Esta tesis doctoral fue presentada por D. Jesús Ricardo Illán González, profesor del Departamento de Teoría de Funciones, de la Facultad de Matemática y Cibernética de la Universidad de la Habana, Cuba, para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS. El trabajo científico fue dirigido por el Dr. Guillermo López Lagomasino, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Facultad de Matemática y Cibernética de la Universidad de la Habana.
Fué leída y aprobada el 28 de marzo de 1987 ante el Tribunal constituido por los siguientes profesores e investigadores:

Dr. Miguel A. Jiménez Pozo.	**Presidente**
Dr. Francisco Guerra Vázquez.	**Miembro**
Dra. Concepción Valdés Castro.	**Miembro**
Dr. José Luis Fernández Muñiz.	**Miembro**
Dr. Martín López Morales.	**Secretario**

AGRADECIMIENTOS

Quiero hacer constar mi agradecimiento al Profesor Dr. D. Guillermo López Lagomasino, Director de esta Tesis, por la asesoría científica brindada, la cual ha contribuído con la realización exitosa de este trabajo de investigación.
Es justo señalar el significativo aporte dado por el Académico Dr. Vasil A. Popov, al plantearme interesantes problemas de investigación actual durante mi estancia en el Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Bulgaria.
También debo reconocer el apoyo institucional brindado por:
-Facultad de Matemática y Cibernética de la Universidad de la Habana.
-Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de Bulgaria.

Índice general

Capítulo 1

Introducción general.

1.1 Aproximación racional.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y sea R_n el conjunto de las funciones racionales r_n que se escriben de la siguiente forma

$$r_n(x) = \frac{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n}$$

La distancia uniforme de f a R_n es llamada la mejor aproximación racional, de orden n, a la función f, y se representa por

$$\mathcal{R}_n(f)_\infty = \inf\{\|f - r_n\|_\infty;\ r_n \in R_n\}$$

La mejor aproximación polinomial de orden n, de la función f, está dada por

$$\mathcal{P}_n(f)_\infty = \inf\{\|f - p_n\|_\infty;\ p_n \in P_n\}$$

donde P_n es el espacio lineal de todos los polinomios de grado no mayor que n.
La función $f(x) = |x|,\ -1 \leq x \leq 1$; ha sido uno de los primeros ejemplos de función no algebraica, para la cual se cumple

$$\mathcal{R}_n(f)_\infty = o\left(\mathcal{P}_n(f)_\infty\right) \tag{1.1}$$

Este resultado se deduce directamente de un trabajo de D.J.Newman en 1964 (ver [1]) en el que se prueba el siguiente estimado

$$M_1 \exp\left(-c_1\sqrt{n}\right) \leq \mathcal{R}_n(|x|)_\infty \leq M_2 \exp\left(-c_2\sqrt{n}\right)$$

siendo $M_1, M_2, c_1, c_2 > 0$, constantes absolutas. Mientras que, para la aproximación polinomial en [3] puede verse que

$$\mathcal{P}_n(|x|)_\infty \asymp \frac{1}{n}$$

La técnica de Newman[1] fue modificada por A.Gonchar[5] para obtener estimados generales de $\mathcal{R}_n(f)_\infty$ cuando f es una función con una singularidad característica. La técnica de Gonchar permitió estimar el orden de convergencia de funciones como x^α, $0 \leq x \leq 1$, $\alpha > 0$ cuyo orden exacto de aproximación polinomial es $n^{-\alpha}$. El orden de convergencia a cero de $\mathcal{R}_n(x^\alpha)_\infty$ fue paulatinamente descrito en Gonchar ([8], 1974), en Viacheslavov ([44], 1975), y finalmente Ganelius ([51], 1979), quien demostró que el orden exacto es $\exp(-\pi\sqrt{n\alpha})$

El proceso de aproximación racional tiene características diferentes al correspondiente proceso polinomial. Los dos ejemplos anteriormente considerados satisfacen la propiedad de Newman (1.1). Los resultados obtenidos hasta el momento permiten establecer un principio relativo al efecto adverso de las singularidades en el proceso aproximativo, "la presencia de singularidades

afecta mas a la aproximación polinomial que a la aproximación mediante funciones racionales". Es sabido que si E es un compacto del plano complejo (con ciertas propiedades de suavidad geométrica), entonces (ver [29])

$$f \in A(E) \Leftrightarrow \limsup_n [\mathcal{P}_n(f)_\infty]^{1/n} < 1 \tag{1.2}$$

donde $A(E)$ denota al conjunto de las funciones analíticas sobre E. Sin embargo, la presencia de una singularidad de f en el intervalo [a,b], produce una disminución de la velocidad de aproximación. Por ejemplo,

$$\mathcal{P}_n(f)_\infty \asymp \left(\frac{1}{n^\beta}\right), \ \beta > 0 \tag{1.3}$$

$$\mathcal{R}_n(f)_\infty \asymp \left(\exp(-\beta\sqrt{n})\right), \ \beta > 0 \tag{1.4}$$

son órdenes típicos para los casos polinomial y racional respectivamente, si f tiene alguna singularidad en $[a, b]$.
Un estimado general, válido para una clase de funciones, no suele estar expresado como (1.3) y (1.4). La propia condición de ser general, hace que este estimado dependa de las características estructurales de cada función en particular, expresadas generalmente en términos de un módulo de continuidad (suavidad). En este sentido se conocen los teoremas (directos) de Bernstein-Jackson para la aproximación polinomial (ver [3, 35]), y los resultados de A.Gonchar [5] para el caso racional.
El orden de aproximación uniforme, mediante funciones racionales, sobre compactos contenidos en la región de analiticidad de f, tiene un orden también exponencial, que en cierto sentido depende de la geometría de la región. Sea U una región abierta del plano complejo, con frontera FrU regular para el problema de Dirichlet. Si $E \subset U$ es compacto, Widom [52] demostró que

$$\lim_n \left(\sup_f \mathcal{R}_n(f)_E\right)^{1/n} = \exp\left(-\frac{1}{C_E}\right) \tag{1.5}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones f analíticas en U, con norma supremo menor que uno, y C_E denota la capacidad del condensador (FrU, E). Aparentemente el efecto adverso producido por las singularidades de la función aproximada f, es atenuado, en el caso racional, por la conducta que en cada caso han de manifestar los polos de los aproximantes. En [4, 10, 13] se aprecia cuál debe ser el comportamiento de los polos de las fracciones aproximantes, respecto a las singularidades de f, cuando se considera un esquema de aproximación racional "eficiente". Los polos deben ser atraidos, en algún sentido, por las singularidades de f.
Lo anterior describe a grandes rasgos, algunas direcciones de trabajo dentro de la aproximación de funciones analíticas, o analíticas salvo algunos puntos de su dominio, en los que f no admite prolongación analítica. Tales técnicas y resultados tienen importancia dentro de las estrategias de solución de los problemas directos, inversos y de identificación, cuando los datos de estos problemas son funciones que tienen alguna de las características anteriormente señaladas.
El siguiente epígrafe tiene como objetivo señalar aquellos aspectos de interés sobre la integración numérica, que directa o indirectamente están vinculados a los resultados teóricos, tratados en esta tesis.

1.2 Integración numérica.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función integrable respecto a una medida μ definida sobre los borelianos del intervalo I.

El problema de calcular aproximadamente la integral $\int_I f\,d\mu$ puede ser resuelto mediante una fórmula, llamada de cuadratura, como la que a continuación aparece

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}) \approx \int_I f\,d\mu \tag{1.6}$$

donde los coeficientes $\lambda_{n,k}$ son números reales o complejos, los números $x_{n,k}$ pertenecen al intervalo I o a un superconjunto $D \subset Dominio\ f$, todos escogidos atendiendo a algún criterio de error. Las llamadas fórmulas interpolatorias de integración son aquellas para las cuales (1.6) es exacto para cualquier polinomio p cuyo grado no supere un cierto rango $r = r(n) \leq 2n-1$, llamado "grado de exactitud algebraica". Si el intervalo de integración es acotado, este criterio de exactitud se corresponde con la posibilidad de aproximar uniformemente cualquier función continua por medio de polinomios algebraicos.

Si $a = -\infty$ ó $b = +\infty$, el concepto de exactitud requiere adicionalmente de la finitud de todos los momentos de la medida μ.

Las fórmulas de interpolación cuyo grado de exactitud es máximo: $r(n) = 2n-1$, reciben el nombre de fórmulas Gaussianas o de tipo Gauss, y sus nodos coinciden con los n ceros simples del enésimo polinomio ortogonal asociado a μ (ver [34]).

Otra forma de definir la exactitud de la fórmula (1.6), en términos del operador $E_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}) - \int_I f\,d\mu$, consiste en asegurar que

$$\lim_n E_n(p) = 0, \tag{1.7}$$

para todo polinomio p (ver [33]).

En intervalos acotados es en general mas fuerte la exactitud algebraica que la exactitud en el límite (1.7), y es fácil ver que si $\sup_n \sum_{i=1}^{n} |c_{i,n}| < \infty$, y $\lim_n r(n) = \infty$ ambas conducen a que $\lim E_n(f) = 0$, para toda $f \in C[a,b]$.

La situación cambia sustancialmente cuando (1.6) se establece para intervalos no acotados (ver [14] y [33] cap 3).

El problema de hallar los nodos $(x_{n,k})$ en la fórmula (1.6), para obtener el grado máximo de exactitud, fué resuelto por Gauss en 1814 (Cheney nos remite a [68]).El caso general fué tratado por Tschakalov [67] en 1954.

Estudios recientes del error $|E_n(f)|$ para fórmulas Gaussianas, han sido realizados en diversos trabajos [15, 35, 75, 76] (ver también [82]).

Para fórmulas compuestas de Newton-Cotes, Popov obtuvo estimados del error en términos del módulo de suavidad (ver [26]). Resultados de este tipo pueden verse en [72], donde se generalizan estimados clásicos del error para fórmulas como la de los trapecios, válidas para cualquier función de L_p definida dondequiera.

Consideremos ahora un espacio seminormado $\mathcal{X}$, cuyos elementos son funciones que cumplen los requisitos de la fórmula (1.6), y supongamos además que los funcionales lineales S_n y L son continuos. El error de la fórmula (1.6) en el espacio $\mathcal{X}$, está dado por $E_n(\mathcal{X}) = \sup\{|E_n(f)|, \|f\| \leq 1\} = \|L - S_n\|$.

Hallar los coeficientes y nodos de modo que $E_n(\mathcal{X})$ sea el menor entre todas las posibles elecciones del funcional S_n -manteniendo fijo el orden n- es un problema que aún no está totalmente resuelto. Tales cuadraturas extremales son llamadas "óptimas" y su estudio parece haber sido iniciado a principio de la década de los cincuenta (ver [69, 70]).

El problema extremal relativo a la fórmula (1.6), y al espacio $\mathcal{X}$, se ha estudiado principalmente en los siguientes casos: $\mathcal{X} = W_r^q$ es el espacio de la funciones f, con derivada f^{r-1} absolutamente continua y tal que $f^r \in L_q$ (ver [39],[56]-[61]); cuando $\mathcal{X} = H$, es un espacio de Hilbert de funciones analíticas (ver [78]-[81]); y para $\mathcal{X} = H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, espacios de Hardy en el disco unidad -o en un abierto simplemente conexo diferente del plano (ver [2],[62]-[66],[73, 83]).

Los resultados obtenidos en esta línea son relativos al problema de la existencia y unicidad de los nodos y coeficientes óptimos [59, 61, 64, 65, 78, 87]; propiedades de estos últimos

[79, 80, 83]; y teoremas de representación para el error óptimo y su orden de convergencia a cero [63, 65, 66].
Un resultado de gran valor teórico lo constituye el siguiente (Andersson[66](1980), ver también [65])
Sea $d\mu = dx$ en la fórmula (1.6), y supongamos que $1 < p$. Entonces

$$\lim_n \left(\inf \{|E_n(H^p)|, S_n\}\right)^{1/\sqrt{n}} = \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{q}}\right) \tag{1.8}$$

donde $q = \dfrac{p}{(p-1)}$.
Notemos que si $d\mu = 1_{[-a,a]}dx,\ 0 < a < 1$, se deduce de [15] que

$$\lim sup \left(inf \{|E_n(H^p)|;\ S_n\}\right)^{1/n} \leq \exp\left(-\frac{2}{C_a}\right) \tag{1.9}$$

para todo $p, 1 \leq p \leq \infty$, donde C_a es la capacidad del condensador $(|z| = 1, [-a, a])$ (ver los teoremas 1.21 y 2.18).
Salta a la vista el grado de coincidencia que hay entre (1.8)-(1.9) y los resultados expuestos en la primera parte sobre la aproximación racional de funciones.
La demostración de (1.8) está basada en gran parte en el siguiente teorema de representación (ver [63, 73])

$$\inf_{S_n} |E_n(H^p)| = \inf_{B_n} \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int_{-1}^{1} f(x) B_n(x)\, dx \right| \tag{1.10}$$

donde $f \in H^p$, $p > 1$, $\|f\|_p$ es la norma de f en el espacio H^p y el ínfimo se toma sobre todos los productos de Blaschke B_n de orden n.
La igualdad (1.10) jugó un papel muy importante en el estudio de las fórmulas óptimas de cuadratura en los espacios H^p, $p > 1$,que en general no son isométricamente isomorfos al dual como ocurre en los espacios de Hilbert, y de hecho constituyó un nuevo e importante vínculo con la aproximación racional.
Bojanov [63], Loeb y Werner [73], usaron (1.10) y el lema de Newman para obtener estimados superiores del error óptimo.
Newman [2] por su parte obtuvo una versión ajustada de su propio lema para mejorar los estimados de Loeb y Werner.
Lo más significativo de esta breve historia -que sólo duró seis años- es que Andersson [66] renunció parcialmente a la ingeniosa técnica de Newman, y probó el resultado exacto (1.8) al reducir el cálculo del estimado superior del error óptimo a un problema propio de la aproximación racional.
Los resultados de la teoría de la aproximación racional utilizados por Andersson en [66], a los cuales llega por la vía del núcleo de Cauchy, merecen mención aparte. Se trata de los conocidos aproximantes (multipuntuales) de Padé.
Las fracciones racionales de tipo Padé surgieron como una extensión natural del clásico polinomio de Taylor, y han encontrado aplicación en diversos campos como la física y la teoría de los números. En los últimos años han recibido una atención especial por parte de numerosos matemáticos de diferentes países. En particular resulta de gran interés su estrecha relación con las fórmulas Gaussianas de cuadratura.
Para mas detalles ver la introducción del capítulo 3 y [7],[9]-[18],[43, 91].
La relación existente entre las fórmulas de cuadratura y la aproximación racional, establecida por medio del núcleo de Cauchy, está tratada brevemente en [36], en el contexto del llamado problema de momentos. Un estudio más completo de esta interacción se realiza en [11, 14, 16] (ver los capítulos II y III de esta tesis). Algunas aplicaciones de la mencionada interrelación pueden verse en [14, 15, 16, 75].

Las fórmulas de cuadratura tienen también un fuerte vínculo con la aproximación mediante splines [60, 83, 84]. Por otra parte, la teoría sobre el problema de momentos ha desempeñado un importante rol en el estudio de las cuadraturas numéricas que aproximan integrales sobre intervalos no acotados (ver el capítulo 4 de [33]).
Las fórmulas de cuadratura se han estudiado desde diferentes puntos de vista. Por ejemplo, la consideración de las sucesiones $S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$, ha conducido al estudio de las tablas infinitas $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$ y $X = \{x_{n,k}\}$. Este enfoque puede hallarse en [89] (ver también [14, 33]).
En [77] se da un tratamiento matemático conceptual a la complejidad de las fórmulas de integración numérica, y se discute la relación existente entre el llamado costo computacional y conceptos como el de exactitud algebraica.
Mencionemos por último a las fórmulas de cubatura. Estas son fórmulas específicas para el cálculo aproximado de integrales dobles, que han sido particularmente estudiadas en los últimos años. En el planteamiento del capítulo 4 de esta disertación, se incluye a estas fórmulas como un caso particular. Ver también [57, 85, 90].

1.3 Explicación del contenido de la tesis.

Los resultados de esta tesis están dirigidos hacia el uso del esquema no lineal de la aproximación racional como método de solución de problemas singulares, y como una alternativa al uso de polinomios, atendiendo al comportamiento de ambos esquemas frente a las singularidades de la función aproximada. Asimismo en los tres capítulos de la tesis se muestran varias formas de vincular el método racional con la solución del problema lineal de la integración numérica. Los principales resultados tratan sobre la aproximación racional de funciones analíticas, que extienden o mejoran resultados anteriores de A. Gonchar, G. López, y el autor. En esta dirección se introduce el concepto afín de cuadratura racional de interpolación, el cual constituye una vía para estudiar teóricamente los vínculos existentes entre la aproximación racional y la integración numérica. En este contexto se presenta un nuevo enfoque sobre la integración numérica en intervalos no acotados, basado en los trabajos de G.López Lagomasino y el autor.
El trabajo aparece organizado por capítulos de la siguiente forma.
En el capítulo 2 se obtienen teoremas directos para la mejor aproximación racional en la métrica del espacio $L_p(\mu)$, para funciones de la clase H^p. Estos resultados[1], posiblemente los más importantes de la tesis, generalizan los estimados demostrados por Gonchar en [5], y permiten apreciar el efecto de la distribución de masas μ, en el orden de convergencia de la mejor aproximación racional.
Como conclusión del capítulo se aplican las técnicas anteriormente utilizadas, en la estimación del error de fórmulas de cuadratura asociadas a una amplia clase de integrales[2]. La vía utilizada para vincular ambos temas es completamente natural, pues se trata de desigualdades bien conocidas para integrales. Los resultados del capítulo 1 pueden usarse para el diseño de una heurística para la solución numérica de ecuaciones integrales con singularidades débiles. En esta dirección, el autor ha obtenido resultados experimentales que no se comunican en esta tesis.
El capítulo 3 comienza con un breve enfoque de la integración numérica en intervalos no acotados, que surge de los trabajos conjuntos de G.López y el autor. En esta parte se utiliza el núcleo de Cauchy como eslabón entre la integración numérica y la aproximación racional.[3] En este capítulo se introduce el concepto de cuadratura racional de interpolación, asociado a los aproximantes multipuntuales de Padé, y se obtienen nuevos resultados sobre la convergencia de las cuadraturas Gaussianas generalizadas y los aproximantes multipuntuales de Padé. Re-

[1] Teoremas 2.1, 2.2, y 2.4.
[2] Teoremas 2.5 y 2.6.
[3] Teoremas 3.1, 3.2 y 3.3.

specto a los últimos se obtiene[4] por primera vez una condición suficiente de convergencia a la transformada de Cauchy de una medida μ, definida sobre los conjuntos de Borel de $[0, +\infty[$, que permite a las tablas de interpolación tener puntos de acumulación en el soporte de la medida μ.

Por otra parte el Teorema 3.5 del capítulo 3 permite obtener convergencia de cuadraturas sin asumir la determinación del problema de momentos clásico[5]. Este enfoque proviene de la teoría de los aproximantes multipuntuales de Padé desarrollada a finales de la década de los 70 (ver [10, 13, 17]).

