* v_0 & + & E_1 v_0 & + & D_2 v_2 & = & a v_1 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ D_{n-1}^* v_{n-2} & + & E_{n-1} v_{n-1} & & & = & a v_{n-1} \end{array}$$

Teniendo en cuenta la relación de recurrencia (1.3.4) y que D_n son matrices no singulares, se deduce que

$$\begin{array}{ccc} v_1 & = & P_1(a) v_0 \\ v_2 & = & P_2(a) v_0 \\ & \vdots & \\ v_{n-1} & = & P_{n-1}(a) v_0 \\ 0 & = & P_n(a) v_0 \end{array}$$

Eso significa que $v_0 \neq 0$ (en caso contrario, v sería igual a cero), y, por tanto, $P_n(a)$ es singular, es decir, a es un cero de P_n.

Para ver que el orden de multiplicidad coincide en ambos sentidos, veáse [DL96, Lemas 2.1, 2.2].

∎

Demostración del Teorema 3.1.-

Usando el lema 2.1, (1.3.10) y (2.2.12a), tenemos

$$\begin{aligned} P_n(x;\beta) &= \mathcal{M}_n P_n(x;\alpha) - \sum_{j=0}^{n} \{\mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M\} P_j^*(c;\alpha) P_j(x;\alpha) \\ &= \mathcal{M}_n^{-*} P_n(x;\alpha) - \sum_{j=0}^{n-1} \{\mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M\} P_j^*(c;\alpha) P_j(x;\alpha). \end{aligned}$$

Denotamos por W_j y V_j^n dos matrices en $\mathbb{R}^{p\times p}$ definidas mediante

$$\begin{cases} W_j &= A_j(\beta) A_j^{-1}(\alpha) \\ V_j^n &= -\mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M P_j^*(c;\alpha). \end{cases}$$

Entonces

$$P_n(x;\beta) = \sum_{j=0}^{n-1} V_j^n P_j(x;\alpha) + W_n P_n(x;\alpha). \tag{3.2.2}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} P_0(x;\beta) \\ P_1(x;\beta) \\ P_2(x;\beta) \\ \vdots \\ P_n(x;\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ V_0^1 & W_1 & \ddots & & \vdots \\ V_0^2 & V_1^2 & W_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ V_0^n & V_1^n & \cdots & V_{n-1}^n & W_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(x;\alpha) \\ P_1(x;\alpha) \\ P_2(x;\alpha) \\ \vdots \\ P_n(x;\alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.2.3}$$

ó, equivalentemente,

$$\mathbb{P}_n(x;\beta) = \mathbb{T}_n . \mathbb{P}_n(x;\alpha) \tag{3.2.4}$$

donde $\mathbb{P}_n(x;\beta)$, $\mathbb{P}_n(x;\alpha)$ denotan los vectores que aparecen en (3.2.3), y $\mathbb{T}_n$ denota la matriz triangular por bloques de orden $(n+1)p \times (n+1)p$ dada en (3.2.3).

Por otro lado, usando la relación de recurrencia a tres términos (1.3.4), obtenemos

$$x\mathbb{P}_n(x;\beta) = \mathbb{J}_{n+1}(\beta)\mathbb{P}_n(x;\beta) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} D_{n+1}(\beta)P_{n+1}(x;\beta), \tag{3.2.5}$$

$$x\mathbb{P}_n(x;\alpha) = \mathbb{J}_{n+1}(\alpha)\mathbb{P}_n(x;\alpha) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(x;\alpha) \tag{3.2.6}$$

donde

$$\mathbb{J}_{n+1}(.) = \begin{pmatrix} E_0(.) & D_1(.) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ D_1^*(.) & E_1(.) & D_2(.) & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & D_{n-1}^*(.) & E_{n-1}(.) & D_n(.) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & D_n^*(.) & E_n(.) \end{pmatrix}$$

es la matriz truncada de la matriz de Jacobi por bloques, asociada a las medidas matriciales β y α respectivamente. Sustituyendo (3.2.4) en (3.2.5), obtenemos

$$x\ \mathbb{T}_n.\mathbb{P}_n(x;\alpha) = \mathbb{J}_{n+1}(\beta)\mathbb{T}_n.\mathbb{P}_n(x;\alpha) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} D_{n+1}(\beta)P_{n+1}(x;\beta).$$

Pero a partir de (3.2.2)

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} D_{n+1}(\beta)P_{n+1}(x;\beta)
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D_{n+1}(\beta)V_0^{n+1} & \cdots & D_{n+1}(\beta)V_n^{n+1} & D_{n+1}(\beta)W_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}_n(x;\alpha) \\ P_{n+1}(x;\alpha) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ D_{n+1}(\beta)V_0^{n+1} & \cdots & D_{n+1}(\beta)V_n^{n+1} \end{pmatrix} \mathbb{P}_n(x;\alpha)
+ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} D_{n+1}(\beta)W_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha).
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
& x\mathbb{T}_n.\mathbb{P}_n(x;\alpha) \\
& = \left[\mathbb{J}_{n+1}(\beta)\mathbb{T}_n + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ D_{n+1}(\beta)V_0^{n+1} & \cdots & D_{n+1}(\beta)V_n^{n+1} \end{pmatrix} \right] \mathbb{P}_n(x;\alpha) \\
& \qquad + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} D_{n+1}(\beta)W_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha).
\end{aligned}
$$

Puesto que la matriz cuadrada $\mathbb{T}_n$ es una matriz triangular con bloques, cuyas matrices en la diagonal principal son no-singulares, entonces $\mathbb{T}_n$ es no-singular ($\det \mathbb{T}_n = \prod_{k=0}^{n} \det W_i$). Además

$$
\mathbb{T}_n^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ W_n^{-1} \end{pmatrix},
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
x\mathbb{P}_n(x;\alpha) &\\
= &\left[\mathbb{T}_n^{-1}\mathbb{J}_{n+1}(\beta)\mathbb{T}_n + \mathbb{T}_n^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ D_{n+1}(\beta)V_0^{n+1} & \cdots & D_{n+1}(\beta)V_n^{n+1} \end{pmatrix}\right] \\
& \times\ \mathbb{P}_n(x;\alpha) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ W_n^{-1} \end{pmatrix} D_{n+1}(\beta)W_{n+1}P_{n+1}(x;\alpha) \\
= &\ \mathbb{T}_n^{-1}\left[\mathbb{J}_{n+1}(\beta) + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ D_{n+1}(\beta)V_0^{n+1} & \cdots & D_{n+1}(\beta)V_n^{n+1} \end{pmatrix}\mathbb{T}_n^{-1}\right]\mathbb{T}_n \\
& \times\ \mathbb{P}_n(x;\alpha) + \\
& + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{pmatrix} A_n(\alpha)A_{n+1}^{-1}(\alpha)P_{n+1}(x;\alpha).
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta (3.2.6), deducimos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{J}_{n+1}(\alpha)\\
&= \mathbb{T}_n^{-1}\left[\mathbb{J}_{n+1}(\beta) + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ D_{n+1}(\beta)V_0^{n+1} & \cdots & D_{n+1}(\beta)V_n^{n+1} \end{pmatrix} \mathbb{T}_n^{-1}\right]\mathbb{T}_n \qquad (3.2.7)\\
&= \mathbb{T}_n^{-1}\left[\mathbb{J}_{n+1}(\beta) + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ H_0^n & \cdots & H_n^n \end{pmatrix}\right]\mathbb{T}_n
\end{aligned}
$$

donde $H_i^n (i = 0, \cdots, n)$ se generan del modo siguiente

$$
D_{n+1}(\beta)V_r^{n+1} = \begin{cases} H_n^n W_n & si \quad r = n \\ H_r^n W_r + \sum\limits_{i=r+1}^{n} H_i^n V_r^i & si \quad 0 \leq r \leq n-1, \end{cases}
$$

esto es,

$$
\begin{cases}
H_n^n &= D_{n+1}(\beta)V_n^{n+1}W_n^{-1} \\
H_{n-1}^n &= \left[D_{n+1}(\beta)V_{n-1}^{n+1} - H_n^n V_{n-1}^n\right] W_{n-1}^{-1} \\
H_{n-2}^n &= \left[D_{n+1}(\beta)V_{n-2}^{n+1} - H_{n-1}^n V_{n-2}^{n-1} - H_n^n V_{n-2}^n\right] W_{n-2}^{-1} \\
\vdots & \vdots \qquad \vdots \\
H_0^n &= \left[D_{n+1}(\beta)V_0^{n+1} - \sum\limits_{i=1}^{n} H_i^n V_0^i\right] W_0^{-1}.
\end{cases}
$$

En conclusión, de (3.2.7) se sigue que, $\mathbb{J}_{n+1}(\beta)$ es una perturbación de rango p de la matriz $\mathbb{J}_{n+1}(\alpha)$.

■

3.3 Asintótica de la perturbación de los coeficientes matriciales en la relación de recurrencia

Definición 3.3 .- *Sean D y E dos matrices de dimensión p tales que E es una matriz hermitiana. Diremos que una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(.;\alpha)\}$ satisfaciendo la relación de recurrencia (1.3.4) pertenece a la clase matricial de Nevai $M(D,E)$ si*

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\alpha) = D \quad y \quad \lim_{n\to\infty} E_n(\alpha) = E. \tag{3.3.1}$$

Una medida matricial α pertenece a la clase matricial de Nevai $M(D,E)$, si una de las sucesiones de polinomios matriciales ortonormales asociadas a dicha medida pertenece a la clase matricial de Nevai $M(D,E)$.

Consideramos una medida matricial α que pertenece a la clase matricial de Nevai $M(D,E)$. Entonces demostraremos en el siguiente teorema que la perturbación β

$$d\beta(u) = d\alpha(u) + M\delta(u-c), \;\; c \in \mathbb{R}\setminus\hat{\Gamma} \tag{3.3.2}$$

donde M es una matriz definida positiva, pertenece a una nueva clase matricial de Nevai $M(\tilde{D},\tilde{E})$. Por motivo de simplificación, y a lo largo de esta sección, denotamos por $\mathcal{F}_{D,E}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t} = \mathcal{F}(c)$ la función matricial de Markov.

Teorema 3.4 .- *Sean α y β dos medidas matriciales relacionadas por (3.3.2). Suponemos* *que*

$$\{P_n(x;\alpha)\} \;\in\; M(D,E).$$

Entonces existe $\{P_n(x;\beta)\}$ *tal que*

$$\{P_n(x;\beta)\} \;\in\; M(\tilde{D},\tilde{E})$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \Lambda^*(c)D\Lambda^{-*}(c), \\ \tilde{E} &= \Lambda^*(c)E\Lambda(c) - c\,(\Lambda^*(c)\Lambda(c) - I_p) + \\ &\quad \Lambda^*(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda(c) - \Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c). \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Demostración.-

Sea $\{P_n(x;\alpha) = A_n(\alpha)x^n + \text{términos de menor grado}\}$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial α. A partir de (2.2.22), existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\beta) = A_n(\beta)x^n + \cdots\}$ tal que $\Lambda(c) = \lim_{n\to\infty} [A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)]^*$. Entonces

$$\begin{aligned} A_{n-1}(\beta)A_n^{-1}(\beta) &= (A_{n-1}(\beta)A_{n-1}^{-1}(\alpha)) \\ &\quad \times (A_{n-1}(\alpha)A_n^{-1}(\alpha))\,(A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha))^{-1}, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

teniendo en cuenta que a partir (1.3.4) y (1.3.2)

$$\begin{aligned} D_{n+1}(\alpha) &= < xP_n(x;\alpha), P_{n+1}(x;\alpha) >_\alpha \\ &= \int [A_n(\alpha)x^{n+1} + \cdots]\, d\alpha(x)P_{n+1}^*(x;\alpha) \\ &= A_n(\alpha)A_{n+1}^{-1}(\alpha)\int [A_{n+1}(\alpha)x^{n+1} + \cdots]\, d\alpha(x)P_{n+1}^*(x;\alpha) \\ &= A_n(\alpha)A_{n+1}^{-1}(\alpha), \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

y usando (2.2.22), deducimos

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\beta) = \Lambda^*(c)D\Lambda^{-*}(c).$$

Ahora, de (1.3.4), (1.3.2) y (3.3.2), se sigue que

$$\begin{aligned} E_n(\beta) &= < xP_n(x;\beta), P_n(x;\beta) >_\beta \\ &= < xP_n(x;\beta), P_n(x;\beta) >_\alpha + cP_n(c;\beta) M P_n^*(c;\beta). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Pero usando (2.2.1) tenemos

$$< xP_n(x;\beta), P_n(x;\beta) >_\alpha$$

$$\begin{aligned} &= < \mathcal{M}_n x P_n(x;\alpha) - \mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M x K_{n+1}(x,c;\alpha), \\ &\qquad \mathcal{M}_n P_n(x;\alpha) - \mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M K_{n+1}(x,c;\alpha) >_\alpha \\ &= \mathcal{M}_n < xP_n(x;\alpha), P_n(x;\alpha) >_\alpha \mathcal{M}_n^* \\ &\quad - \mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M < xK_{n+1}(x,c;\alpha), P_n(x;\alpha) >_\alpha \mathcal{M}_n^* && \text{(3.3.7a)} \\ &\quad - \mathcal{M}_n < xP_n(x;\alpha), K_{n+1}(x,c;\alpha) >_\alpha M \mathcal{V}_n^* \mathcal{M}_n^* \\ &\quad + \mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M < xK_{n+1}(x,c;\alpha), K_{n+1}(x,c;\alpha) >_\alpha M \mathcal{V}_n^* \mathcal{M}_n^*. && \text{(3.3.7b)} \end{aligned}$$

Entonces el término (3.3.7a) es igual a

$$\begin{aligned} -\mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M < & xP_n^*(c;\alpha) P_n(x;\alpha) + xP_{n-1}^*(c;\alpha) P_{n-1}(x;\alpha) \\ & , P_n(x;\alpha) >_\alpha \mathcal{M}_n^* \\ &= -\mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M \left[P_n^*(c;\alpha) E_n(\alpha) + P_{n-1}^*(c;\alpha) D_n(\alpha) \right] \mathcal{M}_n^* \\ &= -\mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M \left[cP_n^*(c;\alpha) - P_{n+1}^*(c;\alpha) D_{n+1}^*(\alpha) \right] \mathcal{M}_n^*. \end{aligned}$$

Por otra parte, de (1.3.13) y (1.3.11), deducimos

$$
\begin{aligned}
&< xK_{n+1}(x,c;\alpha), K_{n+1}(x,c;\alpha) >_\alpha \\
&\quad =< (x-c)K_{n+1}(x,c;\alpha), K_{n+1}(x,c;\alpha) >_\alpha + cK_{n+1}(c,c;\alpha) \\
&\quad =< P_n^*(c;\alpha)D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(x;\alpha) \\
&\qquad\quad - P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*(\alpha)P_n(x;\alpha), K_{n+1}(x,c;\alpha) >_\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + cK_{n+1}(c,c;\alpha) \\
&\quad = -P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*(\alpha)P_n(c;\alpha) + cK_{n+1}(c,c;\alpha).
\end{aligned}
$$

A partir de la formula de Christoffel-Darboux (1.3.11), tomando $x = y = c$, se sigue que $P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*(\alpha)P_n(c;\alpha)$ es hermitiana (ver Corolario 1.7), y el término en (3.3.7b) es igual a

$$
\begin{aligned}
&c\mathcal{M}_n\mathcal{V}_nMK_{n+1}(c,c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*\mathcal{M}_n^* \\
&\qquad\qquad - \mathcal{M}_n\mathcal{V}_nMP_n^*(c;\alpha)D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*\mathcal{M}_n^*.
\end{aligned}
$$

A partir del lema 2.1

$$
\begin{aligned}
P_n(c;\beta) &= \mathcal{M}_n\left[P_n(c;\alpha) - \mathcal{V}_nMK_{n+1}(c,c;\alpha)\right] \\
&= \mathcal{M}_nP_n(c;\alpha)\times \\
&\qquad \left[I_p - \left(I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right)^{-1}MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right] \\
&= \mathcal{M}_nP_n(c;\alpha)\left(I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right)^{-1} \\
&= \mathcal{M}_n\mathcal{V}_n,
\end{aligned}
$$

entonces (3.3.6) resulta ser

$$
\begin{aligned}
E_n(\beta) =&\mathcal{M}_n E_n(\alpha)\mathcal{M}_n^* \\
&- \mathcal{M}_n\mathcal{V}_n M\left[cP_n^*(c;\alpha) - P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*(\alpha)\right]\mathcal{M}_n^* \\
&- \mathcal{M}_n\left[cP_n(c;\alpha) - D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)\right]M^*\mathcal{V}_n^*\mathcal{M}_n^* \\
&+ c\mathcal{M}_n\mathcal{V}_n M K_{n+1}(c,c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*\mathcal{M}_n^* \\
&- \mathcal{M}_n\mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha)D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*\mathcal{M}_n^* \\
&+ c\mathcal{M}_n\mathcal{V}_n M\mathcal{V}_n^*\mathcal{M}_n^* \\
=&\mathcal{M}_n\left\{E_n(\alpha) - \mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha)D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*\right. \\
&\left.+\mathcal{V}_n M P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*(\alpha) + D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*\right\}\mathcal{M}_n^* \\
&- c\mathcal{M}_n\left\{\mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha) + P_n(c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*\right. && \text{(3.3.8a)}\\
&\qquad\left.-\mathcal{V}_n M K_{n+1}(c,c;\alpha)M\mathcal{V}_n^* - \mathcal{V}_n M\mathcal{V}_n^*\right\}\mathcal{M}_n^*. && \text{(3.3.8b)}
\end{aligned}
$$

