UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Facultad de Ciencias Fsicas
Departamento de Fsica Terica II

FUNDAMENTOS DE SUPERMECÁNICA LAGRANGIANA, HAMILTONIANA Y SUPERSIMETRÍA

TESIS presentada por

JESÚS MARÍN SOLANO

para optar al grado de Doctor en Ciencias Fsicas

Dirigida por

LUIS ALBERTO IBORT LATRE

Agradecimientos

Quisiera en primer lugar mostrar mi profundo agradecimiento al Profesor L. A. Ibort, director de este trabajo, tanto en el terreno acadmico como personal. Su apoyo a lo largo de estos casi cinco aos desde la fecha de inicio del trabajo ha sido para m indispensable para la consecucin de esta Tesis. Asimismo, quisiera agradecer la formacin que de l he recibido.

Tambin deseara citar aqu a los buenos amigos y compaeros que he encontrado en el departamento de Fsica Terica. En especial, a Elena Medina, Rafael Hernndez y Manuel Maas, excompaeros de despacho, y con quienes he sostenido siempre mltiples, agradables, y aunque poco cientficas, relajantes discusiones; as como a Ricardo el vasco, Ángel Gmez, y en general a todos los miembros de este departamento.

En un plano puramente personal, quisiera agradecer el apoyo prestado y su inagotable paciencia para conmigo en los mltiples momentos bajos que he pasado, aparte de a los anteriormente citados, a mis buenos amigos los pticos (ellos ya saben a quienes me refiero); mis amigos y amigas de la sierra, con quienes tantas noches de alcohol y desenfreno he pasado; as como los de Madrid, o los que estuvieron y, como yo, ya se fueron.

Igualmente, tambin deseara citar a mis padres y hermanos, as como a mi ta Clarita, por su apoyo desinteresado.

Esta Tesis ha sido llevada a cabo gracias a una beca de Formacin de Personal Investigador de la Universidad Complutense de Madrid, en el Departamento de Fsica Terica II. Quisiera expresar aqu mi sincero agradecimiento por la confianza que me han prestado.

Finalmente, mencin especial creo que merece Carme, que estar aqu quiera o no quiera.

Contents

Introduccin

Durante estas dos ltimas dcadas, han alcanzado un gran auge en Fsica las teoras de supersimetras. Asimismo, la aparicin de un nuevo procedimiento de cuantificacin, explotando la construccin de una supersimetra nueva, la supersimetra BRST, as como el intento de obtener un anlogo clsico a los fermiones, han propiciado la aparicin de multitud de literatura sobre lo que se conoce como Supermecnica, o Pseudomecnica, como la denominan otros autores.

Tras estas observaciones preliminares, el lector de este trabajo puede plantearse las siguientes preguntas: por qu una nueva tesis sobre supermecnica?; y, realmente, cules son los mritos de la supermecnica que justifican el esfuerzo realizado en su estudio?

En primer lugar, es bien conocido hoy da que el marco geomtrico natural para el estudio de la Mecnica Clsica es el de la Geometra Simplctica o Presimplctica. Los sistemas dinmicos clsicos vienen definidos usualmente o bien desde un punto de vista Lagrangiano, o bien desde un punto de vista Hamiltoniano. La aproximacin Lagrangiana hace uso de la geometra del fibrado tangente TM a una variedad M que se identifica con el espacio de configuraciones del sistema en estudio, mientras que la aproximacin Hamiltoniana se desarrolla sobre el fibrado cotangente T^*M de M, que se identifica con el espacio de fases del sistema. Sin embargo, todos estos conceptos, bien estudiados en el contexto clsico, no han sido extendidos hasta ahora de manera exhaustiva ni suficientemente satisfactoria al caso de superpartculas clsicas. Es notorio observar que, si suponemos que el espacio de configuraciones de un sistema dinmico graduado es una supervariedad, o, por simplicidad, una variedad graduada $(M,^A)$ en el sentido de Kostant [Ko77], ni tan siquiera se han definido con la precisin adecuada lo que seran la supervariedad tangente $T(M,^A)$, para extender el formalismo Lagrangiano al caso graduado, y la supervariedad cotangente $T^*(M,^A)$, para analizar el formalismo Hamiltoniano graduado. En la mayor parte de los trabajos que pueden encontrarse abundantemente en la literatura, se consideran nicamente los objetos definidos localmente, o sobre supervariedades con fibrados estructurales triviales. Nuestro objetivo en esta tesis va a ser precisamente describir el marco geomtrico global en que los sistemas mecnicos graduados estn definidos.

Respecto de la segunda cuestin, sobre la importancia de la supermecnica, podramos decir que tiene dos aplicaciones fundamentales: por una lado, es posible obtener una descripcin clsica sel spin de una superpartcula, y con ello fermiones clsicos, de tal forma que a la hora de cuantificar el sistema los fermiones aparecern de una manera natural; y, por otra parte, dado un sistema fsico con ligaduras que den lugar a grados de libertad gauge, es posible ampliar el espacio de fases con unos grados de libertad impares, no fsicos, de tal forma que las ligaduras desaparezcan y surja en su lugar una nueva supersimetra, la supersimetra BRST, que proporcione una descripcin alternativa, pero similar, del espacio fsico de los verdaderos grados de libertad, que ser el obtenido tras eliminar los grados de libertad gauge. Este ltimo aspecto, el de la definicin de la supersimetra BRST, tiene aplicaciones tanto en el estudio de sistemas clsicos con ligaduras, como en el proceso de cuantificacin posterior del sistema, si estuvisemos interesados en ello.

Esta Tesis, y en consonancia con las motivaciones que nos han llevado ha realizarla, estar dividida en dos partes: una primera parte dedicada a los fundamentos de la supermecnica, en la que trataremos de establecer el marco geomtrico adecuado tanto para la supermecnica Lagrangiana como la supermecnica Hamiltoniana y la teora de Supersimetra; y una segunda parte que ser dedicada a estudiar las aplicaciones de este nuevo formalismo.

A lo largo de todo este trabajo asumiremos que el espacio de configuraciones de una superpartcula clsica es una supervariedad $(M, ^A)$. Nosotros consideraremos exclusivamente el caso de variedades graduadas de Kostant [Ko77], esto es, M es una variedad ordinaria y ^{A} es un haz de superlgebras sobre M satisfaciendo unas condiciones adecuadas de trivialidad local (ver Apndice B). No obstante, gran parte de las construcciones descritas aqu pueden extenderse sin grandes problemas a definiciones ms generales de supervariedad.

En el Captulo 1 estudiaremos la geometra de los sistemas Lagrangianos graduados. Para ello, definiremos primero la supervariedad tangente (TM, T^A) de una supervariedad $(M, ^A)$. En analoga con la variedad tangente en mecnica Lagrangiana clsica, la supervariedad tangente est dotada de una estructura geomtrica cannica que la caracteriza en buena medida, un supercampo tensorial de tipo $(1,1)$ integrable, dado en supercoordenadas locales $(q^i, \dot{q}^i; \theta^\alpha, \dot{\theta}^\alpha)$ por

$$S = dq^i \frac{}{\dot{q}^i} + d\theta^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha},$$

conocido como el superendomorfismo vertical. Adems, existir tambin un supercampo de Liouville Δ, localmente descrito por

$$\Delta = \dot{q}^i \frac{}{\dot{q}^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha},$$

que generaliza el campo de Liouville sobre un fibrado vectorial. Un superlagrangiano L ser entonces una superfuncin en la supervariedad tangente (TM, T^A), y puede definirse entonces las 1- y 2-superformas de Cartan $\Theta_L = S \circ dL$ y $\Omega_L = -d\Theta_L$. El formalismo geomtrico hasta este punto extiende de manera natural el formalismo ordinario en Mecnica Lagrangiana. Tambin, se definir la superfuncin energa de la manera usual, esto es, $E_L = \Delta(L) - L$. Las superecuaciones dinmicas asociadas a un superlagrangiano sern entonces simplemente las superecuaciones de Euler-Lagrange dadas por el supercampo vectorial Γ solucin de la ecuacin dinmica

$$i_\Gamma \Omega_L = dE_L.$$

Con esta formulacin geomtrica de la supermecnica Lagrangiana se evitan los problemas que surgen al tratar de obtener las ecuaciones a partir de un principio variacional, evitando el uso de complicados superespacios funcionales, o nociones de integracin en superespacios, como la integral de Berezin. Adems, proporciona una descripcin global e intrnseca, libre de coordenadas, de las ecuaciones dinmicas.

Si el superlagrangiano L es regular, es decir, la 2-superforma Ω_L es no degenerada, entonces demostraremos que el supercampo Γ es una super SODE, esto es, $S(\Gamma) = \Delta$, y Γ tendr la expresin local

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{}{q^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{}{\theta^\alpha} + f^i \frac{}{\dot{q}^i} + g^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha}.$$

Tambin estudiaremos en este primer captulo el problema inverso de la supermecnica, que consiste en, dado un sistema de superecuaciones diferenciales de segundo orden, buscar si existe un superlagrangiano L tal que sus superecuaciones de Euler-Lagrange sean equivalentes al sistema de superecuaciones original. La existencia de superlagrangianos alternativos que den lugar a un mismo sistema de superecuaciones diferenciales propocionar un mtodo para la bsqueda de supersimetras de las ecuaciones que permitan, en ciertos casos, integrar el sistema. Desde un punto de vista ms fsico, la existencia de un superlagrangiano que describa un sistema dinmico graduado constituir el primer paso en la cuantificacin del sistema, va el formalismo Hamiltoniano.

El estudio de los fundamentos geomtricos de la supermecnica Hamiltoniana ser el centro de atencin del Captulo 2. En l, veremos cul es la definicin de la supervariedad cotangente $T^*(M,^A) = (T^*M, T^{*A})$ de una supervariedad $(M,^A)$, y las estructuras geomtricas sobre ella. As, probaremos que existe una 2-superforma simplctica exacta cannica Ω sobre (T^*M, T^{*A}), la 2-superforma de Liouville, de tal forma que las superecuaciones de Hamilton sern las dadas por el supercampo vectorial solucin de la ecuacin dinmica con superfuncin hamiltoniana H

$$i_\Gamma \Omega = dH.$$

Tambin podr definirse en ciertos casos una supertransformacin de Legendre que conecte los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano. Finalmente, mostraremos las ideas bsicas sobre sistemas dinmicos graduados definidos en supervariedades simplcticas y supervariedades de Poisson.

A lo largo de estos dos primeros captulos iremos marcando cules son las diferencias fundamentales con la mecnica clsica. De hecho, la aparicin de la posibilidad de tomar superlagrangianos y superhamiltonianos impares dar lugar a situaciones completamente nuevas. Para superlagrangianos alternativos de paridad opuesta no es posible definir operadores de recursin que ayuden a integrar el sistema de superecuaciones diferenciales de partida [Ib92c]. Asimismo, no ser posible definir una supertransformacin de Legendre que sea un morfismo de supervariedades para superlagrangianos impares, independientemente de su regularidad o no. No obstante lo cual, los superlagrangianos y superhamiltonianos impares son tan lcitos para describir un sistema dinmico graduado (e igual de tiles para definir operadores de recursin en el caso de los superlagrangianos) como lo pueda ser cualquier otro. Iremos analizando con detalle diversos ejemplos que muestren todas estas propiedades. Tal y como se mostrar en el Captulo 6, los superhamiltonianos impares aparecen de forma natural al construir la simetra BRST.

La teora de supersimetra ser estudiada en el Captulo 3, tanto en el formalismo Lagrangiano como Hamiltoniano. Especial atencin prestaremos a lo que se conocen como supersimetras generalizadas en el formalismo Lagrangiano, que son aquellas que no provienen de transformaciones puntuales de la supervariedad base. Demostraremos que es posible establecer una relacin entre supersimetras y supercantidades conservadas va una versin graduada del teorema de Noether, tanto para supersistemas Lagrangianos, como Hamitonianos, o definidos por un superparntesis de Poisson. Estudiaremos tambin la teora de reduccin de supervariedades de Poisson bajo la accin de un supergrupo de Lie.

En el Captulo 4, ya en la segunda parte, resulta particularmente interesante el estudio de supersistemas Lagrangianos singulares. Veremos cmo surge en este contexto un nuevo tipo de degeneracin, que nos llevar a distinguir entre dos posibles ncleos para la 2-superforma presimplctica que estemos considerando: el ncleo fuerte y el ncleo dbil. La existencia de un ncleo dbil supondr una obstruccin insalvable para, en el caso de que exista una dinmica global, la reduccin del superespacio de fases de la manera usual, es decir, cocientando por la distribucin definida por el ncleo de la 2-superforma. Este captulo est organizado como sigue: primero haremos un repaso de la reduccin de sistemas Lagrangianos degenerados no graduados, establecindose al final un teorema que resuelve el problema inverso de la mecnica para sistemas mixtos de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, para despus tratar de extender todas estas ideas al caso graduado. Mostraremos cmo es posible, en el caso de que exista slo ncleo fuerte, extraer una serie de relaciones entre las dimensiones del ncleo de la 2-superforma, que nos permitirn distinguir entre tres tipos de superlagrangianos, los de tipo I, II y III, que extienden la situacin que ya encontramos en la Mecnica Lagrangiana, y analizaremos su posible reduccin. Dado que el tipo de superecuaciones que aparecen en supermecnica al estudiar superpartculas clsicas con spin suelen ser de primer orden en la evolucin de las supercoordenadas impares y de segundo orden en las supercoordenadas pares, parece interesante estudiar el problema inverso de la supermecnica para esta clase de sistemas. Esto ser llevado a cabo al final de este cuarto captulo, obtenindose una generalizacin del torema anlogo para sistemas mixtos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

A la hora de estudiar la reduccin de sistemas Hamiltonianos y Lagrangianos degenerados no graduados que admitan una dinmica global, esto es, sin ligaduras secundarias, se debe cocientar por el ncleo K de la 2-superforma presimplctica para obtener una variedad simplctica. Un mtodo alternativo para describir la dinmica sobre el espacio de fases reducido consiste en transformar, utilizando la tcnica del "embedding" coistropo, el sistema dinmico original en uno ms grande regular tal que el campo vectorial hamiltoniano regularizado sea tangente a la variedad de partida e invariante bajo la distribucin K dada por el ncleo de la 2-forma original. Una vez hecho esto, el espacio de fases reducido podra describirse a partir de la reduccin simplctica por la subvariedad original del espacio de fases regularizado.

Para sistemas Lagrangianos es posible ir un poco ms lejos y preguntarse si, una vez llevada a cabo la regularizacin Hamiltoniana, puede encontrarse una formulacin Lagrangiana sobre el espacio de fases extendido. Demostraremos que, efectivamente, cuando la distribucin K sea una distribucin tangente, esto ser posible hacerlo para un cierto tipo de lagrangianos, los que se conocern con el nombre de lagrangianos regularizables. Todos estos aspectos sern estudiados en detalle en el Captulo 5, y suponen una antesala para el captulo siguiente, en que veremos una de las aplicaciones ms importantes del formalismo desarrollado: la simetra BRST para sistemas Lagrangianos.

En el Captulo 6 analizaremos la posibilidad de encontrar una descripcin BRST en el formalismo Lagrangiano. Para ello se hace necesario extender el formalismo desarrollado por Forger y Kellendok [Fo92] de la manera apropiada, para comprender sistemas dinmicos presimplcticos localmente Hamiltonianos. Utilizando esta nueva tcnica BRST, combinndola con el procedimiento de regularizacin Hamiltoniana y, especialmente, de regularizacin Lagrangiana, desarrollado en el captulo anterior, se abre un abanico de diferentes posibilidades para el estudio de sistemas Lagrangianos singulares con slo ligaduras primarias. Llevando a cabo primero una regularizacin y aplicando luego el formalismo BRST, ser posible encontrar un supercampo vectorial nilpotente tal que su superhamiltoniano asociado ser la supercarga BRST.

La notacin elegida es la estndard. Cuando se apliquen convenios no usuales en la literatura, se explicar con la mayor precisin psible el tipo de notacin utilizada.

Se han incluido finalmente tres apndices sobre supergeometra, con el propsito de fijar notaciones y los conceptos bsicos de la teora de supervariedades graduadas o de Kostant, a saber: un primer apndice sobre superlgebra lineal, otro sobre variedades graduadas y un ltimo apndice acerca de la construccin y definicin de supergrupos de Lie.

Part I

FUNDAMENTOS

Chapter 1

Supermecnica Lagrangiana

1.1 Introducción

En este primer captulo se van a desarrollar con detalle los conceptos bsicos de la formulacin geomtrica de la supermecnica Lagrangiana. Para ello, empezaremos definiendo cules son el superespacio de configuraciones y el superespacio de fases de una superpartcula clsica. Esto es, los anlogos a una variedad diferenciable y su fibrado tangente. En la seccin 1.2 se dar la definicin de supervariedad tangente, y asimismo estudiaremos las estructuras geomtricas relevantes sobre ella. A continuacin, en la seccin 1.3 describiremos cules son las ecuaciones de Euler-Lagrange para un superlagrangiano dado y, de manera similar al caso de la mecnica ordinaria, se escribirn estas ecuaciones en una expresin geomtrica ms compacta que ser equivalente a las anteriores para superlagrangianos regulares. Finalmente, la ltima seccin de este captulo ser dedicada a discutir el problema inverso de la supermecnica.