Las cuadraturas racionales tienen su ámbito natural en los espacios de Hardy en el disco unidad, donde el núcleo de Cauchy sirve de vínculo entre funciones racionales y fórmulas de cuadratura. Es por ello que en el tercer y último capítulo se resuelve el problema de caracterizar a la convergencia puntual de cuadraturas sobre el espacio H^p, $1 \leq p \leq \infty$, en términos de la convergencia uniforme sobre cada compacto, de sucesiones de funciones racionales con polos en el disco unidad y ceros en el infinito[6]. En esta parte se demuestra[7] la imposibilidad de caracterizar a la convergencia de sucesiones de funciones racionales con polos en el disco unidad y ceros en el infinito, en términos de la convergencia débil en el dual del espacio H^p.

Para resolver este último problema se construye un espacio vectorial topológico tonelado de clases de funciones analíticas en el disco unidad cerrado[8]. De esta forma se da cierto completamiento teórico a los resultados del capítulo 3.

El capítulo 4 termina con algunas consideraciones relativas a fórmulas óptimas de cuadratura y su relación con la mejor aproximación uniforme y racional de transformadas de Cauchy.

[4] Corolario 3.1 del Teorema 3.4.

[5] En [33], por ejemplo, sí se exige la determinación del problema de momentos $\int x^n \, d\mu(x) = c_n$.

[6] Teorema 4.1.

[7] Teorema 4.2.

[8] Ver introducción del capítulo 4 y el Teorema 4.3.

Capítulo 2

Orden de aproximación racional en la clase H^p.

Sea μ una medida positiva y finita sobre los borelianos del intervalo $(-1,1)$, y sea $L_p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$, el espacio de las funciones $f : (-1,1) \to \mathbb{C}$, complejas y medibles tales que

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{-1}^{1} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty, \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty} = sup\ ess|f| < \infty$$

provisto de la norma $\|f\|_{L_p}$.
Hay razones que justifican el uso de la distancia media de orden p, en lugar de la uniforme, al considerar la aproximación de una función $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$, por medio de polinomios o fracciones racionales.
Si f no pertenece a L_∞ no hay alternativa. Pero incluso para las funciones acotadas hay resultados justificativos como el siguiente ([23])
Sea $E_n(f, I)_p$ la mejor aproximación polinomial de la función f, de orden n, en la métrica de L_p. Las funciones convexas en $[0,1]$ que satisfacen una condición de Lipschitz de orden $\alpha = 1$, cumplen que

$$E_n(f, [0,1])_1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

mientras que en general se tiene

$$E_n(f, [0,1])_\infty = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

La función $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ prueba que el segundo estimado no puede mejorarse.
El efecto de la distribución de masas μ -que en el ámbito de la aproximación polinomial en la métrica de L_p, ha sido estudiado en los últimos años (ver por ejemplo [71])- es tratado en este capítulo con suficiente grado de generalidad en la aproximación racional a funciones de la clase H^p.
De este estudio se desprende, por ejemplo, la siguiente conclusión no trivial (corolario 2.2): existen medidas μ, cuyo soporte coincide exactamente con el intervalo $(-1,1)$, y funciones no algebraicas $f \in H^\infty$, tales que la mejor aproximación racional cumple la siguiente propiedad

$$\lim \left(R_n(f, (-1,1))_p\right)^{1/\sqrt{n}} = 0$$

donde el subíndice p indica que se considera la mejor aproximación racional a f, de orden n, en la métrica de $L_p(\mu)$.

El propósito fundamental de este capítulo es estudiar la velocidad de aproximación racional en la métrica de $L_p(\mu)$, a funciones $f \in L_p(\mu)$ que admiten prolongación analítica en la clase

H^p (sobre la teoría de los espacios H^p pueden consultarse [31] y [32]). El tipo de resultado que aquí se obtiene, es conocido en la literatura como teorema directo o de tipo Jackson, y representa una generalización de resultados clásicos de Gonchar [5] sobre la aproximación racional de funciones analíticas y acotadas en un disco.
En esta parte se introduce un módulo integral de continuidad con desplazamiento variable

$$\triangle = -hx,$$

cuya definición se ajusta naturalmente a las funciones del espacio H^p, y al esquema técnico sugerido por Gonchar en [5].
El lema de Ganelius [51] y la aproximación por secciones, permiten la obtención de estimados de la mejor aproximación racional en $L_p(\mu)$, que dependen de la densidad de la medida μ en los extremos del intervalo $(-1,1)$, la cual se expresa en términos de la μ-integrabilidad de las funciones $\left(1-x^2\right)^{-\delta}$, $\delta > 0$.
El carácter de los resultados que se demuestran en la primera y principal parte del capítulo, hacen posible hallar de forma directa, nuevos estimados para el error de fórmulas de cuadratura en los espacios H^p, en términos del módulo integral de continuidad de orden p. Por esta vía se establecen nuevas conexiones entre la aproximación racional de funciones analíticas y la integración numérica.
En todo el capítulo se asume que μ es una medida finita y positiva sobre la σ álgebra boreliana del intervalo $(-1,1)$. Se supone además que D es el disco unidad $\{z;\ |z|<1\}$; que $c, c_0, c_1, \ldots$, son constantes absolutas y positivas; y que si f es una función sobre $(-1,1)$, entonces $f_h(x) = f((1-h)x)$, $0<h<1$, $-1<x<1$.

Definición 2.1 ***Sea M_p, $1 \le p \le \infty$, la clase de las medidas μ tales que para toda $f \in H^p$, $f|_{(-1,1)} \in L_p(\mu)$.***

2.1 Es simple comprobar que M_∞ coincide con la clase de todas las medidas, y que la medida de Lebesgue $d\mu = dx$, pertenece a M_p para todo p, $1 \le p \le \infty$.
El teorema de Carleson (ver [31] teorema 9.3) nos permite asegurar que M_p está constituido en general por una amplia variedad de elementos. En particular, M_p contiene a toda medida concentrada en un compacto de $(-1,1)$.

Definición 2.2 ***La mejor aproximación a la función $f \in H^p$, $1 \le p \le \infty$, en la métrica de $L_p(\mu)$, $\mu \in M_p$, por medio de fracciones racionales de orden no mayor que n, $n \in \mathbb{N}$, está dada por $R_n(f)_p = R_n(f,(-1,1))_p = \inf\limits_{r\in F_n} \left(\int_{-1}^{1} |f-r|^p\, d\mu\right)^{1/p}$, para $1 \le p \le \infty$, y $R_n(f)_p = R_n(f,(-1,1))_p = \inf\limits_{r\in F_n} sup\,ess|f(x)-r(x)|$ para $p=\infty$, donde F_n es el conjunto de las fracciones racionales r cuya forma es $r(x) = \dfrac{a_0+\ldots+a_nx^n}{b_0+\ldots+b_nx^n}$, con $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 0,1,\ldots,n$.***

Definición 2.3 ***El módulo integral de continuidad de orden p, $1 \le p \le \infty$, de la función $f \in H^p$, asociado a la medida $\mu \in M_p$, está dado por $\omega_p(f,\mu,\delta) = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f-f_h\|_{L_p}$, donde $0<\delta<1$.***

Proposición 2.1 ***Sea $f \in H_\infty$. Si el soporte S_μ de la medida μ es un compacto contenido en $(-1,1)$, o si f es continua en $[-1,1]$, entonces $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\infty(f,\mu,\delta)=0$.***

Demostración En ambos casos $\omega_\infty(f,\mu,\delta)$ está mayorado por el módulo de continuidad usual de una función continua sobre un compacto, que es bien sabido converge a cero cuando δ tiende a cero. ■

Proposición 2.2 ***Si μ es de Carleson, entonces $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_p(f;\mu,\delta)=0$, para toda $f \in H^p$, $1 \le p < \infty$.***

Demostración Sea $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$. Existe $h = h(\delta, \epsilon) \in (0, \delta)$ tal que

$$\omega_p(f, \mu, \delta) < \|f - f_h\|_{L_p} + \epsilon. \tag{2.1}$$

Pero

$$\lim_{h\to 0} \int_{-1}^{1} |f - f_h|^p d\mu = 0. \tag{2.2}$$

cualquiera sea $f \in H^p$. En efecto, por ser μ de Carleson se tiene que

$$\|f - f_h\|_{L_p(\mu)} \leq c \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - f((1-h)e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}$$

donde $c > 0$.
Del teorema 2.6 de [31], se deduce (2.2), y por tanto si δ es bien pequeño de (2.1) se obtiene la proposición.
■

2.1 Generalización del teorema de Gonchar

Teorema 2.1 ***Para toda*** $f \in H^p$***, y*** $\mu \in M_p$***,*** $1 \leq p \leq \infty$***, es cierto el siguiente estimado***

$$R_n(f)_p = O\left(\inf_{t\geq 1}\left\{\omega_p(f, \mu, e^{-t}) + t\, \exp\left(-\frac{nc_0}{t} + \frac{t}{p}\right)\right\}\right)$$

donde $0 < c_0 < 1$***.***

Demostración La generalización del lema de Newman (ver [5]) consiste en que para cada h, $0 < h < e^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, existe una fracción racional r_n

$$r_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x - b_k}{x + b_k}\right)$$

donde $b_k = b_k(n, h) \in [h, 1[$, que cumple

$$|r_n(x)| \leq e\, \exp\left(-\frac{n}{\log\left(\frac{1}{h}\right)}\right) \tag{2.3}$$

para todo $x \in [h, 1[$.
Definamos $g_n(z) = r_n(x(z))$, donde $x(z)$ es la fracción racional definida por

$$x(z) = \frac{h(2(z+1) - h)}{(4 - 3h)(2(1-z) - h)} \tag{2.4}$$

Las siguientes propiedades son ciertas

$$\frac{h^2}{16} < x(-1+h) \leq x(z) \leq x(1-h) = 1 \tag{2.5}$$

para $z \in \mathbb{R},\ |z| \leq (1-h)$.

$$\Gamma_h := \left\{s;\ |s| = \left(1 - \frac{h}{2}\right)\right\} = \{s;\ Re\ x(s) = 0\} \tag{2.6}$$

$$|g_n(z)| \leq e\, \exp\left\{-\frac{nc_0}{\log\left(\frac{1}{h}\right)}\right\} \tag{2.7}$$

para $z \in \mathbb{R},\ |z| \leq (1-h)$, y $c_0 = \dfrac{1}{2\log(4e)}$.

$$|g_n(z)| = 1,\ \ z \in \Gamma_h. \tag{2.8}$$

Sea $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Para $z \in \mathbb{R},\ |z| \leq (1-h)$ definimos

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} \frac{g_n(s)s - g_n(z)z}{g_n(s)s(s-z)} f(s)\,ds \tag{2.9}$$

La fracción racional ρ_n tiene orden n e interpola a f en los ceros de g_n y en $z=0$.
De (2.5-2.9) se deduce que para $z \in \mathbb{R}$, $|z| < (1-h)$, es válida la siguiente desigualdad

$$|f(z) - \rho_n(z)| \leq c_1\|f\|_p \log\left(\frac{1}{h}\right)\exp\left(-\frac{nc_0}{\log\left(\frac{1}{h}\right)} + \frac{\log\left(\frac{1}{h}\right)}{p}\right) = m(n,h,p). \tag{2.10}$$

Luego

$$\|f - (\rho_n)_h\|_{L_p} \leq \|f - f_h\|_{L_p} + m(n,h,p)\|\mu\|^{\frac{1}{p}} \tag{2.11}$$

donde $\|\mu\| = \mu(-1,1)$.
De (2.11) obtenemos que para $0 < h < e^{-t}$, $t \geq 1$, se cumple el estimado

$$R_n(f)_p \leq c_2 \max\left\{1, \|f\|_p\|\mu\|^{\frac{1}{p}}\right\}\left[\omega_p(f,\mu,e^{-t}) + t\,\exp\left(-\frac{nc_0}{t} + \frac{t}{p}\right)\right]$$

lo que demuestra el teorema. ■

2.2 Para $p = \infty$ se obtiene el teorema clásico de Gonchar.

Teorema 2.2 ***Para todo*** a, $1 - e^{-1} < a < 1$***, se tiene que***

$$\limsup_n \left(\sup_{(f,\mu)} R_n(f,[-a,a])_p\right)^{\frac{1}{n}} \leq \exp\left(-\frac{c_0}{\log\left(\frac{1}{1-a}\right)}\right) \tag{2.12}$$

y el supremo se toma sobre todos los pares (f,μ) ***tales que*** $f \in H^p$, μ ***es una medida cualquiera, y*** $\|f\|_p\,\mu[-a,a]^{1/p} \leq c_3$***.***

Demostración De (2.10) se obtiene, poniendo $h = 1-a$, la siguiente desigualdad

$$R_n(f,[-a,a])_p \leq c_1\mu[-a,a]^{1/p}\|f\|_p c_p^a \exp\left(-\frac{c_0 n}{\log\left(\frac{1}{1-a}\right)}\right) \tag{2.13}$$

donde $c_p^a = \dfrac{\log\left(\dfrac{1}{1-a}\right)}{(1-a)^{1/p}}$, lo que prueba (2.12). ■

2.3 Es presumible que el límite superior en (2.12) no dependa del parámetro p, sino únicamente de la geometría de la región $D\backslash[-a,a]$.

2.2 Otros teoremas directos

Definición 2.4 ***Por*** $H(p,\mu,\alpha)$, $1 \le p \le \infty$, $\mu \in M_p$, $\alpha > 0$***, denotamos a la clase de las funciones*** $f \in H^p$ ***tales que*** $\omega_p(f,\mu,\delta) \le c_4\delta^\alpha$, $0 < \delta \le 1$***, y*** c_4 ***está fija.***

Proposición 2.3 ***Sea*** $f \in H(\infty,\mu,\alpha)$***. Si*** $\alpha > 1$ ***y*** S_μ ***tiene interior no vacío, entonces*** f ***es constante.***

Demostración Sea $[a,b] \subset S_\mu$, $-1 < a < b < 1$. Entonces

$$|f(x) - f_h(x)| \le \omega_\infty(f,\mu,\delta) \le c_5\delta^\alpha,$$

con $h < \delta$, y $x \in [a,b]$. De la anterior desigualdad se infiere que $-xf'(x) = 0$ para $x \in [a,b]$. Como f es analítica en D, se concluye la demostración. ■

2.4 De manera similar a la proposición anterior podemos demostrar que si $f \in H(\infty,\mu,\alpha)$, $\alpha > 1$, y x es un punto aislado de S_μ, entonces $f'(x) = 0$.

Teorema 2.3 ***El siguiente estimado uniforme es válido***

$$\sup_{(f,\mu)} R_n(f)_p = O\left(\sqrt{n}\exp\left(-\pi\alpha\sqrt{\frac{np}{8(1+\alpha p)}}\right)\right) \tag{2.14}$$

donde (f,μ) ***es tal que*** $f \in H(p,\mu,\alpha)$ ***y*** $\|f\|_p\|\mu\|^{1/p} \le c_6$***.***

Demostración Hagamos una modificación a la demostración del teorema 2.1. El siguiente lema es de Ganelius [51] (ver también [50]).

Lema *Para todo* $r > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, existe una fracción* l_n

$$l_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-a_k}{x+a_k}\right)$$

y $a_k = a_k(n,r) \in (0,1)$ *tal que*

$$\max_{0\le x\le 1} x^r|l_n(x)| \le C_r\exp(-\pi\sqrt{nr}) \tag{2.15}$$

y además $\sup\limits_{0\le r\le r_0} C_r < \infty$*, para todo* $r_0 > 0$.

Sea $x(z)$ igual que en (2.4). Si $k_n(z) = l_n(x(z))$, entonces de (2.15) y de la propia expresión de $l_n(x)$ se deducen

$$|k_n(z)| \le 16\,C_r\,\exp\left(-\pi\sqrt{nr} + 2r\log\left(\frac{1}{h}\right)\right) \tag{2.16}$$

$$|k_n(z)| = 1, \quad si\ z \in \Gamma_h \tag{2.17}$$

Definamos a $\rho_n(z)$ igual que en (2.9), con k_n en lugar de g_n.
El mismo procedimiento seguido para la demostración del teorema 1, nos permite probar que

$$R_n(f)_p \le M_r\,c(f,p,\mu)\left[\omega_p(f,\mu,e^{-t}) + t\,\exp\left(-\pi\sqrt{nr} + \left(2r+\frac{1}{p}\right)t\right)\right] \tag{2.18}$$

donde $c(f,p,\mu) = \max\left\{1, \|f\|_p\|\mu\|^{1/p}\right\}$, para todo $t > 0$, estando M_r acotada sobre compactos de $[0,\infty[$.
Sea $m(r) = \pi\sqrt{nr} - \left(2r+\dfrac{1}{p}\right)t$, con $0 < t < \pi\sqrt{\dfrac{np}{8}}$.

Tenemos que $m(r) > 0$ si $\dfrac{|\sqrt{r} - \pi\sqrt{n}|}{4t} < \sqrt{\pi^2 n - \dfrac{8t^2}{p}}$, y alcanza su valor máximo en $r = \dfrac{\pi^2 n}{16t^2}$.

Tomemos t de manera que $r_n \leq \dfrac{\pi^2}{16\nu^2}$, $0 < \nu < \pi\sqrt{\dfrac{p}{8}}$. Para $r = r_n$ la desigualdad (2.18) se convierte en

$$R_n(f)_p \leq M_\nu\, c(f,p,\mu) \inf_{t\geq 1} \left\{ \omega_p\left(f,\mu,e^{-t}\right) + t \exp\left(\frac{-\pi^2 n}{8t} + \frac{t}{p} \right) \right\} \tag{2.19}$$

donde el ínfimo se toma para $t \in I(n,p,\nu) = \left[\nu\sqrt{n}, \pi\sqrt{\dfrac{np}{8}} \right[$, $1 \leq p \leq \infty$.

Sea $t_n = t_n(p,\alpha)$ la solución positiva de la ecuación $-\dfrac{\pi^2 n^2}{8t} + \dfrac{t}{p} = \xi\pi\sqrt{\dfrac{n}{8}}$ con $\xi > 0$ tal que $\alpha t_n = \pi\xi\sqrt{\dfrac{n}{8}}$.

Es simple comprobar que $t_n \in I(n,p,\nu)$ para un cierto $\nu > 0$, y $\xi = \alpha\sqrt{\dfrac{p}{1+\alpha p}}$.

Poniendo $t = t_n$ en (2.19) obtenemos que para $f \in H(p,\mu,\alpha)$ se tiene

$$R_n(f)_p \leq M'(\nu) c(f,p,\mu)\sqrt{n} \exp\left(-\pi\alpha\sqrt{\frac{np}{8(1+\alpha p)}} \right) \tag{2.20}$$

lo que demuestra el teorema. ■

2.5 Para α ó p muy grandes, el estimado (2.14) se comporta como

$$O\left(\sqrt{n} \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{n\alpha}{8}} \right) \right).$$

Por otra parte, la dependencia del parámetro p puede suprimirse voluntariamente en (2.14), ya que $\dfrac{n}{\alpha+1} \leq \dfrac{np}{1+\alpha\, p}$, para todo $p \geq 1$.