Notamos que a partir de (2.2.1) y (2.2.2)

$$
\begin{aligned}
I_p - &P_n(c;\alpha)M\left(I_p + K_{n+1}(c,c;\alpha)M\right)^{-1}P_n^*(c;\alpha) \\
&=< P_n(x;\alpha), \mathcal{M}_n^{-1}P_n(x;\beta) >_\alpha \\
&=< P_n(x;\alpha), P_n(x;\beta) >_\alpha \mathcal{M}_n^{-*} \\
&=< P_n(x;\alpha), A_n(\beta)A_n(\alpha)^{-1}P_n(x;\alpha) >_\alpha \mathcal{M}_n^{-*} \\
&=< P_n(x;\alpha), P_n(x;\alpha) >_\alpha \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*} \\
&= \left(\mathcal{M}_n^*\mathcal{M}_n\right)^{-1}.
\end{aligned}
\tag{3.3.9}
$$

De (3.3.9), los términos en (3.3.8a) y (3.3.8b) resultan ser

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha) + P_n(c;\alpha) M \mathcal{V}_n^* \\
&\quad -\mathcal{V}_n M K_{n+1}(c,c;\alpha) M \mathcal{V}_n^* - \mathcal{V}_n M \mathcal{V}_n^* \\
&\qquad = -\mathcal{V}_n M \left[\mathcal{V}_n^* + K_{n+1}(c,c;\alpha) M \mathcal{V}_n^* - P_n^*(c;\alpha)\right] + P_n(c;\alpha) M \mathcal{V}_n^* \\
&\qquad = -\mathcal{V}_n M \Big[\left(I_p + K_{n+1}(c,c;\alpha)M\right)^{-1} P_n^*(c;\alpha) \\
&\qquad\qquad + K_{n+1}(c,c;\alpha) M \left(I_p + K_{n+1}(c,c;\alpha)M\right)^{-1} P_n^*(c;\alpha) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - P_n^*(c;\alpha)\Big] + P_n(c;\alpha) M \mathcal{V}_n^* \\
&\qquad = P_n(c;\alpha) M \mathcal{V}_n^* \\
&\qquad = P_n(c;\alpha) M \left(I_p + K_{n+1}(c,c;\alpha)M\right)^{-1} P_n^*(c;\alpha) \\
&\qquad = I_p - \left(\mathcal{M}_n^* \mathcal{M}_n\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Así, sustituyendo en (3.3.8a) y (3.3.8b), (3.3.8) se convierte en

$$
\begin{aligned}
E_n(\beta) &= cI_p - c\mathcal{M}_n \mathcal{M}_n^* + \\
&\quad \mathcal{M}_n \left\{E_n(\alpha) - \mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha) D_{n+1}(\alpha) P_{n+1}(c;\alpha) M \mathcal{V}_n^* \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{V}_n M P_{n+1}^*(c;\alpha) D_{n+1}^*(\alpha) + D_{n+1}(\alpha) P_{n+1}(c;\alpha) M \mathcal{V}_n^* \right\} \mathcal{M}_n^*.
\end{aligned}
$$

Para encontrar la asintótica $\tilde{E}$ de $E_n(\beta)$, debemos tener en cuenta los siguientes resultados para $c \in \mathbb{R} \setminus \hat{\Gamma}$

- $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_n^{-1} = \Lambda(c)$

- $\lim_{n\longrightarrow\infty} P_{n-1}(c;\alpha) P_n^{-1}(c;\alpha) D_n^{-1}(\alpha) = \int \frac{dW_{D,E}(t)}{c-t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(c).$

Entonces

$$
\begin{aligned}
E_n(\beta) &= cI_p - c\mathcal{M}_n\mathcal{M}_n^* + \mathcal{M}_n\{E_n(\alpha) - \\
&(\mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha))\, D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\,(P_n(c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*) \\
&\qquad + (\mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha))\, P_n^{-*}(c;\alpha)P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*(\alpha) \\
&\qquad + D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\,(P_n(c;\alpha)M\mathcal{V}_n^*)\}\,\mathcal{M}_n^* \\
&= cI_p - c\mathcal{M}_n\mathcal{M}_n^* + \mathcal{M}_n\{E_n(\alpha) - (I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*}) \\
&\qquad \times D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\,(I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*}) \\
&\qquad + (I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*})\, P_n^{-*}(c;\alpha)P_{n+1}^*(c;\alpha)D_{n+1}^*(\alpha) \\
&\qquad + D_{n+1}(\alpha)P_{n+1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\,(I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*})\}\,\mathcal{M}_n^*,
\end{aligned}
$$

obteniéndose por paso al límite

$$
\begin{aligned}
\tilde{E} &= cI_p - c\Lambda(c)^{-1}\Lambda(c)^{-*} + \\
&\quad \Lambda(c)^{-1}\left\{E - (I_p - \Lambda(c)\Lambda(c)^*)\,\mathcal{F}(c)^{-1}\,(I_p - \Lambda(c)\Lambda(c)^*)\right. \\
&\qquad \left. + (I_p - \Lambda(c)\Lambda(c)^*)\,\mathcal{F}(c)^{-*} + \mathcal{F}(c)^{-1}\,(I_p - \Lambda(c)\Lambda(c)^*)\right\}\Lambda(c)^{-*} \\
&= \Lambda(c)^{-1}\{c\,(\Lambda(c)\Lambda(c)^* - I_p) \\
&\qquad + E - (I_p - \Lambda(c)\Lambda(c)^*)\,\mathcal{F}(c)^{-1}\,(I_p - \Lambda(c)\Lambda(c)^*) \\
&\qquad \left. + (I_p - \Lambda(c)\Lambda(c)^*)\,\mathcal{F}(c)^{-*} + \mathcal{F}(c)^{-1}\,(I_p - \Lambda(c)\Lambda(c)^*)\right\}\Lambda(c)^{-*} \\
&= \Lambda^{-1}(c)\{E + c(\Lambda(c)\Lambda(c)^* - I_p) \\
&\qquad\qquad \left. - \Lambda(c)\Lambda(c)^*\mathcal{F}(c)^{-1}\Lambda(c)\Lambda(c)^* + \mathcal{F}(c)^{-1}\right\}\Lambda^{-*}(c) \\
&= \Lambda^{-1}(c)\left\{E - cI_p + \mathcal{F}(c)^{-1}\right\}\Lambda^{-*}(c) + cI_p - \Lambda^*(c)\mathcal{F}(c)^{-1}\Lambda(c). \qquad (3.3.10a)
\end{aligned}
$$

Pero a partir de (1.3.4), tenemos

$$D_n^*(\alpha)\left(P_{n-1}(z;\alpha)P_n(z;\alpha)^{-1}D_n(\alpha)^{-1}\right)D_n(\alpha)$$
$$\times\left(P_n(z;\alpha)P_{n+1}(z;\alpha)^{-1}D_{n+1}(\alpha)^{-1}\right)\left(E_n(\alpha)-zI_p\right)$$
$$\times\left(P_n(z;\alpha)P_{n+1}(z;\alpha)^{-1}D_{n+1}(\alpha)^{-1}\right)+I_p=0$$

para $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$. De (2.2.3) se tiene

$$D^*\mathcal{F}(c)D\mathcal{F}(c)+(E-cI_p)\mathcal{F}(c)+I_p=0, \tag{3.3.11}$$

es decir,

$$D^*\mathcal{F}(c)D+(E-cI_p)+\mathcal{F}(c)^{-1}=0.$$

Entonces (3.3.10a) resulta ser

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= -\Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c)+cI_p\\ &\qquad +\Lambda^*(c)\left\{D^*\mathcal{F}(c)D+E-cI_p\right\}\Lambda(c)\\ &= \Lambda^*(c)E\Lambda(c)-c\left(\Lambda^*(c)\Lambda(c)-I_p\right)\\ &\qquad +\Lambda^*(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda(c)-\Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c).\end{aligned}$$

■

Observación 3.4 .- *El parámetro matricial $\tilde{E}$ es una matriz hermitiana de acuerdo con la definición 3.3.*

En lo que sigue, sea $\{P_n(x;\beta)\}$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial β, tal que $\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^*$ es una matriz triangular inferior, cuyos elementos diagonales son reales positivos (veáse página 41). A partir de (3.3.9) tenemos

$$\begin{aligned}&\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^*\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]=\\ &\qquad I_p-P_n(c;\alpha)M\left(I_p+K_{n+1}(c,c;\alpha)M\right)^{-1}P_n^*(c;\alpha).\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Entonces usando la factorización de Cholesky de la matriz definida positiva del segundo miembro de (3.3.12), existe una única matriz triangular inferior $\mathrm{L}_n(c;\alpha)$ cuyos elementos diagonales son reales positivos y tales que

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_n(c;\alpha)\mathrm{L}_n^*(c;\alpha) &= \\ &I_p - P_n(c;\alpha)\left(I_p + MK_{n+1}(c,c;\alpha)\right)^{-1} MP_n^*(c;\alpha).\end{aligned}$$

Por tanto $[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)]^*$ viene dada por

$$\left[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)\right]^* = \mathrm{L}_n(c;\alpha). \tag{3.3.13}$$

Proposición 3.5 .- *Consideramos dos medidas matriciales α y β relacionadas por (3.3.2). Sea $\mathbb{J}(\alpha)$ la matriz de Jacobi por bloques definida por (1.3.14). Entonces la matriz perturbada de Jacobi por bloques $\mathbb{J}(\beta)$ asociada a $\{P_n(x;\beta)\}$ está definida por sus componentes matriciales*

$$\begin{aligned}D_n(\beta) &= \mathrm{L}_{n-1}^*(c;\alpha)D_n(\alpha)\mathrm{L}_n^{-*}(c;\alpha),\\ E_n(\beta) &= \mathrm{L}_n^*(c;\alpha)A_n(\alpha)\\ &\quad\left(\Pi_n(c;\alpha) - \Pi_{n+1}(c;\alpha)\right) A_n^{-1}(\alpha)\mathrm{L}_n^{-*}(c;\alpha).\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

donde

$$\begin{aligned}\Pi_n(c;\alpha) &= A_n^{-1}(\alpha)B_n(\alpha)\\ &\quad - A_n^{-1}(\alpha)\left\{P_n^{-*}(c;\alpha)M^{-1}\mathcal{V}_n^{-1} - I_p\right\}^{-1}\\ &\quad\quad \times \left(P_{n-1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right)^* A_{n-1}(\alpha).\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Demostración.-

A partir de (3.3.4), (3.3.13) y (3.3.5), deducimos que

$$D_n(\beta) = \mathrm{L}_{n-1}^*(c;\alpha)D_n(\alpha)\mathrm{L}_n^{-*}(c;\alpha).$$

Usando la relación de recurrencia (1.3.4) y la propiedad de ortogonalidad (1.3.2), tenemos

$$
\begin{aligned}
E_n(\beta) = &< xP_n(x;\beta), P_n(x;\beta) >_\beta \\
= &\int \left[A_n(\beta)x^{n+1} + B_n(\beta)x^n + \cdots\right] d\beta(x) P_n^*(x;\beta) \\
= &A_n(\beta)A_{n+1}^{-1}(\beta)\times \\
&\quad \int \left[A_{n+1}(\beta)x^{n+1} + B_{n+1}(\beta)x^n + \cdots\right] d\beta(x) P_n^*(x;\beta) \\
&\quad - A_n(\beta)A_{n+1}^{-1}(\beta)\int \left[B_{n+1}(\beta)x^n + \cdots\right] d\beta(x) P_n^*(x;\beta) \\
&\quad + B_n(\beta)A_n^{-1}(\beta)\int \left[A_n(\beta)x^n + \cdots\right] d\beta(x) P_n^*(x;\beta) \\
= &A_n(\beta)\left(A_n^{-1}(\beta)B_n(\beta) - A_{n+1}^{-1}(\beta)B_{n+1}(\beta)\right) A_n^{-1}(\beta) \qquad (3.3.16a) \\
= &\mathrm{L}_n^*(c;\alpha)A_n(\alpha)\left(A_n^{-1}(\beta)B_n(\beta) - A_{n+1}^{-1}(\beta)B_{n+1}(\beta)\right) \\
&\qquad A_n^{-1}(\alpha)\mathrm{L}_n^{-*}(c;\alpha).
\end{aligned}
$$

Para obtener la segunda parte de (3.3.14), es suficiente probar que $A_n^{-1}(\beta)B_n(\beta) = \Pi_n(c;\alpha)$. En efecto, a partir del lema 2.1 y (3.3.9)

$$
\begin{aligned}
A_n(\beta) &= \mathcal{M}_n\left[A_n(\alpha) - \mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha)A_n(\alpha)\right] \\
&= \mathcal{M}_n\left[I_p - \mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha)\right] A_n(\alpha) \qquad (3.3.17) \\
&= \mathcal{M}_n^{-*} A_n(\alpha)
\end{aligned}
$$

así como

$$\begin{aligned}
B_n(\beta) &= \mathcal{M}_n \left[B_n(\alpha) - \right. \\
&\quad \left. \mathcal{V}_n M \left(P_n^*(c;\alpha) B_n(\alpha) - P_{n-1}^*(c;\alpha) A_{n-1}(\alpha) \right) \right] \\
&= \mathcal{M}_n \left[I_p - \mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha) \right] B_n(\alpha) - \\
&\qquad \mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M P_{n-1}^*(c;\alpha) A_{n-1}(\alpha) \qquad (3.3.18) \\
&= \mathcal{M}_n^{-*} B_n(\alpha) - \mathcal{M}_n \mathcal{V}_n M P_{n-1}^*(c;\alpha) A_{n-1}(\alpha) \\
&= \mathcal{M}_n^{-*} B_n(\alpha) - \\
&\quad \mathcal{M}_n^{-*} \left\{ I_p - \mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha) \right\}^{-1} \mathcal{V}_n M P_{n-1}^*(c;\alpha) A_{n-1}(\alpha).
\end{aligned}$$

Usando (3.3.17) y (3.3.18)

$$\begin{aligned}
&A_n^{-1}(\beta) B_n(\beta) = A_n^{-1}(\alpha) B_n(\alpha) \\
&\quad - A_n^{-1}(\alpha) \left\{ P_n^{-*}(c;\alpha) M^{-1} \mathcal{V}_n^{-1} - I_p \right\}^{-1} \\
&\qquad \times \left(P_{n-1}(c;\alpha) P_n^{-1}(c;\alpha) \right)^* A_{n-1}(\alpha).
\end{aligned}$$

■

Corolario 3.6 .-

$$\begin{aligned}
\tilde{D} &= \Lambda^*(c) D \Lambda^{-*}(c) \\
\tilde{E} &= \Lambda^*(c). \left\{ E + D \left[\Lambda^{-*}(c).\Lambda^{-1}(c) - I_p \right] D^* \mathcal{F}(c) \right. \qquad (3.3.19) \\
&\qquad \left. - \left[\Lambda^{-*}(c).\Lambda^{-1}(c) - I_p \right] D^* \mathcal{F}(c) D \right\} \Lambda^{-*}(c).
\end{aligned}$$

Demostración.-

A partir de (3.3.15)

$$\begin{aligned}
&A_n(\alpha) \left[\Pi_n(c;\alpha) - \Pi_{n+1}(c;\alpha) \right] A_n^{-1}(\alpha) \\
&\quad = A_n(\alpha) \left[A_n^{-1}(\alpha) B_n(\alpha) - A_{n+1}^{-1}(\alpha) B_{n+1}(\alpha) \right] A_n^{-1}(\alpha) \qquad (3.3.20) \\
&\quad - \Omega_n(c;\alpha) A_{n-1}(\alpha) A_n^{-1}(\alpha) + A_n(\alpha) A_{n+1}^{-1}(\alpha) \Omega_{n+1}(c;\alpha)
\end{aligned}$$

donde

$$\Omega_n(c;\alpha) = \left\{P_n^{-*}(c;\alpha)M^{-1}\mathcal{V}_n^{-1} - I_p\right\}^{-1}\left(P_{n-1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right)^*. \qquad (3.3.21)$$

A partir de (3.3.9), la anterior expresión se convierte en

$$\begin{aligned}
\Omega_n(c;\alpha) &= \{I_p - \mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha)\}^{-1} \\
&\qquad \mathcal{V}_n M P_n^*(c;\alpha)\left(P_{n-1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right)^* \\
&= \mathcal{M}_n^*\mathcal{M}_n(I_p - \mathcal{M}_n^{-1}\mathcal{M}_n^{-*})\left(P_{n-1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)\right)^* \\
&= (\mathcal{M}_n^*\mathcal{M}_n - I_p)D_n^*(\alpha)\left(P_{n-1}(c;\alpha)P_n^{-1}(c;\alpha)D_n^{-1}(\alpha)\right)^*.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\Omega_n(c;\alpha) = (\Lambda^{-*}(c)\Lambda^{-1}(c) - I_p)D^*\mathcal{F}(c).$$

A partir de (3.3.14), (3.3.20) y teniendo en cuenta (3.3.16a) y (3.3.5)

$$\begin{aligned}
E_n(\beta) &= \mathrm{L}_n^*(c;\alpha) \\
&\qquad \{E_n(\alpha) + D_{n+1}(\alpha)\Omega_{n+1}(c;\alpha) \\
&\qquad\qquad -\Omega_n(\alpha)D_n(\alpha)\}\,\mathrm{L}_n^{-*}(c;\alpha).
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \Lambda^*(c).\left\{E + D\left[\Lambda^{-*}(c).\Lambda^{-1}(c) - I_p\right]D^*\mathcal{F}(c)\right. \\
&\qquad \left. - \left[\Lambda^{-*}(c).\Lambda^{-1}(c) - I_p\right]D^*\mathcal{F}(c)D\right\}\Lambda^{-*}(c).
\end{aligned}$$

∎

Observación 3.5 .-

- *En general, la sucesión perturbada de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\beta)\}$ no pertenece necesariamente a $M(D,E)$.*

- *La expresión de $\tilde{E}$ en (3.3.3) es igual a la expresión de $\tilde{E}$ en (3.3.19).*

En efecto, como muestra el ejemplo 1, podemos verificar que E y $\tilde{E}$ no son unitariamente equivalentes.