1.2 Superespacio de configuraciones y supervariedad tangente

1.2.1 Supervariedades como espacios de configuraciones

Como axioma cero de la supermecnica Lagrangiana asumiremos que el espacio de configuraciones de una superpartcula es una supervariedad. Existen diversas definiciones de supervariedad. Desde luego, todas ellas son muy tiles cuando se aplican a teoras con un nmero infinito de grados de libertad (teoras de campos). Sin embargo, en este trabajo nos restringiremos fundamentalmente a sistemas finito dimensionales, y para ello en principio sera suficiente restringirnos al caso particular de las variedades graduadas de Kostant [Ko77], frente a las definiciones ms generales que pueden encontrarse en [Ba91], [Ba80], [Ro86], [Ro85], etc. Sin embargo, quisiramos destacar en este punto que muchas de las construcciones que se van a dar a continuacin pueden extenderse sin grandes problemas a categoras ms generales de supervariedades. Por razones de comodidad, en todo lo que sigue las palabras supervariedad y variedad graduada significarn lo mismo.

Tras estas observaciones, y antes de empezar con las construcciones geomtricas imprescindibles, quisiramos resaltar un hecho muy particular de la supermecnica. Como es bien conocido, el espacio de fases de la mecnica Lagrangiana es el fibrado tangente de una variedad dada, que asimismo es una variedad diferenciable. Sin embargo, cuando se construyen fibrados vectoriales sobre una supervariedad (ver, por ejemplo, [Ba91]), resulta que no van a ser supervariedades en general. As pues, si bien puede construirse un fibrado tangente sobre una supervariedad, este no va a ser til para nuestros propsitos al no ser una variedad graduada o supervariedad. Lo que vamos a construir a continuacin, la supervariedad tangente, s es, como su propio nombre indica, una supervariedad, aunque no va a ser un (super)fibrado vectorial.

Para definir la supervariedad tangente se utilizar un mtodo constructivo de obtener supervariedades a base de pegar superdominios locales, tal y como se cita en el Apndice B, y que no obstante explicaremos detalladamente a continuacin. Recordemos que un superdominio de dimensin (m, n) consiste en un par $(U,{}^A_U)$, donde U es un subconjunto abierto de ^{m} y ${}^A_U$ es la superlgebra conmutativa de las funciones diferenciables sobre U que toman valores en el lgebra de Grassmann $\Lambda({}^n)$, esto es, ${}^A_U = C^\infty(U)\otimes\Lambda({}^n)$. Resulta evidente que ${}^A_U$ es un espacio Z_2-graduado, ${}^A_U = ({}^A_U)_0\oplus({}^A_U)_1$, donde $({}^A_U)_0 = C^\infty(U) \otimes \Lambda({}^n)_0$, con $\Lambda({}^n)_0 = \bigoplus_{r\geq 0} \Lambda^{2r}({}^n)$, es la parte par; y $({}^A_U)_1 = C^\infty(U) \otimes \Lambda({}^n)_1$, con $\Lambda({}^n)_1 = \bigoplus_{r\geq 0} \Lambda^{2r+1}({}^n)$, es la parte impar del lgebra graduada. El producto exterior sobre $\Lambda({}^n)$ induce una estructura de lgebra asociativa sobre ${}^A_U$ que se denotar en general por yuxtaposicin de smbolos. Un elemento f de ${}^A_U$ se dir que es homogneo si $f \in ({}^A_U)_i$, y denotaremos su grado i por $|f|$. Ahora, es posible pegar superdominios para construir superespacios ms complicados. Dada una familia de superdominios $\{(U_\alpha,{}^A_\alpha)\}$, $({}^A_\alpha :={}^A_{U_\alpha})$, con la familia de conjuntos abiertos $\{U_\alpha\}$ definiendo un recubrimiento por cartas de una variedad ordinaria M, y una familia de isomorfismos, las funciones de transicin, $\Phi_{\alpha\beta}$ entre las superlgebras Z_2-graduadas ${}^A_{\alpha\beta} :={}^A_{U_\alpha\cap U_\beta}\subset{}^A_\alpha$ y ${}^A_{\beta\alpha} :={}^A_{U_\beta\cap U_\alpha}\subset{}^A_\beta$, de forma que la condicin de cociclo

$$\Phi_{\alpha\alpha} = Id; \quad \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} = Id, \quad \forall\alpha, \beta, \gamma \text{ tales que } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset \tag{1.1}$$

es satisfecha, podemos definir una supervariedad $(M,{}^A)$ como sigue. Consideremos un abierto arbitrario U de M. La superlgebra ${}^A(U)$ de las superfunciones sobre U se define como la unin disjunta $\bigcup_\alpha^A {}_{U_\alpha\cap U}$ de todas las superlgebras ${}^A_{U_\alpha\cap U}$ mdulo la relacin de equivalencia $f \equiv g$ si $f|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U} = \Phi_{\alpha\beta}(g|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U})$, donde $f \in{}^A_{U_\alpha\cap U}$ y $g \in{}^A_{U_\beta\cap U}$. En otras palabras, $f \in{}^A (U)$ si las restricciones de f a los subconjuntos abiertos $U \cap U_\alpha$ vienen identificadas va los isomorfismos $\Phi_{\alpha\beta}$ en los superdominios correspondientes. Es evidente que la relacin previa es una relacin de equivalencia y que para todo U tenemos una superlgebra bien definida ${}^A(U)$ cuyos elementos son las superfunciones sobre U. Pues bien, puede demostrarse (ver Apndice B) que toda supervariedad $(M,^{A}\,)$ de dimensin (m,n) puede construirse mediante esta tcnica, y consecuentemente admite una trivializacin local a partir del recubrimiento por abiertos de M. En consecuencia, si q^i son las coordenadas locales sobre U y θ^α son los generadores del lgebra de Grasmann $\Lambda(^n)$, es posible describir la supervariedad $(M,^{A}\,)$ utilizando las funciones de transicin $\Phi_{UU'}$ de la forma

$$\begin{aligned} \acute{q}^i &= \phi_0^i(q) + \phi^i_{\alpha\beta}(q)\theta^\alpha\theta^\beta + \cdots && (1.2) \\ \acute{\theta}^\alpha &= \psi^\alpha_\beta(q)\theta^\beta + \psi^\alpha_{\beta\gamma\delta}(q)\theta^\beta\theta^\gamma\theta^\delta + \cdots && (1.3) \end{aligned}$$

donde el trmino de la derecha en las ecuaciones (1.2-1.3) es la imagen de los generadores $\acute{q}^i$, $\acute{\theta}^\alpha$ respectivamente bajo $\Phi_{UU'}$, o, en otras palabras, (1.2) y (1.3) deberan escribirse como

$$\Phi_{UU'}(\acute{q}^i) = \phi_0^i(q) + \cdots$$

y

$$\Phi_{UU'}(\acute{\theta}^\alpha) = \psi^\alpha_\beta(q)\theta^\beta + \cdots,$$

si bien por motivos de economa asumiremos la notacin anterior. La familia de generadores locales (q^i, θ^α) son lo que usualmente se conocen como supercoordenadas locales sobre $^{A}(U)$.

Utilizando ahora el teorema de estructura de supervariedades reales [Ba79], [Ga77], sabemos que existe un isomorfismo $(M,^{A}\,) \cong (M, \Gamma\Lambda(E))$ (no cannico), donde $\Gamma\Lambda(E)$ denota el haz de secciones de la Grasmanniana de un cierto fibrado vectorial $E \to M$. El isomorfismo es no cannico en el sentido de que hay morfismos en la categora de supervariedades que no son morfismos de fibrados. Recurdese que un morfismo entre dos fibrados (E, π, M) y (H, ρ, N) se define en general como un par $(f, \bar{f})$, donde $f : E \to H$ y $\bar{f} : M \to N$ de forma que $\rho \circ f = \bar{f} \circ \pi$. Esto se traduce en que un morfismo en la categora de fibrados enviar necesariamente puntos de la variedad base M del primer fibrado en puntos de la variedad base N del segundo fibrado. Sin embargo, un morfismo en la categora de supervariedades es ms general, en el sentido de que esta ltima condicin no tiene por qu cumplirse. Si suponemos que los fibrados de partida (E, π, M) y (H, ρ, N) son fibrados vectoriales, y (q^i, θ^α), $(\acute{q}^i, \acute{\theta}^\alpha)$ cordenadas locales sobre ellos, un morfismo de fibrados tendr la expresin local

$$\acute{q}^i = \phi^i(q)\ ; \qquad \acute{\theta}^\alpha = \psi^a lpha_b eta(q)\theta^b eta,$$

mientras que un morfismo σ entre las dos supervariedades asociadas $(M, \Gamma(\Lambda E))$ y $(N, \Gamma(\Lambda H))$ ser de la forma ms general dada por las ecuaciones (1.2-1.3).

El fibrado vectorial E est unvocamente determinado por el trmino lineal $\psi^\alpha_\beta(q)$ de las funciones de transicin (1.3). Claramente, puesto que stas satisfacen la condicin de cociclo (1.1), las $\psi^\alpha_\beta(q)$ satisfarn la identidad de cociclo

$$\psi^\alpha_\beta(q)\psi^\beta_\gamma(q)\psi^\gamma_\rho(q) = \delta^\alpha_\rho,$$

de lo cual se deduce que las funciones de transicin lineales $\psi^\alpha_\beta(q)$ definen un fibrado vectorial E sobre M, llamado el fibrado estructural de la supervariedad. Todo ello implica que las funciones de transicin (1.2-1.3) pueden escribirse, haciendo las transformaciones adecuadas, de la forma ms simple

$$\acute{q}^i = \phi^i(q); \qquad \acute{\theta}^\alpha = \psi^\alpha_\beta(q)\theta^\beta \tag{1.4}$$

Sin embargo, puede comprobarse que, por el contrario, no toda supervariedad compleja es isomorfa a una supervariedad compleja $(M, \Gamma(\Lambda E))$, con M ahora una variedad analtica y $E \to M$ un fibrado vectorial complejo sobre M. Puede demostrarse que existen obstrucciones de tipo cohomolgico que caracterizan completamente qu supervariedades complejas pueden simplificarse para que tomen la forma anterior y cules no (ver [Be87] para una descripcin completa de tales obstrucciones). Un ejemplo sencillo de supervariedad compleja no proyectable es la supervariedad $(P^1, {}^A_{P^1})$, donde la variedad base P^1 es la esfera de Riemann S^2. Pueden construirse entonces dos superdominios, uno para el hemisferio norte y otro para el hemisferio sur. Las coordenadas locales sobre estos superdominios las denotamos por (z, θ_1, θ_2) y $(\acute{z}, \acute{\theta}_1, \acute{\theta}_2)$ respectivamente, y las funciones de transicin que caracterizan completamente la supervariedad son

$$\begin{array}{rcl} \acute{z} & = & z^{-1} + \theta_1\theta_2 z^{-3} \\ \acute{\theta}_1 & = & -z^{-2}\theta_1 \\ \acute{\theta}_2 & = & -z^{-2}\theta_2 \ , \end{array} \tag{1.5}$$

es decir, las supercoordenadas impares se transforman como 1-formas. Pues bien, puede demostrarse que el trmino $\theta_1\theta_2 z^{-3}$ no puede ser eliminado redefiniendo nuevas coordenadas analticas sobre los dos superdominios.

1.2.2 La supervariedad tangente

La definicin de supervariedad tangente a un superespacio de configuraciones $(M, {}^A)$ que aqu se va a dar es absolutamente anloga a una de las posibles definiciones que se pueden hacer para la variedad tangente en geometra no graduada. Una forma natural de definir el fibrado tangente de una variedad ordinaria M consiste en pegar dominios $TU = U \times {}^m$ con coordenadas locales (q^i, v^j) de tal forma que, si ϕ^i son las funciones de transicin (cambios de coordenadas) entre dos dominios U y U', las funciones de transicin entre los dominios TU y TU' vienen dadas por

$$\acute{q}^i = \phi^i(q); \qquad \acute{v}^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial q^j} v^j \tag{1.6}$$

El anlogo de esta construccin en la categora de supervariedades consistira, por tanto, en definir la supervariedad tangente $T(M,^A)$ de la supervariedad $(M,^A)$ simplemente pegando superdominios de la forma

$$(TU_\alpha, T^A_\alpha) := (TU_\alpha, C^\infty(TU_\alpha) \otimes \Lambda(^{2n})),$$

donde $(U_\alpha,^A_\alpha)$ son los superdominios del superespacio de configuraciones y $TU_\alpha \cong U_\alpha \times^n$. Sean ahora $(q^i, v^j; \theta^\alpha, \zeta^\beta)$ las supercoordenadas definidas sobre estos superdominios. Las funciones de transicin vendrn dadas simplemente por las derivadas de las funciones de transicin (1.2-1.3), o sea,

$$\begin{aligned}
\acute{q}^i &= \phi^i(q) + \phi^i_{\alpha\beta}(q)\theta^\alpha\theta^\beta + \cdots \\
\acute{v}^i &= \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial q^j} + \frac{\partial \phi^i_{\alpha\beta}}{\partial q^j}\theta^\alpha\theta^\beta + \cdots\right) v^j + (2\phi^i_{\alpha\beta}(q)\theta^\alpha + \cdots)\zeta^\beta \\
\acute{\theta}^\alpha &= \psi^\alpha_\beta(q)\theta^\beta + \psi^\alpha_{\beta\gamma\delta}(q)\theta^\beta\theta^\gamma\theta^\delta + \cdots \\
\acute{\zeta}^\alpha &= \left(\frac{\partial \psi^\alpha_\beta}{\partial q^i}\theta^\beta + \cdots\right) v^i + (\psi^\alpha_\beta(q) + 3\psi^\alpha_{\beta\gamma\delta}(q)\theta^\gamma\theta^\delta + \cdots)\zeta^\beta
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Recurriendo de nuevo al teorema de Batchelor-Gawedzki de estructura de supervariedades, sabemos que pueden encontrarse supercoordenadas locales tales que las superfunciones de transicin para el superespacio de configuraciones tomen la forma simplificada (2.4), y entonces

$$\acute{q}^i = \phi^i(q) \tag{1.8}$$

$$\acute{v}^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial q^j} v^j \tag{1.9}$$

$$\acute{\theta}^\alpha = \psi^\alpha_\beta(q)\theta^\beta \tag{1.10}$$

$$\acute{\zeta}^\alpha = \frac{\partial \psi^\alpha_\beta}{\partial q^i} v^i\theta^\beta + \psi^\alpha_\beta(q)\zeta^\beta \tag{1.11}$$

sern las superfunciones de transicin para la supervariedad tangente. De aqu en adelante entenderemos por supervariedad tangente de la supervariedad $(M,^A)$ la definida por el cociclo (1.8-1.11). Puede comprobarse fcilmente que si las funciones de transicin de la supervariedad original satisfacen la condicin de cociclo (como debera ocurrir), las funciones de transicin de la supervariedad tangente que acabamos de definir definen efectivamente un cociclo. Obviamente, se sigue de las ecuaciones anteriores (1.8-1.9) que la variedad base de la supervariedad tangente es TM, el fibrado tangente de la variedad M, y su dimensin es $(2m, 2n)$ si la dimensin del superespacio de configuraciones es (m, n). Tenemos por tanto que $T(M,^A) = (TM, T^A)$, donde T^A es el haz definido por las funciones de transicin (1.8-1.11).

En la definicin de variedades graduadas hay una aplicacin que juega un papel crucial, la aplicacin de aumentacin $\epsilon :^A (M) \to C^\infty(M)$, que da una inclusin de la variedad base M en la supervariedad $(M,^A)$ (ver Apndice B para ms detalles sobre esta aplicacin). As pues, sera interesante dar la nueva aplicacin $\tau\epsilon : T^A \to C^\infty(TM)$. Ahora bien, comoquiera que la aplicacin ϵ es la que enva $f \in^A (M) \mapsto f/^N$, con ^{N} el ideal de los elementos nilpotentes generado por las supercoordenadas impares (θ^α), podemos extender sin problemas esta aplicacin a la aplicacin sobre el haz tangente $\tau\epsilon$ como aquella que aplica las superfunciones $F \in T^A$ en las funciones sobre TM simplemente cocientando por el ideal de las superfunciones nilpotentes en la supervariedad tangente, generado por las supercoordenadas impares, esto es, $(\theta^\alpha, \zeta^\beta)$.

Para completar nuestra descripcin de la supervariedad tangente slo nos falta estudiar cul es su fibrado estructural. Para ello, ntese que, si bien la construccin general de la supervariedad tangente no proporciona una descripcin explcita del fibrado estructural T^A, de la forma de las funciones de transicin (1.8-1.11) resulta fcil concluir que podemos identificar T^A_M con el haz de secciones de la Grasmanniana del fibrado vectorial E' definido por las funciones de transicin $g_{UU'} : U \cap U' \longrightarrow Gl(2n,)$,

$$g_{UU'} = \left(\begin{array}{c|c} \psi^\alpha_\beta & 0 \\ \hline \frac{\psi^\alpha_\beta}{q^i} v^i & \psi^\alpha_\beta \end{array} \right) \tag{1.12}$$

A partir de la expresin de esta matriz es inmediato comprobar que E' es isomorfo al espacio TE, donde E es el fibrado estructural de $(M,^A_M)$, con la estructura de fibrado vectorial sobre TM correspondiente a la flecha horizontal superior del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} TE & \xrightarrow{\pi_*} & TM \\ \tau_E \downarrow & & \downarrow \tau_M \\ E & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} \tag{1.13}$$

donde, en coordenadas locales, $\pi(q^i, \theta^\alpha) = q^i$ y $\pi_*(q^i, \theta^\alpha; v^j, \zeta^\beta) = (q^i, v^j)$.

As pues, hemos demostrado lo siguiente:

Sea $E \to M$ el fibrado estructural de la supervariedad $(M,^A_M)$, esto es, $^A_M \cong \Gamma\Lambda E$. Entonces puede identificarse el haz de superfunciones de la supervariedad tangente (TM, T^A_M) con el haz de secciones del lgebra exterior del fibrado vectorial $TE \xrightarrow{\pi_*} TM$.