Corolario 2.1 ***Sea*** $a_n^{\sqrt{n}} = \sup\{R_n(f)_\infty;\ f \in H(\infty, dx, \alpha),\ \|f\|_\infty \leq c_7\}$***, donde*** $0 < \alpha < 1$***. Entonces***

$$\exp(-2\pi\sqrt{\alpha}) \leq \liminf_n a_n \leq \limsup_n a_n \leq \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2}} \right)$$

Demostración El estimado inferior es consecuencia de Ganelius [51], ya que $f_\alpha(z) = c_8(z+1)\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, verifica $f_\alpha \in H(\infty, dx, \alpha)$ y $\|f_\alpha\|_\infty \leq c_7$ para una selección adecuada de c_8. El estimado superior se obtiene de (2.20) para $p = \infty$. ■

Definición 2.5 ***Sea*** $M_{\delta,p},\ 1 \leq p < \infty,\ \delta > 0$***, la clase de las medidas*** $\mu \in M_p$***, tales que***

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{(1-x^2)^\delta} < \infty.$$

Ejemplos Sea dx la medida de Lebesgue en $(-1,1)$, y sean

$$d\mu_k(x) = (1-x^2)^k dx,\ \textit{con}\ k > -1,$$

$$d\mu_a = \delta_{[-a,a]} dx,\ 0 < a < 1,$$

$$d\mu_\sigma(x) = \exp\left(-\frac{1}{(1-x^2)^\sigma} \right) dx,\ \sigma > 0.$$

Es fácil comprobar que para todo p, $1 \leq p < \infty$, se cumplen las siguientes desigualdades

$$dx \in \bigcap_{0<\delta<1} M_{\delta,p}$$

$$d\mu_k \in \bigcap_{0<\delta<k+1} M_{\delta,p}$$

$$d\mu_a,\ d\mu_\sigma \in \bigcap_{0<\delta} M_{\delta,p}$$

Proposición 2.4 *Si $\delta_1 > \delta_2 > 0$, entonces $M_{\delta_1,p} \subset M_{\delta_2,p}$, para todo p, $1 \leq p < \infty$.*

Demostración Es consecuencia de la monotonía de la integral de Lebesgue, y de que $(1-x^2) < 1$, para $|x| < 1$. ■

Lema 1 *Sea $f \in L_p(\mu)$, con μ una medida positiva y finita sobre la σ álgebra boreliana de $[-b, b]$, $b > 0$. Sean también $I_1 = [-b, a]$ y $I_2 = [-a, b]$, con $0 < a < b$; y r_i, $i = 1, 2$, dos fracciones racionales tales que*

$$\|\,(f - r_i)\,\delta_{I_i}\|_{L_p} \leq \beta_1 \tag{2.21}$$

$$\|r_i\|_{L_p} \leq A \tag{2.22}$$

$$grado\, r_i \leq k_i \tag{2.23}$$

donde $\beta_1 > 0$, $A > 0$, $k_i \geq 0$, $i = 1, 2$, están prefijados, y δ_I es la función indicadora del conjunto I. Es decir,

$$\delta_I(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin I \\ \\ 1 & si \quad x \in I \end{cases}$$

Entonces, para cada $\beta_2 > 0$ existe una fracción racional r tal que

$$\|f - r\|_{L_p} \leq 6(\beta_1 + \beta_2) \tag{2.24}$$

$$\|r\|_{L_p} \leq 2A \tag{2.25}$$

$$grado\, r \leq k_1 + k_2 + c_9 \log\left(e + \frac{b}{a}\right) \log\left(e + 2\left[\|f\|_{L_p} + A\right]\beta_2^{-1}\right) \tag{2.26}$$

siendo $c_9 > 1$.

Demostración Sean $\beta_2 > 0$, $k > 0$. Del lema 3 de [5] tenemos que existe una fracción racional ρ, tal que

$$|\rho(x)| \leq k\,\beta_2,\ para\ x \in [-b, -a]$$

$$|1 - \rho(x)| \leq k\,\beta_2,\ para\ x \in [a, b]$$

$$0 \leq \rho(x) \leq 1,\ para\ x \in (-a, a)$$

$$grado\, \rho \leq c_9\, \log\left(e + \frac{b}{a}\right) \log\left(e + \frac{1}{k\beta_2}\right)$$

con $c_9 > 1$.
Sea $k = \left[2^{\frac{p-1}{p}}\left(\|f\|_{L_p} + A\right)\right]^{-1}$, y sea r la fracción racional definida por $r = (1-\rho)\,r_1 + \rho\, r_2$. De inmediato

es posible comprobar (2.25) y (2.26).
Para probar (2.23) observemos que

$$\|f-r\|_{L_p}^p \leq \|(f-r)\delta_{I_1}\|_{L_p}^p + \|(f-r)\delta_{[-a,a]}\|_{L_p}^p + \|(f-r)\delta_{I_2}\|_{L_p}^p .$$

Por una parte tenemos que

$$\|(f-r)\delta_{I_i}\|_{L_p}^p \leq 2^{p-1}\left(\beta_1^p + \beta_2^p 2^{p-1} k^p \left(\|f\|_{L_p}^p + A^p\right)\right) \leq 2^{p-1}\left(\beta_1^p + \beta_2^p\right) \tag{2.27}$$

$i = 1, 2$. Mientras que

$$\|(f-r)\delta_{[-a,a]}\|_{L_p}^p \leq 2^p \beta_1^p \leq 2\left(\beta_1^p + \beta_2^p\right) \tag{2.28}$$

Sumando miembro a miembro (2.27) y (2.28), y teniendo en cuenta que $(\beta_1^p + \beta_2^p)^{\frac{1}{p}} \leq \beta_1 + \beta_2$, se tiene (2.24).
El lema está demostrado. ■

2.6 El lema anterior generaliza al lema 3 de [12].

Teorema 2.4 *Sean $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $\delta > 0$, y μ una medida de Carleson tal que $\mu \in M_{\delta,p}$. Es válido el siguiente estimado uniforme*

$$\sup_f R_n(f)_p = O\left(\exp\left(-\alpha\pi \frac{\sqrt{n\phi p\delta}}{\alpha p + 1}\right)\right) \tag{2.29}$$

donde $0 < \phi < \dfrac{1}{2}$, y el supremo se considera para las $f \in H^p$ con $f \in H(p,\mu,\alpha)$, $\|f\|_p \leq c_{10}$.

Demostración Sean $r = \delta/p$ y $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Sea $l_n(x) = l_n(x,r)$ la correspondiente fracción racional dada por el lema de Ganelius (ver la demostración del Teorema 2.3).
Definamos

$$x_k(z) = \frac{\left(1 - \dfrac{h}{2} + (-1)^{k+1} z\right)}{2(3-h)\left(\dfrac{3}{4} + (-1)^k z\right)} \tag{2.30}$$

$k = 1, 2$.
Observemos que $x_k\left((-1)^k\left(1 - \dfrac{h}{2}\right)\right) = 0$, $k = 1, 2$, y además

$$\frac{h}{21} < x_k((-1)^k(1-h)) \leq x_k(z) \leq x_k\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right) = 1$$

para z entre $(-1)^k(1-h)$ y $\dfrac{(-1)^{k+1}}{2}$, $k = 1, 2$.
Sean $I_1 = \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$, y sea $\Gamma_{h,k}$ la circunferencia con centro en el punto $\left((-1)^k \dfrac{(1-2h)}{8}, 0\right)$ y radio $\dfrac{7-2h}{8}$, $k = 1, 2$.
Podemos verificar que

$$\Gamma_{h,k} = \{s;\ \mathbf{Re}\, x_k(s) = 0\},\ k = 1, 2. \tag{2.31}$$

Para $f \in H^p$, $1 \leq p < \infty$ sean las fracciones racionales

$$(2\pi i) R_{m,k}(z) =$$

$$\int_{\Gamma_{h,k}} \frac{\rho_{m,k}(s)\left(s - (-1)^k\left(\dfrac{1-2h}{8}\right)\right) - \rho_{m,k}(z)\left(z - (-1)^k\left(\dfrac{1-2h}{8}\right)\right)}{\rho_{m,k}(s)(s-z)\left(s - (-1)^k\left(\dfrac{1-2h}{8}\right)\right)} f(s)\,ds$$

donde $\rho_{m,k}(z) = l_m(x_k(z))$, $z \in [-1+h, \frac{1}{2}]$ si $k=1$, $z \in [-\frac{1}{2}, 1-h]$ si $k=2$.
Tenemos que

$$\| \left(f - R_{n,k}\right)_h \delta_{I_k} \|_{L_p} \leq M \, \exp(-\pi\sqrt{mr})\, C(z,k,h,m,p,r),$$

donde $C = C(z,k,h,m,p,r)$ está dada por

$$C = \left[\int_{I_k} \left(\frac{\displaystyle\int_{\Gamma_{h,k}} \frac{|f(s)||ds|}{\left|\rho_{m,k}(s)\,(s-(1-h)z)\left(s-(-1)^k\left(\frac{1-2h}{8}\right)\right)\right|}}{|x_k((1-h)z)|^r} \right)^p d\mu(z) \right]^{\frac{1}{p}}$$

Luego

$$\| \left(f - R_{m,k}\right)_h \delta_{I_k} \|_{L_p} \leq M \, \|f\|_p \, \frac{\exp\left(-\pi\sqrt{mr}\right) \log\left(\frac{1}{h}\right)}{h^{1/p}} \left(\int_{I_k} \frac{d\mu(z)}{|x_k((1-h)z)|^{pr}} \right)^{1/p}$$

Las anteriores desigualdades son válidas en virtud de que

$$\int_{\Gamma_{h,k}} \frac{|ds|}{|s-(1-h)z|} \leq c_{11} \log\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$|\rho_{m,k}(s)| = 1, \; si \; s \in \Gamma_{h,k},$$

y la desigualdad (2.15) del lema de Ganelius.
De esta forma tenemos

$$\begin{aligned} &\| \left(f - R_{m,k}\right)_h \delta_{I_k} \|_{L_p} \leq \\ &\leq c_{12} \|f\|_p \log\left(\frac{1}{h}\right) K(k,h,p,r) \exp\left(-\pi\sqrt{mr} + \frac{\log\left(\frac{1}{h}\right)}{p} \right) \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde

$$K(k,h,p,r) = \left(\int_{I_k} \frac{d\mu(x)}{\left|\left(1-\frac{h}{2}\right) + (-1)^{k+1}(1-h)x\right|^{rp}} \right)^{1/p}$$

Podemos asegurar que

$$K(k,h,p,r) \leq 2^{r+\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{\left|\left(1-\frac{h}{2}\right)^2 - (1-h)^2 x^2\right|^{rp}} \right)^{1/p} \tag{2.33}$$

para $k = 1, 2$. De (2.32) y (2.33) obtenemos

$$\| \left(f - R_{m,k}\right)_h \delta_{I_k} \|_{L_p} = O(\beta(m,p,h,r)) \tag{2.34}$$

donde

$$\begin{aligned} &\beta(m,p,h,r) = \\ &= \|f\|_p \log\left(\frac{1}{h}\right) \left(\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{\left|\left(1-\frac{h}{2}\right)^2 - (1-h)^2 x^2\right|^{rp}} \right)^{1/p} \exp\left(-\pi\sqrt{mr} + \frac{\log\left(\frac{1}{h}\right)}{p} \right) \end{aligned}$$

Es decir

$$\| \left(f - (R_{m,k})_h\right) \delta_{I_k} \|_{L_p} \leq \|f - f_h\|_{L_p} + O(\beta(m,p,h,r)) = \beta_1. \tag{2.35}$$

Sea $s \in \Gamma_{h,k}$, $k = 1,2$ y $z \in [-1+h, \frac{1}{2}]$, *si* $k = 1$, $z \in [-\frac{1}{2}, 1-h]$ *si* $k = 2$, entonces $|s - z| \geq \frac{h}{2}$, $(h < e - 1)$. Luego, para $k = 1,2$

$$\| (R_{m,k})_h \|_{L_p} \leq c_{12} \|f\|_p \frac{\|\mu\|^{1/p}}{h} = A. \tag{2.36}$$

Además

$$orden\,(R_{m,k})_h = m. \tag{2.37}$$

Las desigualdades (2.35), (2.36) y (2.37), se corresponden respectivamente con (2.21), (2.22) y (2.23) del lema 1.
Sean $h_n = e^{-t\sqrt{n}}$ y $\beta_2 = \beta_n = e^{-d\sqrt{n}}$, $t, d > 0$ con n suficientemente grande.
Si $0 < a < b < 1$, existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$n^{-1} c_9 \log(e+2) \log\left(e + 2\beta_n^{-1}\|f\|_p \left(c_{13} + c_{12}\|\mu\|^{1/p} h_n^{-1}\right)\right) <$$

$$< a < b < 1 - \frac{2}{n}$$

donde se ha utilizado que $\|f\|_{L_p} \leq c_{13}\|f\|_p$, porque μ es una medida de Carleson.
Sea m definida por

$$m = \left[n - \frac{1}{2} - c_9 \log(e+2) \log\left(e + \frac{2\|f\|_p}{\beta_n}\left(c_{13} + c_{12}\frac{\|\mu\|^{1/p}}{h_n}\right)\right)\right] + 1$$

donde $n > n_0$, y $[x]$ denota aquí a la parte entera de x.
Del lema 1 tenemos que existe una fracción racional r tal que

$$\|f - r\|_{L_p} \leq 6\left(\beta\left(m,p,h_m,r\right) + \beta_n + \|f - f_{h_m}\|_{L_p}\right)$$

Además, según la definición de m y el lema 1, tenemos que para $n > n_0$

$$orden\, r \leq 2m + c_9 \log(e+2) \log\left(e + \frac{2\|f\|_p}{\beta_n}\left(c_{13} + c_{12}\frac{\|\mu\|^{1/p}}{h_n}\right)\right) \leq n$$

donde hemos usado que $n > m$ y la propia definición de m. Por otra parte, para $k = 1,2$

$$\| (R_{m,k})_{h_m} \|_{L_p} \leq c_{12}\|f\|_p \|\mu\|^{1/p} e^{t\sqrt{n}}$$

Luego, también del lema 1 deducimos que

$$\|r\|_{L_p} \leq 2c_{12}\|f\|_p \|\mu\|^{1/p} e^{t\sqrt{n}}$$

Si $n > n_0$ tenemos que

$$R_n(f)_p \leq 6\|f - f_{h_m}\|_{L_p} + \tag{2.38}$$

$$+6c_{14}\|f\|_p \log\left(\frac{1}{h_m}\right) K(h_m,r,p) \exp\left(-\pi\sqrt{mr} + \frac{t\sqrt{m}}{p}\right) + 6e^{-d\sqrt{n}}$$

donde

$$K(h,r,p) = \left(\int_{-1}^{1} \frac{d\mu(x)}{\left|\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2 - (1-h)^2 x^2\right|^{rp}}\right)^{1/p}$$

Sea $\sigma > 0$ bien pequeño ($\sigma < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$). Entonces

$$\left| \left(1 - \frac{h_m}{2}\right)^2 - (1 - h_m)^2 x^2 \right|^{-\delta} \leq v(\delta, x)$$

para todo m, donde

$$v(\delta, x) = \begin{cases} |1 - x^2|^{-\delta} & \text{si} \quad x \in [-1, -\sigma - \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma, 1] \\ \\ M & \text{si} \qquad\quad x \in \left(-\sigma - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma\right) \end{cases}$$

siendo M una cierta constante positiva.
La condición $\mu \in M_{\delta,p}$, implica que $v(\delta, z) \in L_1(\mu)$. Del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, deducimos que el $\lim_n K(h_n, \delta, p)$ existe y por tanto $\sup_n K(h_n, \delta, p) = K(\delta, p) < \infty$.
Por otra parte, para n bien grande $m \geq n(b - a)/2 = n\phi$.
Si $f \in H(p, \mu, \alpha)$, de (2.38) tenemos para $\pi\sqrt{\delta/p} > t/p$, las siguientes desigualdades

$$R_n(f)_p \leq M_{\delta,\phi} \left(e^{-\alpha t\sqrt{m}} + e^{-d\sqrt{n}} + \|f\|_p \sqrt{n} \exp\left(-\pi\sqrt{\frac{m\delta}{p}} + \frac{t\sqrt{m}}{p} \right) \right)$$

$$\leq M_{\delta,\phi} \left(e^{-\alpha t\sqrt{n\phi}} + e^{-d\sqrt{n}} + \|f\|_p \sqrt{n} \exp\left(-\sqrt{n\phi} \left(\pi \left(\frac{\delta}{p}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{t}{p} \right) \right) \right)$$

Si t y d son tales que

$$\sqrt{\phi} \left(\pi\sqrt{\frac{\delta}{p}} - \frac{t}{p} \right) = d = \alpha t\sqrt{\phi}$$

tendremos entonces que

$$R_n(f)_p \leq M'(\delta, \phi_0) \max\{1, \|f\|_p\} \exp\left(-\alpha\pi \frac{\sqrt{np\delta\phi_0}}{\alpha p + 1} \right) \tag{2.39}$$

donde $0 < \phi_0 < \phi$, n es suficientemente grande, y $M'(\delta, \phi_0)$ sólo depende de δ y ϕ_0, lo que demuestra el Teorema 2.4. ∎

Corolario 2.2 *Sea $1 \leq p < \infty$. Si $\mu \in M_{\delta,p}$ para algún $\delta > 0$, y es de Carleson, entonces*

$$\limsup_n \left(\sup_{f \in H(p,\mu,\alpha), \|f\|_p \leq c_{16}} R_n(f)_p \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \exp\left(-\frac{\alpha\pi}{\alpha p + 1} \sqrt{\frac{p\delta(\mu)}{2}} \right) \tag{2.40}$$

donde $\delta(\mu) = \sup\{\delta > 0;\ \mu \in M_{\delta,p}\}$.