Para probar la segunda parte, sean P y Q las expresiones de $\tilde{E}$ dadas en (3.3.3) y (3.3.19) respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} P &= \Lambda^*(c)E\Lambda(c) - c\,\Lambda^*(c)\Lambda(c) + c\,I_p + \\ &\quad \Lambda^*(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda(c) - \Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c). \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

A partir del teorema 2.7,

$$\Lambda(c)\Lambda^*(c) = I_p + \mathcal{F}(c)\left(\mathcal{F}'(c)\right)^{-1}\mathcal{F}(c),$$

de manera que podemos reescribir (3.3.22)

$$\begin{aligned} P &= \Lambda^*(c)E\left\{I_p + \mathcal{F}(c)\left(\mathcal{F}'(c)\right)^{-1}\mathcal{F}(c)\right\}\Lambda^{-*}(c) \\ &\quad -c\,\Lambda^*(c)\left\{I_p + \mathcal{F}(c)\left(\mathcal{F}'(c)\right)^{-1}\mathcal{F}(c)\right\}\Lambda^{-*}(c) + c\,I_p \\ &\quad +\Lambda^*(c)D^*\mathcal{F}(c)D\left\{I_p + \mathcal{F}(c)\left(\mathcal{F}'(c)\right)^{-1}\mathcal{F}(c)\right\}\Lambda^{-*}(c) \\ &\quad -\Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c) \\ &= \Lambda^*(c)E\Lambda^{-*}(c) \\ &\quad +\Lambda^*(c)\left\{\left[\left(E - c\,I_p + D^*\mathcal{F}(c)D\right)\mathcal{F}(c)\right]\left(\mathcal{F}'(c)\right)^{-1}\mathcal{F}(c)\right\}\Lambda^{-*}(c) \\ &\quad +\Lambda^*(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c) - \Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c), \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (3.3.11), obtenemos

$$\begin{aligned} P = \Lambda^*(c)E\Lambda^{-*}(c) &- \Lambda^*(c)\left(\mathcal{F}'(c)\right)^{-1}\mathcal{F}(c)\Lambda^{-*}(c) \\ &+\Lambda^*(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c) - \Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c). \end{aligned}$$

A partir de (3.3.19)

$$\begin{aligned} Q = \Lambda^*(c)E\Lambda^{-*}(c) &+ \Lambda^*(c)D\Lambda^{-*}(c)\Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)\Lambda^{-*}(c) \\ &-\Lambda^*(c)DD^*\mathcal{F}(c)\Lambda^{-*}(c) - \Lambda^{-1}(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c) \\ &+\Lambda^*(c)D^*\mathcal{F}(c)D\Lambda^{-*}(c). \end{aligned}$$

Para probar que $P = Q$, es suficiente mostrar que

$$(\mathcal{F}'(c))^{-1} + D\Lambda^{-*}(c)\Lambda^{-1}(c)D^* - DD^* = 0. \tag{3.3.23}$$

Derivando en (3.3.11) en el punto c, obtenemos

$$D^*\mathcal{F}'(c)D\mathcal{F}(c) + \{D^*\mathcal{F}(c)D + E - c\,I_p\}\,\mathcal{F}'(c) = \mathcal{F}(c),$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(c)\,(\mathcal{F}'(c))^{-1}\,\mathcal{F}(c)\,\{D^*\mathcal{F}'(c)D - I_p\} = I_p \\
&\quad\Leftrightarrow\ \mathcal{F}(c)\,(\mathcal{F}'(c))^{-1}\,\mathcal{F}(c)D^* \\
&\qquad\qquad = D^{-1}\,(\mathcal{F}'(c))^{-1} + \mathcal{F}(c)\,(\mathcal{F}'(c))^{-1}\,\mathcal{F}(c)D^{-1}\,(\mathcal{F}'(c))^{-1} \\
&\qquad\qquad = \left\{I_p + \mathcal{F}(c)\,(\mathcal{F}'(c))^{-1}\,\mathcal{F}(c)\right\}D^{-1}\,(\mathcal{F}'(c))^{-1} \\
&\qquad\qquad = \Lambda(c)\Lambda^*(c)D^{-1}\,(\mathcal{F}'(c))^{-1} \\
&\quad\Leftrightarrow \Lambda(c)\Lambda^*(c)D^* - D^* = \Lambda(c)\Lambda^*(c)D^{-1}\,(\mathcal{F}'(c))^{-1} \\
&\quad\Leftrightarrow (\mathcal{F}'(c))^{-1} + D\Lambda^{-*}(c)\Lambda^{-1}(c)D^* - DD^* = 0.
\end{aligned}$$

Así (3.3.23) es cierto y, por lo tanto, se cumple la segunda parte de la observación 3.5.

■

3.4 Ejemplos

.

3.4.1 Ejemplo 1

Consideramos

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recordamos que

$$\mathcal{F}_{D,E}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dW_{D,E}}{x-t},$$

y a partir de (1.3.4) y (2.2.3) deducimos que la función matricial de Markov $\mathcal{F}_{D,E}(x)$ es analítica y satisface

$$D^*\mathcal{F}_{D,E}(x)D\mathcal{F}_{D,E}(x) + (E - xI_2)\mathcal{F}_{D,E}(x) + I_2 = 0; \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \Gamma. \tag{3.4.1}$$

Puesto que D es una matriz definida positiva, de acuerdo con la proposición 2.2, $\mathcal{F}_{D,E}(x)$ tiene la siguiente expresión explícita.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{D,E}(x) &= \tfrac{1}{2}D^{-1}(xI_2 - E)D^{-1} \\ &\quad -\tfrac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{D^{-\frac{1}{2}}(E - xI_2)D^{-1}(E - xI_2)D^{-\frac{1}{2}} - 4I_2}\right]D^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

donde $x \notin sop(dW_{D,E}) = \Big\{x \in \mathbb{R}; D^{-\frac{1}{2}}(E - xI_2)D^{-\frac{1}{2}}$ tiene al menos un valor propio en $[-2, 2]\Big\}$.

La raíz cuadrada que aparece en (3.4.2) está definida de forma natural, es decir, usando la forma diagonal de dicha matriz, aplicamos la raíz cuadrada para sus valores propios asociados w que verifican $|w - \sqrt{w^2 - 4}| < 2$.

Haciendo algunos cálculos tediosos , se tiene

$$\frac{1}{2}D^{-1}(cI_2 - E)D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1+c}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{-1+c}{4} \end{pmatrix}$$

y

$$D^{-\frac{1}{2}}(E-cI_2)D^{-1}(E-cI_2)D^{-\frac{1}{2}}-4I_2=\begin{pmatrix} \frac{-6-2\,c+c^2}{2} & 1-c \\ 1-c & \frac{-6-2\,c+c^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Según la forma explícita dada en (3.4.2), se obtiene

$$\mathcal{F}_{D,E}(c)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} x_1(c) & x_2(c) \\ x_2(c) & x_1(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} x_1(c) &= -2+2\,c-\sqrt{-8+c^2}-\sqrt{-4-4\,c+c^2} \\ x_2(c) &= -2+\sqrt{-8+c^2}-\sqrt{-4-4\,c+c^2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} sop(dW_{D,E}) &= \left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]\bigcup\left[\sqrt{2}\,\left(-2+\sqrt{2}\right),\sqrt{2}\,\left(2+\sqrt{2}\right)\right] \\ &= \left[-2\sqrt{2},\sqrt{2}\,\left(2+\sqrt{2}\right)\right], \end{aligned}$$

y la raíz cuadrada se elige de manera que $\int\frac{dW_{D,E}(t)}{x-t}$ es una función analítica en $x\in\mathbb{R}\setminus\left[-2\sqrt{2},\sqrt{2}\,\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$.

Computando los términos a derecha de (2.2.7) y teniendo en cuenta (2.2.22), se obtiene

$$\Lambda(c).\Lambda^*(c)=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} y_1(c) & y_2(c) \\ y_2(c) & y_1(c) \end{pmatrix} \tag{3.4.3}$$

con

$$\begin{cases} y_1(c) &= -4+2\,c^2+2\sqrt{-4-4\,c+c^2} \\ & \qquad -c\,\left(4+\sqrt{-8+c^2}+\sqrt{-4-4\,c+c^2}\right) \\ y_2(c) &= c\,\left(-4+\sqrt{-8+c^2}-\sqrt{-4-4\,c+c^2}\right) \\ & \qquad +2\,\left(2+\sqrt{-4-4\,c+c^2}\right). \end{cases}$$

Usando la factorización de Cholesky para la matriz definida positiva (3.4.3), se tiene

$$\Lambda(c) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z_1(c) & 0 \\ z_2(c) & z_3(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} z_1(c) &= \sqrt{-2 - 2\,c + c^2 - \frac{(-2+c)\sqrt{-4+(-4+c)\,c}}{2} - \frac{c\sqrt{-8+c^2}}{2}} \\ z_2(c) &= \frac{4-4\,c-(-2+c)\sqrt{-4+(-4+c)\,c}+c\sqrt{-8+c^2}}{\sqrt{-2\,(-2+c)\sqrt{-4+(-4+c)\,c}+4\,(-2+(-2+c)\,c)-2\,c\sqrt{-8+c^2}}} \\ z_3(c) &= 4\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{(-2+c)\sqrt{-4+(-4+c)\,c}+2\,(-2+(-2+c)\,c)+c\sqrt{-8+c^2}}}. \end{cases}$$

Finalmente, y de acuerdo con (3.3.3), los límites de los parámetros matriciales perturbados son

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} \frac{2\,c\sqrt{-8+c^2}-w(c)}{2\,(-2+(-2+c)\,c)} & \frac{8\,u(c)}{v(c)} \\ \frac{8\,u(c)}{v(c)} & \frac{2\left(4+c\left(-c+\sqrt{-8+c^2}\right)\right)}{w(c)} \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} u(c) &= \sqrt{\frac{1}{(-2+c)\sqrt{-4+(-4+c)\,c}+2\,(-2+(-2+c)\,c)+c\sqrt{-8+c^2}}} \\ v(c) &= \sqrt{-\left((-2+c)\sqrt{-4+(-4+c)\,c}\right) + +2\,(-2+(-2+c)\,c) - c\sqrt{-8+c^2}} \\ w(c) &= 4 - 2\,(-2+c)\,c + (-2+c)\sqrt{-4+(-4+c)\,c} + c\sqrt{-8+c^2}. \end{cases}$$

.

3.4.2 Ejemplo 2

Consideramos ahora

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\frac{1}{2}D^{-1}(cI_3 - E)D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1+c}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{-1+c}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+c}{6} \end{pmatrix}$$

y

$$D^{-\frac{1}{2}}(E - cI_3)D^{-1}(E - cI_3)D^{-\frac{1}{2}} - 4I_3 = \begin{pmatrix} \frac{-7-2\,c+c^2}{3} & \frac{-4\,(-1+c)}{3} & 0 \\ \frac{-4\,(-1+c)}{3} & \frac{-7-2\,c+c^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-11-2\,c+c^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Usando (3.4.2) obtenemos

$$\mathcal{F}_{D,E}(x) = \int \frac{dW_{D,E}}{c-t} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} x_1(c) & x_2(c) & 0 \\ x_2(c) & x_1(c) & 0 \\ 0 & 0 & x_3(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} x_1(c) &= -2+2\,c-\sqrt{-3+(-6+c)\,c}-\sqrt{-11+c\,(2+c)} \\ x_2(c) &= -4-\sqrt{-3+(-6+c)\,c}+\sqrt{-11+c\,(2+c)} \\ x_3(c) &= 2\left(-1+c-\sqrt{-11+(-2+c)\,c}\right) \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} sop(dW_{D,E}) &= \left[\tfrac{-6+\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\tfrac{6+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right]\bigcup\left[\sqrt{3}\,\left(-2+\sqrt{3}\right),\sqrt{3}\,\left(2+\sqrt{3}\right)\right] \\ &\quad \bigcup\left[-\left(\sqrt{3}\,\left(2+\sqrt{3}\right)\right),-\left(\sqrt{3}\,\left(-2+\sqrt{3}\right)\right)\right] \\ &= \left[-\left(\sqrt{3}\,\left(2+\sqrt{3}\right)\right),\left(\sqrt{3}\,\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\right]. \end{aligned}$$

La raíz cuadrada se elige de manera que $\int \frac{dW_{D,E}(t)}{x-t}$ es una función analítica para $z\in\mathbb{R}\backslash\left[-\left(\sqrt{3}\,\left(2+\sqrt{3}\right)\right),\left(\sqrt{3}\,\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\right]$.

Computando los términos del segundo miembro de (2.2.7) y teniendo en cuenta (2.2.22), obtenemos

$$\Lambda(c).\Lambda^*(c)=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} y_1(c) & y_2(c) & 0 \\ y_2(c) & y_1(c) & 0 \\ 0 & 0 & y_3(c) \end{pmatrix} \tag{3.4.4}$$

con

$$\begin{cases} y_1(c) &= -\Big((-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c} \\ &\qquad +2\,(-1+(-2+c)\,c)-(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}\Big) \\ y_2(c) &= -8\,(-1+c)-(-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c} \\ &\qquad +(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)} \\ y_3(c) &= 2\left(-5-2\,c+c^2-(-1+c)\,\sqrt{-11+(-2+c)\,c}\right). \end{cases}$$

Usando la factorización de Cholesky para la matriz definida positiva (3.4.4), obtenemos

$$\Lambda(c) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} z_1(c) & 0 & 0 \\ z_2(c) & z_3(c) & 0 \\ 0 & 0 & z_4(c) \end{pmatrix}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1(c) & = & \sqrt{-\left((-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c}\right) + 2\,(-1+(-2+c)\,c) - (1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}} \\ \\ z_2(c) & = & -\dfrac{\sqrt{3}\left(8\,(-1+c)+(-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c}-(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}\right)}{\sqrt{-3\,(-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c}+6\,(-1+(-2+c)\,c)-3\,(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}}} \\ \\ z_3(c) & = & 12\,\sqrt{\dfrac{1}{(-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c}+2\,(-1+(-2+c)\,c)+(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}}} \\ \\ z_4(c) & = & \sqrt{2}\,\sqrt{-5-2\,c+c^2-(-1+c)\,\sqrt{-11+(-2+c)\,c}}. \end{array} \right.$$

Finalmente, de acuerdo con (3.3.3), los límites de los parámetros matriciales perturbados son

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

y

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} u(c) & w(c) & 0 \\ w(c) & v(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} u(c) &= \dfrac{-1-2\,c+c^2-(-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c}+(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}}{-1+(-2+c)\,c} \\[2em] v(c) &= \dfrac{-1-2\,c+c^2+(-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c}-(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}}{-1+(-2+c)\,c} \\[2em] w(c) &= \dfrac{24\,\sqrt{\frac{1}{(-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c}+2\,(-1+(-2+c)\,c)+(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}}}}{\sqrt{-\left((-3+c)\,\sqrt{-3+(-6+c)\,c}\right)+2\,(-1+(-2+c)\,c)-(1+c)\,\sqrt{-11+c\,(2+c)}}}. \end{cases}$$

Capítulo 4

Asintótica relativa de polinomios ortogonales con respecto a una medida matricial soportada en la circunferencia unidad

4.1 Introducción

La teoría de los polinomios matriciales ortogonales con respecto a una medida matricial soportada en la circunferencia unidad, aparece de manera natural como herramienta para varios problemas en matemática-física [AN84], álgebra lineal [YK78], la teoría de circuitos y sistemas [DGK78], la teoría espectral de los operadores [GLR82] y otros varios.

Como introducción básica a este tema, [AN84, DGK78, Ger81] son, probablemente, unas de las mejores referencias. Para el estudio de la localización de las raíces de los polinomios matriciales ortogonales véase [Rod90]. Muy recientemente, como resultado de la creciente actividad en la teoría analítica de los polinomios matriciales ortogonales en la circunferencia unidad, se ha analizado en [Van98], condiciones suficientes sobre la medida matricial, para que los correspondientes parámetros matriciales de reflexión converjan hacia la matriz cero.