A lo largo de todo este trabajo consideraremos siempre las supercoordenadas naturales adaptadas a la estructura del fibrado tangente estructural TE. Las supercoordenadas locales de la supervariedad tangente (TM, T^A_M) se denotarn indistintamente tanto por $(q^i, v^i; \theta^\alpha, \zeta^\alpha)$ como por $(q^i, \dot{q}^i; \theta^\alpha, \dot{\theta}^\alpha)$, que es la forma usual en mecnica Lagrangiana.

Aplicaciones tangentes

Finalizaremos la descripcin de la supervariedad tangente indicando cmo una aplicacin entre dos supervariedades induce una aplicacin tangente entre las supervariedades tangentes correspondientes. Sea $\Phi\colon (M,{}_M^A\,) \to (N,{}_N^A\,)$ un morfismo de supervariedades definido en las coordenadas locales (q_M^i, θ_M^α) de $(M,{}_M^A\,)$ y (q_N^j, θ_N^β) de $(N,{}_N^A\,)$ a travs de las expresiones

$$
\begin{aligned}
\Phi(q_N^i) &= \phi^i(q_M) + \phi^i_{\alpha\beta}(q_M)\theta_M^\alpha\theta_M^\beta + \cdots && (1.14)\\
\Phi(\theta_N^\alpha) &= \psi^\alpha_\beta(q_M)\theta_M^\beta + \psi^\alpha_{\beta\gamma\delta}(q_M)\theta_M^\beta\theta_M^\gamma\theta_M^\delta + \cdots, && (1.15)
\end{aligned}
$$

Existe entonces una aplicacin natural $T\Phi$ entre las supervariedades tangentes (TM, T_M^A) y (TN, T_N^A), respectivamente, que satisface $T\Phi \circ T\Psi = T(\Phi \circ \Psi)$, la cual viene dada por las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
T\Phi(q_N^i) &= \phi^i(q_M) + \phi^i_{\alpha\beta}(q_M)\theta_M^\alpha\theta_M^\beta + \cdots && (1.16)\\
T\Phi(v_N^i) &= \left(\frac{\partial\phi^i}{\partial q_M^j} + \frac{\partial\phi^i_{\alpha\beta}}{\partial q^j}\theta_M^\alpha\theta_M^\beta + \cdots\right) v_M^j + (2\phi^i_{\alpha\beta}(q_M)\theta_M^\alpha + \cdots)\zeta_M^\beta\\
T\Phi(\theta_N^\alpha) &= \psi^\alpha_\beta(q_M)\theta_M^\beta + \psi^\alpha_{\beta\gamma\delta}(q_M)\theta_M^\beta\theta_M^\gamma\theta_M^\delta + \cdots\\
T\Phi(\zeta_N^\alpha) &= \left(\frac{\partial\psi^\alpha_\beta}{\partial q_M^i}\theta_M^\beta + \cdots\right) v_M^i + (\psi^\alpha_\beta(q_M) + 3\psi^\alpha_{\beta\gamma\delta}(q_M)\theta_M^\gamma\theta_M^\delta + \cdots)\zeta_M^\beta
\end{aligned}
$$

donde $(q_M^i, v_M^i; \theta_M^\alpha, \zeta_M^\alpha)$ y $(q_N^j, v_N^j; \theta_N^\beta, \zeta_N^\beta)$ son las supercoordenadas locales de (TM, T_M^A) y (TN, T_N^A), respectivamente.

Resulta fcil, si bien algo tedioso quizs, comprobar que la aplicacin $T\Phi$ est bien definida, es decir, que es invariante respecto de cambios de supercoordenadas en ambas supervariedades. De forma similar a la geometra ordinaria, los supercampos vectoriales se transforman a travs de

$$
T\Phi(X)(f) := \Phi^{-1}(X(\Phi(f)))
$$

para toda $f \in_N^A$ y $X \in X({}_M^A)$.

Observaciones: Hay una serie de detalles que marcan diferencias fundamentales entre la geometra de variedades diferenciales ordinarias, y la geometra de supervariedades, y que sera interesante resaltar una vez ms:

1. Como ya se mencion anteriormente, y al contrario que en la geometra ordinaria, la supervariedad tangente no es un fibrado vectorial sobre el espacio de configuraciones. En [Ko77] puede verse una definicin de fibrado tangente de una variedad graduada, que no es sin embargo una supervariedad.

2. De gran importancia en los desarrollos que haremos a continuacin es el hecho de que la asociacin entre supercampos vectoriales y curvas integrales no est claramente establecida en general.

Un ejemplo de supervariedad tangente no trivial

Como ejemplo de las definiciones dadas anteriormente, vamos a construir la supervariedad tangente a la supervariedad con variedad base la esfera S^2, y fibrado estructural su fibrado tangente. Como es bien conocido, uno puede construir un atlas de S^2 a partir de dos cartas (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2), donde $U_1 = S^2 - \{\mathrm{N}\}$ (con N$= (0,0,1)$ el polo Norte), $U_2 = S^2 - \{\mathrm{S}\}$ (con S$= (0,0,-1)$ el polo Sur), y ϕ_1, ϕ_2 las proyecciones estereogrficas de N y S. Esto es,

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 : U_1 & \longrightarrow & {}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi_2 : U_2 & \longrightarrow & {}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right), \end{array}$$

La funcin de transicin viene dada por $\Phi(\vec{x}) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\vec{x}) = \vec{x}/|\vec{x}|^2$. Si hacemos el cambio de coordenadas

$$u = \frac{x}{1-z}\ , \qquad v = \frac{y}{1-z},$$

las coordenadas locales de la esfera se transforman como

$$\begin{array}{rcl} \acute{u} & = & \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ \acute{v} & = & \dfrac{v}{u^2+v^2}. \end{array} \tag{1.17}$$

Podemos contruir entonces la supervariedad $(S^2, \Gamma(\Lambda TS^2))$, con fibrado estructural $TS^2 \to S^2$, y que, por (1.8-1.11), vendr totalmente caracterizada por las funciones de transicin

$$\acute{u} = \frac{1}{u^2+v^2} u \tag{1.18}$$

$$\acute{v} = \frac{1}{u^2+v^2} v \tag{1.19}$$

$$\acute{\theta} = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}\theta - \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\pi \tag{1.20}$$

$$\acute{\pi} = \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}\theta + \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\pi, \tag{1.21}$$

donde las supercoordenadas impares (θ, π) se tranforman como “velocidades”. Podemos ahora definir la supervariedad tangente de la supervariedad

$(S^2, \Gamma(\Lambda TS^2))$ utilizando las funciones de transicin para la supervariedad tangente (1.8-1.11). Tras algunos clculos se obtiene

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{1}{u^2+v^2}u && (1.22)\\
v' &= \frac{1}{u^2+v^2}v && (1.23)\\
\dot{u}' &= \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}\dot{u} - \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\dot{v} && (1.24)\\
\dot{v}' &= \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}\dot{u} + \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\dot{v}i && (1.25)\\
\theta' &= \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}\theta - \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\pi && (1.26)\\
\pi' &= \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}\theta + \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\pi && (1.27)\\
\dot{\theta}' &= \frac{(2u^3-6uv^2)\dot{u} + (-2v^3+6u^2v)\dot{v}}{(u^2+v^2)^3}\theta + && (1.28)\\
&+ \frac{(-2v^3+2u^2v)\dot{u} + (-2u^3+2uv^2)\dot{v}}{(u^2+v^2)^3}\pi + \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}\dot{\theta} - \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\dot{\pi}\\
\dot{\pi}' &= \frac{(-2v^3+2u^2v)\dot{u} + (-2u^3+2uv^2)\dot{v}}{(u^2+v^2)^3}\theta + && (1.29)\\
&+ \frac{(-2u^3+6uv^2)\dot{u} + (2v^3-6u^2v)\dot{v}}{(u^2+v^2)^3}\pi - \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\dot{\theta} + \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\dot{\pi}.
\end{aligned}
$$

1.2.3 Estructuras geomtricas sobre la supervariedad tangente

Una de las caractersticas ms importantes que indican que la definicin anterior de supervariedad tangente es til es que las operaciones y estructuras ms importantes que caracterizan a una variedad tangente ordinaria pueden extenderse, de manera natural, al contexto de las supervariedades tangentes. Antes de entrar en detalles sobre cada una de ellas, consideramos necesario destacar que, desafortunadamente, y a diferencia de la situacin en geometra ordinaria, no hay definiciones intrnsecas para los conceptos que se van a citar a continuacin. Los motivos para que ello sea as provienen fundamentalmente del hecho de que no exista una asociacin clara entre supercampos vectoriales y curvas integrales sobre la supervariedad. En consecuencia, para ver que los objetos estn bien definidos habr que comprobar directamente si se transforman bien bajo cambios de supercoordenadas.

Un supercampo vectorial U sobre (TM, T_M^A) tiene la siguiente expresin en coordenadas locales:

$$U = f^i \frac{}{q^i} + g^\alpha \frac{}{\theta^\alpha} + h^i \frac{}{\dot{q}^i} + k^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha}$$

donde $f^i, g^\alpha, h^i, k^\alpha$ son superfunciones sobre T_M^A. En analoga con la geometra no graduada, hay una operacin de levantamiento vertical [Mo90] de $X(^A_M)$ a $X(T^A_M)$ definida de la manera siguiente: en supercoordenadas locales, si $X = X^i/q^i + X^\alpha/\theta^\alpha$, el levantamiento vertical de X viene definido por

$$X^V = X^i \frac{}{\dot{q}^i} + X^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha}. \tag{1.30}$$

Por supuesto, no es en absoluto obvio que X^V sea un supercampo vectorial bien definido. Como va a ser necesario comprobar en varias ocasiones que los objetos geomtricos con que estemos tratando se comporten bien, daremos a continuacin una serie de frmulas de cambios inversos a los cambios de supercoordenadas de ecuaciones (1.81.11) como gua a utilizar en todas las demostraciones.

$$\frac{\partial q^i}{\partial \acute{q}^j} \neq 0 \;; \qquad \frac{\partial q^i}{\partial \acute{v}^j} = \frac{\partial q^i}{\partial \acute{\theta}^\alpha} = \frac{\partial q^i}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} = 0 \tag{1.31}$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial \acute{q}^j} = \frac{\partial^2 q^i}{\partial \acute{q}^j \partial \acute{q}^k} \acute{v}^k \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial \acute{v}^j} = \frac{\partial q^i}{\partial \acute{q}^j} \;; \qquad \frac{\partial v^i}{\partial \acute{\theta}^\alpha} = \frac{\partial v^i}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} = 0 \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \acute{q}^i} = -(\phi^{-1})^\alpha_\mu \frac{\partial \phi^\mu_\nu}{\partial \acute{q}^i} (\phi^{-1})^\nu_\beta \acute{\theta}^\beta \tag{1.34}$$

$$\frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \acute{\theta}^\beta} = (\phi^{-1})^\alpha_\beta \;; \qquad \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \acute{v}^i} = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \acute{\zeta}^\beta} = 0 \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial \acute{q}^i} &= -(\phi^{-1})^\alpha_\mu \frac{\partial \phi^\mu_\nu}{\partial \acute{q}^i} (\phi^{-1})^\nu_\beta \acute{\zeta}^\beta + (\phi^{-1})^\alpha_\mu \frac{\partial \phi^\mu_\nu}{\partial \acute{q}^i} (\phi^{-1})^\nu_\beta \frac{\partial \phi^\beta_\gamma}{\partial \acute{q}^j} v^j \theta^\gamma - \\ &\quad -(\phi^{-1})^\alpha_\beta \frac{\partial^2 \phi^\beta_\gamma}{\partial \acute{q}^i \partial q^j} v^j \theta^\gamma \end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial \acute{v}^i} = -(\phi^{-1})^\alpha_\beta \frac{\partial \phi^\beta_\gamma}{\partial \acute{q}^j} \frac{\partial q^j}{\partial \acute{q}^i} \theta^\gamma \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial \acute{\theta}^\beta} = -(\phi^{-1})^\alpha_\mu \frac{\partial \phi^\mu_\nu}{\partial q^j} v^j (\phi^{-1})^\nu_\beta \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial \acute{\zeta}^\beta} = (\phi^{-1})^\alpha_\beta \tag{1.39}$$

donde, por supuesto, hay que tener bien definidas las funciones respecto de las coordenadas respecto de las que se derive.

Utilizando estas expresiones vemos que, en primer lugar, bajo un cambio de supercoordenadas dado por las expresiones (1.8-1.11), las componentes X^i, X^α de X

se transforman como

$$\acute{X}^i = \frac{\acute{q}^i}{q^j} X^j; \qquad \acute{X}^\alpha = \psi^\alpha_\beta X^\beta + X^j \frac{\psi^\alpha_\beta}{q^j} \theta^\beta \tag{1.40}$$

Basndonos en las ecuaciones (1.40) y (1.8-1.11) podemos comprobar ahora que X^V est bien definido:

$$\begin{aligned}
\acute{X}^i \frac{}{\acute{v}^i} + \acute{X}^\alpha \frac{}{\acute{\zeta}^\alpha} &= \left(\frac{\acute{q}^i}{q^j} X^j \right) \left(\frac{\partial q^l}{\partial \acute{v}^i} \frac{\partial}{\partial q^l} + \frac{\partial v^l}{\partial \acute{v}^i} \frac{\partial}{\partial v^l} + \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \acute{v}^i} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial \acute{v}^i} \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} \right) + \left(\phi^\alpha_\beta X^\beta + X^j \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^j} \theta^\beta \right) \left(\frac{\partial q^i}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} \frac{\partial}{\partial q^i} + \right. \\
&+ \left. \left(\cdot \frac{\partial v^i}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} \frac{\partial}{\partial v^i} + \frac{\partial \theta^\mu}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} + \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \right) = \frac{\partial \acute{q}^i}{\partial q^j} X^j \frac{\partial q^l}{\partial \acute{q}^i} \frac{\partial}{\partial v^l} - \right. \\
&- \frac{\partial \acute{q}^i}{\partial q^k} X^k (\phi^{-1})^\alpha_\beta \frac{\partial \phi^\beta_\gamma}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial \acute{q}^i} \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} + \\
&+ \phi^\alpha_\beta X^\beta (\phi^{-1})^\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma} + X^j \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^j} \theta^\beta (\phi^{-1})^\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma} = \\
&= X^j \frac{\partial}{\partial v^j} - X^j (\phi^{-1})^\alpha_\beta \frac{\partial \phi^\beta_\gamma}{\partial q^j} \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} + \\
&+ X^\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\beta} + X^j (\phi^{-1})^\alpha_\beta \frac{\partial \phi^\beta_\gamma}{\partial q^j} \theta^\gamma \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} = \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial v^i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha}.
\end{aligned}$$

Tambin es posible establecer un anlogo al levantamiento completo de un campo vectorial ordinario. Si bien en general no va a ser posible darle una interpretacin geomtrica a partir de curvas integrales, s que va a ser til el definir el levantamiento completo de un supercampo vectorial para enunciar en el captulo 3 de esta memoria el teorema de Noether. Comoquiera que la demostracin de que est bien definido es similar pero mucho ms tediosa (y nada constructiva) que la del levantamiento vertical, no la reproduciremos aqu. As, si tenemos un supercampo vectorial sobre $(M,{}^A_M)$ con la expresin local $X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$, su levantamiento completo a un supercampo sobre (TM, T^A_M) es

$$X^C = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + X^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \dot{q}^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \tag{1.41}$$

$$+ \dot{q}^i \frac{\partial X^\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \dot{\theta}^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial \theta^\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}. \tag{1.42}$$

Es interesante observar que esta definicin de levantamiento completo de un supercampo vectorial coincide con la que sera la definicin natural del levantamiento completo de un supercampo vectorial par a travs del levantamiento completo del flujo local que lo genera (que para supercampos pares s existe) por medio de la aplicacin tangente, esto es, si ϕ_t es el flujo de $X \in ({}^{A}_{M})_0$, el flujo de X^C es simplemente $T\phi_t$.

El superendomorfismo vertical y el supercampo de Liouville

Basndonos en el levantamiento vertical es posible ya definir el anlogo del endomorfismo vertical, la estructura ms natural y relevante de la variedad tangente [Mo90]. El superendomorfismo vertical sobre la supervariedad tangente (TM, T^A) se define como el supercampo tensorial de tipo $(1,1)$ dado en supercoordenadas locales por

$$S = dq^i \otimes \frac{\ }{\dot{q}^i} + d\theta^\alpha \otimes \frac{\ }{\dot{\theta}^\alpha} \tag{1.43}$$

con la notacin $\dot{q} = v$, $\dot{\theta} = \zeta$ como es usual. Comprobemos ahora directamente que respecto de cambios de supercoordenadas de la forma (1.8-1.11) la expresin del objeto definido por la ecuacin (1.43) no cambia, y que por tanto es un supertensor bien definido.

$$\begin{aligned}
d\acute{q}^i \otimes \frac{\ }{\acute{v}^i} + d\acute{\theta}^\alpha \otimes \frac{\ }{\acute{\zeta}^\alpha} &= \left(dq^j \frac{\partial \acute{q}^i}{\partial q^j} + dv^j \frac{\partial \acute{q}^i}{\partial v^j} + d\theta^\alpha \frac{\partial \acute{q}^i}{\partial \theta^\alpha} + d\zeta^\alpha \frac{\partial \acute{q}^i}{\partial \zeta^\alpha} \right) \otimes \\
&\otimes \left(\frac{\partial q^l}{\partial \acute{v}^i} \frac{\partial}{\partial q^l} + \frac{\partial v^l}{\partial \acute{v}^i} \frac{\partial}{\partial v^l} + \frac{\partial \theta^\mu}{\partial \acute{v}^i} \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} + \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial \acute{v}^i} \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \right) + \\
&+ \left(dq^i \frac{\partial \acute{\theta}^\alpha}{\partial q^i} + dv^i \frac{\partial \acute{\theta}^\alpha}{\partial v^i} + d\theta^\beta \frac{\partial \acute{\theta}^\alpha}{\partial \theta^\beta} + d\zeta^\beta \frac{\partial \acute{\theta}^\alpha}{\partial \zeta^\beta} \right) \otimes \\
&\otimes \left(\frac{\partial q^j}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{\partial v^j}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} \frac{\partial}{\partial v^j} + \frac{\partial \theta^\mu}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\mu} + \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \right) = \\
&= \left(dq^j \frac{\partial \acute{q}^i}{\partial q^j} \right) \otimes \left(\frac{\partial q^l}{\partial \acute{q}^i} \frac{\partial}{\partial v^l} - (\phi^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \acute{q}^i} \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \right) + \\
&+ \left(dq^i \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^i} \theta^\beta + d\theta^\beta \phi^\alpha_\beta \right) \otimes \left((\phi^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \right) = \\
&= dq^j \otimes \frac{\partial}{\partial v^j} - dq^j \otimes (\phi^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^j} \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} + \\
&+ dq^i \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^i} \theta^\beta \otimes (\phi^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} + d\theta^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^\beta} = \\
&= dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial v^i} + d\theta^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha}.
\end{aligned}$$

Podemos definir ahora los supercampos verticales sobre la supervariedad tangente como aquellos que estn en el ncleo de S. La expresin local de un supercampo vertical

V ser entonces del tipo

$$V = k^i \frac{}{\dot{q}^i} + k^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha}$$

con $k^i, k^\alpha \in T^A$.