Demostración De (2.39) se tiene

$$\limsup_n \left(\sup_{f \in H(p,\mu,\alpha), \|f\|_p \leq c_{16}} R_n(f)_p \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \exp\left(-\frac{\alpha\pi\sqrt{\phi p\delta}}{\alpha p + 1} \right) \tag{2.41}$$

para todo ϕ, $0 < \phi < \frac{1}{2}$, y todo δ, $0 < \delta < \delta(\mu)$. Por la continuidad del miembro derecho de (2.41) se obtiene (2.40). ∎

Corolario 2.3 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $\delta(\mu)$ como en el corolario 2.2 . Si μ es de Carleson y $\delta(\mu) = \infty$, entonces*

$$\limsup_n \left(\sup_{f \in H(p,\mu,\alpha), \|f\|_p \leq c_{16}} R_n(f)_p \right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$$

Demostración El estimado (2.41) es cierto para todo $\delta > 0$. Pasando al límite cuando δ tiende a infinito, probamos el corolario. ■

Lema 2 *Si $f \in H^1$, y es de variación acotada en $[-1,1]$, entonces $f \in H(1, dx, 1)$. Más precisamente $\omega_1(f, dx, \delta) \leq c_{17} V(f)\delta$, donde $V(f)$ es la variación total de f en $[-1,1]$.*

Demostración Sea $f \in H^1$ y de variación acotada en el intervalo $[-1,1]$. sea $V(x)$ la variación total de f en $[-1,x]$, $-1 < x \leq 1$.
Si h es pequeño, tenemos que

$$\int_0^1 |f(x) - f_h(x)| dx \leq \int_0^1 |V(x) - V_h(x)| dx =$$

$$= \int_0^1 V(x)dx - \frac{1}{1-h}\int_0^{1-h} V(x)dx \leq \int_{1-h}^1 V(x)dx \leq V(f)h.$$

Por otra parte

$$\int_{-1}^0 |f(x) - f_h(x)| dx \leq \int_{-1}^0 (V_h(x) - V(x))\, dx =$$

$$= \frac{1}{1-h}\int_{-1+h}^0 V(x)dx - \int_{-1}^0 V(x)dx \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{-1+h} V(x)dx + \frac{h}{1-h}\int_{-1}^0 V(x)dx \leq \frac{h(2-h)}{1-h} V(f) \leq 4hV(f)$$

Luego, para $0 < h < \frac{1}{2}$ tenemos que $\int_{-1}^1 |f(x) - f_h(x)| dx \leq 5hV(f)$. ■

Corolario 2.4

$$\limsup_n \left(\sup_f R_n(f)_1 \right)^{1/\sqrt{n}} \leq e^{-\pi/(2\sqrt{2})},$$

donde el supremo se toma sobre todas las $f \in H^p$ tales que $\|f\|_1 \leq 1$; $V(f) \leq c_{18}$.

Demostración Es consecuencia del corolario 2.2 y del lema 2 tomando $\alpha = p = \delta_0 = 1$. ■

2.3 Aplicaciones en la estimación del error

Lema 3 *Sea μ una medida con $S_\mu \subset [-a,a]$, $0 < a < 1$. Sean $f \in H^1$ y $\rho_n = \rho_{n,h}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 - h = a$, la fracción racional asociada a f según (2.9).*
Las integrales

$$S_n(f) = \int_{-1}^1 \rho_n(x) d\mu(x),\ n \in \mathbb{N}$$

constituyen una regla de integración numérica del tipo

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k}\, f(a_k) + \lambda_{n+1}\, f(0)$$

donde los $\lambda_{n,k}, k = 1, ..., n; \lambda_{n+1}$, son coeficientes complejos, y los nodos a_k,
$k = 1, ..., n$, son números diferentes dos a dos, pertenecientes al intervalo $[-a,a]$.

Demostración Sea Γ_h, $1-h=a$, la circunferencia definida en (2.6), y sea $g_n(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$, la fracción racional de la demostración del teorema 2.1, donde P_n y Q_n son polinomios primos relativos y P_n es mónico. La fracción ρ_n puede escribirse de la siguiente forma

$$\rho_n(z)=\frac{1}{2\pi i Q_n(z)}\int_{\Gamma_h}\frac{M_n(z,s)}{P_n(s)s}f(s)\,ds$$

donde

$$M_n(z,s)=\frac{Q_n(z)P_n(s)\,s-P_n(z)Q_n(s)\,z}{s-z}$$

De la propia definición de g_n, se deduce que $P_n(0)\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$; los ceros de P_n son simples y están en el intervalo $[-a,a]$; los ceros de Q_n y P_n se corresponden uno a uno, a través de la simetría relativa a la circunferencia Γ_h.

Los teoremas de Fubini e Integral de Cauchy nos permiten obtener que

$$\int_{-1}^{1}\rho_n(x)d\mu(x)=\int_{-a}^{a}\rho_n(x)d\mu(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}\frac{f(s)}{P_n(s)s}\left(\int_{-a}^{a}\frac{M_n(x,s)}{Q_n(x)}\,d\mu(x)\right)ds=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}m_n(a_k)\,f(a_k)\;+\;\lambda_{n+1}m_n(0)\,f(0),$$

donde los números a_k, $k=1,...,n$; son los ceros de P_n; los coeficientes λ_k, $k=1,...,n+1$, provienen de la descomposición en suma de fracciones simples siguiente

$$\frac{1}{P_n(z)z}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{z-a_k}\;+\;\frac{\lambda_{n+1}}{z},$$

y finalmente

$$m_n(z)=\int_{-a}^{a}\frac{M_n(x,z)}{Q_n(x)}d\mu(x).$$

El lema está demostrado. ∎

2.7 La interpolación en el nodo $x=0$ es superflua. No influye en los resultados de convergencia y se utilizó en el teorema 2.1 con el único propósito de que el aproximante $\rho_n(x)$ tenga orden (n,n). Por tanto puede omitirse.

Teorema 2.5 *Para $0<a<1$, sea M_a la clase de las medidas μ tales que su soporte S_μ cumple $S_\mu\subset[-a,a]$, y $\|\mu\|\leq 1$. Sea $E_{n,p}$, $1\leq p\leq\infty$, el error de la fórmula de cuadratura, de orden n, asociada a la medida $\mu\in M_a$, en el espacio H^p. Entonces*

$$\sup_{\mu\in M_a}E_{n,p}(\mu)\leq c_{19}\frac{\log\left(\dfrac{1}{1-a}\right)\exp\left(-\dfrac{c_0(n-1)}{\log\left(\dfrac{1}{1-a}\right)}\right)}{(1-a)^{1/p}} \tag{2.42}$$

Demostración Sea $S_{n-1}(f)$, $f\in H^p$, el aproximante del lema 3. De la siguiente desigualdad

$$\left|\int_{-1}^{1}f\,d\mu\;-\;S_{n-1}(f)\right|\leq\|\mu\|^{1/p}\left(\int_{-1}^{1}|f(x)-\rho_n(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{2.43}$$

y de (2.10,2.43) se concluye (2.42). El teorema queda demostrado. ∎

Teorema 2.6 *Sea $\mu \in M_p$, $1 \le p \le \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $t \ge 1$, existe una regla de integración $S_{n,t}$, de orden n, tal que*

$$\left| \int_{-1}^{1} f\, d\mu \,-\, S_{n,t}(f) \right| = O\left(\inf_{t \ge 1} \left\{ \omega_p(f, \mu, e^{-t}) \,+\, t \exp\left(-\frac{c_0 n}{t} + \frac{t}{p} \right) \right\} \right) \tag{2.44}$$

para cada $f \in H^p$.

Demostración Es consecuencia de las desigualdades (2.11) y (2.43), tomando $S_{n,t}$ como

$$S_{n,t}(f) = \int_{-1}^{1} \rho_n((1-h)x) d\mu(x)$$

donde $\log\left(\frac{1}{h}\right) = t$ y ρ_n es como en (2.9). ■

2.8 Si $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_p(f, \mu, \delta) = 0$, puede elegirse una sucesión (t_n), $t_n \ge 1$, $t_n \to \infty$, tal que

$$\lim_{n} \left| \int_{-1}^{1} f\, d\mu \,-\, S_n(f) \right| = 0$$

donde $S_n = S_{n,t_n}$.
Si $f \in H(p, \mu, \alpha)$ sea $t_n = \sqrt{\dfrac{nc_0}{\alpha + \dfrac{1}{p}}}$. De (2.44) se deduce entonces que

$$\left| \int_{-1}^{1} f\, d\mu \,-\, S_n(f) \right| \le c_{21} \sqrt{n} \exp(-m(\alpha, p)\sqrt{n}) \tag{2.45}$$

donde $m(\alpha, p) = \sqrt{\dfrac{c_0}{\alpha + \dfrac{1}{p}}} \ge \sqrt{\dfrac{c_0}{\alpha + 1}}$
El orden del estimado (2.45), como función de n, es exacto para $d\mu = dx$ (ver [66]).

Capítulo 3

Cuadraturas respecto a integradores variantes

Consideremos la fórmula

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \; + \; R_n(f), \tag{3.1}$$

donde α es una función creciente en $[a,b]$; $x_k \in [a,b]$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,...,n$, y f es una función Riemann integrable respecto a α en el intervalo $[a,b]$.
La fórmula (3.1) se dice interpolatoria o de interpolación si $R_n(f) = 0$ para todo polinomio f cuyo grado no sobrepasa un cierto nÀmero natural r. Se dice entonces que (3.1) tiene grado de exactitud r.
Las fórmulas del paralelogramo, trapecio y Simpsom son ejemplos bien conocidos de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio.
Si p_n es el polinomio de Lagrange de grado $\leq n-1$, que interpola a la función f en los puntos x_k, $k = 1,...,n$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b p_n(x)\, d\alpha(x) \; + \; R_n(f), \tag{3.2}$$

cumple ser de interpolación con grado de exactitud no menor que $n-1$. Esta fórmula se corresponde con (3.1) pues

$$\int_a^b p_n(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

donde

$$\lambda_k = \int_a^b \frac{Q_n(x)}{Q_n'(x_k)\,(x - x_k)}\, d\alpha(x), \tag{3.3}$$

y $Q_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$.
En la literatura se mencionan dos estrategias fundamentales para la aproximación del funcional lineal

$$L(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x). \tag{3.4}$$

Uno de los planteamientos estratégicos se basa en la selección de una sucesión adecuada (f_n), que aproxime a f cuando n tiende a infinito en algún sentido generalmente más débil que el dado por la norma uniforme, de modo que $L(f_n)$ converja a $L(f)$.
El planteamiento alternativo consiste en modelar al aproximante de $L(f)$ como una sucesión de funcionales lineales (L_n), que cumpla ser puntualmente convergente a L sobre una cierta subclase.
Hay fórmulas para las cuales ambas estrategias coinciden, como es el caso de la fórmula (3.2).
La utilidad práctica de cualquier aproximante depende de su computabilidad. Las cuadraturas numéricas de interpolación tienen algunas ventajas en este sentido, especialmente en el cálculo de los coeficientes λ_k.
El planteamiento $L(f) \approx L_n(f)$ es típico en el espacio de Hardy en el disco unidad. En este trabajo estudiaremos algunos aspectos del mismo, pues está vinculado directamente a la aproximación racional de

funciones analíticas.
En lo que sigue usaremos el símbolo μ para denotar indistintamente a una medida finita y positiva sobre la recta real, o a una función creciente y acotada.
Las fórmulas o métodos de integración numérica racionales de tipo Gauss, debieron surgir a finales de la década de los 70, relacionadas con los trabajos de A.A. Gonchar y G. López en la teoría de la aproximación racional de ciertas clases de funciones analíticas (ver [10, 17]). Estas reglas, tal como sugiere su nombre, son fórmulas de cuadratura de **grado máximo de exactitud**, cuyo principal atributo parece ser su íntima relación con los aproximantes racionales de interpolación de tipo Padé, asociados a funciones de tipo Stieltjes. Expliquemos brevemente esto último.
Empecemos por considerar una medida finita y positiva μ con soporte $S_\mu \subset \mathbb{R}$. Recordemos que si g es una función no decreciente tal que $dg = d\mu$, entonces S_μ coincide con el conjunto de los puntos de crecimiento de g (ver [33]).
Supongamos que S_μ es infinito y tengamos en cuenta dos casos:
i) $S_\mu \subset [a,b],\ -\infty < a < b < +\infty$.
ii) $S_\mu \subset [0,+\infty[$.
La función $\widehat{\mu}(z) = \displaystyle\int \frac{d\mu(x)}{z-x}$, es holomorfa en el complemento de C_μ, envoltura convexa de S_μ, y recibe los nombres de función de tipo Markov o Stieltjes, según se trate del primero o el segundo caso, respectivamente.
También a $\widehat{\mu}$ se le llama integral de tipo Cauchy, transformada de tipo cauchy de la medida μ, etc.
Muchas funciones importantes de la matemática pueden representarse en la forma de una cierta $\widehat{\mu}$: logarítmicas, series de Borel, soluciones de problemas de contorno y otras.
Sea ahora $\alpha = \{\alpha_{n,k};\ k = 1,...,2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ una tabla de puntos del plano ampliado, situada en el complemento de C_μ, y tal que los polinomios $\omega_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{x}{\alpha_{n,k}}\right)$ sean positivos para todo $x \in C_\mu$ (se admite la posibilidad de que algunos términos de α sean el punto del infinito, en cuyo caso el inverso se toma igual a cero).
Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una fracción racional $R_n = R_n(\mu,\alpha)$, de orden n, y tal que la función $\left(\dfrac{\mu - R_n}{\omega_n}\right)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash C_\mu$ y tiene un cierto desarrollo formal en el infinito que le caracteriza (ver [10, 13]).
Esta sucesión de fracciones racionales (R_n) interpola a la función $\widehat{\mu}$ en los puntos de la correspondiente fila enésima $(\alpha_{n,1},\alpha_{n,2},...,\alpha_{n,2n})$ de la tabla α, tiene como caso particular a los aproximantes clásicos de Padé cuando $\alpha = \{\infty\}$.
Para obtener más detalles acerca del desarrollo y utilización de estos aproximantes pueden consultarse [10, 17, 35, 42].
Sea n un número natural fijo. Es conocido que el correspondiente aproximante multipuntual de Padé asociado a $\widehat{\mu}$, sea este R_n, tiene exactamente n polos simples pertenecientes al intervalo C_μ. Además, estos puntos singulares coinciden con los ceros del enésimo polinomio ortogonal asociado a la medida $d\mu_n = \dfrac{d\mu}{\omega_n}$.
ndex$d\mu_n$ Si R_n se descompone en suma de fracciones simples

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_{n,k}}{z - x_{n,k}},$$

y con los coeficientes $(\theta_{n,k})$, y los polos $(x_{n,k})$, construimos el funcional

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{n,k} f(x_{n,k}),$$

ocurre entonces que

$$S_n\left(\frac{P}{\omega_n}\right) = \int \frac{P}{\omega_n}\mu,$$

para cualquier polinomio P, cuyo grado sea menor o igual a $2n-1$.
Dicho en otros términos. Para cada aproximante multipuntual de Padé R_n, existe en correspondencia una

fórmula de cuadratura

$$E_n(f) = \int f\, d\mu \; - \; S_n(f) \tag{3.5}$$

que es exacta sobre cierta clase de funciones racionales con polos prefijados.
La fórmula (3.5) ha recibido el nombre de cuadratura numérica racional de tipo Gauss, y cumple la siguiente propiedad: $S_n(f_z) = R_n(z)$, donde $f_z(x) = (z-x)^{-1}$ (núcleo de Cauchy).
Este capítulo está dedicado al estudio del vínculo que en general existe entre las fórmulas de integración numérica sobre segmentos del eje real, y el problema de aproximación racional asociado por intermedio del núcleo de Cauchy.
La primera parte constituye un nuevo y breve enfoque de la integración numérica sobre un intervalo no acotado, y en la misma se establecen tres resultados para caracterizar a la convergencia puntual sobre un espacio de funciones, de las reglas de integración numérica, en términos de la convergencia uniforme sobre cada compacto de la sucesión de fracciones asociadas.
Después de dar la definición de fórmula interpolatoria racional -la de tipo Gauss en particular- el capítulo termina con tres teoremas que mejoran resultados anteriores del citado género, y que además sirven para ilustrar lo conveniente que resulta este enfoque dual sobre tan importantes temas.
A lo largo del presente capítulo usaremos los siguientes símbolos, conceptos y resultados.
i) $U = \mathbb{C}\backslash I$, donde el símbolo I denotará indistinta y únicamente a los intervalos $[0, +\infty[$, $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.
ii) U' representa a la unión de U con el punto infinito.
iii) $f_z(x) = (z-x)^{-1}, \; z \in U, \; x \in I$ (núcleo de Cauchy).
iv) μ es una medida positiva sobre la σ álgebra boreliana de I, con soporte infinito S_μ.
v) g es una función creciente y acotada en I, con infinitos puntos de crecimiento.
vi) b es una medida compleja, de variación finita, sobre la σ álgebra boreliana de I.
vii) $g_a(z, s), \; a > 0$, es la función de Green, asociada a la región $U_a = \mathbb{C}\backslash[-a, a]$, con punto singular s.
viii) Sean K y L dos conjuntos compactos y disjuntos del plano. El par (K, L) es llamado condensador de placas K y L. Si se intercambian de lugar las placas K y L, el nuevo par representa al mismo condensador.
ix) Sea h la solución del problema de Dirichlet, asociado a la región $R = \mathbb{C}\backslash(L \cup K)$, tal que $h/FrK \equiv 0$ y $h/FrL \equiv 1$ (Fr A denota a la frontera de A). La función h recibe el nombre de medida armónica de R.
Sea Γ un contorno arbitrario cerrado y simple de Jordan, que separa a L de K. El número $C = C(L, K) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial h}{\partial n}\, ds$, donde $\dfrac{\partial h}{\partial n}$ es la derivada en la dirección normal a Γ, orientada de K hacia L, recibe el nombre de **capacidad** (de Green) **del condensador** (L, K). Es fácil ver que dicho valor no depende del contorno escogido con las propiedades indicadas.
x) Sea $\alpha = \{\alpha_{n,k}, \; k = 1, ..., 2n, \; n \in \mathbb{N}\}$ una tabla contenida en el compacto $K \subset U_a$, $a > 0$, y tal que cada fila $\alpha(n) = \{\alpha_{n,1}, ..., \alpha_{n,2n}\}$ es estable por el complejo conjugado (α es simétrica).
Decimos que α es extremal con respecto al condensador $(K, [-a, a])$ si

$$\lim_n \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} g_a(z, \alpha_{n,k}) = \frac{h(z)}{C(K, [-a, a])},$$

uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{C}\backslash(K \cup [-a, a])$.
Sobre la existencia de estas tablas pueden consultarse [29, 30]. Otras definiciones equivalentes aparecen en [10].

3.1 Reglas de integración sobre intervalos no acotados

Definición 3.1 *Decimos que la sucesión de polinomios algebraicos* (ω_n) *es* **normal** *en* I si
i) grado $\omega_n \leq 2n, \; n \in \mathbb{N}$.
ii) $\omega_n(x) > 0, \; x \in I$.

3.1 En lo sucesivo (ω_n) representará a una sucesión normal de polinomios en I.

Definición 3.2 *Sea (j_n) una sucesión de números naturales tal que grado $\omega_n = 2n - j_n$, $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $I = [0, +\infty[$ y escribamos $j = \sup_n j_n \leq +\infty$.*
Decimos que el par $(\mu, (\omega_n))$ es **admisible** si

$$\int x^m \, d\mu(x) < \infty,$$

para $0 \leq m \leq j-1$, $m \in \mathbb{N}$, si $j \geq 1$; y además

$$\int \frac{1}{x+1} d\mu(x) < \infty.$$

3.2 En la anterior definición admitimos la posibilidad de que μ sea infinita ($j = 0$). Si $j \geq 1$ entonces μ es necesariamente finita.
Notemos también que sólo hemos considerado el caso $I = [0, +\infty[$. Para intervalos acotados asumiremos que μ es finita, y por tanto no necesitaremos tomar tales precauciones.
En el curso subsiguiente del capítulo siempre daremos por sobreentendido que el par $(\mu, (\omega_n))$ es admisible cuando $I = [0, +\infty[$.