El objetivo de este capítulo es el estudio de la asintótica relativa de dos sucesiones de polinomios matriciales ortonormales con respecto a dos medidas matriciales Ω y $\widetilde{\Omega}$

$$d\widetilde{\Omega}(z) = d\Omega(z) + \mathcal{M}\,\delta(z-w); \quad |w| > 1, \tag{4.1.1}$$

donde $\mathcal{M}$ es una matriz definida positiva de dimensión p, y δ es la medida matricial de Dirac.

A lo largo de este capítulo, asumimos que la medida matricial Ω pertenece a la clase de Szegő, y los coeficientes principales de los polinomios matriciales ortonormales con respecto a Ω satisfacen (1.4.4).

En la sección 4.2 se estudia el comportamiento asintótico del cociente de las sucesiones de polinomios matriciales ortonormales a izquierda y a derecha, con respecto a una medida matricial soportada en la circunferencia unidad. También se darán relaciones entre dichos polinomios y los perturbados con respecto a la medida (4.1.1). Por último, deduciremos la expresión de la asintótica del cociente de los coeficientes principales de ambos polinomios.

La sección 4.3 estará dedicada al estudio del comportamiento asintótico del cociente de la sucesión de polinomios matriciales ortogonales y su perturbación con respecto a la medida (4.1.1) bajo la condición de Szegő. Finalmente, se obtiene la asintótica del producto de ambas sucesiones en el punto que soporta la medida discreta.

4.2 Comparación entre polinomios matriciales ortonormales y asintótica del cociente de los coeficientes principales

Sea Ω una medida matricial de dimensión p soportada en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, y sea $\widetilde{\Omega}$ su perturbación mediante la adición de la medida matricial de Dirac en el punto $w \in \mathbb{C}$. Sean $\{\Phi_n(z;.) = L_n(.)z^n + \cdots\}$ (resp. $\{\Psi_n(z;.) = R_n(.)z^n + \cdots\}$) la sucesión de polinomios matriciales ortonormales a izquierda (resp. a derecha). El propósito de esta sección es analizar la relación entre las dos sucesiones de polinomios matriciales ortonormales asociadas a las medidas matriciales $\widetilde{\Omega}$ y Ω, y estudiar el comportamiento asintótico del cociente de los coeficientes principales de ambas sucesiones.

Teorema 4.1 .- *Sea Ω una medida matricial soportada en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, y sean $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$, $\{\Psi_n(z;\Omega)\}$ las correspondientes sucesiones de polinomios matriciales ortonormales, respectivamente a izquierda y a derecha. Si se cumple la condición de Szegő*

$$\log \det W \in L^1(\mathbb{T}) \tag{4.2.1}$$

donde $W = \frac{d\Omega}{d\theta}$ *c.p.d., entonces para* $\mid w \mid > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = 0 \tag{4.2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(w;\Omega)^{-1}\,\widehat{\Phi}_n(w;\Omega) = 0. \tag{4.2.3}$$

Demostración.-

A partir de (1.4.15) tenemos

$$w^n\Psi_n(\frac{1}{\bar{w}};\Omega)^* = \mathrm{H}_n^*\,\Phi_n(w;\Omega) + (I_p - \mathrm{H}_n^*\mathrm{H}_n)^{\frac{1}{2}}\,w^{n-1}\Psi_{n-1}(\frac{1}{\bar{w}};\Omega)^*$$

y, por lo tanto,

$$\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = \mathrm{H}_n^* + (I_p - \mathrm{H}_n^*\mathrm{H}_n)^{\frac{1}{2}}\,\widehat{\Psi}_{n-1}(w;\Omega)\Phi_{n-1}(w;\Omega)^{-1}\;\Phi_{n-1}(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1}. \tag{4.2.4}$$

Pero a partir de (1.4.9)

$$\Phi_{n-1}(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = \frac{1}{w}M_{n-1}\;A_{n-1}(\frac{1}{\bar{w}})^*\;A_n(\frac{1}{\bar{w}})^{-*}M_n^{-1}, \tag{4.2.5}$$

y usando el teorema 1.15 en la relación (1.4.9) bajo la condición (1.4.4), se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{n-1}(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = \frac{1}{w}I_p, \quad |w| > 1.$$

Sea ϵ_1 un número real no-negativo ($\epsilon_1 + \frac{1}{|w|} \overset{\mathrm{def}}{=} \rho < 1$), entonces existe un número entero positivo N_1 tal que para todo $n \geq N_1$,

$$\begin{aligned}\Big| \|\,\Phi_{n-1}(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1}\,\|_2 - \|\,\tfrac{1}{w}I_p\,\|_2 \Big| \;&\leq\; \|\,\Phi_{n-1}(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1} - \tfrac{1}{w}I_p\,\|_2 \\ &<\; \epsilon_1,\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

donde $\| \, . \, \|_2$ es la norma espectral (ver [HJ91, página 295]).

A partir de (1.4.16b) tenemos $0 \leq \mathrm{H}_n \mathrm{H}_n^* < I_p$, y entonces

$$\| \, (I_p - \mathrm{H}_n^* \mathrm{H}_n)^{\frac{1}{2}} \, \|_2 \leq 1 \tag{4.2.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usando (4.2.4), (4.2.6) y (4.2.7) obtenemos que existe $N_2 \geq N_1$, tal que para todo $n \geq N_2$,

$$\begin{aligned} \| \, \widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\, \Phi_n(w;\Omega)^{-1} \, \|_2 \quad &\leq \quad \| \, \mathrm{H}_n \, \|_2 + \\ &\left(\epsilon_1 + \tfrac{1}{|w|}\right) \| \, \widehat{\Psi}_{n-1}(w;\Omega)\, \Phi_{n-1}(w;\Omega)^{-1} \, \|_2 \, . \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Observemos que la sucesión $\left\{\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\, \Phi_n(w;\Omega)^{-1}\right\}$ verifica la siguiente desigualdad: Para todo n y k tal que $n-k \geq N_2$,

$$\begin{aligned} &\| \, \widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\, \Phi_n(w;\Omega)^{-1} \, \|_2 \leq \\ &\qquad \sum_{i=n-k+1}^{n} \rho^{n-i} \; \| \, \mathrm{H}_i \, \|_2 + \rho^k \, \| \, \widehat{\Psi}_{n-k}(w;\Omega)\, \Phi_{n-k}(w;\Omega)^{-1} \, \|_2 \, . \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

En efecto, si $k=1$,

$$\| \, \widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\, \Phi_n(w;\Omega)^{-1} \, \|_2 \leq \| \, \mathrm{H}_n \, \|_2 + \rho \, \| \, \widehat{\Psi}_{n-1}(w;\Omega)\, \Phi_{n-1}(w;\Omega)^{-1} \, \|_2, \tag{4.2.10}$$

que se sigue de (4.2.8).

Supongamos que (4.2.9) es cierto para $k \in \mathbb{N}$ $\;(n-k \geq N_2)$. Entonces a partir de

(4.2.9) y sustituyendo n por $n-k$ en (4.2.8), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\| \widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1} \|_2 \\
&\qquad \leq \sum_{i=n-k+1}^{n} \rho^{n-i} \; \| \mathrm{H}_i \|_2 \\
&\qquad\qquad +\rho^k \Big(\| \mathrm{H}_{n-k} \|_2 + \rho \, \| \widehat{\Psi}_{n-k-1}(w;\Omega)\,\Phi_{n-k-1}(w;\Omega)^{-1} \|_2 \Big) \\
&\qquad = \sum_{i=n-k}^{n} \rho^{n-i} \; \| \mathrm{H}_i \|_2 + \\
&\qquad\qquad \rho^{k+1} \, \| \widehat{\Psi}_{n-(k+1)}(w;\Omega)\,\Phi_{n-(k+1)}(w;\Omega)^{-1} \|_2 \,.
\end{aligned}$$

Así, por inducción deducimos (4.2.9).

Ahora suponemos que la sucesión matricial $\{\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1}\}$ no converge hacia 0. Entonces dado un número real positivo ϵ_2, existe un número entero positivo N_4 tal que para todo $m > N_4$

$$\epsilon_2 \leq \| \widehat{\Psi}_m(w;\Omega)\,\Phi_m(w;\Omega)^{-1} \|_2 \,. \tag{4.2.11}$$

Usando (4.2.11), podemos construir una subsucesión $\{\widehat{\Psi}_{\varphi(n)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n)}(w;\Omega)^{-1}\}$ de $\{\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1}\}$ que satisface

$$0 < \epsilon_2 \leq \| \widehat{\Psi}_{\varphi(n)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n)}(w;\Omega)^{-1} \|_2; \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.12}$$

En efecto, si hemos construído $\widehat{\Psi}_{\varphi(k)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(k)}(w;\Omega)^{-1}$ para $k = 1, 2, \cdots, n$, entonces para $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, y a partir de (4.2.11), existe un número entero positivo $\varphi(n+1) =: m > \varphi(n)$ tal que

$$\epsilon_2 \leq \| \widehat{\Psi}_{\varphi(n+1)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n+1)}(w;\Omega)^{-1} \|_2 \,.$$

Así, por recurrencia obtenemos $\{\widehat{\Psi}_{\varphi(n)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n)}(w;\Omega)^{-1}\}$ satisfaciendo (4.2.12).

Puesto que $\varphi(n)$ es una sucesión de números enteros positivos estrictamente creciente, entonces para $n \in \mathbb{N}$, existe $k > 0$ dependiente de n, tal que $\varphi(n) = \varphi(n-1) + k$. Sustituyendo n por $\varphi(n)$ en (4.2.9), se obtiene

$$\begin{aligned} \| \widehat{\Psi}_{\varphi(n)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n)}(w;\Omega)^{-1} \|_2 \leq \\ \sum_{i=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} \rho^{\varphi(n)-i} \, \| \mathrm{H}_i \|_2 + \\ \rho^{\varphi(n)-\varphi(n-1)} \, \| \widehat{\Psi}_{\varphi(n-1)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n-1)}(w;\Omega)^{-1} \|_2 \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

para todo $n > N_2$.

A partir de (4.2.1) y (1.4.33), tenemos $\lim_{n\to\infty} \| \mathrm{H}_n \|_2 = 0$. Entonces para todo $\epsilon > 0$, y para n suficiente grande,

$$\| \mathrm{H}_n \|_2 \leq \epsilon,$$

de manera que

$$0 \leq \sum_{i=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} \rho^{\varphi(n)-i} \, \| \mathrm{H}_i \|_2 \leq \epsilon \sum_{i=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} \rho^{\varphi(n)-i} \leq \epsilon \, \frac{1}{1-\rho}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} \rho^{\varphi(n)-i} \, \| \mathrm{H}_i \|_2 = 0. \tag{4.2.14}$$

Así, a partir de (4.2.13), tenemos que $\exists N_2 \geq N_1, \ \forall n > N_2$,

$$\frac{\|\widehat{\Psi}_{\varphi(n)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n)}(w;\Omega)^{-1}\|_2}{\|\widehat{\Psi}_{\varphi(n-1)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n-1)}(w;\Omega)^{-1}\|_2} \leq \frac{\sum_{i=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} \rho^{\varphi(n)-i} \|\mathrm{H}_i\|_2}{\|\widehat{\Psi}_{\varphi(n-1)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n-1)}(w;\Omega)^{-1}\|_2} + \rho^{\varphi(n)-\varphi(n-1)}.$$

Usando (4.2.14) y teniendo en cuenta (4.2.12), deducimos que $\exists N_3 \geq N_2, \ \exists \kappa < 1$, tales que $\forall n \geq N_3$,

$$\| \widehat{\Psi}_{\varphi(n)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n)}(w;\Omega)^{-1} \|_2 \leq \kappa \, \| \widehat{\Psi}_{\varphi(n-1)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n-1)}(w;\Omega)^{-1} \|_2,$$

es decir,

$$\| \widehat{\Psi}_{\varphi(n)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n)}(w;\Omega)^{-1} \|_2 \leq \kappa^{n-N_3} \| \widehat{\Psi}_{\varphi(N_3)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(N_3)}(w;\Omega)^{-1} \|_2,$$

y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\Psi}_{\varphi(n)}(w;\Omega)\,\Phi_{\varphi(n)}(w;\Omega)^{-1} = 0$$

que contradice (4.2.12). Por tanto, se sigue que (4.2.2) es cierto.

Para probar (4.2.3), usamos (1.4.14). Entonces tenemos

$$\widehat{\Phi}_n(w;\Omega) = \Psi_n(w;\Omega)\,\mathrm{H}_n^* + \widehat{\Phi}_{n-1}(w;\Omega)\;(I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^*)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Así pues,

$$\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\,\widehat{\Phi}_n(w;\Omega) =$$

$$\mathrm{H}_n^* + \left(\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\Psi_{n-1}(w;\Omega)\right)\;\Psi_{n-1}(w;\Omega)^{-1}\widehat{\Phi}_{n-1}(w;\Omega)\;(I_p - \mathrm{H}_n\mathrm{H}_n^*)^{\frac{1}{2}}\,.$$

A partir de (1.4.10) y del teorema 1.15,

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(w;\Omega)^{-1}\Psi_{n-1}(w;\Omega) \;=\; \tfrac{1}{w} I_p,\;\; |w|>1.$$

Entonces utilizando un razonamiento similar al anterior, obtenemos (4.2.3).

■

Lema 4.2 .- *Sean $\widetilde{\Omega}$ y Ω dos medidas matriciales relacionadas por (4.1.1). Entonces*

1. $\Phi_n(z;\widetilde{\Omega}) = [L_n(\widetilde{\Omega})]^{-*} L_n(\Omega)^*$

$$\times \left\{ \Phi_n(z;\Omega) - \Phi_n(w;\Omega)\,[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)]^{-1}\,\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(z,w;\Omega)^* \right\}$$

2. $\Psi_n(z;\widetilde{\Omega}) = \left\{\Psi_n(z;\Omega) - \mathcal{H}_{n+1}(z,w;\Omega)^*\mathcal{M}\left[I_p + \mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\mathcal{M}\right]^{-1}\Psi_n(w;\Omega)\right\}$
$$\times\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)^{-*}.$$

Demostración.-

Usando (1.4.26) y (1.4.27), tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_n(z;\widetilde{\Omega}) &= <\Phi_n(\xi;\widetilde{\Omega}), \mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega)>_L \\
&= \int_{\mathbb{T}} \Phi_n(\xi;\widetilde{\Omega})d\Omega(\xi)\mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega)^* \\
&= \int_{\mathbb{T}\bigcup\{w\}} \Phi_n(\xi;\widetilde{\Omega})d\widetilde{\Omega}(\xi)\mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega)^* \\
&\quad - \int_{\{w\}} \Phi_n(\xi;\widetilde{\Omega})\mathcal{M}\,\mathcal{K}_{n+1}(z,\xi;\Omega)^*\delta(\xi-w) \\
&= \int_{\mathbb{T}\bigcup\{w\}} \Phi_n(\xi;\widetilde{\Omega})d\widetilde{\Omega}(\xi)\Phi_n(\xi;\Omega)^*\,\Phi_n(z;\Omega) \\
&\quad - \Phi_n(w;\widetilde{\Omega})\mathcal{M}\,\mathcal{K}_{n+1}(z,w;\Omega)^* \\
&= [L_n(\widetilde{\Omega})]^{-*}L_n(\Omega)^*\Phi_n(z;\Omega) - \Phi_n(w;\widetilde{\Omega})\mathcal{M}\,\mathcal{K}_{n+1}(z,w;\Omega)^* \qquad (4.2.15)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Psi_n(z;\widetilde{\Omega}) &= <\mathcal{H}_{n+1}(z,\xi;\Omega), \Psi_n(\xi;\widetilde{\Omega})>_R \\
&= \Psi_n(z;\Omega)\int_{\mathbb{T}\bigcup\{w\}} \Psi_n(\xi;\Omega)^*d\widetilde{\Omega}(\xi)\Psi_n(\xi;\widetilde{\Omega}) \\
&\quad - \mathcal{H}_{n+1}(z,w;\Omega)^*\mathcal{M}\Psi_n(w;\widetilde{\Omega}) \\
&= \Psi_n(z;\Omega)R_n(\Omega)^*\left[R_n(\widetilde{\Omega})\right]^{-*} - \mathcal{H}_{n+1}(z,w;\Omega)^*\mathcal{M}\Psi_n(w;\widetilde{\Omega}). \qquad (4.2.16)
\end{aligned}$$

Si $z = w$ entonces

$$\Phi_n(w;\widetilde{\Omega})\left[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right] = [L_n(\widetilde{\Omega})]^{-*}L_n(\Omega)^*\Phi_n(w;\Omega),$$

$$\left[I_p + \mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\mathcal{M}\right]\Psi_n(w;\widetilde{\Omega}) = \Psi_n(w;\Omega)R_n(\Omega)^*\left[R_n(\widetilde{\Omega})\right]^{-*}.$$

Puesto que $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)$ y $\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)$ son matrices definidas positivas, entonces

$$I_p+\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)=\mathcal{M}\left(\mathcal{M}^{-1}+\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right),$$

$$I_p+\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\mathcal{M}=\left(\mathcal{M}^{-1}+\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\right)\mathcal{M}$$

son no-singulares, al ser productos de dos matrices definidas positivas. Por tanto,

$$\Phi_n(w;\widetilde{\Omega})=[L_n(\widetilde{\Omega})]^{-*}L_n(\Omega)^*\Phi_n(w;\Omega)\left[I_p+\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right]^{-1} \tag{4.2.17}$$

$$\Psi_n(w;\widetilde{\Omega})=\left[I_p+\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\mathcal{M}\right]^{-1}\Psi_n(w;\Omega)R_n(\Omega)^*\,[R_n(\widetilde{\Omega})]^{-*}. \tag{4.2.18}$$

Finalmente, usando (4.2.15), (4.2.16), (4.2.17) y (4.2.18) obtenemos los apartados 1 y 2 del lema 4.2.