Otra estructura geomtrica cannica sobre (TM, T^A) es el supercampo de Liouville, el cual viene definido localmente por

$$\Delta = \dot{q}^i \frac{}{\dot{q}^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} \tag{1.44}$$

El supercampo vectorial de Liouville Δ es el generador del grupo uniparamtrico de dilataciones $\delta_t : (q, \dot{q}; v, \dot{\theta}) \mapsto (q, \theta; e^{-t}\dot{q}, e^{-t}\dot{\theta})$. De nuevo, utilizando el cambio de supercoordenadas (1.8-1.11) se prueba que Δ est bien definido:

$$\begin{aligned}
\acute{v}^i \frac{\partial}{\partial \acute{v}^i} + \acute{\zeta}^\alpha \frac{\partial}{\partial \acute{\zeta}^\alpha} &= \frac{\partial \acute{q}^i}{\partial q^j} v^j \left(\frac{\partial q^l}{\partial \acute{q}^i} \frac{\partial}{\partial v^l} - (\phi^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial \acute{q}^i} \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \right) + \\
&+ \left(\frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^i} v^i \theta^\beta + \phi^\alpha_\beta \zeta^\beta \right) \left((\phi^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} \right) = \\
&= v^j \frac{\partial}{\partial v^j} - v^j (\phi^{-1})^\mu_\alpha \frac{\phi^\alpha_\beta}{\partial q^j} \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} + \\
&+ (\phi^{-1})^\mu_\alpha \frac{\partial \phi^\alpha_\beta}{\partial q^i} v^i \theta^\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\mu} + \zeta^\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\beta} = \\
&= v^i \frac{\partial}{\partial v^i} + \zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha}
\end{aligned}$$

Es muy til observar que las propiedades usuales en geometra no graduada [Mo90] se mantienen en la categora de las supervariedades. Este hecho nos ser de gran utilidad a la hora de estudiar la supermecnica, por las analogas que en muchas ocasiones presentar con la mecnica ordinaria, si bien quisiramos resaltar ya que no todo resultado en mecnica Lagrangiana tiene una nica contrapartida en supermecnica, van a aparecer multitud de problemas nuevos, sobre todo en el estudio de sistemas degenerados, que ya estudiaremos ms adelante. A continuacin se enumerarn algunas de las principales propiedades del superendomorfismo vertical:

Propiedades del superendomorfismo vertical:

1. $S = \ker S$, luego $S^2 = 0$.

2. El parntesis de Nijenhuis N_S de S se anula, esto es, $[S(U), S(V)] = S[S(U), V] + S[U, S(V)]$, para todos los $U, V \in X(T^A)$.

3. ${}^{L}_{\Delta} S = -S$, es decir, $S(U) = S[\Delta, U] + [S(U), \Delta]$ para todo $U \in X(T^A)$.

4. $[\Delta, U] = -U$ si y slo si $U = X^V$, con $X \in X(^A)$.

La primera relacin es trivial. Para probar la segunda basta utilizar la expresin local de S y una base local de las superderivaciones de T^A. Las dos ltimas expresiones pueden deducirse fcilmente despus de algunas manipulaciones locales.

Antes de terminar mostraremos un resultado que ser utilizado en la prxima seccin.

Dada una 2-superforma exacta $\omega = d\Theta$, para cualesquiera $U, V \in X(T^A)$ se satisface la relacin:

$$d\Theta(S(U), S(V)) = d(\Theta \circ S)(S(U), V) + d(\Theta \circ S)(U, S(V)). \tag{1.45}$$

Dem.- Vemoslo. En primer lugar tenemos que

$$\begin{aligned} d(\Theta \circ S)(S(U), V) &= (-1)^{|U||\Theta|} S(U)(\Theta \circ S)(V) - \\ &- (-1)^{|V|(|U|+|\Theta|)} S(V)(\Theta \circ S)(S(U)) - (\Theta \circ S)([S(U), V]) \\ &= (-1)^{|U||\Theta|} S(U)(\Theta(S(V)) - \Theta(S([S(U), V])). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} d(\Theta \circ S)(U, S(V)) &= -(-1)^{|U||V|} d(\Theta \circ S)(S(V), U) \\ &= -(-1)^{|V|(|U|+|\Theta|)} S(V)(\Theta(S(U)) - \Theta(S([U, S(V)])). \end{aligned}$$

As que, debido a que $N_S = 0$,

$$d(\Theta \circ S)(S(U), V) + d(\Theta \circ S)(U, S(V)) = (-1)^{|U||\Theta|} S(U)(\Theta(S(V))) -$$

$$-(-1)^{|V|(|\Theta|+|U|)} S(V)(\Theta(S(U))) - \Theta([S(U), S(V)]) = d\Theta(S(U), S(V))$$

En particular, si Θ cerrada, $d\Theta = 0$, de la frmula anterior (1.45) resulta que:

Si Θ es cerrada,

$$d(\Theta \circ S)(S(U), V) + d(\Theta \circ S)(U, S(V)) = 0.$$

Como observacin final, quisiramos resaltar que creemos que existe una aproximacin intrnseca que simplifique algunas de las construcciones presentadas.

1.3 Superlagrangianos y (super)ecuaciones de Euler-Lagrange

1.3.1 Superlagrangianos: definicin y propiedades

Un superlagrangiano L es una superfuncin sobre (TM, T^A), es decir, $L \in T^A$. Los superlagrangianos o superfunciones lagrangianas que vamos a utilizar van a ser normalmente homogneos, y as, diremos que un superlagrangiano es par si $L \in (T^A)_0$, y que es impar si $L \in (T^A)_1$. En supercoordenadas locales, los superlagrangianos pares se escribirn como

$$L = L_0(q,\dot{q}) + L_{\alpha\beta}(q,\dot{q})\theta^\alpha\theta^\beta + L_{\alpha\dot{\beta}}(q,\dot{q})\theta^\alpha\dot{\theta}^\beta + L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(q,\dot{q})\dot{\theta}^\alpha\dot{\theta}^\beta + \cdots$$

y los superlagrangianos impares tendrn la expansin general

$$L = L_\alpha(q,\dot{q})\theta^\alpha + L_{\dot{\beta}}(q,\dot{q})\dot{\theta}^\beta + L_{\alpha\beta\gamma}(q,\dot{q})\theta^\alpha\theta^\beta\theta^\gamma + \cdots$$

Por supuesto, estas expresiones tendrn que ser invariantes bajo las transformaciones (1.8-1.11) que definen la supervariedad tangente. Llamaremos a $L_0 = \tau\epsilon(L)$ la parte clsica del superlagrangiano L (pues de hecho define un lagrangiano sobre TM), donde $\tau\epsilon : T^A \to^C \infty$ es la aplicacin de aumentacin de la supervariedad tangente ya definida anteriormente.

En mecnica ordinaria, dado un lagrangiano L, sus ecuaciones del movimiento (las ecuaciones de Euler-Lagrange) son derivadas a partir de un principio variacional. Para lagrangianos de primer orden (esto es, dependientes de las posiciones y las velocidades) estas ecuaciones resultan ser:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\dot{q}^i}\right) = \frac{L}{q^i} \tag{1.46}$$

con $i = 1, \ldots, m$, siendo m la dimensin de M si TM es el espacio de velocidades de la partcula clsica. Sin embargo, cuando se trata de reproducir un principio variacional para un superlagrangiano, surgen muchos problemas. Entre otros, la nocin de integracin sobre las variables impares (la integral de Berezin [Be87]) no resulta del todo satisfactoria. En algunos casos (ver, por ejemplo, [Ga80]) se hace necesario aadir trminos de superficie. As que una forma de obviar todos estos problemas es recurrir a la formulacin geomtrica de la supermecnica Lagrangiana. Nuestro objetivo ser entonces tratar de encontrar una ecuacin intrnseca que, bajo ciertas condiciones de regularidad, sea equivalente localmente a las superecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\dot{q}^i}\right) = \frac{L}{q^i}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\dot{\theta}^\alpha}\right) = \frac{L}{\theta^\alpha}. \tag{1.47}$$

1.3.2 La superforma de Cartan

En este apartado procederemos de forma absolutamente anloga al caso de la mecnica ordinaria. Como se dispone sobre la supervariedad tangente de un superendomorfismo vertical y de un supercampo de Liouville, es posible construir una 2-superforma de Cartan y la superfuncin energa. La 1-superforma de Cartan se define, de manera similar a la mecnica Lagrangiana ordinaria, a travs de

$$\Theta_L = dL \circ S = \frac{L}{\dot{q}^i} dq^i - \frac{L}{\dot{\theta}^\alpha} d\theta^\alpha. \tag{1.48}$$

La 2-superforma de Cartan es entonces

$$\Omega_L = -d\Theta_L. \tag{1.49}$$

Resulta claro de la propia definicin que Ω_L es una 2-superforma cerrada (de hecho, es exacta). Las 1- y 2-superformas de Cartan son pares (impares) si el superlagrangiano es par (impar). La expresin local de la 2-superforma de Cartan es

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= \frac{{}^2 L}{\dot{q}^i q^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{{}^2 L}{\dot{q}^i \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j + \\
&+ (-1)^{|L|} \left(\frac{{}^2 L}{q^i \dot{\theta}^\alpha} - \frac{{}^2 L}{\dot{q}^i \theta^\alpha} \right) dq^i \wedge d\theta^\alpha - \\
&- (-1)^{|L|} \frac{{}^2 L}{\dot{q}^i \dot{\theta}^\alpha} dq^i \wedge d\dot{\theta}^\alpha + (-1)^{|L|} \frac{{}^2 L}{\dot{q}^i \dot{\theta}^\alpha} d\dot{q}^i \wedge d\theta^\alpha - \\
&- \frac{{}^2 L}{\theta^\alpha \dot{\theta}^\beta} d\theta^\alpha \wedge d\theta^\beta + \frac{{}^2 L}{\dot{\theta}^\alpha \dot{\theta}^\beta} d\dot{\theta}^\alpha \wedge d\theta^\beta
\end{aligned}$$

y la supermatriz correspondiente con coeficientes en el lgebra de Grasmann $\Lambda(^n)$ respecto de la base local de superformas $(dq^i, d\dot{q}^i; d\theta^\alpha, d\dot{\theta}^\alpha)$ es

$$(\Omega_L) = \left(\begin{array}{cc|cc} M & W & R & S \\ -W^t & 0 & T & 0 \\ \hline -R^t & -T^t & U & V \\ -S^t & 0 & V^t & 0 \end{array} \right) \tag{1.50}$$

donde

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \frac{{}^2 L}{\dot{q}^i q^j} - \frac{{}^2 L}{\dot{q}^j q^i} && (1.51) \\
W_{ij} &= \frac{{}^2 L}{\dot{q}^i \dot{q}^j} && (1.52) \\
R_{i\alpha} &= -R_{\alpha i} = (-1)^{|L|} \left(\frac{{}^2 L}{q^i \dot{\theta}^\alpha} - \frac{{}^2 L}{\dot{q}^i \theta^\alpha} \right) && (1.53)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_{i\alpha} &= -S_{\alpha i} = -(-1)^{|L|}\frac{{}^2L}{\dot{q}^i\dot{\theta}^\alpha} = (-1)^{|L|}T_{i\alpha} = -(-1)^{|L|}T_{\alpha i} && (1.54)\\
U_{\alpha\beta} &= \frac{{}^2L}{\dot{\theta}^\alpha\theta^\beta} + \frac{{}^2L}{\dot{\theta}^\beta\theta^\alpha} && (1.55)\\
V_{\alpha\beta} &= \frac{{}^2L}{\dot{\theta}^\alpha\dot{\theta}^\beta} && (1.56)\\
& && (1.57)
\end{aligned}
$$

Diremos que el superlagrangiano L es regular si Ω_L is no degenerada, o, lo que es lo mismo, para superlagrangianos L pares, debido a (1.51), cuando las matrices

$$\frac{{}^2L}{\dot{q}^i\dot{q}^j};\quad \frac{{}^2L}{\dot{\theta}^\alpha\dot{\theta}^\beta} \tag{1.58}$$

son invertibles. Esta condicin es equivalente a la regularidad de las matrices ordinarias

$$\frac{{}^2L_0}{\dot{q}^i\dot{q}^j};\qquad \frac{{}^2L_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}{\dot{\theta}^\alpha\dot{\theta}^\beta} \tag{1.59}$$

Por otra parte, si L es impar, la supermatriz (Ω_L) es impar, y ser no degenerada si y slo si los bloques antidiagonales son no degenerados. Esto implica que las dimensiones par e impar del superespacio de configuraciones deberan ser iguales, y que la supermatriz

$$\frac{{}^2L}{\dot{q}^i\dot{\theta}^\alpha}$$

es no degenerada, o lo que es lo mismo, que la matriz ordinaria

$$\frac{L_{\dot{\alpha}}}{\dot{q}^i}$$

es no degenerada.

Es posible distinguir en principio dos tipos de degeneracin para 2-superformas singulares. En primer lugar, estara la degeneracin asociada al ncleo dbil de la superforma, dado por aquellos supercampos vectoriales Y tales que $\epsilon(\Omega(Y,X)) = 0$ para todo supercampo X. Y en segundo lugar est el ncleo fuerte, que se define como los supercampos Z que satisfagan $i_Z\Omega = 0$. Es fcil ver que los supercampos del ncleo fuerte definen una sublgebra de Lie graduada. En el captulo 4 se vern con ms detalle esta y otras propiedades para sistemas dinmicos definidos por superformas degeneradas.

1.3.3 Superecuaciones de Euler-Lagrange

Super SODE's

Muchos de los objetos importantes en la geometra de las supervariedades tangentes, y especialmente en supermecnica Lagrangiana, son el anlogo de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. La definicin de stas (que llamaremos super SODEs para abreviar) es similar a la definicin usual en la geometra del fibrado tangente. Un supercampo vectorial Γ en la supervariedad tangente (TM, T_M^A) es una super SODE si $S(\Gamma) = \Delta$. Localmente, esto significa que Γ es una super SODE si y solamente si tiene la siguiente expresin en supercoordenadas locales:

$$\Gamma = v^i \frac{}{q^i} + \zeta^\alpha \frac{}{\theta^\alpha} + f^i \frac{}{v^i} + g^\alpha \frac{}{\zeta^\alpha} \tag{1.60}$$

donde f^i, g^α, las superfuerzas generalizadas, son superfunciones pares arbitrarias. Resulta obvio de la definicin que las super SODEs homogneas (esto es, de paridad definida como supercampos vectoriales) son supercampos vectoriales pares. Es tambin inmediato concluir de las definiciones anteriores que si Γ es una super SODE, entonces para todo $X \in X(^A)$,

$$S([X^V, \Gamma]) = X^V.$$

Naturalmente, el nombre de la definicin anterior est justificado porque Γ es el campo naturalmente asociado con el conjunto de superecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{array}{rcl} \ddot{q}^i & = & f^i(q, \dot{q}, \theta; \dot{\theta}) \ ; \quad i = 1, ..., m \\ \ddot{\theta}^\alpha & = & g^\alpha(q, \dot{q}; \theta, \dot{\theta}) \ ; \quad \alpha = 1, ..., n \end{array} \tag{1.61}$$

Supercampo vectorial de Euler-Lagrange

De manera absolutamente similar al caso de la mecnica ordinaria, es posible definir la superenerga de un superlagrangiano dado L como la superfuncin

$$E_L = \Delta(L) - L = \dot{q}^i \frac{L}{\dot{q}^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{L}{\dot{\theta}^\alpha} - L, \tag{1.62}$$

y el hamiltoniano clsico de la teora como $\tau\epsilon(E_L) = E_0$. Por supuesto, si L es impar, $E_0 = 0$. Claramente, si L es regular, la 2-superforma de Cartan define una estructura supersimplctica de la misma paridad que el superlagrangiano, y existe un supercampo vectorial par, el supercampo vectorial de Euler-Lagrange $\Gamma_L \in X(T^A)$, solucin de la ecuacin dinmica

$$i_{\Gamma_L} \Omega_L = dE_L. \tag{1.63}$$

En otras palabras, Γ_L es el supercampo vectorial par hamiltoniano con superhamiltoniano E_L respecto de la estructura supersimplctica Ω_L.