Definición 3.3 *Sean las tablas*

$$\Lambda = \{\lambda_{n,k};\ k = 1, ..., n;\ n \in \mathbb{N}\}, \quad X = \{x_{n,k};\ k = 1, ...n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

donde $\Lambda \subset \mathbb{C}$ y $X \subset I$.
El método o regla de integración asociado a las tablas Λ y X, que podremos denotar simplificadamente por $S(\Lambda, X)$, consiste en la sucesión de funcionales (S_n), definida por

$$S_n(f) = S_n(f, \Lambda, X) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k}),$$

donde f es una función cuyo dominio de definición contiene al intervalo I.
Si en particular $\Lambda \subset]0, +\infty[$, diremos que $S(\Lambda, X)$ es positivo.

Definición 3.4 *Por $C_{+\infty}$ denotamos al espacio vectorial normado de las funciones continuas en $[0, +\infty[$, tales que el límite de $f(x)$ existe y es finito cuando x tiende a $+\infty$, provisto de la norma uniforme $\|f\| = \sup\limits_{x \geq 0} |f(x)|$.*

3.3 Existen diferentes isometrías de $C_{+\infty}$ dentro de C_∞, donde este último es el espacio de las funciones continuas en la recta real, tales que en los puntos $+\infty$ y $-\infty$ tienen límites finitos e iguales. C_∞ **coincide** con $C(\overline{\mathbb{R}_0})$, funciones continuas sobre la compactificación de Alexandrov de la recta real.
Fue a través de estas isometrías que en [14] se estudió la completitud en $C_{+\infty}$ de ciertos sistemas numerables asociados al núcleo de Cauchy (ver [41]).

Definición 3.5 *Por $R(g)$ denotamos al espacio vectorial de las funciones complejas f definidas en $[0, +\infty[$, integrables Riemann en sentido impropio de primera especie (el infinito es el único punto singular) con respecto al integrador g en $[0, +\infty[$, y tales que el límite de $f(x)$ existe y es finito cuando x tiende a $+\infty$.*

Proposición 3.1 *$C_{+\infty} \subset R(g)$.*

Demostración Sea $f \in C_{+\infty}$, f con valores reales. Existe $M > 0$ tal que $f + M > 0$.
Para cada $a > 0$ tenemos que

$$\int_0^a (f + M) \, dg \leq (\|f\| + M)(g(+\infty) - g(0)).$$

Por tanto, $(f + M) \in R(g)$. Es decir $(f + M) - M = f \in R(g)$. ∎

Lema 4 *Sea $a > 0$. Para cada polinomio P sea P_a la fracción racional asociada a P de la siguiente forma: $P_a(x) = P\left(\dfrac{1}{x+a}\right)$.*
Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración positivo en $I = [0, +\infty[$.
Si $\lim_n S_n(P_a) = \int P_a\, dg$, para todo polinomio P, entonces

$$\lim_n S_n(f) = \int f\, dg, \tag{3.6}$$

para toda $f \in R(g)$.

Demostración Sea $t(x) = \dfrac{1}{x+a}$ y $f \in R(g)$. Definamos

$$h(x) = \begin{cases} f \circ t^{-1}(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1/a \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f \circ t^{-1}(x) & \text{si} \qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

La función h es integrable Riemann con respecto a $g \circ t^{-1}$ en el intervalo $[0, 1/a]$ y además

$$\int_0^{1/a} h\, d(g \circ t^{-1}) = -\int_0^{+\infty} f\, dg.$$

Por otra parte, si P es un polinomio se tiene que $P_a \in C_{+\infty}$,

$$\int_0^{\frac{1}{a}} P\ d(g \circ t^{-1}) = -\int_0^{+\infty} P_a\ dg,$$

y $S_n(P_a, \Lambda, X) = S_n(P, \Lambda, X')$, donde $X' = \left\{\dfrac{1}{x+a};\ x \in X\right\} \subset [0, 1/a]$.
Lo anterior nos permite afirmar que

$$\lim_n S_n(P, \Lambda', X') = \int_0^{1/a} P\ d(g \circ t^{-1})$$

donde $\Lambda' = -\Lambda$, para todo polinomio P. El teorema clásico de Steklov-Fejer [34], afirma en tal situación que

$$\lim_n S_n(h, \Lambda', X') = \int_0^{1/a} h\ d(g \circ t^{-1}),$$

es decir (3.6). ■

3.4 Señalemos que el teorema de Steklov-Fejer establece que si un método de integración positivo $S(\Lambda, X)$, $X \subset [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, evaluado en cualquier polinomio P, converge a $\int P\ dg$, entonces ello también ocurre para toda función integrable Riemann con respecto a g en el intervalo $[a, b]$. La demostración de este resultado se basa en la posibilidad de aproximar unilateralmente por medio de polinomios, en la métrica de L^1, a toda función integrable.
En intervalos no acotados, cuando todos los momentos del integrador g son finitos, es decir $\int x^m\ dg(x) < \infty$, $m = 0, 1, 2,...$; la aproximación unilateral polinómica en L^1, no siempre es posible para cualquier función Riemann-Stieltjes integrable, aún cuando su módulo no crezca en el infinito más rápido que un polinomio. En Freud [33] se trata este problema, cuya solución se hace depender de la determinación del problema de momentos asociado al integrador dg.
El tipo de función que aquí consideramos permite soslayar aquellas dificultades que naturalmente aportaría un integrador cuyos momentos no son todos finitos.

3.2 Caracterización de la convergencia de cuadraturas

Teorema 3.1 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración tal que $X \subset [0, +\infty[= I$. Tenemos que*

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int_0^{+\infty} f\, db, \tag{3.7}$$

para toda $f \in C_{+\infty}$, si y solo si

$$R_n(z) = S_n(f_z, \Lambda, X) \to \widehat{b}(z) = \int_0^{+\infty} f_z\, db, \tag{3.8}$$

uniformemente sobre cada compacto contenido en U,

$$S_n(1, \Lambda, X) \to b([0, +\infty[), \tag{3.9}$$

y

$$\sup_n \sup_{\|f\| \leq 1} |S_n(f, \Lambda, X)| < \infty. \tag{3.10}$$

Demostración El espacio $(C_{+\infty}, \|.\|)$ es de Banach, y los funcionales $S_n(., \Lambda, X)$, $n \in \mathbb{N}$; $\int (.)\, db$, son lineales y continuos. El teorema de Banach-Steinhauss (principio de acotación uniforme) asegura que se cumple (3.10) bajo la condición (3.7).
La convergencia puntual de las fracciones R_n, $n \in \mathbb{N}$, para $z \in U$, y (3.9), son consecuencia de (3.7), al tomar $f \equiv 1$, $f \equiv f_z \in C_{+\infty}$, $z \in U$.
Para obtener (3.8) basta demostrar que (R_n) es una familia normal en U. Para ello tomemos un conjunto compacto cualquiera $K \subset U$. Para cualquier $z \in K$ se tiene que

$$|R_n(z)| \leq \sup_n \|S_n\| \, \|f_z\| \leq \frac{\sup_n \|S_n\|}{d([0, +\infty[, K)}$$

El recíproco es consecuencia de aplicar el teorema de Banach a la sucesión de funcionales (S_n), que está uniformemente acotada en virtud de (3.10), y a la familia $F_1 = \{1,\, f_z;\ z \in U\}$, cuya envoltura lineal es densa en $C_{+\infty}$ (ver [14, 41]). ∎

3.5 Si la condición (3.7) se cambia expresando que sólo es cierta para todo $f \in C_{+\infty}$, con $f(+\infty) = 0$, entonces este resulta equivalente a (3.8) y a (3.10). La modificación que ha de hacerse a (3.10) es obvia.
El teorema anterior no sólo generaliza al lema 4.1 de [36], sino que además muestra el verdadero papel de las fracciones $S_n(f_z)$ como contraparte de los funcionales S_n.
El próximo teorema se deduce del teorema anterior.

Teorema 3.2 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración con $X \subset [a, b]$.*
Para que

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int f\, db, \tag{3.11}$$

para toda $f \in C([a, b])$, es necesario y suficiente que

$$R_n(z) = S_n(f_z, \Lambda, X) \to \widehat{b}(z) = \int f_z\, db, \tag{3.12}$$

uniformemente sobre cada compacto contenido en U, y

$$\sup_n \|S_n\| < \infty. \tag{3.13}$$

Teorema 3.3 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración positivo sobre $I = [0, +\infty[$. La condición*

$$\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int f\, dg, \tag{3.14}$$

para toda $f \in R(g)$, es necesaria y suficiente para que

$$S_n(f_z) \to \int f_z\, dg, \tag{3.15}$$

uniformemente sobre cada compacto contenido en U, y

$$S_n(1) \to g(+\infty) - g(0). \tag{3.16}$$

Demostración La condición (3.16) y la positividad de los funcionales S_n, $n \in \mathbb{N}$, garantizan la validez de (3.9) y (3.10), lo que junto a (3.15), implican (3.14) para $f \in C_{+\infty}$ (teorema 3.1).
Como $P_a \in C_{+\infty}$, cualquiera sea el polinomio P y $a > 0$, el lema 4 prueba que (3.14) es cierto.
Recíprocamente, si (3.14) es cierto para todo $f \in R(g)$, lo cumple en particular para $f \in C_{+\infty}$ (proposición 3.1). Del teorema 3.1 se deducen (3.15) y (3.16). El teorema está demostrado. ∎

3.3 Reglas de interpolación racionales

Definición 3.6 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método de integración. Sea (r_n) una sucesión de números naturales tal que*

$$0 \le r_n \le grado[\omega_n] + j - 1, \; n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Decimos que $S(\Lambda, X)$ es de interpolación (racional), relativo al par $(\mu, (\omega_n))$, con grado de exactitud (r_n), si para cualquier polinomio P de grado $\le r_n$, se cumple

$$\int \frac{P}{\omega_n}\, d\mu \;=\; S_n\left(\frac{P}{\omega_n}, \Lambda, X\right), \tag{3.18}$$

y, o bien existe un polinomio G, de grado$= r_n + 1$, tal que la integral $\int \frac{G}{\omega_n}\, d\mu$ existe y es distinta a $S_n\left(\frac{G}{\omega_n}, \Lambda, X\right)$, o la integral $\int x^{r_n+1} d\mu(x)$ no existe.

3.6 Si $I = [0, +\infty[$, la condición impuesta al grado de P y (3.17) garantizan que (3.18) tenga sentido.
Si $\omega_n \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $j = \infty$ y por tanto $\int x^n\, d\mu(x) < \infty$, para todo n. De esta forma se aprecia que la definición 3.6 contiene a la definición clásica de cuadraturas interpolatorias.

Definición 3.7 *Sea $\alpha = \{\alpha_{n,k};\; k = 1, ..., 2n;\; n \in \mathbb{N}\}$ una tabla contenida en U'. Decimos que la sucesión (ω_n) está asociada a la tabla α si*

$$\omega_n(z) = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_{n,k}}\right) \tag{3.19}$$

3.7 En la expresión (3.19) se entiende que si un elemento $\alpha_{n,k}$ es infinito, el correspondiente factor es idénticamente uno.

Teorema 3.4 *Sea $S(\Lambda, X)$ un método interpolatorio y positivo de integración, relativo al par $(g, (\omega_n))$, con grado de exactitud (r_n), donde (ω_n) está asociado a la tabla Newtoniana e infinita $\alpha = \{\alpha_k;\; k \in \mathbb{N}\}$, $\alpha \subset U'$ y $X \subset [0, +\infty[= I$.*
Si además se cumplen

$$\alpha_n \ne \alpha_m, \tag{3.20}$$

para α_n, α_m números, y $n \ne m$.

$$\lim_n S_n(1, \Lambda, X) = g(+\infty) - g(0), \tag{3.21}$$

$$r_n \geq grado\,[\omega_n]\,-\,1, \tag{3.22}$$

$$\sum_{\mathbf{Im}\sqrt{\alpha_n}\,>\,0} \frac{\mathbf{Im}\sqrt{\alpha_n}}{1+|\alpha_n|} = \infty, \tag{3.23}$$

entonces $\lim_n S_n(f,\Lambda,X) = \int_0^{+\infty} f\,dg,$ *para toda* $f \in R(g)$.

Demostración Las condiciones (3.20) y (3.23) son suficientes para que el sistema

$$\left\{1, \frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_k}};\, k \in \mathbb{N}\right\},$$

tenga envoltura lineal densa en $C_{+\infty}$ (ver lema 1 de [14]).
Sean k y n dos números naturales tales que $2n > k$ y $\alpha_k \in \mathbb{R}$. de (3.22) se tiene que el polinomio $P(x) = \dfrac{\omega_n(x)}{1-\dfrac{x}{\alpha_k}}$ tiene grado menor o igual que r_n. Por tanto de (3.18) se tiene

$$S_n\left(\frac{1}{1-\dfrac{x}{\alpha_k}},\Lambda,X\right) = \int \frac{dg(x)}{1-\dfrac{x}{\alpha_k}}$$

lo que unido a (3.22) y el teorema de Banach, prueban que

$$\lim_n\; S_n(f,\Lambda,X) = \int\; f\;dg,$$

para toda $f \in C_{+\infty}$.
El lema 4 termina la demostración. ■

3.8 Si grado $[\omega_n] \leq r_n,\ n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple (3.21) automáticamente. Para verlo basta tomar $P = \omega_n$ en (3.18). Observemos que en tal caso necesariamente $j \geq 1$.
El teorema 3.4 tiene como casos particulares a los teoremas 1 y 2 de [14].
Los teoremas 3.3 y 3.4 ofrecen un método para construir aproximantes racionales de la función $\widehat{\mu}(z) = \int\; f_z\; d\mu,\ z \in U$. En efecto, consideremos a la sucesión (ω_n) de manera tal que grado $[\omega_n] \leq n$ y los ceros de (ω_n) forman una tabla Newtoniana e infinita que cumple (3.20) y (3.23). Tomemos ahora, por ejemplo, la siguiente tabla Newtoniana de nodos: $X = \{x_k = k;\ k \in \mathbb{N}\}$. Si definimos $Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (x-x_k)$, y $\lambda_{n,k}$ está dado por

$$\lambda_{n,k} = \int_0^{+\infty} \frac{Q_n(x)\omega_n(x_k)}{Q_n'(x_k)(x-x_k)\omega_n(x)} d\mu(x),$$

del teorema 3.4 se tiene que la sucesión de fracciones racionales $R_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_{n,k}}{z-x}$ converge uniformemente a $\widehat{\mu}(z)$ sobre cada compacto contenido en U (teorema 3.4).

3.4 Reglas Gaussianas racionales y aproximantes de Padé

Definición 3.8 *Decimos que* $S(\Lambda,X)$ *es una regla racional de tipo Gauss, relativa al par* $(\mu,(\omega_n))$, *si* $S(\Lambda,X)$ *es racional de interpolación con grado de exactitud* $r_n = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}$.

3.9 Al igual que en el caso clásico, $2n-1$ es el máximo valor posible de r_n. Es decir, las reglas racionales de tipo Gauss, son cuadraturas de grado máximo de exactitud.

Proposición 3.2 *$S(\Lambda, X)$ es una regla racional de tipo Gauss, relativa al par $(\mu, (\omega_n))$, si y solo si $\{x_{n,k};\ k = 1, ..., n;\ n \in \mathbb{N}\}$ son los ceros (simples) del enésimo polinomio ortogonal asociado a la medida $d\mu_n = \dfrac{d\mu}{\omega_n}$, y*

$$\lambda_{n,k} = \int \frac{Q_n^2(x)\,\omega_n(x_{n,k})}{\left(Q_n'(x_{n,k})(x - x_{n,k})\right)^2 \omega_n(x)} d\mu(x) > 0, \tag{3.24}$$

$k = 1, ...n;\ n \in \mathbb{N}$, donde $Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_{n,k})$.

Demostración Sea $S(\Lambda, X)$ una regla racional Gaussiana, relativa al par $(\mu, (\omega_n))$. De (3.18) se deduce que

$$\int \frac{P_k(x)}{\omega_n(x)} d\mu(x) = \frac{P_k(x_{n,k})\lambda_{n,k}}{\omega_n(x_{n,k})} \tag{3.25}$$

donde $P_k(x) = \prod_{i=1,\, i\neq k}^n (x - x_{n,i})^2$. De (3.25) se obtiene (3.24).
Si $0 \leq m \leq n - 1$, entonces

$$\int \frac{Q_n(x)\, x^m}{\omega_n(x)} d\mu(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_{n,k} Q_n(x_{n,k})\, x_{n,k}^m}{\omega_n(x_{n,k})} = 0$$

pues grado $Q_n(x)x^m \leq 2n - 1$, y $Q_n(x_{n,k}) = 0$, $k = 1, ..., n$; lo cual significa que Q_n es el enésimo polinomio mónico ortogonal relativo a la medida $d\mu_n$. El recíproco se obtiene por medio de la división euclideana. En efecto, si grado $P_n \leq 2n - 1$, entonces existen polinomios q_n y c_n tales que grado $q_n < n$, grado $c_n < n$, y

$$P_n = Q_n\, q_n \,+\, c_n \tag{3.26}$$

Luego

$$\int \frac{P_n}{\omega_n} d\mu = \int \frac{Q_n\, q_n}{\omega_n} d\mu \,+\, \int \frac{c_n}{\omega_n} d\mu$$

De (3.26) también tenemos que $P_n(x_{n,k}) = c_n(x_{n,k}),\ k = 1, ..., n$.
De la fórmula de interpolación de Lagrange y la ortogonalidad de Q_n, deducimos que

$$\int \frac{P_n}{\omega_n} d\mu = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_{n,k}\, c_n(x_{n,k})}{\omega_n(x_{n,k})} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_{n,k}\, P_n(x_{n,k})}{\omega_n(x_{n,k})}$$

lo que termina la demostración. ■

3.10 Esta proposición 3.2 que en el caso clásico es bien conocida, está considerada parcialmente en el contenido de los artículos [10], [14]-[17].
Al igual que en el teorema 4, cap 4 de [35], es posible probar que si $S(\Lambda, X)$ es de interpolación relativa al par $(\mu, (\omega_n))$ con grado (r_n) de exactitud, $r_n,\ n \in \mathbb{N}$, tenemos que $S(\Lambda, X)$ es Gaussiana si y solo si los nodos $x_{n,k}$ son los ceros del enésimo polinomio ortogonal asociado a $d\mu_n$.
Las fórmulas de cuadratura interpolatorias, simples y de orden n, alcanzan un grado de exactitud mínimo $r_n = n - 1$, de modo que en general $n - 1 \leq r_n \leq 2n - 1$.
La forma dada a la proposición 3.2, algo diferente al teorema 4, cap 4 de [35], se justifica por cuanto no habíamos esclarecido previamente qué forma tienen los coeficientes interpolatorios $\lambda_{n,k}$.
El siguiente corolario del teorema 3.4 está anunciado en [14].