∎

Proposición 4.3 .- *Sean $\widetilde{\Omega}$ y Ω dos medidas matriciales relacionadas por (4.1.1) donde $|w|>1$, entonces*

1. $\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^*\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)=I_p-$
$$[\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{M}^{-1}\Phi_n(w;\Omega)^{-1}+\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1}]^{-1}$$

2. $\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)^*=I_p-$
$$[\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\mathcal{M}^{-1}\Psi_n(w;\Omega)^{-*}+\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\Psi_n(w;\Omega)^{-*}]^{-1}.$$

Demostración.-

Usando el lema 4.2,

$$\int_{\mathbb{T}}\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})d\Omega(z)\Phi_n(z;\Omega)^*=[L_n(\widetilde{\Omega})]^{-*}L_n(\Omega)^*$$
$$\left\{I_p-\Phi_n(w;\Omega)\left[I_p+\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right]^{-1}\mathcal{M}\int_{\mathbb{T}}\mathcal{K}_{n+1}(z,w;\Omega)^*d\Omega(z)\Phi_n(z;\Omega)^*\right\}$$

y

$$\int_{\mathbb{T}} \Psi_n(z;\Omega)^* d\Omega(z) \Psi_n(z;\widetilde{\Omega}) =$$
$$\left\{ I_p - \int_{\mathbb{T}} \Psi_n(z;\Omega)^* d\Omega(z) \mathcal{H}_{n+1}(z,w;\Omega)^* \mathcal{M} \left[I_p + \mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\mathcal{M}\right]^{-1} \Psi_n(w;\Omega) \right\}$$
$$R_n(\Omega)^*[R_n(\widetilde{\Omega})]^{-*}.$$

Usando (1.4.26) y (1.4.27) tenemos

$$\left(L_n(\widetilde{\Omega}) L_n(\Omega)^{-1} \right) = \left(L_n(\widetilde{\Omega}) L_n(\Omega)^{-1} \right)^{-*}$$
$$\left\{ I_p - \Phi_n(w;\Omega) \left[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega) \right]^{-1} \mathcal{M} \Phi_n(w;\Omega)^* \right\}$$

y

$$\left(R_n(\Omega)^{-1} R_n(\widetilde{\Omega}) \right) = \left\{ I_p - \Psi_n(w;\Omega)^* \mathcal{M} \left[I_p + \mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\mathcal{M} \right]^{-1} \Psi_n(w;\Omega) \right\}$$
$$\left(R_n(\Omega)^{-1} R_n(\widetilde{\Omega}) \right)^{-*}.$$

Entonces

$$\left(L_n(\widetilde{\Omega}) L_n(\Omega)^{-1} \right)^* \left(L_n(\widetilde{\Omega}) L_n(\Omega)^{-1} \right) =$$
$$I_p - \Phi_n(w;\Omega) \left[\Phi_n(w;\Omega)^{-*} \mathcal{M}^{-1} + \Phi_n(w;\Omega)^{-*} \mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega) \right]^{-1}$$

y

$$\left(R_n(\Omega)^{-1} R_n(\widetilde{\Omega}) \right) \left(R_n(\Omega)^{-1} R_n(\widetilde{\Omega}) \right)^* =$$
$$I_p - \Psi_n(w;\Omega)^{*,} \left[\Psi_n(w;\Omega)^{-1} \mathcal{M}^{-1} + \Psi_n(w;\Omega)^{-1} \mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega) \right]^{-1},$$

y, en consecuencia, se siguen las afirmaciones 1 y 2.

■

Observación 4.6 .- *Sean* $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$ *y* $\{\Psi_n(z;\Omega)\}$ *los polinomios matriciales ortonormales respectivamente, a izquierda y a derecha con respecto a* Ω*. Entonces existen* $\left\{\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\right\}$ *y* $\left\{\Psi_n(z;\widetilde{\Omega})\right\}$ *tales que* $\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^*$ *y* $\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)$ *son matrices triangulares inferiores cuyos elementos diagonales son reales positivos.*

En efecto, suponemos que $\left\{L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right\}$ $\left(\text{resp. } \left\{\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)^*\right\}\right)$ no son matrices triangulares inferiores cuyos elementos diagonales son reales y positivos. Recordamos que los correspondientes polinomios matriciales ortonormales a izquierda (resp. a derecha) con respecto a las medidas matriciales Ω y $\widetilde{\Omega}$ tienen la forma

$$\{U_n\Phi_n(z;\Omega)\} \text{ y } \left\{V_n\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\right\} \qquad \left(\text{resp. } \{\Psi_n(z;\Omega)Y_n\} \text{ y } \left\{\Psi_n(z;\widetilde{\Omega})Z_n\right\}\right)$$

(U_n, V_n, Y_n y Z_n son matrices unitarias). Entonces los coeficientes principales están relacionados por

$$\begin{cases} H_n(\Omega) = U_nL_n(\Omega) \\ H_n(\widetilde{\Omega}) = V_nL_n(\widetilde{\Omega}) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} X_n(\Omega) = R_n(\Omega)Y_n \\ X_n(\widetilde{\Omega}) = R_n(\widetilde{\Omega})Z_n. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left(H_n(\widetilde{\Omega})H_n(\Omega)^{-1}\right)^* &= U_n\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^*V_n^* \\ \left(X_n(\Omega)^{-1}X_n(\widetilde{\Omega})\right) &= Y_n^*\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)Z_n. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Tomando $U_n = Y_n = I_p$, entonces se satisface la condición exigida en (1.4.4). Ahora consideramos las sucesiones de polinomios matriciales ortonormales $\left\{T_n\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\right\}$ y $\left\{\Psi_n(z;\widetilde{\Omega})\,Q_n^*\right\}$ donde $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son matrices unitarias dadas por la factorización QR de Francis y Kublanovskaja [LT85, página 111] de $\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^*$ y

$\Big(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\Big)$,

$$\begin{cases} \Big(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\Big)^* = R_n\ T_n \\ \\ \Big(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\Big) = S_n\ Q_n, \end{cases} \tag{4.2.20}$$

donde $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son matrices triangulares inferiores cuyos elementos diagonales son reales positivos. En efecto, sean $\Big(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\Big)$ y $\Big(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\Big)^*$ representadas a partir de la factorización QR por

$$\Big(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\Big) = \widetilde{V_n}\ \widetilde{R_n}\ \text{ y }\ \Big(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\Big)^* = \widetilde{Q_n}\widetilde{S_n},$$

donde $\widetilde{V_n}$, $\widetilde{Q_n}$, y $\widetilde{R_n}$, $\widetilde{S_n}$ son, respectivamente, matrices unitarias y matrices triangulares superiores no-singulares. Entonces tomando

$$\begin{cases} R_n = \widetilde{R_n}^*\ J_n \\ \\ T_n = J_n^*\widetilde{V_n}^* \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} S_n = \widetilde{S_n}^*\ \dot{J}_n \\ \\ Q_n = \dot{J}_n^*\widetilde{Q_n}^* \end{cases}$$

donde

$$[J_n]_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{[\widetilde{R_n}]_{i,i}}{\big|[\widetilde{R_n}]_{i,i}\big|} & \text{si } i = j \\ \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

y,

$$[\dot{J}_n]_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{[\widetilde{S_n}]_{i,i}}{\big|[\widetilde{S_n}]_{i,i}\big|} & \text{si } i = j \\ \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

las diagonales principales de R_n y S_n, son, respectivamente,

$$\operatorname{diag}[R_n] = \Big[|[\widetilde{R_n}]_{1,1}|, |[\widetilde{R_n}]_{2,2}|, \cdots, |[\widetilde{R_n}]_{p,p}|\Big]$$

$$\operatorname{diag}[S_n] = \Big[|[\widetilde{S_n}]_{1,1}|, |[\widetilde{S_n}]_{2,2}|, \cdots, |[\widetilde{S_n}]_{p,p}|\Big],$$

y, por lo tanto, deducimos (4.2.20).

Finalmente, usando (4.2.19) y (4.2.20), tenemos

$$\begin{aligned}\left(H_n(\widetilde{\Omega})H_n(\Omega)^{-1}\right)^* &= \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^* T_n^* &= R_n\\ \left(X_n(\Omega)^{-1}X_n(\widetilde{\Omega})\right) &= \left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right) Q_n^* &= S_n.\end{aligned}$$

Así, $\left\{\left(H_n(\widetilde{\Omega})H_n(\Omega)^{-1}\right)^*\right\}$ y $\left\{X_n(\Omega)^{-1}X_n(\widetilde{\Omega})\right\}$ son matrices triangulares inferiores cuyos elementos diagonales son reales positivos.

Ahora, estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.4 .- *Sean* $\{\Phi_n(z;\Omega) = L_n(\Omega)z^n + \cdots\}$ *y* $\{\Psi_n(z;\Omega) = R_n(\Omega)z^n + \cdots\}$ *los polinomios matriciales ortonormales respectivamente, a izquierda y a derecha con respecto a* Ω*. Si se cumple la condición de Szegő*

$$\log\, \det W \in L^1(\mathbb{T}), \tag{4.2.21}$$

entonces existen $\{\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\}$ *y* $\{\Psi_n(z;\widetilde{\Omega})\}$ *tales que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right) = \frac{1}{|w|}I_p \tag{4.2.22}$$

cuando $|w| > 1$.

Para probar (4.2.22), necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.5 .- *Bajo las hipótesis (4.2.21), si* $\mid w \mid> 1$*, se tiene*

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(w;\Omega)^{-*} = \lim_{n\to\infty}\Psi_n(w;\Omega)^{-*} = 0.$$

Demostración.-

A partir de (1.4.9) y (1.4.10)

$$\begin{aligned}
\Phi_n(\tfrac{1}{\bar{w}};\Omega)^{-*} &= M_n^{-*}A_n(w)^{-1}\,w^n, \text{ con } M_n^*M_n = A_n(0)^{-1}\\
\Psi_n(\tfrac{1}{\bar{w}};\Omega)^{-*} &= B_n(w)^{-1}N_n^{-*}\,w^n, \text{ con } N_nN_n^* = B_n(0)^{-1},
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
\| M_n^{-*} \|_2^2 &= \mu_{(M_n^{-1}M_n^{-*})} = \mu_{(A_n(0))}\\
\| N_n^{-*} \|_2^2 &= \mu_{(N_n^{-1}N_n^{-*})} = \mu_{(N_n^{-*}N_n^{-1})} = \mu_{(B_n(0))}
\end{aligned}$$

donde $\| \,.\, \|_2$ es la norma espectral y $\mu_{(.)}$ es el radio espectral, entonces a partir de los teoremas 1.16, 1.17, y 1.15, tenemos

$$\| M_n^{-*} \|_2^2 < \infty \quad \| N_n^{-*} \|_2^2 < \infty,$$

$$\| A_n(w)^{-1} \|_2^2 < \infty \text{ y } \| B_n(w)^{-1} \|_2^2 < \infty; \text{ para } |w| < 1.$$

Así

$$\begin{aligned}
\| \Phi_n(\tfrac{1}{\bar{w}};\Omega)^{-*} \|_2 &\leq \| M_n^{-*} \|_2 \,.\, \| A_n(w)^{-1} \|_2 \,.|w|^n, \qquad |w| < 1\\
\| \Psi_n(\tfrac{1}{\bar{w}};\Omega)^{-*} \|_2 &\leq \| N_n^{-*} \|_2 \,.\, \| B_n(w)^{-1} \|_2 \,.|w|^n, \qquad |w| < 1
\end{aligned}$$

y de aquí se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(w;\Omega)^{-*} = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(w;\Omega)^{-*} = 0, \text{ para } |w| > 1.$$

■

Demostración del teorema 4.4.-

A partir de (1.4.28) y (1.4.25) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega) &= \frac{1}{|w|^2-1}\left\{|w|^2\Phi_n(w;\Omega)^*\Phi_n(w;\Omega) - \widehat{\Psi}_n(w;\Omega)^*\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\right\}\\
\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega) &= \frac{1}{|w|^2-1}\left\{|w|^2\Psi_n(w;\Omega)\Psi_n(w;\Omega)^* - \widehat{\Phi}_n(w;\Omega)\widehat{\Phi}_n(w;\Omega)^*\right\}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}&\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = \\ &\qquad \tfrac{1}{|w|^2-1}\left\{|w|^2 I_p - \left[\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1}\right]^* \left[\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\,\Phi_n(w;\Omega)^{-1}\right]\right\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\Psi_n(w;\Omega)^{-*} = \\ &\qquad \tfrac{1}{|w|^2-1}\left\{|w|^2 I_p - \left[\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\,\widehat{\Phi}_n(w;\Omega)\right] \left[\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\,\widehat{\Phi}_n(w;\Omega)\right]^*\right\}.\end{aligned}$$

Usando el teorema 4.1, obtenemos

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = \\ &\qquad \lim_{n\to\infty}\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\Psi_n(w;\Omega)^{-*} = \frac{|w|^2}{|w|^2-1}I_p, \qquad (4.2.23)\end{aligned}$$

y usando el lema 4.5, tenemos

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{M}^{-1}\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = \\ &\qquad \lim_{n\to\infty}\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\mathcal{M}^{-1}\Psi_n(w;\Omega)^{-*} = 0. \qquad (4.2.24)\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de (4.2.23), (4.2.24) y la proposición 4.3, obtenemos

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^*\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right) = \\ &\qquad \lim_{n\to\infty}\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)^* = \frac{1}{|w|^2}I_p. \qquad (4.2.25)\end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)^*$ y $\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)^*$ son matrices definidas positivas, entonces usando la proposición 4.3, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(w) &= \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^*\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right) < I_p \\ \mathcal{R}_n(w) &= \left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)^* < I_p.\end{aligned}$$

Sea $\| \,.\, \|_E$ la norma de Frobenius, entonces

$$\begin{aligned} \| L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1} \|_E^2 = tr\, \mathcal{L}_n(w) \leq p\ \mu_{(\mathcal{L}_n(w))} = p\ \ \| L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1} \|_2^2 &< p, \\ \| \left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)^* \|_E^2 = tr\, \mathcal{R}_n(w) &< p. \end{aligned}$$

Sean $(n_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ y $(n_\upsilon)_{\upsilon\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones crecientes de números enteros positivos tal que existen los límites

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \lim_{\nu\to\infty} \left(L_{n_\nu}(\widetilde{\Omega})L_{n_\nu}(\Omega)^{-1}\right)^* \\ \mathcal{B} &= \lim_{\upsilon\to\infty} \left(R_{n_\upsilon}(\Omega)^{-1}R_{n_\upsilon}(\widetilde{\Omega})\right). \end{aligned}$$

Entonces a partir de (4.2.25), tenemos

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{B}^* = \frac{1}{|w|^2} I_p. \tag{4.2.26}$$

Puesto que $\frac{1}{|w|^2}I_p$ es una matriz definida positiva, y $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tienen los elementos diagonales reales positivos, entonces utilizando la factorización de Cholesky, la representación (4.2.26) es única y, $\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^*$ y $\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)$ no admiten subsucesiones convergentes hacia un límite distinto de $\frac{1}{|w|}I_p$. Así se deduce (4.2.22).

$\blacksquare$

Por su interés, destacamos el siguiente resultado.

Corolario 4.6 .- *Sea Ω una medida matricial soportada en $\mathbb{T}$. Suponemos que se cumple la condición de Szegő (4.2.21), entonces para $| w | > 1$*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = \\ &\qquad \lim_{n\to\infty} \Psi_n(w;\Omega)^{-1}\mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\Psi_n(w;\Omega)^{-*} = \tfrac{|w|^2}{|w|^2-1} I_p. \end{aligned}$$

4.3 Asintótica relativa de los polinomios matriciales ortonormales

Teorema 4.7 .- *Sean $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$ y $\{\Psi_n(z;\Omega)\}$ los polinomios matriciales ortonormales respectivamente, a izquierda y a derecha con respecto a Ω. Si se cumple la condición de Szegő*

$$\log\,\det W \in L^1(\mathbb{T}), \tag{4.3.1}$$

entonces existen $\{\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\}$ y $\{\Psi_n(z;\widetilde{\Omega})\}$ tal que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\Phi_n(z;\Omega)^{-1} = \\ \lim_{n\to\infty} \Psi_n(z;\Omega)^{-1}\Psi_n(z;\widetilde{\Omega}) = \tfrac{\bar{w}}{|w|}\left(\tfrac{w-z}{1-z\bar{w}}\right) I_p\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

para $|z| > 1$.