Si Ω_L es degenerada, la ecuacin previa puede no tener solucin, y si existe no va a ser nica. Esta ambigedad en la definicin de la dinmica la estudiaremos en la segunda parte de este trabajo, tratando de adaptar la teora de las ligaduras de Dirac [Di64] y su formulacin geomtrica [Go80] al contexto de las supervariedades. Otra posibilidad sera extender el tratamiento puramente Lagrangiano desarrollado recientemente para sistemas Lagrangianos ordinarios degenerados estudiado en [Ca88],[Ba88].

Para derivar la forma del supercampo vectorial de Euler-Lagrange, debemos estudiar la relacin entre el supertensor S y la superforma de Cartan Ω_L. Utilizando la expresin (1.45) del Lema 1 y sustituyendo $\Theta \circ S$ por Θ_L y ω por Ω_L, es fcil obtener que

$$i_S \Omega_L = 0, \tag{1.64}$$

donde $i_S\Omega_L(U,V) = \Omega_L(S(U),V) + \Omega_L(U,S(V))$ para $U, V \in X(T^A)$ arbitrarios. Como consecuencia directa de la ecuacin (1.64), se tiene que

$$i(S(U))\Omega_L = -i(U)\Omega_L \circ S \tag{1.65}$$

para todo $U \in X(T^A)$. Por otro lado, como $\Omega_L = -d(S \circ dL)$ obtenemos que

$$\Omega_L(U,V) = -U(S(V)(L)) + (-1)^{|U||V|}V(S(U)(L)) + S([U,V])(L).$$

Tomando $U = \Delta$, tenemos $\Omega_L(\Delta, V) = -\Delta(S(V)(L)) + S([\Delta, V])(L) = -S(V)\Delta(L) - ([\Delta, S(V)] - S([\Delta, V]))(L) = -S(V)(\Delta(L)) + S(V)(L) = -S(V)(E_L)$. Hemos demostrado por tanto que

$$i(\Delta)\Omega_L = -dE_L \circ S \tag{1.66}$$

Ahora ya estamos en condiciones de probar el resultado fundamental de la supermecnica Lagrangiana, que por su importancia damos en el siguiente teorema.

Si L es un superlagrangiano regular, entonces el supercampo vectorial de Euler-Lagrange Γ_L es una super SODE.

La demostracin se sigue de $i(S(\Gamma_L))\Omega_L = -i(\Gamma_L)\Omega_L \circ S = -dE_L \circ S = i(\Delta)\Omega_L$. De lo cual, debido a la regularidad de Ω_L , podemos concluir que $S(\Gamma_L) = \Delta$ and Γ_L es una super SODE.

Resulta instructivo probar el mismo resultado en supercoordenadas locales. Si escribimos

$$A_{ij} = \frac{{}^2L}{\dot q^i \dot q^j}; \quad B_{i\alpha} = \frac{{}^2L}{\dot q^i \dot\theta^\alpha}; \quad C_{\alpha\beta} = \frac{{}^2L}{\dot\theta^\alpha \dot\theta^\beta}, \tag{1.67}$$

utilizando la notacin de (1.60), definamos

$$\begin{aligned} f^i - \dot q^i &= F^i \\ h^\alpha - \dot\theta^\alpha &= H^\alpha \end{aligned} \tag{1.68}$$

Es fcil calcular entonces que

$$\begin{aligned} AF &= BH \\ BF &= CH \end{aligned} \tag{1.69}$$

Ahora, puesto que A y C son no degenerados, podemos despejar $F = A^{-1}BH$ y $H = C^{-1}BF$. Entonces $F = A^{-1}BH = A^{-1}BC^{-1}BF = = (A^{-1}BC^{-1}B)^2F = \cdots = (A^{-1}BC^{-1}B)^nF$, y as indefinidamente para todo n. Pero B es nilpotente, lo cual implica que $A^{-1}BC^{-1}B$ tambin va a ser nilpotente, as que existir un p tal que $(A^{-1}BC^{-1}B)^p = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow \Gamma_L$ es una super SODE.

Por supuesto, la justificacin de toda esta construccin geomtrica est en que, si L es un superlagrangiano regular, el sistema dinmico definido por el supercampo de Euler-Lagrange es equivalente a las ms familiares ecuaciones de Euler-Lagrange dadas al principio de esta seccin (1.61). Ello se sigue fcilmente simplemente calculando cul sera la forma local de Γ_L. Pero quisiramos resaltar que las ecuaciones (1.61) no tienen un significado intrnseco, y que nicamente la ecuacin (1.63) est definida de modo invariante.

1.3.4 Ejemplos

A continuacin veremos una serie de ejemplos sencillos de sistemas definidos por superlagrangianos. Aqu nos limitaremos a establecer las ecuaciones del movimiento y los superlagrangianos de las que estas derivan, con la intencin de ir estudiando sus propiedades a lo largo de esta tesis. Los dos primeros ejemplos son ya clsicos y puede encontrarse abundante literatura sobre ellos. Los trabajos pioneros sobre el estudio de la partcula clsica no relativista y relativista fueron desarrollados independientemente por Casalbuoni [Ca76] y Berezin [Be77]. Por ltimo, en el tercer ejemplo se estudia toda una familia de superlagrangianos con fibrados estructurales asociados arbitrarios. A lo largo de las siguientes secciones y captulos nos irn apareciendo otros ejemplos igualmente interesantes, que sern estudiados en su momento.

Superpartcula clsica no relativista

Este es un ejemplo ya clsico [Ca76] [Be77] [Ga80], y por tanto bien analizado desde hace ya bastantes aos. La idea consiste en construir un anlogo clsico no relativista del spin en el sentido de que, una vez se haga la cuantificacin cannica del sistema, el spin aparezca de forma natural. Es interesante observar aqu que precisamente la formulacin desde un principio variacional fue primero aplicada a este sencillo ejemplo, y en l se manifiestan ya los problemas que surgen en este contexto [Ga80]. Vamos a estudiar dos posibles sistemas. En ambos casos, nuestra supervariedad va ser simplemente la dada por la variedad base ^{3} y fibrado estructural trivial ${}^3\times{}^3 \to{}^3$. Asumiremos que tomamos la supermtrica trivial en este superespacio.

A) Nuestro superlagrangiano de partida es

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^i\theta^i - V_1(q) - \theta^i\theta^j V_{ij}(q) \tag{1.70}$$

Podemos asumir que el superlagrangiano, como sera de desear, sea invariante bajo el grupo de rotaciones, lo cual implicar que, si las supercoordenadas impares θ^i se transforman bajo la representacin adjunta de $SO(3)$, el tensor antisimtrico V_{ij} tendr la forma

$$V_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} V_k(q)$$

donde $V_k(q)$ se transforma como un pseudovector.

La 2-superforma de Cartan asociada con este superlagrangiano es

$$\omega_L = dq^i \wedge d\dot{q}^i + \frac{1}{2} d\theta^i \wedge d\theta^i$$

que claramente es degenerada. Por tanto, la solucin no tiene por qu ser una super SODE, como de hecho as ocurre. Calculando la superenerga

$$E_L = \frac{i}{2}(\dot{q}^i)^2 + V_1(q) + \theta^i \theta^j V_{ij}(q)$$

y resolviendo la ecuacin dinmica (1.63) se obtiene que el supercampo vectorial dinmico tendr la expresin

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{}{q^i} - \left(\frac{V_1}{q^i} + \theta^j \theta^k \frac{V_{jk}}{q^i} \right) \frac{}{\dot{q}^i} - 2V_{ij}\theta^j \frac{}{\theta^i} + k^i \frac{}{\dot{\theta}^i} \tag{1.71}$$

con k^i una superfuncin arbitraria (consecuencia de la degeneracin). Si ahora escribimos $\vec{S} = -\frac{i}{2}\vec{\theta} \wedge \vec{\theta}$, las ecuaciones del movimiento toman la forma

$$\dot{\vec{\theta}} = \vec{V} \wedge \vec{\theta} \tag{1.72}$$

$$\dot{\vec{S}} = \vec{V} \wedge \vec{S} \tag{1.73}$$

$\vec{S}$ ser el spin cuntico tras la cuantificacin del sistema.

B) Si ahora se considera el caso en que el potencial $\vec{V}$ pueda depender de las velocidades pares, podemos describir el acoplamiento spin-rbita a travs del superlagrangiano

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 - \frac{i}{2}\vec{\theta} \cdot \dot{\vec{\theta}} + \mu(\vec{q} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{S} \tag{1.74}$$

Las ecuaciones del movimiento son

$$\dot{\vec{\theta}} = \mu \vec{\theta} \wedge (\vec{q} \wedge \vec{v}), \tag{1.75}$$

$$\dot{\vec{p}} = \mu \vec{v} \wedge \vec{v} \tag{1.76}$$

donde $p^i = L/\dot{q}^i$. Definiendo el momento angular mecnico

$$\vec{L} = \vec{q} \wedge \vec{v}$$

se obtiene fcilmente que

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{q} \wedge \vec{v}) = \mu \vec{L} \wedge \vec{S}, \quad (1.77)$$

$$\dot{\vec{S}} = \mu \vec{S} \wedge \vec{L} \quad (1.78)$$

luego el momento angular total $\vec{L} + \vec{S}$ es una constante del movimiento.

Superpartcula clsica relativista

El estudio de la superpartcula libre relativista ya se puede encontrar en los trabajos de Casalbuoni y Berezin de mediados de los setenta. Desde entonces, es posible encontrar abundante literatura sobre siversos modelos para supelagrangianos relativistas. Para una revisin exhaustiva de todos los tpicos tratados, pueden consultarse los trabajos de Henneaux y Teitelboim, as como los de Gomis *et al* relacionados en la bibliografa (por citar tan slo unos cuantos). El superlagrangiano ms comn para la descripcin de la partcula clsica relativista viene dado (ver [Go84],[Go86b]) por la expresin

$$L = -m\sqrt{(\dot{x}^\mu - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\mu)^2} - \frac{i}{2}(\epsilon_\mu \dot{\epsilon}^\mu - \epsilon_5 \dot{\epsilon}^5) - \frac{i}{2}m\chi\epsilon_5 \ . \quad (1.79)$$

Las supercoordenadas $(\epsilon_\mu, \epsilon_5, \chi)$ son impares, y por tanto el superespacio de configuraciones estar formado por cuatro variables pares y seis impares, y ser $({}^4, \Lambda^6)$. El superespacio de fases es la supervariedad tangente a esta, esto es, $({}^8, \Lambda^{12})$.

En ocasiones se puede encontrar el ltimo trmino de la superfuncin lagrangiana omitido. Ello por supuesto influir en la forma de las ligaduras. Lo que s hay que destacar es que, en general, va a haber tanto ligaduras primarias (asociadas con grados de libertad gauge del sistema) como ligaduras secundarias, esto es, no va a existir un campo dinmico sobre todo el espacio de fases solucin de las ecuaciones de Euler-Lagrange. El estudio de la partcula relativista, y las ligaduras que aparecen, se hace ms transparente al pasar al formalismo Hamiltoniano, y un estudio ms minucioso en este contexto puede encontrarse en, por ejemplo, [He82b] o [Go84]. Nosotros ya volveremos sobre este punto ms adelante.

La superfuncin energa es

$$E_L = -\frac{m}{2}\frac{i\chi\epsilon_\mu \dot{x}^\mu}{\sqrt{(\dot{x}^\mu - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\mu)^2}} \ . \quad (1.80)$$

La 1-superforma de Cartan es

$$\Theta_L = -m\frac{\dot{x}_\mu - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\mu}{\sqrt{(\dot{x}^\nu - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\nu)^2}}dx^\mu - \frac{i}{2}\epsilon_\mu d\epsilon^\mu + \frac{i}{2}\epsilon_5 d\epsilon^5 \ , \quad (1.81)$$

y la 2-superforma de Cartan toma la forma

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= m\left(\frac{-\delta^\mu_\alpha}{\sqrt{\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu - i\chi\epsilon_\nu\dot{x}^\nu}} + \frac{\dot{x}_\mu\dot{x}_\alpha - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\alpha\dot{x}_\mu - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\mu\dot{x}_\alpha}{(\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu - i\chi\epsilon_\nu\dot{x}^\nu)^{3/2}}\right) dx^\mu \wedge \dot{x}^\alpha + \\
&+ \frac{m}{2}\left(\frac{-i\epsilon_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu - i\chi\epsilon_\nu\dot{x}^\nu}} + \frac{i\dot{x}_\mu\epsilon_\alpha\dot{x}^\alpha + \chi\epsilon_\mu\epsilon_\alpha\dot{x}^\alpha}{(\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu - i\chi\epsilon_\nu\dot{x}^\nu)^{3/2}}\right) dx^\mu \wedge d\chi + \\
&+ \frac{m}{2}\left(\frac{i\chi\delta^\mu_\alpha}{\sqrt{\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu - i\chi\epsilon_\nu\dot{x}^\nu}} - \frac{1}{2}\frac{i\dot{x}_\mu\chi\dot{x}_\alpha}{(\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu - i\chi\epsilon_\nu\dot{x}^\nu)^{3/2}}\right) dx^\mu \wedge d\epsilon^\alpha + \\
&+ \frac{i}{2}d\epsilon_\mu \wedge d\epsilon^\mu - \frac{i}{2}d\epsilon_5 \wedge d\epsilon^5 \ . \qquad (1.82)
\end{aligned}$$

Resolviendo ahora la ecuacin dinmica $i_\Gamma\Omega_L = dE_L$, encontramos por ejemplo las siguientes ligaduras que involucran a las variables grasmannianas:

$$\dot{\epsilon}_5 = -\frac{1}{2}m\chi \ , \qquad (1.83)$$

$$\dot{\epsilon}_\mu = -\frac{m}{2}\frac{\dot{x}_\mu\chi}{\sqrt{(\dot{x}^\nu - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\nu)^2}} \ , \text{ y} \qquad (1.84)$$

$$\epsilon_5 = \frac{\dot{x}_\mu\epsilon^\mu}{\sqrt{(\dot{x}^\nu - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\mu)^2}} \ . \qquad (1.85)$$

Para ver la evolucin en las supercoordenadas pares recurriremos en el prximo captulo a la imagen hamiltoniana, que es ms transparente en este caso.

Superpartculas con fibrados estructurales arbitrarios, caso degenerado

La mayor parte de los superlagrangianos supersimtricos que se utilizan en las aplicaciones de la supermecnica son diferentes modelos para superpartculas con fibrados estructurales el fibrado tangente, el fibrado cotangente o un fibrado de spin de la variedad base. Los modelos ms comunes para superpartculas relativistas suelen construirse, como ya hemos visto en el segundo ejemplo de esta seccin, a partir de fibrados estructurales arbitrarios. Aqu vamos a ver una construccin general de una superpartcula en un superespacio de configuraciones con fibrado estructural arbitrario. Sea $(M, {}^A_M)$ una supervariedad con fibrado estructural $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado vectorial arbitrario. El fibrado estructural de la supervariedad tangente es el fibrado vectorial $TE \xrightarrow{\pi_*} TM$ (ver Teorema 1). Consideremos una mtrica Riemanniana g sobre la variedad base M. Esta mtrica induce una mtrica Riemanniana sobre TM por levantamiento respecto de la conexin de Levi-Civita de g. Elijamos una mtrica fibrada η en el fibrado estructural $E \xrightarrow{\pi} M$ y supercoordenadas locales impares ortonormales

θ^α, identificndolas con una referencia local de E. Consideremos una conexin lineal ∇ sobre el fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ con 1-forma de conexin A, es decir, tenemos

$$\nabla_i \theta^\alpha = A_i(q)^\alpha_\beta \theta^\beta; \tag{1.86}$$

y finalmente tomemos la mtrica Riemanniana de fibrados vectoriales η^V en el fibrado vectorial $TE \to TM$ obtenida por levantamiento vertical de la mtrica fibrada sobre $E \xrightarrow{\pi} M$. Entonces, la siguiente expresin

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \eta_{\alpha\beta} \theta^\alpha (\dot{\theta}^\beta - A_i(q)^\beta_\gamma \dot{q}^i \theta^\gamma) \tag{1.87}$$

es un superlagrangiano bien definido sobre (TM, T^A_M). La demostracin de este hecho se hace por una aplicacin directa de las funciones de transicin para la supervariedad tangente (1.8-1.11), y las propiedades de transformacin de la conexin lineal A, comprobando que la forma de L no cambia.

Este superlagrangiano es singular. El clculo de sus 1- y 2-superformas de Cartan da, respectivamente,

$$\Theta_L = (g_{ij} \dot{q}^j - \eta_{\alpha\beta} A_{i\gamma}^{\beta} \theta^\alpha \theta^\gamma) dq^i + \eta_{\alpha\beta} \theta^\beta d\theta^\alpha \tag{1.88}$$

y

$$\begin{aligned} \Omega_L &= g_{ij} dq^i \wedge d\dot{q}^j + \left(\frac{g_{ij}}{q^k} \dot{q}^j - \eta_{\alpha\beta} \frac{A_{i\gamma}^{\beta}}{q^k} \theta^\alpha \theta^\gamma \right) dq^i \wedge dq^k \\ &- (\eta_{\alpha\beta} A_{i\gamma}^{\beta} - \eta_{\gamma\beta} A_{i\alpha}^{\beta}) \theta^\gamma d\theta^\alpha \wedge dq^i - \eta_{\alpha\beta} d\theta^\alpha \wedge d\theta^\beta. \end{aligned} \tag{1.89}$$

La energa es $E_L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$, y el supercampo vectorial dinmico solucin de la ecuacin dinmica asociada (1.63) es

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{}{q^i} - (\Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k - g^{ij} \eta_{\alpha\gamma} (R_{jk})^\alpha_\beta \dot{q}^k \theta^\beta \theta^\gamma) \frac{}{\dot{q}^k} + \dot{q}^i \nabla_i \theta^\alpha \frac{}{\theta^\alpha} + k^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} \tag{1.90}$$

donde $R_{ij} = [\nabla_i, \nabla_j]$ denota las componentes del tensor de curvatura de la conexin lineal A, y k^α son superfunciones arbitrarias. Las ecuaciones asociadas a este supercampo son muy similares a las ecuaciones de Wong para una partcula movindose en un campo de Yang-Mills A.