Corolario 3.1 *Sea $\alpha = \{\alpha_k;\ k \in \mathbb{N}\} \subset U'$, y tal que cada fila $\alpha_n = \{\alpha_1, ..., \alpha_{2n-1}\}$ es estable por el complejo conjugado (α es simétrica). Sea (R_n) la diagonal de la tabla de los aproximantes multipuntuales de Padé, asociadas a la función de tipo Stieltjes $\widehat{\mu}(z) = \int f_z\, d\mu,\ z \in U$, y a la tabla α que es infinita y satisface las condiciones (3.20) y (3.23).*
Entonces $\lim_n R_n(z) = \widehat{\mu}(z)$, uniformemente sobre cada compacto contenido en U.

Demostración Sea $S(\Lambda, X)$ la regla racional Gaussiana relativa al par $(\mu, (\omega_n))$, donde (ω_n) está asociada a α según la definición 3.7. Entonces $R_n(z) = S_n(f_z, \Lambda, X)$, $z \in U$ (ver [17]). Aquí tenemos que grado $[\omega_n] \leq 2n - 1$, y por tanto se cumple (3.21) (ver nota 3.8). Es obvio que la condición (3.22) también se satisface. Del teorema 3.4 se tiene que $\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int f\, d\mu$, para toda $f \in C_{+\infty}$. Del teorema 3.3 se obtiene la tesis del corolario. ■

3.11 El corolario 3.1 extiende el uso de las tablas Newtonianas de interpolación en teoremas de tipo Stieltjes. Consideremos por ejemplo a la tabla $\alpha = \{i/k,\ -i/k;\ k \in \mathbb{N}\}$ donde i es la unidad imaginaria. Esta tabla tiene evidentemente a $z = 0$ como punto de acumulación, y por tanto, su uso no está previsto en el corolario 2 de [17]. Sin embargo, según la proposición 3.2, los aproximantes multipuntuales de Padé, asociados a α y a $\widehat{\mu}$, convergen uniformemente a esta última en U.
Para tablas alejadas de $[0, +\infty[$ pueden mejorarse las hipótesis del teorema 3.4 , tal como lo demuestra el siguiente resultado.

Teorema 3.5 *Sea $S(\Lambda, X)$ una regla racional de tipo Gauss con $I = [0, +\infty[$, relativa al par $(g, (\omega_n))$. Si (ω_n) está asociada a la tabla $\alpha \subset [-\infty, -1]$ y*

$$\lim_n S_n(1, \Lambda, X) = g(+\infty) - g(0) \tag{3.27}$$

$$\lim_n \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{\sqrt[2k]{c_{n,k}}} = \infty \tag{3.28}$$

donde

$$c_{n,k} = \int \frac{x^k}{\omega_{n,k+1}(x)} dg(x),$$

y

$$\omega_{n,k+1}(x) = \prod_{i=1}^{k+1} \left(1 - \frac{x}{\alpha_{n,i}}\right).$$

Entonces $\lim_n S_n(f, \Lambda, X) = \int f\, dg$, para toda $f \in R(g)$.

Demostración De (3.28) tenemos la convergencia uniforme sobre cada compacto contenido en U, de las fracciones $S_n(f_z)$, a la función $\int f_z\, dg$ (ver [17]). De (3.27) y el teorema 3.3 se concluye la demostración. ■

3.12 La condición (3.28) relativa a los momentos generalizados $c_{n,k}$, fue introducida por G. López Lagomasino en [17], y puede ser interpretada en el teorema 3.5 como una versión mejorada de las hipótesis del teorema 1.1 de [33]. Notemos sin embargo, que a diferencia de [33], la tesis del teorema 3.5 sólo es válida para $f \in R(g)$, y reglas Gaussianas racionales. Señalemos además, que el teorema 3.5 mejora al teorema 2 de [14] para este tipo específico de tablas.

3.5 Orden exacto de convergencia de cuadraturas racionales

El resultado que aquí mostramos, expresa que la velocidad mínima dada por el estimado (2.42) del capítulo 2 (teorema 2.5), es alcanzada para una selección adecuada de los aproximantes S_n. Estos son precisamente los de tipo Gaussiano racional o Gaussiano generalizado.
Sean $0 < a < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, y $\alpha \subset T = \{z;\ |z| = 1\}$, una tabla extremal y simétrica. Sea μ una medida con $S_\mu \subset [-a, a]$, tal que la derivada de su componente absolutamente continua es mayor que cero casi dondequiera.

Teorema 3.6 *Sea $S(\Lambda, X)$ la regla racional de tipo Gauss, relativa al par $(\mu, (\omega_n))$, donde (ω_n) está asociada a α, y sea*

$$E_{n,a}(H^p) = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \int_{-a}^{a} f\, d\mu \ - \ S_n(f, \Lambda, X) \right|.$$

Entonces

$$\lim_n E_{n,a}(H^p)^{1/n} = \exp\left(-\frac{2}{C_a}\right),$$

donde C_a *es la capacidad del condensador* $(T, [-a, a])$.

Demostración Al igual que en el corolario 3.1 y el teorema 3.5, usaremos la relación existente entre cuadraturas Gaussianas generalizadas y los aproximantes multipuntuales de Padé.
Sea $f \in H^p$. De los teoremas integral de Cauchy y de Fubini obtenemos,

$$\left|\int_{-a}^{a} f\,d\mu \,-\, S_n(f, \Lambda, X)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_T f(s)\,(\widehat{\mu}(s) - R_n(s))\,ds\right| \leq$$

$$\leq \|f\|_p \|\widehat{\mu} - R_n\|_T \tag{3.29}$$

donde $R_n(z) = S_n(f_z)$ es igual que en el teorema 3.5.
Por otra parte si $d > 1$,

$$(d-1)\|\widehat{\mu} - R_n\|_{T_d} \leq E_{n,a}(H^p) \tag{3.30}$$

donde $T_d = \{z;\ |z| = d\}$.
De (3.29) y el teorema 2 de [10] se deduce que

$$\limsup_n E_{n,a}(H^p)^{1/n} \leq \exp\left(-\frac{2}{C_a}\right). \tag{3.31}$$

Mientras que de (3.30) y el propio teorema 2 de [10] se tiene

$$\exp\left(-\frac{2\sigma_d}{C_a}\right) \leq \liminf_n E_{n,a}(H^p)^{1/n}. \tag{3.32}$$

donde $\sigma_d = \inf\{h(z);\ z \in T_d\}$, y $h(z)$ es la medida armónica de la región

$$G = \mathbb{C}\backslash\{T \cup [-a, a])\}.$$

Si hacemos tender d hacia uno, de la continuidad y la propia definición de h, se tiene la tesis del teorema uniendo (3.31) y (3.32). ■

3.13 *í* Advirtamos que $E_{n,a}(H^p)$ es el error en la clase H^p de un tipo específico de cuadratura, y no el error óptimo.
Eliminando pequeñas dificultades, el teorema 3.6 puede extenderse al caso general estudiado en [15].
De los resultados de este capítulo, de [14] y el teorema 1.1, cap 3 de [33], podemos sugerir que la convergencia puntual de las reglas de integración debe lograrse cuando existe una "adecuada proporción" entre la velocidad de crecimiento modular de las funciones integradas, y la densidad del integrador en una vecindad del infinito.
Con el enfoque dado en este capítulo a la integración numérica es fácil construir, por ejemplo, una regla convergente al número $\int_0^{+\infty} f\ d\mu$, para funciones f tales que $\lim_{x\to+\infty} f(x)\exp(-x^2)$, existe y es finito, siempre que la medida μ verifique $\int_0^{+\infty} \exp(x^2)\,d\mu(x) < \infty$.
Esta situación no está contemplada en [33].

Capítulo 4

Caracterización de la convergencia de funciones analíticas

Con la técnica usada en la demostración de los teoremas 3.1 y 3.3 del capítulo 3, parece posible caracterizar, en una amplia variedad de casos, a la convergencia puntual de los métodos de integración numérica en términos de la convergencia sigma compacta de sucesiones de fracciones racionales.
En el caso que específicamente trata [36], esta caracterización es posible establecerla en términos de la convergencia puntual de sucesiones de fracciones racionales. Por otra parte la demostración del teorema 3 de [14] -que aparece incompleta por omisión involuntaria de los autores- utiliza una vía poco expedita para obtener nuevas generalizaciones.
Usando la misma técnica del capítulo 3, aquí caracterizamos a la convergencia puntual de métodos de integración del siguiente tipo

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} f^{(j-1)}(z_i)$$

$f \in H^p$. Estos aproximantes lineales S_n han sido utilizados entre otros en [2, 15, 39], [56]-[61], [62]-[67, 73, 83, 87].
El problema inverso, caracterizar a la convergencia uniforme de sucesiones de fracciones racionales, en términos de la convergencia puntual de métodos de integración sobre un espacio E, no tiene en general solución si E "tiene muchos elementos". Tal es el caso en que E es un espacio de Banach (teoremas 3.1 y 3.2 del capítulo 3).
En esta última parte de nuestro trabajo, demostramos que si $E = H^p$, $1 \leq p < \infty$, no es posible obtener un resultado inverso.
Sin embargo, estudiando un problema mas amplio "la caracterización de la convergencia en un espacio de funciones analíticas, en términos de la convergencia débil en un espacio lineal asociado" (ver [11]), es que llegamos a la solución del llamado problema inverso.
El presente capítulo, con el que hemos tratado de completar algunos aspectos teóricos considerados en los capítulos precedentes, termina con una breve discusión acerca del orden de convergencia a cero del error de fórmulas generales de cuadratura sobre los espacios H^p , y su relación con la mejor aproximación racional y uniforme a integrales de tipo Cauchy.
En todo el capítulo 4 asumiremos que:

1. $D = \{z;\ |z| < 1\}$
2. $D_0 = \{z;\ |z| \leq 1\}$
3. $T = \{z;\ |z| = 1\}$
4. $U = \mathbb{C} \backslash D_0$
5. $U' = U + \{\infty\}$

H_0 es el conjunto de las funciones analíticas en U', que se anulan en el infinito.
$H(A)$ es el conjunto de las funciones analíticas sobre A, $A \subset \mathbb{C} + \{\infty\}$.

(p,q) es un par de números conjugados, es decir, $1 \leq p, q \leq \infty$, y $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$.

4.1 Convergencia de cuadraturas y aproximación racional

Definición 4.1 *Sea $\mathcal{R}_0$ el conjunto de las fracciones racionales con ceros en el infinito y polos en D. Si $R \in \mathcal{R}_0$ y $g \in L^q(T)$, la siguiente expresión es una fórmula de cuadratura en el espacio H^p.*

$$L(f) = \int_T f(s)g(s)ds = S_n(f) + E_n(f),\ f \in H^p \tag{4.1}$$

donde $S_n(f) = \int_T f(s)R_n(s)ds$; $E_n(f)$ es el operador de cuadratura numérica, también conocido como resto o error, y n es el orden de la fracción R_n.

4.1 El término "cuadratura" ha sido generalmente utilizado en la literatura para hacer referencia a aquellos métodos de integración numérica que permiten calcular aproximadamente la integral de funciones de una sola variable. Es por ello que el método (S_n) de la definición 4.1 debe interpretarse como un aproximante de cuadraturas en sentido amplio. No obstante, esta definición también contiene a la situación clásica unidimensional.
Es conocido que los elementos del dual del espacio H^p, $1 \leq p < \infty$, se caracterizan por la siguiente representación

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_T f(s)g(s)ds$$

donde $L \in (H^p)'$, $f \in H^p$, y $g \in L^q(T)$ (ver cap 8 de [31]).
Si μ es una medida finita y positiva en D (posiblemente concentrada en $(-1,1)$) de tipo Carleson [31], entonces $L(f) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_D f d\mu$ es un funcional lineal y continuo en H^p, $1 \leq p < \infty$.
En particular $d\mu = dx$ es de tipo Carleson.
De este comentario se desprende que (4.1) incluye a las llamadas fórmulas de cubatura. Para verlo basta considerar a $d\mu = 1_S\, dxdy$, donde $S \subset D$, es una región cuya frontera tiene medida Lebesgue cero.

Definición 4.2 *Sea $g \in L^q(T)$.La transformada de Cauchy-Stieltjes de g, es por definición la nueva función*

$$\widehat{g}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T g(s)f_z(s)ds,\ z \in U.$$

Proposición 4.1 *Si $g \in L^q(T)$, entonces $\widehat{g} \in H_0$ y*

$$\widehat{g}^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_T \frac{g(s)}{(s-z)^{n+1}}ds,\ n \in \mathbb{N},\ z \in U.$$

Demostración La función paramétrica $h(s,z) = g(s)(s-z)^{-1}$, cumple las hipótesis que permiten aplicar el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada, lo que justifica que el signo de derivación permuta con el de integral. ■

Proposición 4.2 *Sea $R \in \mathcal{R}_0$. La descomposición de R en suma de fracciones simples puede escribirse en la siguiente forma*

$$R(z) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1}\frac{a_{ij}j!}{(z-z_i)^{j+1}}$$

donde $|z_i| < 1,\ i = 1,...,k$; m_i es la multiplicidad del polo z_i, y $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$ es el orden de R.
Además, si $f \in H^1$ entonces

$$S_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_T f(s)R(s)ds = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij}f^{(j)}(z_i) \tag{4.2}$$

Demostración La primera parte relativa a la forma de la descomposición en suma de fracciones simples de una función racional $R \in \mathcal{R}_0$, es evidente.
Si $f \in H^1$, f puede ser representada como la integral de Cauchy de sus valores en la frontera T, y

$$f^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi i} \int_T \frac{f(s)}{(s-z)^{j+1}} ds$$

para $|z| < 1$, lo que junto a la linealidad de la integral prueba la igualdad (4.2). ■

Teorema 4.1 *Sean $(R_n) \subset \mathcal{R}_0$, $g \in L^q(T)$, $q > 1$. Si L y S son como en (4.1) y (4.2) respectivamente, entonces*

$$\lim_n S_n(f) = L(f), \tag{4.3}$$

para toda $f \in H^p$, si y sólo si

$$\lim_n R_n(z) = \widehat{g}(z), \tag{4.4}$$

uniformemente sobre cada conjunto cerrado de U', y

$$\sup_n \|S_n\| = C_0 < \infty. \tag{4.5}$$

Demostración Del principio de acotación uniforme (Banach-Steinhauss) se tiene que (4.3) implica (4.5).
De (4.3) también se concluye la convergencia puntual $\lim_n R_n(z) = \widehat{g}(z),\ z \in U'$, ya que $f_z \in H^p$, $z \in U$, y $S_n(f_z) = R_n(z)$.
Para obtener (4.4), basta ahora probar que la familia (R_n) es normal en U. Sea K un compacto de U. Entonces

$$\frac{1}{|s-z|} \leq \frac{1}{d(K,T)}\ z \in K,\ s \in T.$$

Luego, si $z \in K$

$$|R_n(z)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_T R_n(s) f_z(s) ds \right| \leq \frac{\|S_n\|}{d(K,T)} \leq \frac{C_0}{d(K,T)}$$

El principio del máximo para funciones analíticas prueba que la convergencia es uniforme sobre cada conjunto cerrado contenido en U'.
Probemos ahora que (4.4) y (4.5) implican a (4.3).
Sea A una parte infinita y acotada del plano, tal que la clausura de A está contenida en U. Entonces la familia $F(A) = \{f_z,\ z \in A\}$, tiene envoltura lineal densa en H^p.
En efecto, según el teorema de Hahn-Banach, basta demostrar que el único funcional continuo sobre H^p que se anula sobre $F(A)$, es el funcional nulo. Sea $F \in (H^p)\prime$. Existe $g \in H^p$ tal que para toda $f \in H^p$ ([31], teorema 7.3)

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt \tag{4.6}$$

Si para toda $z \in A$ se tiene que

$$F(f_z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{g(e^{it})} dt \right] \frac{1}{z^{n+1}} = 0$$

entonces los coeficientes de Fourier de $\overline{g}$ son nulos para $n = 0, -1, -2, ...$, por tanto g, y correspondientemente el funcional F, son idénticamente iguales a cero ([31] teorema 3.4).
De (4.4) se tiene que $S_n(f_z)$ converge a $L(f_z)$ para todo $z \in U$. En particular para todo $z \in A$. El teorema de Banach y la condición (4.5) terminan de probar (4.3). ■

4.2 Si $p = \infty$ se cumple que (4.3) implica a (4.4) y (4.5).
La condición (4.5) del teorema 4.1 se explica mejor con el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *Cualquiera sea p, $1 \leq p < \infty$, existe $(R_n) \subset \mathcal{R}_0$, uniformemente convergente sobre cada compacto contenido en U, y tal que los funcionales*

$$S_n(f) = \int_T f(s)R_n(s)ds, \; n \in \mathbb{N}, \; f \in H^p,$$

divergen para toda f de un cierto conjunto G_δ denso en H^p, y convergen puntualmente sobre H^∞, a un funcional no acotado en la norma de H^p.

Demostración Sea $f_0 \in H^p \backslash H^\infty$, y sea $(z_k) \subset D$ tal que

$$\lim_k |f_0(z_k)| = \infty.$$

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{|f_0(z_k)|}} < \infty.$$

$$\sum_{k \geq 1} (1 - |z_k|) < \infty.$$

$$0 < a \leq |z_k| < 1, \; k \in \mathbb{N}.$$

Definamos

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k\, f(z_k)}{\sqrt{|f_0(z_k)|}},$$

donde $s_k = \exp(-arg\, f_0(z_k))$.
Es simple comprobar que $S_n(f)$ converge para toda $f \in H^\infty$. En particular converge para $f = f_z$, $z \in U$. Un razonamiento similar al de la demostración del teorema 4.1, tal como se sugiere en las notas 4.2, prueba que

$$R_n(z) = S_n(f_z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{\sqrt{|f_0(z_k)|}\,(z - z_k)}$$

converge uniformemente sobre cada compacto contenido en U. Sin embargo

$$S_n(f_0) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{|f_0(z_k)|} \to \infty.$$

Del principio de acotación uniforme, se tiene que $S_n(f)$ diverge para f en un conjunto G_δ denso en H^p.
El funcional

$$L(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k f(z_k)}{\sqrt{|f_0(z_k)|}},$$

es continuo en $(H^\infty, \|\cdot\|_p)$. En cambio, si se considera al espacio de las funciones de H^∞ con la norma $\|f\|_p$ de H^p, entonces L es no acotado. Para probarlo supongamos que L es continuo sobre el espacio $(H^\infty, \|\cdot\|_p)$. Según Hahn-Banach y el teorema 7.3 de [31], existe $g \in H^q$ tal que

$$L(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt, \; f \in H^\infty.$$

Sea Φ el funcional lineal y continuo sobre H^p definido por

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(e^{it})f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt,$$

donde $f \in H^p$, y B es el producto de Blaschke asociado a la sucesión (z_n).
Como Φ es continuo y $\Phi(f) = L(Bf) = 0$ para toda $f \in H^\infty$, tenemos que $\Phi \equiv 0$, ya que H^∞ es denso en H^p. Lo que indica que $B\overline{g} \in H_0^q$ (funciones de H^q que se anulan en cero). Como B^{-1} es holomorfo en una vecindad del cero, concluimos que $g \equiv 0$, lo que constituye una contradicción pues L no es idénticamente cero. ■

4.3 El teorema 4.2 muestra que es imposible caracterizar a la convergencia de sucesiones de $\mathcal{R}_0$, en términos de la convergencia puntual de las correspondientes cuadraturas sobre el espacio H^p, $1 \leq p < \infty$.
De la teoría de interpolación en los espacios H^p, es también posible obtener ejemplos como los que ofrece el teorema 4.2 (ver los ejercicios 1 y 2 del capítulo 9 de [31]).
La función $L(f_z)$, donde L es el funcional construido en el teorema 4.2, pertenece al espacio H_0 y no es de la forma $\widehat{g}$, con $g \in L^q(T)$.