Demostración.-

Multiplicando en la primera parte del lema 4.2 por $\Phi_n(z;\Omega)^{-1}$, obtenemos

$$\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\Phi_n(z;\Omega)^{-1} = \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^{-*}$$
$$\left\{I_p - \Phi_n(w;\Omega)\left[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right]^{-1}\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(z,w;\Omega)^*\Phi_n(z;\Omega)^{-1}\right\}.$$

Pero usando (1.4.24), tenemos

$$\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{K}_{n+1}(z,w;\Omega)^*\Phi_n(z;\Omega)^{-1} =$$
$$\frac{1}{1-z\bar{w}}\left\{\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)^*\,\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)\Phi_n(z;\Omega)^{-1} - z\bar{w}I_p\right\},$$

y a partir de la proposición 4.3,

$$\Phi_n(w;\Omega)\left[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right]^{-1}\mathcal{M}\Phi_n(w;\Omega)^* =$$
$$I_p - \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^*\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right).$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\Phi_n(z;\Omega)^{-1} \\
&\qquad = \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^{-*} \\
&\qquad\qquad \left\{I_p - \left[I_p - \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^{*}\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left.\tfrac{1}{1-z\bar{w}}\left[\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)^{*}\,\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)\Phi_n(z;\Omega)^{-1} - z\bar{w}I_p\right]\right\} \\
&\qquad = \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^{-*} - \\
&\qquad\qquad \tfrac{1}{1-z\bar{w}}\left[\left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^{-*} - \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)\right] \\
&\qquad\qquad \left[\left(\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1}\right)^{*}\left(\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)\Phi_n(z;\Omega)^{-1}\right) - z\bar{w}I_p\right].
\end{aligned}
$$

A partir del teorema 4.1, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)\Phi_n(z;\Omega)^{-1} = 0, \quad \text{para } |z| > 1.$$

A partir del (1.4.24) cuando tomamos $z = \xi \in \mathbb{T}$, obtenemos la identidad

$$\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)^{*}\,\widehat{\Psi}_n(z;\Omega) = \Phi_n(z;\Omega)^{*}\,\Phi_n(z;\Omega).$$

Eso significa que

$$\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)\,\Phi_n(z;\Omega)^{-1} = \left(\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)\,\Phi_n(z;\Omega)^{-1}\right)^{-*} \text{ para } z \in \mathbb{T}.$$

Así, la función matricial $\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)\,\Phi_n(z;\Omega)^{-1}$ es una matriz unitaria cuando z se encuentra en la circunferencia unidad, y por lo tanto $\|\,\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)^{*}\,\Phi_n(z;\Omega)^{-1}\,\|_2 = 1$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1}\right)^{*}\left(\widehat{\Psi}_n(z;\Omega)\Phi_n(z;\Omega)^{-1}\right) = 0$$

para $|w| > 1$ y $|z| \geq 1$.

Por tanto, si $|z| > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\Phi_n(z;\Omega)^{-1} = |w|I_p + \frac{z\bar{w}}{1-z\bar{w}}\left(|w| - \frac{1}{|w|}\right) I_p = \frac{\bar{w}}{|w|}\left(\frac{w-z}{1-z\bar{w}}\right) I_p.$$

Para probar la segunda parte de (4.3.2), teniendo en cuenta

1. $\Psi_n(z;\Omega)^{-1}\mathcal{H}_{n+1}(z,w;\Omega)^*\Psi_n(w;\Omega)^{-*} =$

$$\tfrac{1}{z\bar{w}-1}\left\{z\bar{w}I_p - \left[\Psi_n(z;\Omega)^{-1}\widehat{\Phi}_n(z;\Omega)\right]\left[\Psi_n(w;\Omega)^{-1}\widehat{\Phi}_n(w;\Omega)\right]^*\right\},$$

2. $\Psi_n(w;\Omega)^*\mathcal{M}\left[I_p + \mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)^*\mathcal{M}\right]^{-1}\Psi_n(w;\Omega) =$

$$I_p - \left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)\left(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega})\right)^*,$$

3. $\Psi_n(z;\Omega)^{-1}\Psi_n(z;\widetilde{\Omega}) = \{I_p-$

$$\Psi_n(z;\Omega)^{-1}\mathcal{H}_{n+1}(z,w;\Omega)^*\mathcal{M}\left[I_p + \mathcal{H}_{n+1}(w,w;\Omega)\mathcal{M}\right]^{-1}\Psi_n(w;\Omega)\Big\}$$

$$\times(R_n(\Omega)^{-1}R_n(\widetilde{\Omega}))^{-*}.$$

Entonces usando (4.2.3), (4.2.22) y el hecho de que $\left\{\Psi_n(z;\Omega)^{-1}\widehat{\Phi}_n(z;\Omega)\right\}$ son matrices unitarias cuando $z\in\mathbb{T}$, obtenemos la segunda parte de (4.3.2).

Teorema 4.8 .- *Sean* $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$ *y* $\{\Psi_n(z;\Omega)\}$ *los polinomios matriciales ortonormales respectivamente, a izquierda y a derecha con respecto a* Ω*. Sea* $\widetilde{\Omega}$ *una medida matricial definida por*

$$\widetilde{\Omega}(z) = \Omega(z) + \mathcal{M}\delta(z-w);\;\; |w|>1 \;\text{ y }\; \mathcal{M} = I_p.$$

Asumimos que se cumple la condición de Szegő (4.3.1), entonces existen $\{\Phi_n(z;\widetilde{\Omega})\}$ *y* $\{\Psi_n(z;\widetilde{\Omega})\}$ *tal que*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Phi_n(w;\widetilde{\Omega})\,\Phi_n(w;\Omega)^* &=\\ \lim_{n\to\infty}\Psi_n(w;\Omega)^*\Psi_n(w;\widetilde{\Omega}) &= \tfrac{|w|^2-1}{|w|}I_p.\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Demostración.-

Si multiplicamos en la primera fórmula del lema 4.2 por $\Phi_n(z;\Omega)^*$, y evaluando la expresión resultante en $z = w$, entonces

$$\Phi_n(w;\widetilde{\Omega})\ \Phi_n(w;\Omega)^* = \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^{-*} \{\Phi_n(w;\Omega)\ \Phi_n(w;\Omega)^* -$$

$$\Phi_n(w;\Omega)\left[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right]^{-1}\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^*\big\}\,.$$

Puesto que

$$\Phi_n(w;\Omega)\ \Phi_n(w;\Omega)^*$$

$$= \Phi_n(w;\Omega)\left[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right]^{-1}\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^*$$

$$+\,\Phi_n(w;\Omega)\left[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right]^{-1}\Phi_n(w;\Omega)^*$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_n(w;\widetilde{\Omega})\ \Phi_n(w;\Omega)^* &= \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^{-*} \\
&\quad \Phi_n(w;\Omega)\left[I_p + \mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\right]^{-1}\Phi_n(w;\Omega)^* \\
&= \left(L_n(\widetilde{\Omega})L_n(\Omega)^{-1}\right)^{-*} \\
&\quad \{\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\Phi_n(w;\Omega)^{-1} + \\
&\quad\quad \Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1}\}^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Dado que $\mathcal{M} = I_p$, usando (1.4.24) obtenemos

$$\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1} =$$

$$\frac{1}{1-|w|^2}\left\{\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)^*\,\widehat{\Psi}_n(w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1} - |w|^2 I_p\right\}.$$

Del lema 4.5 y el teorema 4.1, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(w;\Omega)^{-*}\mathcal{M}\mathcal{K}_{n+1}(w,w;\Omega)\Phi_n(w;\Omega)^{-1} = \tfrac{|w|^2}{|w|^2-1}I_p.$$

Entonces usando el teorema 4.2.17, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(w;\widetilde{\Omega})\, \Phi_n(w;\Omega)^* = |w| \left\{ \frac{|w|^2}{|w|^2-1} I_p \right\}^{-1} = \frac{|w|^2-1}{|w|} I_p.$$

Finalmente, de forma similar, se puede probar la segunda parte de (4.3.3).

■

Capítulo 5

Conexión entre parámetros matriciales de la relación de recurrencia en un intervalo real finito y la circunferencia unidad

5.1 Introducción

Los polinomios matriciales ortogonales en la recta real o en la circunferencia unidad satisfacen propiedades que son una extensión natural, con una modificación apropiada en el cálculo matricial, de las satisfechas por los polinomios ortogonales escalares.

En [SV96] ha sido descrita la teoría espectral de las matrices de Jacobi doblemente infinitas usando polinomios matriciales ortonormales de tamaño 2×2, ortogonales en la recta real. Además, se ha efectuado el estudio analítico de los polinomios escalares de tipo Sobolev que satisfacen relaciones de recurrencia de orden superior, usando polinomios matriciales ortogonales en la recta real (veáse [DV95]).

Los polinomios matriciales ortogonales en la circunferencia unidad están relacionados con las matrices de Hessenberg por bloques y son de gran utilidad para el análisis de las series temporales multivariables, y para el tratamiento de las señales multicanales. En efecto, el diseño de los filtros digitales autoregresivos (AR) para el modelo vectorial discreto se procesa a partir de una matriz espectral Ω, y eso es equivalente a la determinación de los polinomios matriciales ortogonales en la circunferencia unidad con respecto a Ω. De hecho, dicho polinomio matricial ortogonal es un polinomio extremal en el conjunto de los polinomios matriciales mónicos con respecto a la norma de $L^2(\Omega)$ (veáse [Mig95, DGK78]).

En este capitulo, se deduce una conexión entre polinomios matriciales ortogonales con respecto a una medida matricial soportada en $[-1, 1]$ y polinomios matriciales ortogonales con respecto a una medida matricial soportada en la circunferencia unidad. En primer lugar, se obtiene una expresión explícita de los parámetros matriciales de la relación de recurrencia (1.3.4) en términos de los parámetros matriciales de reflexión (1.4.19). En particular, se analiza el caso en el que los parámetros matriciales de reflexión constituyen una sucesión constante. Este ejemplo induce una interesante familia de polinomios matriciales ortogonales analizada en [Dur99, YMPb].

En segundo lugar, partiendo de un sucesión de polinomios matriciales ortogonales con respecto a una medida matricial soportada en $[-1, 1]$, se deducen los párametros matriciales de reflexión de la sucesión de polinomios matriciales ortogonales con respecto a una medida matricial inducida soportada en la circunferencia unidad (veáse [AN84]).

Por último, se deducen algunos resultados sobre la asintótica de los polinomios ortogonales matriciales con respecto a una medida matricial con una parte singular, y cuyo parte absolutamente continua pertenece a la clase de Erdös.

Este capitulo está estructurado como sigue. En la sección 2 se presentan los resultados principales cuyas demostraciones se presentarán en la sección 3.

5.2 Resultados principales

Sea α una medida matricial soportada en $[-1,1]$, de dimensión p y definida a partir de la función matricial $\alpha(\lambda)$. Podemos asociarle una medida matricial $\Omega(\theta)$ soportada en la circunferencia unidad dada por

$$\Omega(\theta) = \begin{cases} -\alpha(\cos\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \alpha(\cos\theta), & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Puesto que la medida matricial $\Omega(\theta)$ en (5.2.1) es simétrica, entonces los coeficientes matriciales (1.4.3) están relacionados mediante

$$\lambda_{n,k} = \mu^*_{n,k}, \quad k = 0, \cdots, n, \quad (\lambda_{n,n} = L_n(\Omega),\ \mu_{n,k} = R_n(\Omega)). \tag{5.2.2}$$

En efecto, escribimos (1.4.1) de la siguiente forma

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(e^{i\theta};\Omega)d\Omega(\theta)\sum_{j=0}^{k}\lambda^*_{k,j}e^{-ij\,\theta} = \delta_{n,k}I_p,$$

y efectuando el cambio de variable $\theta \to 2\pi - \theta$ tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(e^{-i\theta};\Omega)d\Omega(2\pi-\theta)\sum_{j=0}^{k}\lambda^*_{k,j}e^{ij\,\theta} = \delta_{n,k}I_p,$$

de manera que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{l=0}^{n}\lambda_{n,l}e^{-il\,\theta}d\Omega(\theta)\sum_{j=0}^{k}\lambda_{k,j}^{*}e^{ij\,\theta}=\delta_{n,k}I_p,$$

es decir,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{l=0}^{n}\lambda_{n,l}^{*}e^{il\,\theta})^{*}d\Omega(\theta)(\sum_{j=0}^{k}\lambda_{k,j}^{*}e^{ij\,\theta})=\delta_{n,k}I_p.$$

Eso significa que la familia de los polinomios matriciales $\{\Lambda_n(z)\}$ tal que $\Lambda_n(z) = \sum_{j=0}^{n}\lambda_{n,j}^{*}z^j$, satisface (1.4.2). Puesto que $\lambda_{n,n}^{*}$ es una matriz definida positiva, y teniendo en cuenta que los polinomios matriciales ortonormales están definidos de manera unívoca cuando los coeficientes principales son matrices definidas positivas, entonces $\Lambda_n(z) = \Psi_n(z;\Omega)$, ó, equivalentemente, $\lambda_{n,j}^{*} = \mu_{n,j}, \quad j = 0, 1, \cdots, n.$ $\square$

En este caso particular, deducimos que a partir de (5.2.2) y (1.4.19), los parámetros matriciales de reflexión $\{\mathrm{H}_n\}$ asociados a la medida matricial (5.2.1) son hermitianos.

Teorema 5.1 .- *Sean* $\{D_n(\alpha),\ E_n(\alpha)\}$ *los parámetros matriciales en la relación de recurrencia (1.3.4) para los polinomios* $\{P_n(x;\alpha)\}$*, y* $\{\mathrm{H}_n\}$ *los parámetros matriciales de reflexión que aparecen en (1.4.19)-(1.4.22) asociados a la medida matricial (5.2.1). Entonces*

$$\begin{aligned} D_n(\alpha) &= \tfrac{1}{2}(I_p+\mathrm{H}_{2n-2})^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n-1}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}} \\ E_n(\alpha) &= \tfrac{1}{2}(I_p-\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n-1}(I_p-\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad -\tfrac{1}{2}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n+1}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Recíprocamente, si $\Pi_n(x;\alpha) \stackrel{def}{=} P_{n+1}(x;\alpha)^{-*} P_n(x;\alpha)^* D_{n+1}(\alpha)$, *entonces*

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{2n+2} &= I_p - \Pi_n(-1;\alpha) - \Pi_n(1;\alpha) \\ \mathrm{H}_{2n+1} &= I_p - 2\left[\Pi_n(1;\alpha) - \Pi_n(-1;\alpha)\right]^{-\frac{1}{2}} \Pi_n(1;\alpha) \\ &\qquad\qquad * \left[\Pi_n(1;\alpha) - \Pi_n(-1;\alpha)\right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora, usando el teorema 5.1, daremos la asintótica relativa de los polinomios matriciales ortonormales con respecto a un medida matricial soportada en el intervalo $[-1,1]$, cuando la derivada de Radon-Nikodym de $\Omega(\theta)$ satisface $\det \Omega'(\theta) > 0$ en casi todo punto (c.p.d.) en $[0,2\pi)$.

Teorema 5.2 .- *Sea* $\{P_n(x;.) = A_n(.)x^n + \textit{términos de menor grado}\}$ *una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a la medida matricial* α *y* β, *que satisfacen* $d\beta(u) = d\alpha(u) + \mathcal{M}\,\delta(u-c)$ *donde* α *está soportada en* $[-1,1]$, $\mathcal{M}$ *es una matriz definida positiva y* δ *es la medida matricial de Dirac soportada en* $\{c\} \subset \mathbb{R} \setminus [-1,1]$. *Si la parte absolutamente continua de la medida* α *satisface*

$$\det\left[\frac{d\alpha(\cos\theta)}{d\theta}\right] > 0 \quad \textit{c.p.d. en } [0,2\pi) \tag{5.2.4}$$

entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.

1. *Si* $z \in \mathbb{C}\backslash[-1,1]$

$$\lim_{n\to\infty} P_{n-1}(z;\alpha)P_n(z;\alpha)^{-1} = (z - \sqrt{z^2-1})I_p \stackrel{def}{=} \frac{1}{\Phi(z)} I_p.$$

2. *Existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales* $\{P_n(x,\beta)\}$, *tal que*

   (a) $\lim_{n\to\infty} A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha) = \frac{1}{|\Phi(c)|} I_p$.

(b) En $\mathbb{C} \setminus \{[-1,1] \cup \{c\}\}$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x;\beta)P_n(x;\alpha)^{-1} = \mid \Phi(c) \mid \left[1 - \tfrac{\sqrt{c^2-1}}{\Phi(c)} \times \tfrac{\Phi(x)-\Phi(c)}{x-c}\right] I_p.$$

Demostración.-

Consideramos la medida matricial Ω definida por (5.2.1). La derivada de Radon-Nikodym de $\Omega(\theta)$ con respecto a la medida escalar de Lebesgue es

$$\frac{d\Omega(\theta)}{d\theta} = \frac{d\alpha(\cos\theta)}{d\theta} \mid \sin\theta \mid, \quad \textit{c.p.d.} \text{ en } [0,2\pi).$$

A partir de (5.2.4) tenemos $\det\left[\frac{d\Omega(\theta)}{d\theta}\right] > 0$ *c.p.d. en* $[0,2\pi)$. Usando la versión matricial del teorema de Rakhmanov [Van98]

$$\det\left[\frac{d\Omega(\theta)}{d\theta}\right] > 0 \;\; \textit{c.p.d. en} \;\; [0,2\pi) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}_n = 0,$$

y a partir de (5.2.3) tenemos

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\alpha) = \frac{1}{2}I_p, \quad \lim_{n\to\infty} E_n(\alpha) = 0. \tag{5.2.5}$$

Usando [Dur99, Thm 1.1], se sigue el apartado 1 del enunciado.