Por supuesto, hay otras elecciones para superlagrangianos con fibrados estructurales arbitrarios. En el captulo 3 veremos un ejemplo de superlagrangiano supersimtrico con superespacio de configuraciones la supervariedad con variedad base M y fibrado estructural $T^*M \oplus T^*M$, y con una expresin de la superfuncin lagrangiana similar a la anterior pero con un trmino adicional de curvatura.

1.4 El problema inverso en la supermecnica Lagrangiana

El problema inverso en la supermecnica consiste en determinar, dada una coleccin de superecuaciones diferenciales de segundo orden, si existe un superlagrangiano tal que sus ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas sean equivalentes al sistema original. Las motivaciones para resolver este problema son varias. En primer lugar, y desde un punto de vista fsico, el encontrar una formulacin Lagrangiana (y por tanto Hamiltoniana va la transformacin de Legendre) del sistema es un requisito imprescindible para poder cuantificar el mismo. Por otra parte, podemos encontrar simetras en el superlagrangiano que den lugar a cantidades conservadas tipo Noether, como ya veremos ms adelante, que ayuden a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. Adems, es bien conocido que si existen dos lagrangianos disequivalentes (en el sentido de que den lugar a superformas de Cartan diferentes) que conduzcan a las mismas ecuaciones del movimiento, si al menos uno de ellos es regular, puede construirse toda una familia de cantidades conservadas (tipo no Noether) que ayuden a estudiar la integrabilidad del sistema de ecuaciones dado. Pues bien, este resultado ha sido generalizado recientemente [La92] al caso en que aparezcan variables impares. Estas seran en lneas generales las motivaciones ms importantes que nos llevan a estudiar el problema inverso en la supermecnica.

En este trabajo estudiaremos el problema inverso para dos tipos de sistemas de ecuaciones diferenciales: aquellos dados por ecuaciones de segundo orden [Ib92b], y el caso en que tengamos ecuaciones de segundo orden en las variables pares y de primer orden en las variables impares. Este segundo caso va a estar asociado a la existencia de superlagrangianos degenerados, y por tanto ser analizado en el captulo 4 de esta memoria, que ser dedicado al estudio de superlagrangianos degenerados. Para sistemas de ecuaciones de rdenes superiores, habra que recurrir a superlagrangianos de orden superior, como se hace, por ejemplo, en el caso ordinario, en [Ib90].

1.4.1 Sistemas de ecuaciones de segundo orden

El problema que nos planteamos resolver podra establecerse como sigue. Supongamos que sobre una supervariedad $(M,^A)$ tenemos dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\ddot{q}^a = f^a(q,\dot{q},\theta,\dot{\theta}); \qquad \ddot{\theta}^\alpha = f^\alpha(q,\dot{q},\theta,\dot{\theta}), \tag{1.91}$$

con las superfunciones $f^a(q,\dot{q},\theta,\dot{\theta})$ pares y $f^\alpha(q,\dot{q},\theta,\dot{\theta})$ impares.

Como sabemos, estas ecuaciones pueden entenderse como el flujo local definido por la super SODE

$$\Gamma = \dot{q}^a \frac{\ }{q^a} + \dot{\theta}^\alpha \frac{\ }{\theta^\alpha} + f^a \frac{\ }{\dot{q}^a} + f^\alpha \frac{\ }{\dot{\theta}^\alpha}, \tag{1.92}$$

habida cuenta de que Γ es un supercampo vectorial par que s puede ser integrado.

La cuestin a resolver puede formularse entonces como sigue. Bajo qu condiciones existe un superlagrangiano L tal que Γ sea la solucin de la ecuacin dinmica definida por L, $i_\Gamma \Omega_L = dE_L$? La versin geomtrica de la resolucin de este problema puede encontrarse en [Cr81],[He82a]. El siguiente teorema [Ib92c] extiende a los dos anteriores al caso graduado, y muestra la aparicin de nuevas posibilidades.

Las condiciones necesarias y suficientes para que exista una superfuncin lagrangiana (local) que tenga a Γ como su supercampo de Euler-Lagrange asociado son la siguientes:

i) Que exista una 2-superforma cerrada Ω ($d\Omega = 0$), tal que
ii) ${}^{L}_{\Gamma}\Omega = 0$ y
iii) $\Omega(V_1, V_2) = 0$ para todo par V_1, V_2 de supercampos verticales.

Dem.-

La necesidad de las condiciones i) y ii) es obvia, por la construccin de Ω_L. Calculando la forma explcita de Ω_L en supercoordenadas locales, es tambin sencillo comprobar la condicin iii).

Demostremos ahora directamente la suficiencia de las condiciones i),ii),iii) obteniendo una superfuncin lagrangiana local L para Γ. Debido a la condicin i) y aplicando el lema de Poincar [Ko77], sabemos que existe una 1-superforma Φ tal que

$$\Omega = -d\Phi.$$

Escribiendo Φ en supercoordenadas locales se tiene:

$$\Phi = M_a(q,\dot q,\theta,\dot\theta)dq^a + M_{\dot a}(q,\dot q,\theta,\dot\theta)d\dot q^a + N_\alpha(q,\dot q,\theta,\dot\theta)d\theta^\alpha + N_{\dot\alpha}(q,\dot q,\theta,\dot\theta)d\dot\theta^\alpha.$$

Denotando por $\dot\Phi = M_{\dot a} d\dot q^a + N_{\dot\alpha} d\dot\theta^\alpha$, obtenemos, debido a iii),

$$d\dot\Phi(V_1, V_2) = d\Phi(V_1, V_2) = \Omega(V_1, V_2) = 0$$

para todos los supercampos verticales V_1, V_2. Entonces, existe una superfuncin $f(q,\dot q,\theta,\dot\theta)$ tal que

$$df(V) = \dot\Phi(V)$$

para todo supercampo vertical V, o localmente,

$$\frac{f}{\dot q^a} = N_{\dot a}; \qquad \frac{f}{\dot\theta^\alpha} = M_{\dot\alpha}.$$

Definiendo entonces la 1-superforma

$$\Theta = \Phi - df$$

es evidente que $i_V\Theta = 0$ para todo V supervertical, luego en supercoordenadas locales Θ tiene la expresin

$$\Theta = A_a dq^a + B_\alpha d\theta^\alpha$$

donde A_a es una superfuncin par y B_α es impar si Ω es par, y de manera inversa si Ω es impar. Claramente, $d\Theta = -\Omega$.

Recurriendo ahora a la condicin de invariancia ii) obtenemos

$${}^L_\Gamma d\Theta = d{}^L_\Gamma\Theta = 0$$

o, en otras palabras, ${}^L_\Gamma\Theta$ es una 1-superforma cerrada. Utilizando de nuevo el lema de Poincar, podemos afirmar que existe una superfuncin L tal que

$${}^L_\Gamma\Theta = dL,$$

y calculando la derivada de Lie anterior en supercoordenadas locales se deducen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
A_a &= \frac{L}{\dot{q}^a}; \qquad B_\alpha = \frac{L}{\dot{\theta}^\alpha} \\
\dot{q}^a\frac{A_b}{q^a} &+ \dot{\theta}^\alpha\frac{A_b}{\theta^\alpha} + f^a\frac{A_b}{\dot{q}^a} + f^\alpha\frac{A_b}{\dot{\theta}^\alpha} = \frac{L}{q^b} \\
\dot{q}^a\frac{B_\beta}{q^a} &+ \dot{\theta}^\alpha\frac{B_\beta}{\theta^\alpha} + f^a\frac{B_\beta}{\dot{q}^a} + f^\alpha\frac{B_\beta}{\dot{\theta}^\alpha} = \frac{L}{\theta^\beta}.
\end{aligned}$$

Por la ecuacin (1.48), las dos primeras frmulas claramente implican que $\Theta = \Theta_L$ y, en consecuencia (1.49), $\Omega = \Omega_L$. Recurriendo de nuevo a la condicin de invariancia obtenemos $i_\Gamma d\Theta_L + di_\Gamma\Theta_L = dL$, esto es, $i_\Gamma\Omega_L = d(i_\Gamma\Theta_L - L)$, pero $i_\Gamma\Theta_L = dL\circ S(\Gamma) = dL\circ\Delta = \Delta(L)$, luego $i_\Gamma\Omega_L = dE_L$ debido a (1.62).

Observaciones:

1) La 2-superforma Ω puede ser par o impar. En cada caso, obtendremos un superlagrangiano par o impar, respectivamente.

2) Es importante resaltar que, respecto de las condiciones ordinarias de [Cr81],[He82a], Ω no tiene por qu ser regular, esto es, L puede no ser un superlagrangiano regular. Si este fuera el caso, el ncleo dbil de Ω impondra una serie de condiciones algebraicas sobre Γ, mientras que el ncleo fuerte de Ω (definido por el conjunto de supercampos vectoriales Z tales que $\Omega(Z, X) = 0$, $\forall X$, esto es, no slo $\tau\epsilon(\Omega(Z, X)) = 0$) define una superlgebra de Lie invariante, la superlgebra gauge de Γ y L. En tales circunstancias, la supervariedad tangente y la ecuacin dinmica pueden reducirse cocientando por los grados de libertad gauge definidos por el ncleo fuerte de Ω_L. Ntese que esto es una extensin tambin para el caso ordinario de los resultados dados en [Cr81],[He82a]. La cuestin estriba en que nos hemos preguntado por la existencia de un superlagrangiano

tal que sus ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas describiesen la dinmica dada por las ecuaciones (1.91). Si la condicin fuese que el supercampo de Euler-Lagrange fuese equivalente a las euaciones diferenciales de segundo orden (1.91), entonces habra que imponer que la 2-superforma Ω fuese no degenerada.

3) La existencia de superlagrangianos alternativos permite construir un supercampo tensorial de tipo (1,1) que jugara el papel de un operador de recursin [La92] (si al menos uno de los superlagrangianos es regular). Sin embargo, si los superlarangianos tienen paridad opuesta este supercampo tensorial no podr utilizarse para el anlisis de la integrabilidad completa del sistema de ecuaciones diferenciales, sino que tan slo implicara la existencia de una supersimetra, tal y como se indica en [Ib92c].

1.4.2 Ejemplo: aplicacin al superoscilador armnico

Como aplicacin del teorema anterior, construiremos a continuacin toda una familia de superlagrangianos alternativos para el superoscilador armnico. Sea $^{n|n}$ el superespacio de configuraciones con supercoordenadas locales (q^a, θ^a), $a = 1, \ldots, n$. Es fcil ver que la supervariedad tangente es $^{2n|2n}$, con supercoordenadas locales $(q^a, \dot{q}^a, \theta^a, \dot{\theta}^a)$. Las ecuaciones del movimiento del superoscilador armnico son las bien conocidas

$$\ddot{q}^a = -q^a \ ; \quad \ddot{\theta}^a = -\theta^a, \tag{1.93}$$

correspondientes a la super SODE

$$\Gamma = \dot{q}^a \frac{}{q^a} - q^a \frac{}{\dot{q}^a} + \dot{\theta}^a \frac{}{\theta^a} - \theta^a \frac{}{\dot{\theta}^a}. \tag{1.94}$$

El lgebra de supersimetra lineal del superoscilador.

Sea $M(m|n, B_L)$ la superlgebra de Lie de las supermatrices con coeficientes en la superlgebra $B_L = \Lambda(^L)$. Una supermatriz A tendr la estructura en cajas

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{++} & A_{+-} \\ \hline A_{-+} & A_{--} \end{array} \right)$$

Toda supermatriz $A \in M(m|n, B_L)$ tiene asociada un supercampo vectorial lineal X_A en $^{m|n}$. Utilizando una notacin comn para las supercoordenadas pares e impares, digamos, $z^i = (x^a, \theta^\alpha)$, el supercampo vectorial X_A puede expresarse como

$$X_A = z^j A_j{}^i \frac{}{z^i}. \tag{1.95}$$

Claramente, $[X_A, X_B] = X_{[A,B]}$, donde $[A, B]$ denota el superconmutador en la superlgebra de Lie $M(m|n, B_n)$ (ver Apndice A para la definicin de superlgebra de Lie).

Anlogamente, si F es otra supermatriz, podemos tratar de definir una 2-superforma Ω_F como

$$\Omega_F = dz^i \wedge dz^j F_{ji}. \tag{1.96}$$

Para obtener una 2-superforma es necesario que F sea antisimtrica, es decir, $F^{st} = F$ o, en componentes, $F_{ij} = -(-1)^{|i||j|}F_{ji}$ (para ser precisos, en la expresin anterior slo sobrevivira la parte par de F con estas propiedades), independientemente del grado de F. La 2-superforma Ω_F ser par o impar dependiendo de que F sea par o impar, respectivamente.

Cuando F es una supermatriz constante, Ω_F es cerrada, y la accin del supercampo vectorial X_A puede calcularse fcilmente, con el resultado

$$\begin{aligned} {}^{L}_{X_A}\Omega_F &= (-1)^{|A||i|}dz^i \wedge dz^j\{(AF)_{ij} - (-1)^{|i||j|}(AF)_{ij}\} \\ &= (-1)^{|A||i|}dz^i \wedge dz^j\{(AF) - (AF)^{st}\}_{ji} \ . \end{aligned} \tag{1.97}$$

En particular, slo ser posible asociar ${}^{L}_{X_A}\Omega_F$ a una supermatriz cuando A sea par. En tal caso,

$${}^{L}_{X_A}\Omega_F = 2\Omega_{(AF)^{sa}} \ , \qquad (AF)^{sa} = \frac{1}{2}((AF) - (AF)^{st}) \ . \tag{1.98}$$

Para el anlisis del superoscilador armnico consideraremos el superespacio de configuraciones ${}^{n|n}$ como una variedad graduada. Esto implica que tan slo los nmeros constantes (tanto reales como complejos) son nmeros ordinarios. Consideremos entonces la supermatriz J en $M(2n|2n,)$ definida como

$$J = \left(\begin{array}{c|c} J_0 & 0 \\ \hline 0 & J_0 \end{array}\right)$$

donde J_0 es la matriz simplctica $2n \times 2n$

$$J_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right).$$

Claramente, la super SODE Γ dada en (1.94) que define la dinmica del superoscilador harmnico es simplemente

$$\Gamma = X_J, \tag{1.99}$$

y entonces un supercampo vectorial lineal X_A ser una simetra de Γ si y slo si

$$0 ={}^{L}_{X_A} \Gamma = [X_A, X_J] = X_{[A,J]} \ ,$$

es decir, si y solamente si $[A, J] = 0$. Identificando ${}^{2n|2n}$ con ${}^{n|n}$, y denotando la superlgebra $\Lambda({}^{n})$ por B_n^C, tenemos que las supermatrices que satisfacen la condicin anterior son aquellas que pertenecen a $M(n|n, B_n^C)$ como sublgebra de $M(2n|2n, B_{2n})$. En otras palabras, el supergrupo de simetras lineales de Γ es el supergrupo de las transformaciones lineales complejas $Gl(n|n, B_n^C)$.

Problema inverso lineal. Sea Ω_F una 2-superforma asociada a la supermatriz antisimtrica F de $M(2n|2n,)$. La primera condicin en el problema inverso, es decir, que Ω_F sea cerrada, se satisface automticamente. Debido a la ecuacin (1.98), la condicin de invariancia ${}^{L}_{\Gamma}\Omega_F = 0$ implica que $JF)^{sa} = 0$, y esto es equivalente a que F est en la superlgebra de Lie del supergrupo de Lie $Gl(2n|2n,) \cap Osp(2n|2n)$, con la estructura en cajas

$$F = \left(\begin{array}{cc|cc} F_{++}^d & F_{++}^a & F_{+-}^d & F_{+-}^a \\ -F_{++}^a & F_{++}^d & -F_{+-}^a & F_{+-}^d \\ \hline -(F_{+-}^d)^t & (F_{+-}^a)^t & F_{--}^d & F_{--}^a \\ -(F_{+-}^a)^t & (F_{+-}^d)^t & F_{--}^a & -F_{--}^d \end{array}\right)$$

con F_{++}^a una matriz simtrica de nmeros ordinarios y F_{--}^a una matriz antisimtrica tambin de nmeros ordinarios.

La condicin vertical iii) en el teorema 3 implica que los coeficientes de $d\dot{q} \wedge d\dot{q}$, $d\dot{q} \wedge d\dot{\theta}$ y $d\dot{\theta} \wedge d\dot{\theta}$ de Ω_F deben anularse, as que F tendr la forma

$$F = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & F_{++}^a & 0 & F_{+-}^a \\ -F_{++}^a & 0 & -F_{+-}^a & 0 \\ \hline 0 & (F_{+-}^a)^t & 0 & F_{--}^a \\ -(F_{+-}^a)^t & 0 & F_{--}^a & 0 \end{array}\right) = F_{par} + F_{impar} \ ,$$

con

$$F_{par} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & F_{++}^a & & \\ -F_{++}^a & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 0 & F_{--}^a \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & F_{--}^a & 0 \end{array}\right),$$

$$F_{impar} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & F_{+-}^a \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & -F_{+-}^a & 0 \\ \hline 0 & (F_{+-}^a)^t & & \\ -(F_{+-}^a)^t & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right).$$

Superlagrangianos alternativos.