4.2 Caracterización de la convergencia de funciones analíticas

PRELIMINARES. Sea $\mathcal{B}$ el espacio definido por

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{z \in A} a(z) f_z;\ A \in \mathcal{M},\ (a(z))_{z \in A} \in l^1 \right\},$$

donde $\mathcal{M}$ es la familia de todos los subconjuntos acotados y numerables del plano complejo, cuya clausura está contenida en U.
Los valores de $g(s) = \sum_{z \in A} a(z) f_z(s)$ y $\sum_{z \in A} |a(z)|$ no dependen del ordenamiento que demos a los elementos de A.
La convergencia absoluta y uniforme sobre D_0 de la serie $\sum_{z \in A} a(z) f_z$, prueba que $\mathcal{B} \subset H(D_0)$.
Para $A \in \mathcal{M}$ y $s \in D_0$ definamos

$$F_s((a(z)) = \sum_{z \in A} a(z) f_z(s).$$

Es obvio que F_s representa un funcional lineal y continuo sobre l^1.
Sea $\mathcal{N}_A = \cap \left\{ F_s^{-1}\{0\};\ s \in D \right\}$. Es conocido que $l^1/\mathcal{N}_A$ con la norma

$$\|a + \mathcal{N}_A\| = \inf \left\{ \|a + y\|_1,\ y \in \mathcal{N}_A \right\},$$

donde $a \in l^1$ y $\| \cdot \|_1$ denota a la norma de l^1, es un espacio de Banach con dual $(\mathcal{N}_A)^\perp$ (ver [31], pag. 10).
Sea $\mathcal{C}_A$ el subespacio lineal de aquellas funciones de $\mathcal{B}$ con $A \in \mathcal{M}$ fijo. Este espacio con la norma $\| \sum_{z \in A} a(z) f_z \|_A := \|(a(z))_{z \in A} + \mathcal{N}_A\|$, es isométricamente isomorfo a $l^1/\mathcal{N}_A$.
Sea $(\mathcal{B}, I)$ el límite inductivo del sistema $\{(\mathcal{C}_A, \| \cdot \|_A);\ A \in \mathcal{M}\}$, con respecto a las funciones $I_A : \mathcal{C}_A \to \mathcal{B}$, donde $I_A(g) = g$, $g \in \mathcal{C}_A$, $A \in \mathcal{M}$.
Es bien conocido que este espacio vectorial topológico resultante $(\mathcal{B}, I)$, es tonelado (ver [37]).
Definamos ahora al espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ de todas las funciones complejas h, definidas en U', tales que $(h(z))_A \in (\mathcal{N}_A)^\perp$, para cada $A \in \mathcal{M}$, con la topología de la $\mathcal{M}$-convergencia.
El siguiente lema caracteriza al espacio dual de $(\mathcal{B}, I)$.

Lema 5 *El espacio dual de $(\mathcal{B}, I)$, provisto de la topología de la W-convergencia, donde W es la familia de las uniones finitas de conjuntos acotados en algún $\mathcal{C}_A$, $A \in \mathcal{M}$, es isomorfo al espacio $\mathcal{F}(\mathcal{M})$, y este isomorfismo está expresado en la siguiente forma : si $L \in (\mathcal{B}, I)'$, entonces existe una única $h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$, tal que para cada $g \in \mathcal{B}$, $g = \sum_{z \in A} a(z) f_z$, se tiene que $L(g) = \sum_{z \in A} a(z) h(z)$.*

Demostración Si $A \subset A_1$, con A, $A_1 \in \mathcal{M}$, escribimos $[\mathcal{C}_A] = \mathcal{C}_A/\mathcal{N}_A \subset \mathcal{C}_{A_1}/\mathcal{N}_{A_1} = [\mathcal{C}_{A_1}]$.
La anterior inclusión tiene el sentido de una inyección natural de $[\mathcal{C}_A]$ en $[\mathcal{C}_{A_1}]$. Para precisar consideremos a $(a(z))_{z \in A} \in l^1$. Y definamos $(a_1(z))_{z \in A_1}$ como $a_1(z) = a(z)$ si $z \in A$, y cero en los demás casos. Entonces se cumple la siguiente inclusión entre clases de equivalencia.

$$K_A = \sum_{z \in A} a(z) f_z + \mathcal{N}_A \subset \sum_{z \in A_1} a_1(z) f_z + \mathcal{N}_{A_1} = K_{A_1}.$$

Lo que establece la inyeción $K_A \to K_{A_1}$ de $\mathcal{C}_A/\mathcal{N}_A$ en $\mathcal{C}_{A_1}/\mathcal{N}_{A_1}$.
Sea $L \in (\mathcal{B}, I)'$. Entonces

$$L/[\mathcal{C}_{A_1}] \leftrightarrow h_1 \in \mathcal{N}_{A_1}^\perp,$$

$$L/[\mathcal{C}_{A_2}] \leftrightarrow h_2 \in \mathcal{N}_{A_2}^{\perp},$$

$$L/[\mathcal{C}_{A_1 \cup A_2}] \leftrightarrow h_3 \in \mathcal{N}_{A_1 \cup A_2}^{\perp},$$

siendo $A_1,\, A_2 \in \mathcal{M}$ y $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.
Es simple comprobar que $h_3 \in \mathcal{N}_{A_1}^{\perp} \cap \mathcal{N}_{A_2}^{\perp}$, para concluir de las relaciones anteriores que $h_3/A_1 \equiv h_1$ y $h_3/A_2 \equiv h_2$. Es decir, $h_1/A_1 \cap A_2 \equiv h_2/A_1 \cap A_2$.
Hemos demostrado que si $L \in \mathcal{B}'$, existe una única $h \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ tal que para toda $A \in \mathcal{M}$, h/A representa a $L/[\mathcal{C}_A]$.
Sea ahora $H : \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to (\mathcal{B}, I)'$, definido por

$$H(h)\left(\sum_{z\in A} a(z) f_z\right) = \sum_{z\in A} a(z) h(z).$$

Esta función H está bien definida puesto que $H(h) \circ I_A \in \mathcal{C}_A',\ A \in \mathcal{M}$.
Ya demostramos que H es sobreyectiva. También es simple comprobar que H es lineal e inyectiva.
Por otra parte, el espacio $(\mathcal{B}, I)'$ es el límite proyectivo de los espacios $\mathcal{C}_A$ y las transpuestas I_A' de los homomorfismos I_A (ver [37]). De modo tal que H es continuo si y solo si $I_A' \circ H$ es continua para cada $A \in \mathcal{M}$, y esto último es cierto pues

$$\|H(h) \circ I_A\| = \sup_{z\in A} |h(z)| = p_A(h) \tag{4.7}$$

Finalmente, la topología de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ está generada por las seminormas $p_A,\ A \in \mathcal{M}$, y por tanto la relación (4.7) prueba que H^{-1} es también continua. ■

Lema 6 *$H_0 \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$.*

Demostración Para cada $A \in \mathcal{M}$ sea S_A el menor subespacio cerrado de l^∞ que contiene a las sucesiones $(f_z(s))_{z\in A},\ s \in D$.
Es simple comprobar que $S_A \in (\mathcal{N}_A)^{\perp}$.
Consideremos al espacio E de todas las funciones analíticas en D, con la topología de la convergencia uniforme sobre cada compacto de D. Sea F el espacio de las funciones $g \in E$ tales que $g(0) = 0$.
Para $s, t \in D$ pongamos $g_s(t) = \dfrac{t}{st-1}$.
El conjunto $G = \{g_s,\ s \in D\}$ tiene envoltura lineal densa en F. En efecto, sea $L \in F'$ tal que

$$L(g_s) = 0,\ s \in D \tag{4.8}$$

Del teorema de Hahn-Banach y de [38], p. 596, existe una sucesión (σ_n) con $\limsup_n \sigma_n^{\frac{1}{n}} = \sigma < 1$, tal que para cada $g \in F$

$$L(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n\, g^{(n)(0)}}{n!} \tag{4.9}$$

De (4.8) y (4.9) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n\, s^{n-1} = 0,\ s \in D.$$

Por consiguiente $\sigma_n = 0,\ n \geq 1$, y por tanto $L \equiv 0$.
Sea ahora $f \in H_0$ y definamos la siguiente función $g \in F$

$$g(t) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

De acuerdo con lo anterior, existe una sucesión de combinaciones lineales finitas de funciones en G,que denotaremos por (p_n), tal que

$$\lim_n (sup\{|p_n(z) - g(z)|,\ z \in K\}) = 0,$$

para cada compacto $K \subset D$. Por consiguiente, si $A \in \mathcal{M}$ la función f satisface

$$\lim_n \left(sup \left\{ \left| f(z) - p_n\left(\frac{1}{z}\right) \right|,\ z \in A \right\} \right) = 0.$$

Concluimos que $(f(z))_{z\in A} \in S_A \subset (\mathcal{N}_A)^{\perp}$, porque $g_s\left(\frac{1}{z}\right) = f_z(s)$. El lema está demostrado. ■

4.4 Conocemos en algunos casos que $\mathcal{N}_A$ es el espacio trivial. Por ejemplo, cuando el conjunto de los puntos de acumulación de A es finito. Sin embargo, aún ignoramos qué ocurre en general.

Teorema 4.3 *Sean f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, funciones de H_0. Existen L, L_n; $n \in \mathbb{N}$, funcionales lineales y continuos sobre $\mathcal{B}$, tales que*

$$f(z) = L(f_z),\ f_n(z) = L_n(f_z),\ n \in \mathbb{N},\ z \in U \tag{4.10}$$

$$\lim_n f_n(z) = f(z) \tag{4.11}$$

uniformemente sobre cada conjunto cerrado de U', si y solo si

$$\lim_n L_n(g) = L(g) \tag{4.12}$$

para cada $g \in \mathcal{B}$.

Demostración Definamos

$$L\left(\sum_{z\in A} a(z)\, f_z\right) = \sum_{z\in A} a(z) f(z) \tag{4.13}$$

$$L_n\left(\sum_{z\in A} a(z)\, f_z\right) = \sum_{z\in A} a(z) f_n(z),\ n \in \mathbb{N},\ A \in \mathcal{M}. \tag{4.14}$$

La condición (4.10) es obviamente cierta, y los lemas 5 y 6 demuestran que los funcionales (4.13) y (4.14) son lineales y continuos.
La igualdad (4.7) nos prueba que

$$\|(L_n - L) \circ I_A\| = \sup\{|f_n(z) - f(z)|;\ z \in A\},$$

de lo cual se concluye inmediatamente que (4.11) implica a (4.12).
Observamos que (4.12) expresa que la sucesión (f_n) converge puntualmente a f. Pero (4.12) es también suficiente para que (f_n) sea una familia normal en U, porque si K es un compacto de U, y $A \in \mathcal{M}$ es tal que $\overline{A} = K$, entonces por el teorema de Banach-Steinhauss existe $K(A) > 0$ tal que

$$|f_n(z)| = |L_n \circ I_A(f_z)| \leq K(A)\|f_z\|_A \leq K(A),$$

$n \in \mathbb{N}$, $z \in A$. Por la continuidad de cada f_n, se tiene que

$$|f_n(z)| \leq K(A)$$

es válido para cada $z \in K$.
La convergencia puntual y la condición de normalidad de la sucesión (f_n), prueban la convergencia sigma compacta de (f_n) a f. Esto último el principio del máximo para funciones analíticas implican la convergencia uniforme de (f_n) sobre cada conjunto cerrado de U'. El teorema está demostrado. ■

4.5 Observemos que el lema 5 muestra que $L_n \to L$ uniformemente sobre cada conjunto acotado en algún espacio $\mathcal{C}_A$, si y solo si $f_n \to f$ uniformemente sobre cada $A \in \mathcal{M}$. El teorema 4.3 expresa que cuando cada $f_n \in H_0$, la primera condición equivale a la convergencia puntual, y la segunda equivale a que $f_n \to f$ uniformemente sobre cada conjunto cerrado de U'.

4.3 Caracterización de las sucesiones convergentes en $\mathcal{R}_0$

El lema 6 permite afirmar que $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{F}(\mathcal{M})$, y por tanto, si $R \in \mathcal{R}_0$, el funcional S asociado pertenece a $(\mathcal{B}, I)'$, y se representa de forma única según la expresión dada en (4.2).

Corolario 4.1 *Sea (R_n) una sucesión de fracciones racionales de la clase $\mathcal{R}_0$. Una condición necesaria y suficiente para que la sucesión (R_n) converja uniformemente sobre cada conjunto cerrado contenido en U', es que el* $\lim_n \int_T g(s)R_n(s)ds$*, exista para cada $g \in \mathcal{B}$.*

Demostración Comencemos demostrando la necesidad. Supongamos que $f(z) = \lim_n R_n(z), \ z \in U'$. Está claro que $f \in H_0$. Sea ahora $L \in (\mathcal{B}, I)'$ tal que $f(z) = L(f_z)$ (lema 5). La conclusión se tiene del teorema 4.3.
Para probar la suficiencia tengamos en cuenta que el límite débil en $\mathcal{B}'$ es cerrado. De manera que si L es el límite de los funcionales asociados a (R_n), el propio teorema 4.3 afirma que (R_n) converge uniformemente sobre cada conjunto cerrado contenido en U', a la función $L(f_z)$. ■

4.6 La anterior caracterización puede obtenerse sobre un espacio mayor, si las cuadraturas se asocian a integrales relativas a una medida compleja sobre el disco unidad. Tiene lugar el siguiente resultado

Corolario 4.2 *Sea b una medida compleja de variación finita sobre los borelianos de D_0 (disco unidad cerrado), y sea $(R_n) \subset \mathcal{R}_0$.*
Para que

$$\lim_n R_n(z) = \widehat{b}(z) := \int_{D_0} f_z \, db,$$

uniformemente sobre cada conjunto cerrado de U', es necesario y suficiente que

$$\lim_n \int_T g(s)R_n(s)ds = \int_{D_0} g(s)db(s),$$

para cada $g \in H(D_0)$.

Demostración De los teoremas de Fubini e integral de Cauchy obtenemos que

$$\left| \int_{D_0} g\, db - \int_T g(s)R_n(s)ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} |g(z)||\widehat{b}(z) - R_n(z)||dz|,$$

donde $r > 1$ es tal que $g \in H(\{z, \ |z| \leq r\})$.
Luego

$$\left| \int_{D_0} g\, db - \int_T g(s)R_n(s)ds \right| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} |g(z)||dz| \right) \|\widehat{b} - R_n\|_{|z|=r},$$

lo que prueba la necesidad.
El recíproco es consecuencia del teorema 4.3, ya que el funcional lineal $L(g) = \int_{D_0} g(s)db(s)$ está en el espacio $\mathcal{B}'$, y $\mathcal{B} \subset H(D_0)$. ■

4.7 Podemos probar que para todo $A \in \mathcal{M}$, las clausuras de $\mathcal{C}_A$ y $P[z]$ (polinomios en la variable compleja z) son iguales en $C(D_0)$. Asimismo es cierto, que $\mathcal{B}$ está estrictamente contenido en $H(D_0)$.

4.4 Cuadraturas óptimas y aproximación racional

Definición 4.3 *Sea S_n un aproximante de cuadratura de la forma (4.2) (con orden menor o igual a n), y sea $1 \leq p \leq \infty$. Para $L \in (H^p)'$ se define el error de S_n en la clase H^p por*

$$E_n(H^p, L, S_n) = E_n(H^p) := \sup\{|(S_n - L)(f)|; \ f \in H^p, \ \|f\|_p \leq 1\} = \|S_n - L\|.$$

El error óptimo asociado a L está definido por

$$E_{n,p}(L) := \inf \{E_n(H^p);\ S_n\},$$

donde S_n recorre el conjunto de todas las cuadraturas de orden menor o igual a n.

Proposición 4.3 *Sea $C \subset U'$, C cerrado, y sea $L \in (H^p)'$, $1 \le p \le \infty$. Entonces para cada n se cumple que*

$$d(C,D)\, R_n(L(f_z), C) \le E_{n,p}(L), \tag{4.15}$$

donde $d(C,D)$ es la distancia entre C y D, y $R_n(f,I)$ es la mejor aproximación racional y uniforme de orden n, de la función f sobre el conjunto I.

Demostración Dado que $\|d(C,D)f_z\|_p \le 1$, $z \in \mathbb{C}$, obtenemos para cada regla S_n de orden $\le n$, y $z \in \mathbb{C}$

$$|L(f_z) - S_n(f_z)| = d(C,D)^{-1} \|L\left(d(C,D)f_z\right) - S_n\left(d(C,D)f_z\right)\|_C \le$$

$$\le \|L - S_n\|\, d(C,D)^{-1},$$

luego

$$\|L(f_z) - R_n(z)\|_C \le \|L - S_n\|\, d(C,D)^{-1}, \tag{4.16}$$

donde $R_n(z) = S_n(f_z)$.
De (4.16) se deduce que

$$d(C,D)\, R_n(L(f_z)), C) \le \|L - S_n\|$$

para todo aproximante S_n de orden $\le n$, y por tanto se cumple (4.15). ■

4.8 La desigualdad (4.15) puede obtenerse para $1 \le p < \infty$, de

$$d(C,D)\|S_n - L\|_A \le \|S_n - L\|_{H^p}, \tag{4.17}$$

donde $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_{H^p}$ denotan aquí a las normas en los espacios duales de $\mathcal{C}_A$ y H^p respectivamente y $A \in \mathcal{M}$ es tal que la clausura de A es igual a C (C es infinito y compacto).
La desigualdad (4.17) es consecuencia de $d(C,D)\, \|g\|_p \le \|g\|_A$ y de ser $\mathcal{C}_A$ denso en H^p, $1 \le p < \infty$ (ver demostración del teorema 4.1).
Si C es finito, la desigualdad (4.15) es obviamente válida a partir de un cierto rango.
La desigualdad (4.16) es más general que (3.27), capítulo 3.
Sea $L(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$, $f \in H^p$, $1 < p \le \infty$. De [52, 66] se obtiene que para todo compacto $K \subset U$, $R_n\left(L(f_z), K\right) = o\left(E_{n,p}(L)\right)$, ya que $R_n\left(L(f_z), K\right) = O(\exp(-nc))$, $c > 0$ (ver [52]), y $E_{n,p}(L) = O\left(exp(-k\sqrt{n})\right)$, $k > 0$, ver [66]). Ambos estimados son exactos.
Sea ahora $L_a(f) = \int_{-a}^{a} f(x)\, d\mu(x)$, donde la componente absolutamente continua de μ es mayor que cero casi dondequiera, y $0 < a < 1$. De [9], el teorema 3.6 del capítulo 3 y la proposición 4.3 se deduce que $R_n\left(L_a(f_z), [b,c]\right)$, $b < c < -1$, o $1 < b < c$, y $E_{n,p}(L_a)$, tienen ambos un orden geométrico de convergencia a cero. Más precisamente, se cumplen las siguientes desigualdades

$$\exp\left(-\frac{2}{C_1}\right) = \lim_n R_n\left(L_a(f_z), [b,c]\right) \le$$

$$\le \liminf_n E_{n,p}(L_a)^{1/n} \le \limsup_n E_{n,p}(L_a)^{1/n} \le$$

$$\le \lim_n E_{n,p}(H^p)^{1/n} = \exp\left(-\frac{2}{C_a}\right),$$

donde C_1 y C_a son respectivamente las capacidades de los condensadores planos $([b,c], [-a,a])$ y $(T, [-a,a])$, y $E_{n,p}(H^p)$ es tal como se definió en 4.3, el error en la clase H^p, asociado a cuadraturas generalizadas de tipo Gauss.