A partir de (2.2.22), existe una sucesión de polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x,\beta) = A_n(\beta)x^n + \textit{términos de menor grado}\}$ tal que $[A_n(\beta)A_n^{-1}(\alpha)]^*$ son matrices triangulares inferiores cuyos elementos diagonales son reales positivos, y

$$\lim_{n\to\infty}[A_n(\beta)A_n(\alpha)^{-1}]^*[A_n(\beta)A_n(\alpha)^{-1}] = \left[2c(c-\sqrt{c^2-1})-1\right] I_p. \tag{5.2.6a}$$

Entonces usando la unicidad de la factorización de Cholesky de (5.2.6a), obtenemos el apartado 2a.

Usando el teorema 2.10, y tras unos sencillos cálculos, se sigue el apartado 2b.

■

5.3 Herramientas y demostración

Los instrumentos principales son las relaciones de recurrencia (1.4.14)-(1.4.15), (1.4.21)-(1.4.22), sus expresiones equivalentes, y la representación de los parámetros matriciales en (1.3.4). Primero, empezamos formular una útil expresión de los polinomios matriciales ortonormales $\{P_n(x;\alpha)\}$ con respecto a la medida matricial α, en términos de los polinomios matriciales ortonormales $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$ y $\{\Psi_n(z;\Omega)\}$ con respecto a la medida Ω en (5.2.1).

Proposición 5.3 .- *Sean* $\{\Phi_n(z;\Omega)\}$ *y* $\{\Psi_n(z;\Omega)\}$ *dos sucesiones de polinomios que satisfacen respectivamente (1.4.1) y (1.4.2) donde* Ω *está definida en (5.2.1). Entonces los polinomios dados por*

$$P_n(x;\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}} \left[\Phi_{2n}(z;\Omega)z^{-n} + z^n\Psi_{2n}(\frac{1}{\bar{z}};\Omega)^*\right] \tag{5.3.1}$$

donde $x = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, *son polinomios matriciales ortonormales a izquierda con respecto a la medida matricial* α.

Demostración.-

Usando (1.4.3) y (5.2.2), tenemos

$$\begin{aligned}
&[\Phi_{2n}(z;\Omega)z^{-n} + z^n\Psi_{2n}(\tfrac{1}{\bar{z}};\Omega)^*] \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{2n}\lambda_{2n,k}z^{k-n} + \sum_{k=0}^{2n}\mu^*_{2n,k}z^{n-k} = \sum_{k=0}^{2n}\lambda_{2n,k}(z^{n-k} + \tfrac{1}{z^{n-k}}) \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{2n} 2\lambda_{2n,k}\mathrm{T}_{|n-k|}(x)
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

donde $x = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ y $\mathrm{T}_k(x) = \frac{1}{2}(z^k + \frac{1}{z^k})$ es el k-ésimo polinomio de Chebyshev de primer tipo cuyo coeficiente principal es 2^{k-1}.

Por otra parte,

$$[\Phi_{2n}(z;\Omega)z^{-n}+z^n\Psi_{2n}(\frac{1}{\bar z};\Omega)^*]=$$
$$2(\lambda_{2n,0}+\lambda_{2n,2n})\mathrm{T}_n(x)+2(\lambda_{2n,1}+\lambda_{2n,2n-1})\mathrm{T}_{n-1}(x)+\cdots, \quad (5.3.3)$$

son polinomios matriciales ortogonales con respecto a la medida matricial α (ver [AN84]), y satisfacen para $k=0,1,\cdots,n$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}[\Phi_{2n}(z;\Omega)z^{-n}+z^n\Psi_{2n}(\tfrac{1}{\bar z};\Omega)^*]d\alpha(x)\mathrm{T}_k(x)\\
&\quad=\tfrac12\int_0^{2\pi}[\Phi_{2n}(e^{i\theta};\Omega)+e^{i\,2n\theta}\Psi_{2n}(e^{i\theta};\Omega)^*]e^{-i\,n\theta}d\Omega(\theta)\,\tfrac12\left(e^{i\,k\theta}+e^{-i\,k\theta}\right)\\
&\quad=\tfrac14\int_0^{2\pi}\Phi_{2n}(e^{i\theta};\Omega)d\Omega(\theta)(e^{i\,(n+k)\theta})^*+\tfrac14\int_0^{2\pi}\Psi_{2n}(e^{i\theta};\Omega)^*d\Omega(\theta)e^{i\,(n+k)\theta}\\
&\quad=\tfrac{\pi}{2}\lambda_{2n,2n}^{-*}\delta_{n,k}+\tfrac{\pi}{2}\mu_{2n,2n}^{-1}\delta_{n,k}=\pi\lambda_{2n,2n}^{-*}\delta_{n,k}.
\end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Así, usando (5.3.3), (5.3.4) y (1.4.19) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}[\Phi_{2n}(z;\Omega)z^{-n}+z^n\Psi_{2n}(\tfrac{1}{\bar z};\Omega)^*]d\alpha(x)[\Phi_{2n}(z;\Omega)z^{-n}+z^n\Psi_{2n}(\tfrac{1}{\bar z};\Omega)^*]^*\\
&\quad=2\int_{-1}^{1}[\Phi_{2n}(z;\Omega)z^{-n}+z^n\Psi_{2n}(\tfrac{1}{\bar z};\Omega)^*]d\alpha(x)\mathrm{T}_n(x)(\lambda_{2n,0}+\lambda_{2n,2n})^*\\
&\quad=2\pi\lambda_{2n,2n}^{-*}(\lambda_{2n,0}+\lambda_{2n,2n})^*\\
&\quad=2\pi(\mathrm{H}_{2n}+I_p).
\end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Puesto que H_{2n} es una matriz hermitiana, entonces $\mathrm{H}_{2n}^2=\mathrm{H}_{2n}^*\mathrm{H}_{2n}<I_p$, lo que implica $0<I_p+\mathrm{H}_{2n}<2I_p$. Finalmente, teniendo en cuenta (5.3.5) obtenemos (5.3.1). ■

Demostración del teorema 5.1.-

A partir de (5.3.1) y (5.3.3) tenemos

$$\begin{aligned}
A_n(\alpha) &= \tfrac{2^n}{\sqrt{2\pi}}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{-\frac12}(\lambda_{2n,0}+\lambda_{2n,2n})\\
&= \tfrac{2^n}{\sqrt{2\pi}}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{-\frac12}(\lambda_{2n,0}\lambda_{2n,2n}^{-1}+I_p)\lambda_{2n,2n},
\end{aligned}$$

y usando (5.2.2) y (1.4.19) obtenemos

$$\begin{aligned} A_n(\alpha) &= \tfrac{2^n}{\sqrt{2\pi}}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}}(I_p + \mathrm{H}_{2n})\lambda_{2n,2n} \\ &= \tfrac{2^n}{\sqrt{2\pi}}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\lambda_{2n,2n}. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

A partir de (1.4.20) y teniendo en cuenta el hecho de que $(I_p - \mathrm{H}_n^2)$ es una matriz hermitiana, se obtiene

$$\begin{aligned} (I_p - \mathrm{H}_{2n-1}^2)^{\frac{1}{2}} &= \lambda_{2n-2,2n-2}\,\lambda_{2n-1,2n-1}^{-1} \\ (I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}} &= \left(\lambda_{2n,2n}^{-*}\,\lambda_{2n-1,2n-1}^{*}\right)^{-*} = \lambda_{2n,2n}\,\lambda_{2n-1,2n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Así

$$\lambda_{2n-2,2n-2}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n-1}^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda_{2n-1,2n-1}^{-1} = \lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.3.7}$$

Usando (1.3.6) y (5.3.7)

$$\begin{aligned} D_n(\alpha) &= \tfrac{1}{2}(I_p + \mathrm{H}_{2n-2})^{\frac{1}{2}}\lambda_{2n-2,2n-2}\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}(I_p + \mathrm{H}_{2n-2})^{\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}_{2n-1}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}(I_p + \mathrm{H}_{2n-2})^{\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}_{2n-1}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora, de (5.3.1) y (5.3.3), deducimos

$$B_n(\alpha) = \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}}(\lambda_{2n,1} + \lambda_{2n,2n-1})$$

y

$$A_n^{-1}(\alpha)B_n(\alpha) = \frac{1}{2}\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-1}(\lambda_{2n,1} + \lambda_{2n,2n-1}). \tag{5.3.8}$$

A partir de (1.4.21) y teniendo en cuenta (5.2.2) tenemos

$$(I_p - \mathrm{H}_n^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}z^k = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{n-1,k}z^{k+1} + \mathrm{H}_n\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{n-1,k}z^{n-1-k}. \tag{5.3.9}$$

Haciendo cambio de índice $n \to 2n$ en (5.3.9), si identificamos los coeficientes de z y z^{2n-1} en los dos miembros de (5.3.9), obtenemos

$$(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}\lambda_{2n,1} = \lambda_{2n-1,0} + \mathrm{H}_{2n}\lambda_{2n-1,2n-2} \tag{5.3.10}$$

$$(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}\lambda_{2n,2n-1} = \lambda_{2n-1,2n-2} + \mathrm{H}_{2n}\lambda_{2n-1,0}. \tag{5.3.11}$$

Mediante el cambio de índice $n \to 2n+1$ en (5.3.9),

$$(I_p - \mathrm{H}_{2n+1}^2)^{\frac{1}{2}}\lambda_{2n+1,0} = \mathrm{H}_{2n+1}\lambda_{2n,2n}. \tag{5.3.12}$$

A partir de (5.3.10) y (5.3.11), deducimos

$$(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}(\lambda_{2n,1} + \lambda_{2n,2n-1}) = (I_p + \mathrm{H}_{2n})(\lambda_{2n-1,0} + \lambda_{2n-1,2n-2}).$$

Entonces usando el hecho de que $(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{H}_{2n} = \mathrm{H}_{2n}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}$, (5.3.8) se convierte en

$$A_n^{-1}(\alpha)B_n(\alpha) = \frac{1}{2}\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}(\lambda_{2n-1,0} + \lambda_{2n-1,2n-2}). \tag{5.3.13}$$

Observamos que a partir de (5.3.9), se puede probar por inducción que

$$\prod_{i=n-p}^{\overset{\curvearrowright}{n}} (I_p - \mathrm{H}_i^2)^{\frac{1}{2}}\ \lambda_{n,n-1} = \sum_{k=n-p}^{n-1} \prod_{i=n-p}^{\overset{\curvearrowright}{k}} (I_p - \mathrm{H}_i^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{k+1}\ \lambda_{k,0} + \mathrm{H}_{n-p}\ \lambda_{n-p-1,0} + \lambda_{n-p-1,n-p-2}, \tag{5.3.14a}$$

donde $\prod_{i=r}^{\overset{\curvearrowright}{r+s}} M_i = M_r \cdots M_{r+s}$, $p = 0, \cdots, n-2$ y el término a derecha de (5.3.14a) es igual a cero cuando $p = 0$. Entonces

$$\lambda_{n,n-1} = \sum_{k=2}^{n-1} \prod_{i=k+1}^{\overset{\curvearrowleft}{n}} (I_p - \mathrm{H}_i^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{k+1}\ \lambda_{k,0} + \prod_{i=2}^{\overset{\curvearrowleft}{n}} (I_p - \mathrm{H}_i^2)^{-\frac{1}{2}}(I_p + \mathrm{H}_2)\ \lambda_{1,0}. \tag{5.3.15}$$

A partir de (5.3.13) tenemos

$$
\begin{aligned}
&A_n^{-1}(\alpha)B_n(\alpha) - A_{n+1}^{-1}(\alpha)B_{n+1}(\alpha) = \\
&\frac{1}{2}\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\lambda_{2n-1,0} - \frac{1}{2}\lambda_{2n+2,2n+2}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n+2}^2)^{-\frac{1}{2}}\lambda_{2n+1,0} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\lambda_{2n-1,2n-2} \qquad (5.3.16a)\\
&\qquad\qquad\quad - \frac{1}{2}\lambda_{2n+2,2n+2}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n+2}^2)^{-\frac{1}{2}}\lambda_{2n+1,2n}. \qquad (5.3.16b)
\end{aligned}
$$

De (5.3.15) se sigue que

$$
\begin{aligned}
&(I_p - \mathrm{H}_{2n+1}^2)^{-\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\lambda_{2n-1,2n-2} \\
&= \sum_{k=2}^{2n-2}\ \overset{\curvearrowleft}{\prod_{i=k+1}^{2n+1}} (I_p - \mathrm{H}_i^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{k+1}\,\lambda_{k,0} + \overset{\curvearrowleft}{\prod_{i=2}^{2n+1}} (I_p - \mathrm{H}_i^2)^{-\frac{1}{2}}(I_p + \mathrm{H}_2)\,\lambda_{1,0} \\
&= \lambda_{2n+1,2n} - (I_p - \mathrm{H}_{2n+1}^2)^{-\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n}\,\lambda_{2n-1,0} \\
&\qquad\qquad - (I_p - \mathrm{H}_{2n+1}^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n+1}\,\lambda_{2n,0}.
\end{aligned}
\tag{5.3.17}
$$

Sustituyendo (5.3.17) en (5.3.16a) y (5.3.16b), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&A_n^{-1}(\alpha)B_n(\alpha) - A_{n+1}(\alpha)B_{n+1}^{-1}(\alpha) = \\
&\frac{1}{2}\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\lambda_{2n-1,0} - \frac{1}{2}\lambda_{2n+2,2n+2}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n+2}^2)^{-\frac{1}{2}}\lambda_{2n+1,0} \\
&\quad - \frac{1}{2}\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n}\lambda_{2n-1,0} - \frac{1}{2}\lambda_{2n,2n}^{-1}\mathrm{H}_{2n+1}\lambda_{2n,0} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n+1}^2)^{\frac{1}{2}}\lambda_{2n+1,2n} \qquad (5.3.18a)\\
&\qquad\qquad\quad - \frac{1}{2}\lambda_{2n+2,2n+2}^{-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n+2}^2)^{-\frac{1}{2}}\lambda_{2n+1,2n}. \qquad (5.3.18b)
\end{aligned}
$$

Entonces a partir de (5.3.7) con el cambio de índice $n \to n+1$, la suma de los términos en (5.3.18a) y (5.3.18b) es igual a cero.

De (5.3.6), se tiene

$$A_n(\alpha)\left[A_n^{-1}(\alpha)B_n(\alpha)-A_{n+1}(\alpha)B_{n+1}^{-1}(\alpha)\right]A_n^{-1}(\alpha)=$$

$$\frac{1}{2}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\,\lambda_{2n-1,0}\,\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3.19a}$$

$$-\frac{1}{2}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n}\,\lambda_{2n-1,0}\,\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3.19b}$$

$$-\frac{1}{2}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\lambda_{2n,2n}\lambda_{2n+2,2n+2}^{-1}\times \tag{5.3.19c}$$

$$\times(I_p-\mathrm{H}_{2n+2}^2)^{-\frac{1}{2}}\,\lambda_{2n+1,0}\,\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3.19d}$$

$$-\frac{1}{2}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n+1}\,\lambda_{2n,0}\,\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}} \tag{5.3.19e}$$

De (1.4.20) se sigue que

$$(I_p-\mathrm{H}_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}=\lambda_{2n-1,2n-1}\,\lambda_{2n,2n}^{-1},$$

y usando (1.4.19)

$$\lambda_{2n-1,0}\,\lambda_{2n,2n}^{-1}\,(I_p-\mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}=\lambda_{2n-1,0}\lambda_{2n-1,2n-1}^{-1}=\mathrm{H}_{2n-1}. \tag{5.3.20}$$

Así, teniendo en cuenta (5.3.20), la suma de los términos en (5.3.19a) y (5.3.19b) es

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n})\,\lambda_{2n-1,0}\,\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}}\\
&\quad=\tfrac{1}{2}(I_p-\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\,\lambda_{2n-1,0}\,\lambda_{2n,2n}^{-1}(I_p-\mathrm{H}_{2n}^2)^{-\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\\
&\quad=\tfrac{1}{2}(I_p-\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n-1}(I_p-\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De (1.4.20) y (5.3.12), deducimos que

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n,2n}&\left[\lambda_{2n+2,2n+2}^{-1}(I_p-\mathrm{H}_{2n+2}^2)^{-\frac{1}{2}}\right]\lambda_{2n+1,0}\\
&=\lambda_{2n,2n}\left[\lambda_{2n+1,2n+1}^{-1}\right]\lambda_{2n+1,0}\\
&=(I_p-\mathrm{H}_{2n+1}^2)^{\frac{1}{2}}\lambda_{2n+1,0}\\
&=\mathrm{H}_{2n+1}\lambda_{2n,2n}.
\end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Entonces usando (5.3.21), la suma de los términos en (5.3.19c)-(5.3.19d) y (5.3.19e) es

$$-\tfrac{1}{2}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n+1}(I_p + \lambda_{2n,0}\,\lambda_{2n,2n}^{-1})(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n+1}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, de (1.3.6) y (5.3.19) se sigue

$$E_n(\alpha) = \tfrac{1}{2}(I_p - \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n-1}(I_p - \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}$$
$$-\tfrac{1}{2}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n+1}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}.$$