En ambos casos lo que obtenemos es que el producto FJ define una supermtrica G sobre el superespacio ${}^{2n|2n}$, par o impar dependiendo de que F sea par o impar, respectivamente, y los superlagrangianos de los cuales deriva Ω_F vienen dados por

$$L_{par} = \frac{1}{2}((F_{++}^a)_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c + (F_{--}^a)_{bc}\dot{\theta}^b\dot{\theta}^c - (F_{++}^a)_{bc}q^bq^c - (F_{--}^a)_{bc}\theta^b\theta^c) \qquad (1.100)$$

o
$$L_{impar} = (F^a_{+-})_{bc}\dot{q}^b\dot{\theta}^c - (F^a_{+-})_{bc}q^b\theta^c. \tag{1.101}$$

Cualquier eleccin de un superlagrangiano admisible romper el supergrupo de simetras de Γ en un supergrupo que dependa de L_F. Esto implica que la asociacin de simetras y constantes del movimiento depende del superlagrangiano L_F y, por tanto, al realizar el proceso de cuantificacin, se obtendrn sistemas mecano-cunticos diferentes dependiendo del superlagrangiano elegido. Este es un hecho evidente que se aprecia sin necesidad de clculos complicados. Por ejemplo, de acuerdo con el superlagrangiano utilizado, podramos seleccionar un subgrupo graduado de simetras que contuviese una parte par compacta o no compacta, y por tanto tras la cuantificacin obtendramos un espectro discreto o continuo, respectivamente.

Chapter 2

Supermecnica Hamiltoniana

2.1 Introducción

En el captulo anterior se han descrito los fundamentos geomtricos de la supermecnica Lagrangiana. Para ello, definamos el espacio de fases de un sistema Lagrangiano con superespacio de configuraciones la supervariedad $(M,^A)$ como la extensin graduada de la variedad tangente, que es la supervariedad tangente. El objetivo de este captulo va a ser describir el espacio de fases de un sistema Hamiltoniano graduado, junto con sus propiedades, y su relacin con el contexto Lagrangiano va la conexin dada entre estos dos formalismos por la extensin graduada de la transformacin de Legendre. Ya en la seccin 2.4 trataremos de extender nuestra descripcin Hamiltoniana al campo ms general de la supermecnica en supervariedades simplcticas. En particular, nos entretendremos en un estudio detallado de las superformas simplcticas sobre una supervariedad. Finalmente, en la seccin 2.5 se describirn los fundamentos de la supermecnica en supervariedades de Poisson.

Por supuesto, todo ello ir acompaado del desarrollo de ejemplos interesantes desde un punto de vista fsico, como son los estudiados en el captulo anterior.

2.2 Superespacio de fases y supervariedad cotangente

2.2.1 Definicin y transformacin de Legendre

Como ya se indic en el captulo anterior, en mecnica ordinaria, si uno quisiese establecer sus fundamentos de forma axiomtica, estos podran ser:

- Axioma 0 de la mecnica: el espacio de configuraciones de una partcula es una variedad diferenciable M.

- Axioma 1 de la mecnica: el espacio de fases de un sistema Lagrangiano con espacio de configuraciones la variedad M es el fibrado tangente TM.

- Axioma 2 de la mecnica: el espacio de fases de un sistema Hamiltoniano con espacio de configuraciones la variedad M es su fibrado cotangente T^*M, esto es, el dual de TM.

En el captulo anterior ya hemos establecido cules seran los anlogos a los axiomas 0 y 1 en el contexto de la supermecnica, y con ese fin hemos definido la supervariedad tangente. Ahora, para extender el axioma 2 al caso graduado, tendremos que definir la supervariedad cotangente, y para ello vamos a proceder de una forma absolutamente anloga a la construccin de la supervariedad tangente, esto es, pegando superdominios mediante las funciones de transicin.

Antes de centrarnos en la definicin de la supervariedad cotangente (el espacio de fases de un sistema Hamiltoniano con espacio de configuraciones la supervariedad $(M,^{A}))$, hagamos un breve repaso de una manera de definir el fibrado cotangente. Si bien la definicin que vamos a dar no es, de nuevo, la ms usual, s que es la que nos va a permitir generalizar de una manera natural la variedad cotangente en la categora de supervariedades.

Dada una variedad M definida, como en el captulo 1, a travs de

$$\acute{q}^i = \phi^i(q) \tag{2.1}$$

con coordenadas locales (q^i) y ϕ^i las funciones de transicin entre los diversos dominios, sabemos que la variedad tangente viene dada por,

$$\acute{q}^i = \phi^i(q); \qquad \acute{v}^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial q^j} v^j. \tag{2.2}$$

Entonces puede demostrarse que la variedad cotangente puede definirse por medio de las funciones de transicin:

$$\acute{q}^i = \phi^i(q); \qquad \acute{p}_i = \left[\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial q^j} \right)^t \right]^{-1} p_j \ . \tag{2.3}$$

Es natural ahora extender esta definicin para caracterizar la supervariedad cotangente. Esto es, si la supervariedad $(M,^{A})$ viene definida por el 1-cociclo

$$\acute{q}^i = \phi^i(q); \qquad \acute{\theta}^\alpha = \psi^\alpha_\beta(q) \theta^\beta, \tag{2.4}$$

lo cual como sabemos es siempre posible, la supervariedad tangente ser la dada por la matriz de las funciones de transicin (1.8), esto es,

$$g_{UU'} = \begin{pmatrix} \psi^\alpha_\beta & 0 \\ \frac{\psi^\alpha_\beta}{q^i} v^i & \psi^\alpha_\beta \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

a partir del cual definimos la supervariedad cotangente como la definida por el 1-cociclo

$$g_{UU'} = \left[\begin{pmatrix} \psi^{\alpha}_{\beta} & 0 \\ \frac{\psi^{\alpha}_{\beta}}{q^i} v^i & \psi^{\alpha}_{\beta} \end{pmatrix}^{st} \right]^{-1} . \tag{2.6}$$

donde *st* denota la supertraspuesta de la supermatriz (ver Apndice A).

Que (2.6) efectivamente define un 1-cociclo puede comprobarse sin dificultad, y expresando las funciones de transicin de la forma usual, obtenemos que $T^*(M,^A)$ es la supervariedad definida por las transformaciones de supercoordenadas entre superdominios dadas por

$$\acute{q}^i = \phi^i(q) \tag{2.7}$$
$$\acute{\theta}^{\alpha} = \psi^{\alpha}_{\beta}\theta^{\beta} \tag{2.8}$$
$$\acute{p}_i = \frac{q^j}{\acute{q}^i}\left(p_j - \frac{\psi^{\mu}_{\beta}}{q^j}(\psi^{-1})^{\alpha}_{\mu}\theta^{\beta}\pi_{\alpha}\right) \tag{2.9}$$
$$\acute{\pi}_{\alpha} = (\psi^{-1})^{\beta}_{\alpha}\pi_{\beta} \tag{2.10}$$

donde tomamos como supercoordenadas locales $(q^i, p_j; \theta^{\alpha}, \pi_{\beta})$.

De esta expresin pueden deducirse los siguientes hechos. En primer lugar, si denotamos el haz de superlgebras de $T^*(M,^A)$ por T^{*A}, vemos que el modelo local para el haz $T^*(M,^A)$ es $C^{\infty}(T^*U) \otimes \Lambda(^{2n})$, donde U es un abierto de M. Adems, debido a (2.8) y (2.10), el fibrado estructural de $T^*(^A)$ es $E \oplus E^* \to T^*M$, donde E es el fibrado estructural de la supervariedad $(M,^A)$. Las supercoordenadas locales (q^i, p_j) generan la parte par del lgebra graduada, y $(\theta^{\alpha}, \pi_{\beta})$ la parte impar. Ahora bien, las propiedades de transformacin (2.9) nos muestran que estas supercoordenadas no definen coordenadas locales sobre la variedad base T^*M de $T^*(M,^A)$, lo cual nos muestra que las supercoordenadas que se obtienen eliminando los trminos de orden 2 de (2.9) no coinciden con las del modelo local para la supervariedad cotangente (a menos que el fibrado estructural E sea llano), y no son operativas en la prctica. Por otra parte, θ y π definen secciones locales de los fibrados E y E^* respectivamente.

Por ltimo, y una vez bien establecidas las definiciones de las supervariedades tangente y cotengente, vamos a definir la supertransformacin de Legendre que nos conecte ambas supervariedades. Dado que nuestras expresiones vienen dadas en supercoordenadas locales y sus funciones de transicin, la definicin va a ser de este tipo.

Dada $(M,^A)$ una supervariedad, con supervariedades asociadas $T(M,^A)$, $T^*(M,^A)$, y dado un superlagrangiano par $L \in (T^A)_0$, la supertransformacin de Legendre

$$D_L : T(M,^A) \longrightarrow T^*(M,^A) \tag{2.11}$$

es la que transforma las superfunciones coordenadas por las expresiones siguientes:

$$D_L^*(q^i) = q^i \tag{2.12}$$
$$D_L^*(\theta^\alpha) = \theta^\alpha \tag{2.13}$$
$$D_L^*(p_i) = \frac{L}{v^i} \tag{2.14}$$
$$D_L^*(\pi_\alpha) = \frac{L}{\zeta^\alpha} \tag{2.15}$$

Aqu hemos hecho uso del hecho de que dar un morfismo de supervariedades es equivalente a dar un morfismo de haces (ver apndice B para ms detalles). As pues, D_L puede definirse como el morfismo de haces $D_L^* : T^{*A} \to T^A$, tal y como acabamos de hacer.

Comprobemos que efectivamente este conjunto de transformaciones est bien definido. Recurriendo a las ecuaciones (1.31) y (2.7-2.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{L(\acute{q}, \acute{v}; \acute{\theta}, \acute{\zeta}}{\acute{v}^i}) &= \frac{v^k}{\acute{v}^i}\frac{L}{v^k} + \frac{\zeta^\mu}{\acute{v}^i}\frac{L}{\zeta^\mu} = \\
&= \frac{q^k}{\acute{q}^i}\frac{L}{q^k} - (\psi^{-1})^\mu_\nu \frac{\psi^\nu_\delta}{q^l}\frac{q^l}{\acute{q}^i}\theta^\delta \frac{L}{\zeta^\mu} = \\
&= \frac{q^j}{\acute{q}^i}\left(\frac{L}{v^j} - \frac{\psi^\mu_\beta}{q^j}(\psi^{-1})^\alpha_\mu \theta^\beta \frac{L}{\zeta^\alpha}\right) = \\
&= \acute{p}_i
\end{aligned}$$

y

$$\frac{L(\acute{q}, \acute{v}; \acute{\theta}, \acute{\zeta})}{\acute{\zeta}^\alpha} = (\phi^{-1})^\beta_\alpha \frac{L}{\zeta^\beta} = \acute{\pi}_\alpha$$

luego vemos que efectivamente la transformacin de Legendre asociada con superlagrangianos pares est bien definida. La transformacin de Legendre para superlagrangianos impares presenta importantes patologas, y ser estudiada ms adelante.

2.2.2 Estructuras geomtricas sobre la supervariedad cotangente

Sobre la supervariedad cotangente hay una estructura natural de vital importancia, la 2-superforma diferencial exacta definida como la diferencial exterior de la 1-superforma de Lioville Θ. As como en la geometra de la supervariedad tangente necesitbamos recurrir a una superfuncin para definir, con la ayuda del superendomorfismo vertical, una 2-superforma simplctica, en el formalismo Hamiltoniano sta existe de una manera natural. En supercoordenadas locales, Θ toma la forma

$$\Theta = p_i dq^i - \pi_\alpha d\theta^\alpha. \tag{2.16}$$

Luego la estructura supersimplctica Ω sobre $T^*(M,^A)$ es

$$\Omega = -d\Theta = dq^i \wedge dp_i + d\theta^\alpha \wedge d\pi_\alpha \ . \tag{2.17}$$

Ntese que tanto Θ como Ω son superformas pares. Comprobemos que Θ est bien definida:

$$\begin{aligned}
\acute{p}_i d\acute{q}^i - \acute{\pi}_\alpha d\acute{\theta}^\alpha &= \frac{q^j}{\acute{q}^i}\left(p_j - \frac{\psi^\mu_\beta}{q^j}(\psi^{-1})^\alpha_\mu \theta^\beta \pi_\alpha\right) dq^k \frac{\phi^i}{q^k} - \\
&- (\psi^{-1})^\beta_\alpha \pi_\beta \left(\phi^\alpha_\mu d\theta^\mu + \theta^\mu \frac{\phi^\alpha_\mu}{q^i} dq^i\right) = \\
&= p_j dq^j - \frac{\psi^\beta_\mu}{q^j}(\psi^{-1})^\alpha_\beta \theta^\mu \pi_\alpha dq^j - \pi_\beta d\theta^\beta - \\
&- \frac{\psi^\beta_\mu}{q^j}(\psi^{-1})^\alpha_\beta \pi_\alpha \theta^\mu dq^j = p_i dq^i - \pi_\alpha d\theta^\alpha.
\end{aligned}$$

Finalmente, puede definirse tambin de manera natural el supercampo vectorial Δ generador del grupo uniparamtrico de dilataciones $\delta_t : (q, p; \theta, \pi) \mapsto (q, \theta, e^{-t}p, e^{-t}\pi)$, que localmente viene dado a travs de la expresin

$$\Delta = p_i \frac{}{p_i} + \pi_\alpha \frac{}{\pi_\alpha}. \tag{2.18}$$

No obstante, no vamos a hacer uso de l a lo largo de este trabajo, y por tanto, para no tener que cargar la notacin, cuando escribamos Δ nos referiremos al supercampo de Liouville asociado a la supervariedad tangente.

2.2.3 Supercampos Hamiltonianos

Sea $X \in X(T^{*A})$ un supercampo vectorial, par o impar, sobre la supervariedad cotangente. Diremos que X es localmente Hamiltoniano si

$$\mathcal{L}_X \Omega = 0. \tag{2.19}$$

Dado que $\mathcal{L}_X \Omega = i_X d\Omega + d(i_X \Omega) = d(i_X \Omega) = 0$, resulta que $i_X \Omega = \alpha$ con α una 1-superforma cerrada. Llamaremos entonces a la terna $(T^*(M,^A), \Omega, X)$ un sistema localmente Hamiltoniano, con hamiltoniano local H la superfuncin localmente definida, haciendo uso del lema de Poincar graduado, por medio de $\alpha = dH$.

Si α es una 1-superforma exacta, esto es, $\alpha = dH$ (globalmente), entonces X es un supercampo Hamiltoniano con hamiltoniano asociado la superfuncin H, y diremos que $(T^*(M,^A), \Omega, X)$ es un sistema dinmico Hamiltoniano. Por sistema dinmico entenderemos la terna $(T^*(M,^A), \Omega, H)$ o, si α no es exacta, $(T^*(M,^A), \Omega, \alpha)$.

Denotaremos por $X_H(T^{*A})$ los supercampos vectoriales Hamiltonianos, y por $X_{LH}(T^{*A})$ los supercampos localmente Hamiltonianos. El grado de un supercampo Hamiltoniano es el grado del superhamiltoniano.

A continuacin, y para terminar este apartado, se listan una serie de propiedades interesantes de los supercampos (localmente) Hamiltonianos:

1) Si $(T^*(M,^{A}\,),\Omega,X)$ y $(T^*(M,^{A}\,),\Omega,Y)$ son dos sistemas localmente Hamiltonianos, entonces $(T^*(M,^{A}\,),\Omega,[X,Y])$ es un sistema dinmico Hamiltoniano.

En efecto, si $i_X\Omega = \alpha_1$, $i_Y\Omega = \alpha_2$, vemos que

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\Omega &= \mathcal{L}_X i_Y\Omega - (-1)^{|X||Y|} i_Y \mathcal{L}_X\Omega = \mathcal{L}_X i_Y\Omega = \\ &= \mathcal{L}_X\alpha_2 = i_X d\alpha_2 + d(i_X\alpha_2) = \\ &= d(i_X\alpha_2). \end{aligned}$$

Por tanto, $[X,Y]$ es un supercampo hamiltoniano con superhamiltoniano asociado

$$H = i_X\alpha_2\ . \tag{2.20}$$

2) Sea $(T^*(M,^{A}\,),\Omega,H)$ un sistema dinmico. Entonces el supercampo solucin de la ecuacin dinmica

$$i_X\Omega = dH \tag{2.21}$$

tiene la expresin

$$X = \frac{H}{p_i}\frac{}{q^i} - \frac{H}{q^i}\frac{}{p_i} - (-1)^{|H|}\frac{H}{\pi_\alpha}\frac{}{\theta^\alpha} - (-1)^{|H|}\frac{H}{\theta^\alpha}\frac{}{\pi_\alpha}. \tag{2.22}$$

Vemoslo. Si $X = f^i/q^i + g_i/p_i + h^\alpha/\theta^\alpha + k_\alpha/\pi_\alpha$, entonces

$$i_X\Omega = -f^i dp_i + g_i dq^i + h^\alpha d\pi_\alpha + k_\alpha d\theta^\alpha,$$

y como

$$dH = \frac{H}{q^i}dq^i + \frac{H}{p_i}dp_i - (-1)^{|H|}\frac{H}{\theta^\alpha}d\theta^\alpha - (-1)^{|H|}\frac{H}{\pi_\alpha}d\pi_\alpha$$

igualando trmino a trmino se obtienen las expresiones anteriores.