Proposición 4.4 *Sea μ una medida finita y positiva, con soporte $S\mu \subset D_a := \{z;\ |z| \le a\}$, $0 < a < 1$. Si $\rho_n(\mu, T)$ es la mejor aproximación sobre T, de la función $\widehat{\mu}(z) = \int f_z \, d\mu$, por medio de fracciones racionales de orden menor que n, con ceros en el infinito y polos en D, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad $E_{n,p}(L) \le \rho_n(f, T)$, donde $L(f) = \int f \, d\mu$.*

Demostración Los teoremas integral de Cauchy y de Fubini prueban que

$$|(L - S_n)(f)| \le \|f\|_p \|\widehat{\mu} - R_n\|_T, \tag{4.18}$$

donde $f \in H^p$, S_n es un aproximante del tipo (4.2) de orden menor que n, con nodos en D_a, y $R_n(z) = S_n(f_z)$. Tomando supremos cuando $\|f\|_p \le 1$, y después ínfimos en ambos miembros de (4.18), cuando S_n recorre la clase de los aproximantes de tipo (4.2) y de orden n, se obtiene la tesis. ■

4.9 Sea $g(z, a)$, $a \in T$ la función de Green de la región $C \backslash T$ con polo en $z = a$.
Definamos la sucesión (d_n) por

$$d_n = \sup_{(z_1, \ldots, z_n);\ z_k \in D_a} \min_{z \in D_a} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(z, z_k),$$

donde $D_a = \{z;\ |z| \le a\}$, $0 < a < 1$.
Es conocido que existen puntos $b_{n,1}, b_{n,2}, \ldots, b_{n,n}$, elementos de D_a tales que

$$d_n = \min_{z \in D_a} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(z, b_{n,k}),$$

(ver teorema 1 de [86]).
El teorema 2 de [86] afirma que $\lim_n d_n = d$ existe.
Tiene lugar el siguiente resultado.

Corolario 4.3 *Con las mismas hipótesis de la proposición 4.4, tenemos que*

$$\limsup_n E_{n,p}(L)^{1/n} \le e^{-d},$$

donde $d > 0$ es la constante de la nota 4.9.

Demostración El teorema 3 de [86] afirma que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una fracción racional r_n, de orden $\le n$ y polos en D_a, tal que

$$\limsup_n \|f - r_n\|_T^{1/n} \le e^{-d}.$$

Sean $0 < d_1 < d$ y n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$\|f - r_n\| \le \exp(-n d_1). \tag{4.19}$$

Sea S_n la regla de integración de tipo (4.2) y con nodos en D_a tal que $r_n(z) = r_n(\infty) + S_n(f_z)$.
De (4.19) y el principio del máximo se deduce que $|r_n(\infty)| \le \exp(-n d_1)$.
Por tanto $|f(z) - S_n(f_z)| \le 2\exp(-n d_1)$, para toda $z \in T$. De la proposición 4.4 tenemos que $E_{n,p}(L)^{1/n} \le 2\exp(-n d_1)$.
Luego $\limsup_n E_{n,p}(L)^{\frac{1}{n}} \le \exp(-d_1)$.
Como $d_1 < d$ es cualquiera, se tiene la tesis del corolario. ■

Bibliografía

[1] D.J. Newman, *Rational Approximation to* $|x|$, Michigan, Math. Journal 11 MR 30 # 1344 (1964) 11-14.

[2] D.J. Newman, *Quadrature Formulae for* H^p *Functions*, Math Z 166, (1979) 111-115 .

[3] N. Bernstein, *Collected Works, I*, Moscow, (1952).

[4] A.A. Gonchar, *Estimates of the Growth of Rational Functions and Some of their Applications*, Mat. Sb. 72(114), 489-503; English trans. in Math. USSR Sb. 1, 445-456 (1967).

[5] A.A. Gonchar, *On the Rate of Rational Approximation to Continuous Functions with Characteristic Singularities*, Mat Sbornik 73, (1967) 630-638.

[6] A.A. Gonchar, *Zolotarev Problems Connected with Rational Functions*, Mat. Sb. 78 (120), 1969, 640-654; English trans. in Math USSR, Sb. 7, (1969) 623-635.

[7] A.A. Gonchar, *On the Convergence of Generalized Padé Approximants of Meromorphic Functions*, Mat. Sb. 98(140) (1975), 564-577; English trans. in Math. USSR Sb. 27 (1975).

[8] A.A. Gonchar, *The degree of Rational Approximation and Properties of Single-Valuedness of Analytic Functions in the Neighborhood of an Isolated Singular Point*, Mat. Sb., 94(1974), 265-282; English trans. in Math. USSR Sbornik, Vol 23 (1974) N^o 2.

[9] A.A. Gonchar, *On the Speed of Rational Approximation of Some Analytic Functions*, Mat. Sb. 105(147), 147-163; English trans. in Math. USSR Sbornik, 34, 131-145 (1978).

[10] A.A. Gonchar- G. López, *On Markov's Theorem for Multipoint Padé Approximants*, Mat. Sb. 105 (147) (1978), 512-524; English transl. in Math. USSR Sb. 34 (1978) 449-459.

[11] J. Illán, *Note on the Analytic Function Approximation and an Associated Linear Problem*, Proceedings of the International Conference of Complex Analysis and Applications'85, Varna, (1985) 281-289.

[12] J. Illán, *Estimates for the Rational Approximation of* H^p *Functions*, Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences, Tome 39, N^o 3, (1986) 29-31.

[13] G. López-J. Illán, *Sobre la Convergencia de los aproximantes Multipuntuales de Padé para Funciones Meromorfas de Tipo Stieltjes*, Revista Ciencias Matemáticas, Vol. III, N^o 2, (1981) 43-64.

[14] G. López-J. Illán, *Fórmulas de Cuadratura para Intervalos no Acotados*, Revista Ciencias Matemáticas, La Habana, Vol. III, N^o 3, (1982) 29-47.

[15] , G. López-J. Illán, *A Note on Generalized Quadrature Formulas of Gauss-Jacobi Type*, Proceedings of the International Conference of Constructive Theory of Functions' 84, Varna (1984), 513-518.

[16] G. López-J Illán, *Sobre los Métodos Interpolatorios de Integración Numérica y su Conexión con la Aproximación Racional*, Revista Ciencias Matemáticas, La Habana, Vol. VIII, N^o 2, (1987) 31-44.

[17] G. López, *Conditions for Convergence of Multipoint Pdé Approximants for Functions of Stieltjes Type*, Math. USSR Sbornik Vol. 35 (1979), N° 3.

[18] G. López, *On the Moment Problem and the Convergence of Padé Approximants for Meromorphic Functions of Stieltjes Type*, Proceedings of the International Conference of Constructive Theory'81, Sofia, (1983), 4(19-424.

[19] V.A. Popov-P.P. Petrushev, *The Exact Order of the Best Approximation to Convex Functions by Rational Functions*, Math, USSR, Sbornik, Vol 32 (1977) N° 2.

[20] V.A. Popov-P.P. Petrushev, *Rational Approximation of Real Variable Functions*, Cambridge Univ. Press, (1986), (por aparecer).

[21] V.A. Popov-Bl. Sendov, *On the Function Approximation by Splines and Rational Functions*, Proceedings of the International Conference of Constructive Function Theory, Varna (1970), 89-94.

[22] V.A. Popov-J. Szabados, *A Remark on the Rational Approximation of Functions*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, Tome 28, N° 10 (1975).

[23] V.A. Popov, *On the Connection Between Rational and Spline Approximation*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, Tome 27, N° 5 (1974).

[24] V.A. Popov, *Uniform Rational Approximation of the Class* V^r *and its Applications*, Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae Tomus 29 (1-2) (1977) 1(19-129.

[25] V.A. Popov, *On the Connection Between Rational Uniform Approximation and Polynomial* L^p *Approximation of Functions*, Quantitative Approximation of Functions, Academic Press, Inc. ISBN 0-12-213650-0 (1980).

[26] V.A. Popov, *On the One-Sided Approximation of Functions*, Proceedings of the International Conference of Constructive Function Theory, Sofia (1980), 465-468.

[27] P.P. Petrushev, *Relación entre la Mejor Aproximación Racional y por Splines en la Métrica de* L^p, Pliska, Tomo 5, (1983) 68-83 (en ruso).

[28] G.M. Goluzin, *Geometric Theory of Function of a Complex Variable*, Translation of Mathematical Monographs, Vol 26, Providence, Rhode Island, Amer. Math. Soc. (1969).

[29] J.L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. (1960).

[30] T. Bagby, *On Interpolation by Rational Functions*, Duke Mathematic Journal, 36, N° 1 (1969).

[31] P.L. Duren, *Theory of* H^p *Spaces*, Academic Press, New York, (1970)

[32] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1965).

[33] G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Akademiai Kiadó, Budapest and Pergamon Press, Oxford, (1971).

[34] G. Szëgo, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications of the American Mathematical Society, Vol 23 (1939).

[35] E.W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, Mc Graw-Hill Book Company (1966).

[36] J. A. Shohat-J.D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, Mathematical Surveys, N° 1, Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1970).

[37] A.P. Robertson- W. Robertson, *Topological Vector Spaces*, Cambridge University Press (1966).

[38] A. Markushevich, *Teoría de las Funciones Analíticas*, Editorial Mir, Moscú (1970).

[39] M. Levin-J. Girshovich, *Optimal Quadrature Formulas*, Teubner-Textezur Mathematik, Leipzig (1979).

[40] D. Hinrichsen-J.L. Fernández, *Topología general*, Editorial Pueblo y Educación, Cuba (1977).

[41] N.I. Achiezer, *Theory of Approximation*, UNGAR. New York, (1956).

[42] A. Ralston, *Introducción al Análisis Numérico*, Editorial Limusa, Mexico (1978).

[43] A. Magnus, *Rate of Convergence of Sequences of Padé-Type Approximants and Pole Detection in the Complex Plane*, Institut de Mathematique Pure et Applique Universite Catholique de Louvain, (1980).

[44] N.S. Viacheslavov, *Sobre la Aproximación Racional y Uniforme a* $|x|$, Dokl. A.N. SSSR, 220 (1975), 512-515 (en ruso).

[45] J. Tzimbalario, *Rational Approximation to* x^α, Journal Approximation Theory, 16 (1976) 187-(193.

[46] A.P. Bulanov, *Asintótica para la Menor Desviación de* $|x|$ *de las Fracciones Racionales*, Matematik Sbornik, 76 (1968), 288-303 (en ruso).

[47] A.P. Bulanov, *The Order of Approximation of Convex Functions by Rational Functions*, Izv. Akad. Nauk, SSSR Ser. Mat. 33 (1969), 1132-1148.

[48] A.P. Bulanov, *Aproximación de Funciones Convexas con Módulo de Continuidad Dado, por Medio de Fracciones Racionales*, Mat. Sbornik (1978) 105 (147) N^o 1.

[49] T. Ganelius, *Rational Approximation in the Complex Plane and on the Line*, Annales Academic Scientarum Fennicae, Series A, I. Mathematica, Vol. 2, (1976), 129-145.

[50] T. Ganelius, *Some Extremal Functions and Approximation*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, (19 Fourier Analysis and Approximation Theory, Budapest, Hungary, (1976.

[51] T. Ganelius, *Rational Approximation to* x^α *on* $[0,1]$, Analysis Mathematica, 5 (1979), (19-33.

[52] H. Widom, *Rational Approximation and n-Dimensional Diameter*, J. Approximation Theory, 5 (1972) 343-361.

[53] A. Hatamov, *Sobre la Aproximación Racional de Funciones Convexas*, Matematicheskie Zametki, T 21, N^o 3, (1977).

[54] P. Turan, *Sobre la Aproximación por Secciones de Funciones Analíticas por Fracciones Racionales*, Actas de la Conferencia Internacional de la Teoría de Funciones Analíticas, Erevan, (1965) (en ruso).

[55] E.I. Zolotarev, *Collected Works*, Vol. II, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, (1932).

[56] B.D. Bojanov, *New Best Quadrature Formulae*, Serdica, Vol. I, (1975), 110-120.

[57] B.D. Bojanov, *Best Cubature Formulas*, Serdica, Vol II, (1976), 42-52.

[58] B.D. Bojanov, *Best Approximation of Linear Functionals in* W_p^r, Pliska, Vol I, (1977), 100-111.

[59] B.D. Bojanov, *Characterization and Existence of Optimal Quadrature Formulas for a Class of Differentiable Functions*, Soviet Math. Dokl. Vol. 18 (1977) N^o 1.

[60] B.D. Bojanov, *Existence and Characterization of Monosplines of Least* L^p *Deviation*, Constructive Function Theory'77, Sofia, (1980, 249-268.

[61] B.D. Bojanov, *Uniqueness of Optimal Nodes of Quadrature Formulas*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, Tome 33, N° 2, (1980).

[62] B.D. Bojanov, *Best Quadrature Formula for a Certain Class of Analytic Functions*, Zastosowania Matematyki, Applicationes Mathematicae XIV, 3 (1974).

[63] B.D. Bojanov, *On an Optimal Quadrature Formula*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, Tome 27, N° 5, (1974).

[64] B.D. Bojanov, *On the Existence of Optimal Quadrature Formulae for Smooth Functions*, Estratto da Calcolo, Vol. XVI, fasc. I, (1979).

[65] J.E. Andersson-B.D. Bojanov, *A Note on the Optimal Quadrature in H^p*, Numer. Math. 44, 301-308 (1984).

[66] J.E. Andersson, *Optimal Quadrature of H^p Functions*, Math. Z. 172, 55-62, (1980).

[67] L. Tshakalov, Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst. 1 (1954) N° 2, 67 MR 16, 1005 (en búlgaro).

[68] C.F. Gauss, *Methodus Nova Integralium Valores per Aproximationem Inveniendi*, Collected Works, Vol III, 163-(196 (1814).

[69] A. Sard, *Best Approximate Integration Formulas*, Amer. J. Math., LXXI, N° 1, 80-91, (1949).

[70] S.M. Nikolskii, *To the Question of Estimations of Approximation with Quadrature Formulas*, UMN, Vol II (36), 165-177, (1950), (en ruso).

[71] K.G. Ivanov, *Direct and Converse Theorems for the Best Algebraic Approximation in $C[-1,1]$ and $L_p[-1,1]$*, Coll. Math Soc. János Bolyai, 35 Functions, series, operators, Budapest, (1980).

[72] K.G. Ivanov, *New Estimates of Errors of Quadrature Formulae, Formulae of Numerical Differentiation and Interpolation*, Analysis Mathematica, Tomus 6, Fasciculus 4, (1980).

[73] H.L. Loeb-H. Werner, *Optimal Numerical Quadrature in H^p spaces*, Math. Z. 138, 111-117 (1974).

[74] Yu.A. Brudni, *Aproximación Racional y Teoremas de Inmersión*, Dokl. A. N. SSSR, 247, (1979), 269-272 (en ruso).

[75] W. Gautschi-R.S. Varga, *Error Bounds for Gaussian Quadrature of Analytic Functions*, Siam J. Numer. Anal. Vol 20, N° 6, (1983).

[76] R. Al-Jarrah, *Error Estimates for Gauss-Jacobi Quadrature Formula with Special Weights*, The Arabian Journal for science and engineering, Vol 9, N° 1, (1984).

[77] Gh. Coman, *The Complexity of the Quadrature Formulas*, Math. Revue D'Analyse numérique et de théorie de L'Approximation, Tom 23 (46), N° 2, 183-(192, (1981).

[78] R.B. Barrar-H.L. Loeb-H. Werner, *Optimal Integration Formulas for Analytic Functions*, Bulletin of the Amer. Math. Soc.Vol 79, N° 6, (1973).

[79] N. Richter, *Properties of Minimal Integration Rules*, Siam J. Numer. Anal. Vol 7, N° 1, (1970).

[80] N. Richter, *Properties of Minimal Integration Rules II*, Ibidem Vol. 8, N° 3, (1971).

[81] N. Richter, *Minimal Interpolation and Approximation in Hilbert Spaces*, Ibidem Vol 8, N° 3, (1971).

[82] M. Kutz, *Asymptotic Error Bounds for a Class of Interpolatory Quadratures*, Ibidem Vol 21, N° 1, (1984).

[83] H.L. Loeb, *A Note on Optimal Integration in H^p*, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences. Tome 27, N^o 5, (1974).

[84] I. Gansca, *Monosplines with Given Order of Deficiency and Optimal Quadrature Formulae*, Revue Roumaine de mathematiques pures et appliees, Tom XXII, N^o 4, (1977).

[85] I. Gansca, *Optimal Cubature Formulas on a Nonrectangular Domain*, Ibidem Tom XXIV, N^o 4, (1974).

[86] T. Boyadzieva-P. Boyadziev, *Rational Approximation of Analytic Functions*, Proceedings of the International Conference on Constructive Theory of Functions, Varna (1984), 177-181.

[87] G.R. Grozev, *Optimal Quadrature Formulae for Differentiable Functions*, Ibidem, 376-381.

[88] G.H. Kirov, *Optimal Quadrature Formulae for Function Classes W_rH_m*, Ibidem 451-456.

[89] P.D. Proinov, *Uniformly Distributed Matrices and Numerical Integration*, Ibidem 704-709.

[90] B.L. Raina, *On Certain Optimal Cubature Formulae*, Math Japonica 30, N^o 3, 307-315, (1985).

[91] R. Kovacheva, *Generalized Padé Approximants and Meromorphic Continuation of Functions*, Mat. Sb. 109 (151), (1979), 365-377. English transl. in Math. USSR, Sb. 37 (1980).

[92] F. Stenger, *Polynomial, Sinc and Rational Function Methods for Approximating Analytic Functions*, Lecture Notes in Mathematics, Rational Approximation and interpolation, Proceedings, Tampa, Florida (1983). Springer Verlag.