Para probar la segunda parte del teorema 5.1, escribimos la expresión (5.3.1) en $x = 1$ y $x = -1$. Puesto que $x = 1$ corresponde a $z = 1$ y $x = -1$ a $z = -1$ ($x = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$), entonces teniendo en cuenta (5.2.2), encontramos

$$\begin{aligned} P_n(1;\alpha) &= \tfrac{2}{\sqrt{2\pi}}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}}\Phi_{2n}(1;\Omega) \\ P_n(-1;\alpha) &= \tfrac{(-1)^n 2}{\sqrt{2\pi}}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{-\frac{1}{2}}\Phi_{2n}(-1;\Omega) \end{aligned}$$

así como

$$P_n(1;\alpha)^{-*} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\Psi_{2n}(1;\Omega)^{-1} \tag{5.3.22}$$

$$P_n(-1;\alpha)^{-*} = \frac{(-1)^n\sqrt{2\pi}}{2}(I_p + \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\Psi_{2n}(-1;\Omega)^{-1}. \tag{5.3.23}$$

A partir de (1.4.15) tenemos

$$\Psi_n(1;\Omega) - \Psi_n(1;\Omega)\mathrm{H}_n = \Psi_{n-1}(1;\Omega)(I_p - \mathrm{H}_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Psi_n(-1;\Omega) - (-1)^n\Psi_n(-1;\Omega)\mathrm{H}_n = -\Psi_{n-1}(-1;\Omega)(I_p - \mathrm{H}_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

ó, equivalentemente,

$$\Psi_{n-1}(1;\Omega)^{-1}\Psi_n(1;\Omega) = (I_p - \mathrm{H}_n^2)^{\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}_n)^{-1} \tag{5.3.24}$$

$$\Psi_{n-1}(-1;\Omega)^{-1}\Psi_n(-1;\Omega) = -(I_p - \mathrm{H}_n^2)^{\frac{1}{2}}(I_p - (-1)^n\mathrm{H}_n)^{-1}. \tag{5.3.25}$$

Usando (5.3.22) y (5.3.24) tenemos

$$\begin{aligned} P_n(1;\alpha)^{-*}P_{n+1}(1;\alpha)^* &= (I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\Psi_{2n}(1;\Omega)^{-1}\Psi_{2n+2}(1;\Omega)(I_p+\mathrm{H}_{2n+2})^{-\frac{1}{2}} \\ &= (I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}\left(\Psi_{2n}(1;\Omega)^{-1}\Psi_{2n+1}(1;\Omega)\right) \\ &\quad\left(\Psi_{2n+1}(1;\Omega)^{-1}\Psi_{2n+2}(1;\Omega)\right)(I_p+\mathrm{H}_{2n+2})^{-\frac{1}{2}} \\ &= (I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n+1}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n+1})^{-1} \\ &\quad(I_p-\mathrm{H}_{2n+2}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{-1}(I_p+\mathrm{H}_{2n+2})^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mathrm{H}_{2n+2}(I_p-\mathrm{H}_{2n+2}^2)^{-\frac{1}{2}}=(I_p-\mathrm{H}_{2n+2}^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{2n+2}$,

$$P_n(1;\alpha)^{-*}P_{n+1}(1;\alpha)^* = (I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n+1}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n+1})^{-1}(I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Así pues, de (5.2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} &2P_{n+1}(1;\alpha)^{-*}P_n(1;\alpha)^*D_{n+1}(\alpha) = \\ &\qquad (I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n+1})(I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.3.26}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} &P_n(-1;\alpha)^{-*}P_{n+1}(-1;\alpha)^* = \\ &\qquad -(I_p+\mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}}(I_p-\mathrm{H}_{2n+1}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p+\mathrm{H}_{2n+1})^{-1}(I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}D_{n+1}(\alpha)^{-1}P_n(-1;\alpha)^{-*}P_{n+1}(-1,\alpha)^* = \\ &\qquad (I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{-\frac{1}{2}}(I_p+\mathrm{H}_{2n+1})^{-1}(I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} &-2P_{n+1}(-1;\alpha)^{-*}P_n(-1;\alpha)^*D_{n+1}(\alpha) = \\ &\qquad (I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{\frac{1}{2}}(I_p+\mathrm{H}_{2n+1})(I_p-\mathrm{H}_{2n+2})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

Finalmente, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones (5.3.26) y (5.3.27)

$$\begin{cases} 2\Pi_n(1;\alpha) & = (I_p - \mathrm{H}_{2n+2})^{\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}_{2n+1})(I_p - \mathrm{H}_{2n+2})^{\frac{1}{2}} \\ -2\Pi_n(-1;\alpha) & = (I_p - \mathrm{H}_{2n+2})^{\frac{1}{2}}(I_p + \mathrm{H}_{2n+1})(I_p - \mathrm{H}_{2n+2})^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

de la suma de dichas ecuaciones, se sigue

$$\mathrm{H}_{2n+2} = I_p + \Pi_n(-1;\alpha) - \Pi_n(1;\alpha). \tag{5.3.28}$$

Sustituyendo (5.3.28) en la primera ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{2n+1} = I_p - 2\left[\Pi_n(1;\alpha) - \Pi_n(-1;\alpha)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ \Pi_n(1;\alpha)\left[\Pi_n(1;\alpha) - \Pi_n(-1;\alpha)\right]^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

■

Observamos que si $\{\mathrm{H}_n\}$ es una sucesión constante de matrices hermitianas, es decir que $\mathrm{H}_n = \mathrm{H}$ para todo n, entonces de acuerdo con el teorema 5.1, tenemos

$$\begin{aligned} D_n(\alpha) &= \tfrac{1}{2}(I_p + \mathrm{H})^{\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H}^2)^{\frac{1}{2}}(I_p - \mathrm{H})^{\frac{1}{2}} \\ &= \tfrac{1}{2}(I_p - \mathrm{H}^2) > 0 \\ E_n(\alpha) &= \tfrac{1}{2}(I_p - \mathrm{H})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}(I_p - \mathrm{H}_{2n})^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad -\tfrac{1}{2}(I_p + \mathrm{H})^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}(I_p + \mathrm{H})^{\frac{1}{2}} \\ &= -\mathrm{H}^2. \end{aligned}$$

La sucesión de polinomios matriciales $\{P_n(x;\alpha)\}$ ha sido analizada en [Dur99]. En particular, la correspondiente medida matricial de ortogonalidad α viene determinada en [Dur99, Eq. (3.1)] y su soporte puede ser determinado como sigue.

$$d\alpha = \frac{1}{2\pi} D^{-\frac{1}{2}} \left(4I_p - D^{-\frac{1}{2}}(E - xI_p)D^{-1}(E - xI_p)D^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} dx, \tag{5.3.29}$$

donde $D = \lim_{n\to\infty} D_n(\alpha)$ y $E = \lim_{n\to\infty} E_n(\alpha)$. Teniendo en cuenta que las matrices implicadas en (5.3.29) son polinomios matriciales en la matriz H, entonces podemos conmutar en el producto y, por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} d\alpha &= \tfrac{1}{2\pi} D^{-2} \left(4D^2 - (E - xI_p)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi} D^{-2} \left((I_p - \mathrm{H}^2)^2 - (\mathrm{H}^2 + xI_p)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \tfrac{1}{\pi} D^{-1} \left(I_p - [(I_p - \mathrm{H}^2)^{-1}(\mathrm{H}^2 + xI_p)]^2\right)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Por otra parte, y de acuerdo con [Dur99, Thm 3.1], el soporte de la medida matricial se encuentra como máximo en la unión de p intervalos disjuntos, cerrados, y no degenerados, cuyos puntos de los extremos son raíces del polinomio escalar

$$\det[(I_p - \mathrm{H}^2) - (\mathrm{H}^2 + xI_p)]^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\det[I_p + xI_p] = 0 \ \text{ ó } \ \det[I_p - 2\mathrm{H}^2 - xI_p] = 0,$$

es decir, $\{-1\}$ y los valores propios de la matriz $I_p - 2\mathrm{H}^2$, ó equivalentemente $\{-1\} \cup \{1 - 2\lambda^2\}$ donde λ es valor propio de la matriz H. Puesto que $0 \le \mathrm{H}^2 < I_p$, entonces los valores propios de la matriz $I_p - 2\mathrm{H}^2$ pertenecen al intervalo $[-1, 1]$.

En [Dur99], se ha obtenido que una condición necesaria para dicho resultado es que $4I_p - D^{-2}(E - xI_p)^2$ debe ser una matriz definida positiva ó semi-definida positiva. En efecto,

$$\begin{aligned} &4I_p - 4(I_p - \mathrm{H}^2)^{-2}(-\mathrm{H}^2 - xI_p)^2 \\ &\qquad = 4\left(I_p - \{(I_p - \mathrm{H}^2)^{-1}(\mathrm{H}^2 + xI_p)\}^2\right) \\ &\qquad = 4\left(I_p - \{(x+1)(I_p - \mathrm{H}^2)^{-1} - I_p\}^2\right) > 0 \end{aligned}$$

dado que sus valores propios $4\left(1-\left\{(x+1)(1-\lambda^2)^{-1}-1\right\}^2\right)$ son no-negativos para todo $0<\lambda<1$ y $x\in sop(\alpha)\subset[-1,1]$.

Bibliografía

AAMK98 J. Arvesú, R. Alvarez-Nodarse, F. Marcellán, and K. H. Kwon, *Some extension of the Bessel-type orthogonal polynomials*, Integral Transforms and Special Functions **7** (1998), no. 3-4, 191–214.

AN84 A. I. Aptekarev and E. M. Nikishin, *The scattering problem for a discrete Sturm-Liouville operator*, Mat. USSR Sb. **49** (1984), 325–355.

BLN87 S. Bonan, D. S. Lubinsky, and P. Nevai, *Orthogonal polynomials and their derivatives, II*, SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), no. 4, 1163–1176.

Chi78 T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

CN82 T. S. Chihara and P. G. Nevai, *Orthogonal polynomials and measures with finitely many point masses*, J. Approx. Theory **35** (1982), 370–380.

DGK78 Ph. Delsarte, Y. V. Genin, and Y. G. Kamp, *Orthogonal polynomial matrices on the unit circle*, IEEE Trans. Circuits and Systems **25** (1978), no. 3, 149–160.

DL96 A. J. Durán and P. López-Rodríguez, *Orthogonal matrix polynomials: Zeros and Blumenthal´s theorem*, J. Approx. Theory **84** (1996), 96–118.

Dur95 A. J. Durán, *On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures*, Can. J. Math. **47** (1995), 88–112.

Dur96 A. J. Durán, *Markov theorem for orthogonal matrix polynomials*, Can. J. Math. **48** (1996), 1180–1195.

Dur99 A. J. Durán, *Ratio asymptotic for orthogonal matrix polynomials*, J. Approx. Theory **100** (1999), 304–344.

DV95 A. J. Durán and W. Van Assche, *Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations*, Linear Algebra and Appl. **219** (1995), 261–280.

Fav35 J. Favard, *Sur les polynômes de Tchebicheff*, C. R. Acad. Sci. Paris **200** (1935), 2052–2053.

Fre71 G. Freud, *Orthogonal polynomials*, Pergamon Press, New York, 1971.

Ger81 J. S. Geronimo, *Matrix orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Math. Phys. **22** (1981), no. 7, 1359–1365.

Ger82 J. S. Geronimo, *Scattering theory and the matrix orthogonal polynomials in the real line*, Circuits Systems Signal Process **1** (1982), 471–495.

GH97 F. A. Grünbaum and L. Haine, *Bispectral Darboux Transformations: An Extension of the Krall Polynomials*, International Mathematics Research Notices **8** (1997), 359–392.

GKLR81 I. Gohberg, M. A. Kaashoek, L. Lerer, and L. Rodman, *Common multiples and common divisors of matrix polynomials, Spectral method*, Indiana U. Math. J. **30** (1981), no. 3, 321–356.

GLR82 I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *Matrix polynomials*, Academic Press, New York, 1982.

Goh88 I. Gohberg (Editor), *Orthogonal matrix valued polynomials and applications, Operator theory: Advances and Applications*, vol. 34, Birkhäuser Basel, 1988.

Hei78 E. Heine, *Handbuch der kugelfunktionen*, Anlage, vol. I, G. Reimer, Berlin, 1878.

HJ91 R. A. Horn and C. A. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

JCN94 L. Jódar, R. Company, and E. Navarro, *Laguerre matrix polynomials and systems of second-order differential equations*, Appl. Numer. Math. **15** (1994), 53–63.

JDP95 L. Jódar, E. Defez, and E. Ponsoda, *Matrix quadrature integration and orthogonal matrix polynomials*, Congressus Numerantium **106** (1995), 141–153.

Klo91 L. Klotz, *Some approximation problem in l^p -spaces of matrix valued functions*, Stud. Math. **99** (1991), no. 2, 129–147.

Kre70 M. G. Krein, *Fundamental aspects of the representation theory of hermitian operators with deficiency index (m,m)*, Amer. Math. Soc. Transl. **2** (1970), no. 97, 75–143.

LT85 P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The theory of matrices*, second ed., Academic Press, Orlando, 1985.

Mig95 M. P. Mignolet, *Matrix polynomials orthogonal on the unit circle and accuracy of autoregressive models*, J. Comp. Appl. Math. **62** (1995), 229–238.

MNV91 A Maté, P. Nevai, and W. Van Assche, *The supports of measures associated with orthogonal polynomials and the spectra of the related self-adjoint operators*, Rocky Mount. J. Math. **21** (1991), 501–527.

MR89 F. Marcellán and I. Rodríguez-González, *A class of matrix orthogonal polynomials on the unit circle*, Linear Algebra and Appl. **121** (1989), 233–241.

MS93 F. Marcellán and G. Sansigre, *On a class of matrix orthogonal polynomials on the real line*, Linear Algebra and Appl. **181** (1993), 97–109.

Nev79 P. Nevai, *Orthogonal polynomials*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 213, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1979.

Per77 O. Perron, *Die lehre von den kettenbrüchen*, Teubner, vol. 2, Stuttgart, 1977.

PS F. Peherstorfer and R. Steinbauer, *Mass-points of positive Borel measures*, East J. of Approx., En prensa.

Rak87 E. A. Rakhmanov, *On asymptotic properties on polynomials orthogonal on the unit circle with weights not satisfying Szegő´s condition*, Math. USSR. Sbornik **58** (1987), no. 1, 149–167.

Rod90 L. Rodman, *Orthogonal matrix polynomials*, In Orthogonal Polynomials: Theory and Practice (P. Nevai, ed.), NATO ASI Series C, vol. 294, Kluwer, Dordrecht, 1990, pp. 345–362.

Ros64 M. Rosemberg, *The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-negative hermitian measure*, Duke Math. J. **31** (1964), 291–298.

Sto32 M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 15, Amer. Math. Soc. Providence, 1932.

SV94 A. Sinap and W. Van Assche, *Polynomial interpolation and gaussian quadrature for matrix valued functions*, Linear Algebra and Appl. **207** (1994), 71–114.

SV96 A. Sinap and W. Van Assche, *Orthogonal matrix polynomials and applications*, J. Comp. Appl. Math. **66** (1996), 27–52.

SZ71 S. Saks and A. Zygmund, *Analytic functions*, PWN-Polish Scientific Publisher, 1971.

Sze75 G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, cuarta ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1975.

Van91 W. Van Assche, *Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions of the second kind*, J. Comp. Appl. Math. **37** (1991), 237–249.

Van97 W. Van Assche, *Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line*, In Special Functions, q-Series and related topics, Fields Institute Communications, vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence Rhode Island, 1997, pp. 211–245.

Van98 W. Van Assche, *Rakhmanov´s theorem for orthogonal matrix polynomials on the unit circle*, manuscript, 1998.

Win29 A. Wintner, *Spektraltheorie der Unendlichen Matrizen*, Hirzel, Leipzig, 1929.

WM57 N. Wiener and P. Masani, *The prediction theory of multivariate stochastic processes*, Parte I, Acta Mathematica **98** (1957), 111–150, Part II, Acta Mathematica **99** (1959) 93-137.

YK78 D. C. Youla and N. N. Kazanjian, *Bauer-type factorization of positive matrices and the theory of matrix polynomials orthogonal on the unit circle*, IEEE Trans. Circuits and Systems **25** (1978), no. 2, 57–69.

YMa H. O. Yakhlef and F. Marcellán, *Orthogonal matrix polynomials, connection between recurrences on the unit circle and on a finite interval*, Lecture Notes in Physiques, por aparecer.

YMb H. O. Yakhlef and F. Marcellán, *Relative asymptotics for orthogonal matrix polynomials with respect to a perturbed matrix measure on the unit circle*, manuscrito sometido para publicación.

YMPa H. O. Yakhlef, F. Marcellán, and M. Piñar, *Perturbations in the Nevai Matrix Class of orthogonal matrix polynomials*, manuscrito sometido para publicación.

YMPb H. O. Yakhlef, F. Marcellán, and M. Piñar, *Relative asymptotics for orthogonal matrix polynomials with convergent recurrence coefficients*, manuscrito sometido para publicación.

Zha83 D. Zhani, *Problème des moments matricielles sur la droite: construction d' une famille de solutions et questions d' unicité*, Ph.D. thesis, Université Claude-Bernard, Lyon1, 1983.