3) A partir de la 2-superforma simplctica cannica Ω puede definirse el superparntesis de Poisson no degenerado

$$\{F,G\} = X_F(G).$$

Si bien ms adelante, en este mismo captulo, veremos con detalle la definicin de una supervariedad de Poisson, conviene aqu recordar que un superparntesis de Poisson tiene las propiedades de ser antisimtrico, $\{f,\cdot\}$ es una superderivacin, y satisface la identidad de Jacobi graduada (ver Apndice B).

4) Para sistemas dinmicos definidos por superhamiltonianos impares, la energa no necesariamente se conserva, pues $X_H(H) = \{H,H\}$ puede no ser cero si H es impar.

2.3 Supermecnica Hamiltoniana versus supermecnica Lagrangiana

2.3.1 La supermecnica Hamiltoniana

Dado un sistema dinmico graduado $(T^*(M,^A),\Omega,\alpha)$, la formulacin geomtrica de la supermecnica Hamiltoniana consiste en buscar los supercampos vectoriales X que satisfagan la ecuacin

$$i_X\Omega = \alpha. \tag{2.23}$$

Lgicamente, de la no degeneracin de Ω se deduce que la solucin de esta ecuacin es nica. La justificacin de la ecuacin (2.23) viene dada por la expresin local del supercampo Hamiltoniano solucin de la ecuacin dinmica, que est asociado con las superecuaciones de Hamilton (2.22)

$$\dot{q}^i = \frac{H}{p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{H}{q^i}; \tag{2.24}$$

$$\dot{\theta}^\alpha = -(-1)^{|H|}\frac{H}{\pi_\alpha}, \qquad \dot{\pi}_\alpha = -(-1)^{|H|}\frac{H}{\theta^\alpha}. \tag{2.25}$$

Utilizando la definicin del superparntesis de Poisson que hemos dado anteriormente, la forma general de las ecuaciones de Hamilton en funcin de este es

$$\dot{F} = \{H, F\}, \tag{2.26}$$

para toda superfuncin $F \in T^{*A}$.

Podra suceder que existiesen unas ligaduras externas (causadas, por ejemplo, porque nuestro sistema proviniese de un sistema lagrangiano degenerado, como ya veremos en el prximo apartado), en cuyo caso podra no existir solucin sobre el espacio reducido. Si esta fuera la situacin, habra que aplicar una extensin de la teora de ligaduras de Dirac [Di64] para el caso graduado. Pero ya volveremos sobre este tpico en el captulo 4.

2.3.2 Supermecnica Hamiltoniana versus supermecnica Lagrangiana

Si bien es comnmente aceptado que es ms natural en principio (al menos desde un punto de vista fsico) partir de un formalismo Lagrangiano, el formalismo Hamiltoniano de la supermecnica se revela de crucial importancia cuando se intenta cuantificar un sistema. As pues, vamos a tratar de generalizar el paso del formalismo Lagrangiano al Hamiltoniano va la transformacin de Legendre en el caso graduado (2.11).

Supongamos por tanto que partimos de un superlagrangiano par, y nos planteamos la ecuacin dinmica $i_\Gamma \Omega_L = dE_L$. Pues bien, si D_L es la supertransformacin de Legendre, podemos establecer el siguiente teorema.

Sea $(M,^{A}\ )$ una supervariedad, $T(M,^{A}\ )$ su supervariedad tangente y $T^*(M,^{A}\ )$ la supervariedad cotangente. Supongamos que $L \in (T^A)_0$ es un superlagrangiano, con Θ_L y Ω_L las 1- y 2-superformas de Cartan asociadas, y E_L la superenerga. Entonces:

(i) $\Theta_L = (D_L)^*\Theta$, y

(ii) $\Omega_L = (D_L)^*\Omega$.

Demostracin: Comprobmoslo en supercoordenadas locales.

(i) Aplicando la transformacin de Legendre a $\Theta = p_i dq^i - \pi_\alpha d\theta^\alpha$ vemos que

$$\begin{aligned} D_L^*\Theta &= (D_L^* p_i)(D_L^* dq^i) - (D_L^*\pi_\alpha)(D_L^* d\theta^\alpha) = \\ &= (p_i \circ D_L)d(q^i \circ D_L) - (\pi_\alpha \circ D_L)d(\theta^\alpha \circ D_L) \end{aligned}$$

Como $(q^i \circ D_L) = q^i$, $(\theta^\alpha \circ D_L) = \theta^\alpha$, $(p_i \circ D_L) = L/\dot{q}^i$ y $(\pi_\alpha \circ D_L) = L/\dot{\theta}^\alpha$ entonces

$$D_L^*\Theta = \frac{L}{\dot{q}^i} dq^i - \frac{L}{\dot{\theta}^\alpha} d\theta^\alpha$$

que es la expresin en supercoordenadas locales de Θ_L.

(ii) $D_L^*\Omega = -D_L^*(d\Theta) = -d(D_L^*\Theta) = -d\Theta_L = \Omega_L$.

Finalmente, supongamos que tenemos la ecuacin dinmica $i_\Gamma \Omega_L = dE_L$. Cmo pasar al formalismo Hamiltoniano? Pues simplemente tomando como superhamiltoniano asociado el definido por la supertransformacin de Legendre, esto es, $D_L^* H = E_L$. Como

$$E_L = \dot{q}^i \frac{L}{\dot{q}^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{L}{\dot{\theta}^\alpha} - L, \tag{2.27}$$

entonces

$$H = \dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha - L \tag{2.28}$$

donde, si la transformacin de Legendre es regular, despejaramos las velocidades en funcin de las posiciones y momentos en L. En el caso de que nos encontrsemos con que la supertransformacin de Legendre fuese singular, habra que recurrir a los procedimientos usuales en mecnica ordinaria cuando esto sucede.

Observaciones:

Hay dos puntos que faltan por discutir, y que dan lugar a situaciones absolutamente nuevas en supermecnica, que seran:

a) Qu sucede cuando aplicamos la supertransformacin de Legendre asociada a superlagrangianos impares?

b) Cmo entender la presencia de supercampos Hamiltonianos impares?

Trataremos de entender primero esta segunda cuestin, para luego pasar a debatir las consecuencias de la primera.

1) **Supermecnica asociada con superlagrangianos y superhamiltonianos impares.**

Sea $H \in (T^{*A})_1$. Entonces la 1-superforma dH ser impar, y el supercampo dinmico solucin de la ecuacin (2.23) debera ser impar. Entonces la evolucin dinmica asociada con X sera del tipo

$$\dot{q}^i = f^i, \quad \dot{p}_i = g_i; \quad \dot{\theta}^\alpha = h^\alpha, \quad \dot{\pi}_\alpha = k_\alpha \ ,$$

con f^i, g_i superfunciones impares y h^α, k_α superfunciones pares.

Ahora bien, debido al hecho de que los supercampos vectoriales no son secciones de ningn fibrado o supervariedad tangente sobre $T^*(M,^A)$, las ecuaciones anteriores slo tienen un sentido formal, pues no es lcito interpretar las variables $\dot{q}^i$, $\dot{p}_i$, $\dot{\theta}^\alpha$ y π_α como supercoordenadas en su espacio tangente. Lo nico realmente relevante es el supercampo X. As pues, la aparente contradiccin que se podra plantear del hecho de que estuvisemos igualando supercoordenadas de una paridad con otras de paridad opuesta no es tal, pues $\dot{q}^i$, $\dot{p}_i$, $\dot{\theta}^\alpha$ o π_α no son coordenadas sobre ningn espacio. Simplemente, sucede que para superhamiltonianos impares la paridad no se conserva en la evolucin. Slo cuando tenemos ecuaciones diferenciales de segundo orden en el formalismo Lagrangiano podemos identificar $\dot{q}^i$ y $\dot{\theta}^\alpha$ con las velocidades en la supervariedad tangente.

Por otra parte, podramos preguntarnos sobre la existencia de alguna 1-superforma cannica impar tal que su diferencial exterior fuese no degenerada sobre la supervariedad tangente. En tal caso, la dinmica asociada con superhamiltonianos impares seran supercampos vectoriales pares. Sin embargo, esto en general no va a ser posible. Por ejemplo, si hacemos una eleccin del tipo $\Omega_1 = A_i^\alpha dq^i \wedge d\pi_\alpha \pm B_i^\alpha d\theta^\alpha \wedge dp_i$, la no degeneracin de Ω_1 nos implica que, en primer lugar, las dimensiones par e impar deben ser iguales. Y cuando se hacen cambios de supercoordenadas resulta que nicamente cuando la supervariedad base sea trivial, esto es, del tipo $(^n, \Lambda^n)$ la 2-forma Ω_1 estar bien definida. Esto proviene de las propiedades de transformacin de los momentos pares.

2) **Superlagrangianos impares y supertransformacin de Legendre.**

Supongamos ahora que partimos de un superlagrangiano impar, esto es, si $(M,^A)$ es el superespacio de configuraciones, $L \in (T^A)_1$. Anteriormente se ha descrito cmo sera la supertransformacin de Legendre para una superlagrangiano par, probndose que est bien definida. Supongamos que tratsemos de extender dicha supertransformacin, definida por las ecuaciones (2.12-2.15), para superlagrangianos impares. En principio, podra pensarse que tambin en este caso estara bien definida, con Adems las 1- y 2-superformas de Cartan relacionadas con las 1- y 2-superformas cannicas de la misma forma. Sin embargo, recordemos que una aplicacin entre superlgebras debe ser siempre de paridad par (ver Apndice A). Lo cual claramente no ocurre en el presente caso. La supertransformacin de Legendre asociada con superlagrangianos pares no es par, luego no podr ser un morfismo de superlgebras, y por tanto no inducir un morfismo entre las supervariedades tangente y cotangente. En consecuencia, slo podr establecerse una correspondencia entre los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano en el caso graduado cuando los superlagrangianos y superhamiltonianos en cuestin sean pares.

As pues, vemos que surgen muchas propiedades originales cuando tratamos de hacer la formulacin tradicional de la mecnica partiendo de superlagrangianos y superhamiltonianos impares. Para ilustrar mejor todos estos hechos incluiremos en la siguiente relacin de ejemplos algunos que exhiban estos comportamientos. En el primero de ellos mostramos precisamente un superlagrangiano regular impar, que mustra ya desde un principio la imposibilidad de definir una supertransformacin de Legendre.

2.3.3 Ejemplos

Un superlagrangiano impar y la supertransformacin de Legendre

Sea $(^3, \Lambda^3)$ el espacio de configuraciones de una superpartcula clsica, cuya dinmica est regida por el superlagrangiano

$$L = \dot{q}^1\dot{\theta}^1 + \dot{q}^2\dot{\theta}^2 + \dot{q}^3\dot{\theta}^3 + \dot{\theta}^1\dot{\theta}^2\dot{\theta}^3 \tag{2.29}$$

Este superlagrangiano es impar y no degenerado, y tiene como ecuaciones del movimiento:

$$\ddot{q}^1 = \ddot{q}^2 = \ddot{\theta}^1 = \ddot{\theta}^2 = 0., \tag{2.30}$$

esto es, la superpartcula libre.

Si definimos la supertransformacin Legendre de la manera usual, obtenemos los momentos cannicos conjugados

$$p_1 = \dot{\theta}_1, \qquad p_2 = \dot{\theta}^2, \qquad p_3 = \dot{\theta}^3; \tag{2.31}$$

$$\pi_1 = \dot{q}^1 + \dot{\theta}^2\dot{\theta}^3, \quad \pi_2 = \dot{q}^2 + \dot{\theta}^3\dot{\theta}^1, \quad \pi_3 = \dot{q}^3 + \dot{\theta}^1\dot{\theta}^2. \tag{2.32}$$

La superenerga es

$$E_L = \dot{q}^1\dot{\theta}^1 + \dot{q}^2\dot{\theta}^2 + \dot{q}^3\dot{\theta}^3 + \dot{\theta}^1\dot{\theta}^2\dot{\theta}^3.$$

Ahora, si la supertransformacin de Legendre fuese regular y estuviese bien definida, podramos calcular el superhamiltoniano. Calculando el jacobiano de D_L^* es fcil ver que es distinto de cero, por lo cual parecera que s existe inversa, y el superhamiltoniano sera

$$H = \pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \pi_3 p_3 + p_1 p_2 p_3. \tag{2.33}$$

Deduciendo finalmente las ecuaciones de Hamilton, estas seran

$$\dot{q}^1 = \pi_1 + p_2 p_3, \quad \dot{q}^2 = \pi_2 + p_1 p_3, \quad \dot{q}^3 = \pi_3 + p_1 p_2$$

$$\dot{\theta}^1 = p_1, \quad \dot{\theta}^2 = p_2, \quad \dot{\theta}^3 = p_3;$$

$$\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = \dot{p}_3 = \dot{\pi}_1 = \dot{\pi}_2 = \dot{\pi}_3 = 0.$$

Vemos que hay una incompatibilidad manifiesta entre estas ecuaciones y la supertransformacin de Legendre. Ntese tambin que si ahora escribisemos la superenerga como

$$E_L = \dot{q}^1\dot{\theta}^1 + \dot{q}^2\dot{\theta}^2 + \dot{q}^3\dot{\theta}^3\dot{\theta}^2\dot{\theta}^1\dot{\theta}^3,$$

obtendramos el superhemiltoniano

$$\acute{H} = \pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \pi_3 p_3 - p_1 p_2 p_3.$$

Esta es una clara muestra de que la supertransformacin de Legendre no es un morfismo de superlgebras. En general, habr que tener mucho cuidado cuando tratemos objetos impares. Ni siquiera tendra sentido cuantificar este sistema Hamiltoniano. La nica forma de cuantificar un sistema Lagrangiano impar ser hacerlo directamente desde un punto de vista Lagrangiano.

Superpartcula clsica no relativista

Vamos a estudiar ahora la formulacin Hamiltoniana de la superpartcula clsica no relativista, cuyo superlagrangiano ya dimos en el captulo anterior. Rememorando, el superespacio de configuraciones es ($^3, \Lambda^3$), y el superlagrangiano tiene la forma

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 + \frac{i}{2}\dot{\theta}^i\theta^i - V_1(q) - \theta^i\theta^j V_{ij}(q). \tag{2.34}$$

La supertransformacin de Legendre nos define los siguientes momentos cannicos conjugados:

$$p_i = \dot{q}^i; \quad \pi_i = \frac{i}{2}\theta^i. \tag{2.35}$$

El superhamiltoniano es entonces:

$$H = \frac{1}{2}p_i^2 + V_1(q) + \theta^i\theta^j V_{ij}(q). \tag{2.36}$$

En el contexto Lagrangiano, Ω_L era degenerada, con el ncleo generado por los supercampos de la forma $f^i/\dot{\theta}^i$. En el formalismo Hamiltoniano, como es usual, esto se traduce en la aparicin de ligaduras sobre el espacio de fases, siendo la ligadura

$$\chi = \pi_i - \frac{i}{2}\theta^i \approx 0. \tag{2.37}$$

Para encontrar la solucin a la ecuacin dinmica $i_X\Omega = dH$, habra que aplicar el mtodo de Dirac extendido al caso graduado (redefiniendo los parntesis de Poisson, etctera), lo cual aqu es trivial, por supuesto.

Superpartcula clsica relativista

Otro ejemplo interesante, y que ya ha sido profusamente estudiado, consiste en la superpartcula clsica relativista, cuya versin Lagrangiana ya hemos visto. En este caso sucede lo mismo que en el estudio de la partcula clsica relativista, la cual era conveniente considerar en su formulacin Hamiltoniana. De hecho, lo habitual suele ser empezar dando el lagrangiano relativista para luego hacer inmediatamente la transformacin de Legendre y analizar tanto la dinmica de la partcula como las ligaduras (estando ambos conceptos ntimamente relacionadas entre s). Nosotros vamos a seguir aqu un programa similar.

En primer lugar, recordemos que el superlagrangiano (en realidad uno de ellos) para la superpartcula clsica relativista es

$$L = -m\sqrt{(\dot{x}^\mu - \frac{i}{2}\chi\epsilon_\mu)^2} - \frac{i}{2}(\epsilon_\mu\dot{\epsilon}^\mu - \epsilon_5\dot{\epsilon}^5) - \frac{i}{2}m\chi\epsilon_5 \tag{2.38}$$

con superespacio de configuraciones $(^4, \Lambda^6)$, donde χ es en realidad una variable suplementaria que se introduce, y que al final habr que eliminar. Al hacer la supertransformacin de Legendre, el espacio de fases ser la supervariedad cotangente de la anterior, que en el presente caso es simplemente $(^8, \Lambda^{12})$. Los momentos cannicos conjugados son

$$\begin{aligned}
p_\mu &= -\frac{L}{\dot{x}^\mu} = -\frac{\dot{x}_\mu - (i/2)\chi\epsilon_\mu}{\sqrt{(\dot{x}_\mu - (i/2)\chi\epsilon_\mu)^2}} \ , && (2.39)\\
\pi_\mu &= \frac{L}{\dot{\epsilon}^\mu} = \frac{i}{2} \ , && (2.40)\\
\pi_5 &= \frac{L}{\dot{\epsilon}_5} = -\frac{i}{2}\epsilon_5 \ , && (2.41)\\
\pi &= \frac{L}{\dot{\chi}} = 0 \ . && (2.42)
\end{aligned}$$

De las relaciones relaciones anteriores se obtienen las ligaduras primarias (Hamiltonianas)

$$\chi_0 = p^2 - m^2 \ , \tag{2.43}$$
$$\chi_\mu = \pi_\mu - \frac{i}{2}\epsilon_\mu \ , \tag{2.44}$$
$$\chi_5 = \pi_5 + \frac{i}{2}\epsilon_5 \ , \tag{2.45}$$
$$\Pi = \pi \ . \tag{2.46}$$

La 2-superforma de Liouville sobre la supervariedad cotangente es

$$\Omega = g^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dp_\nu + g^{\mu\nu} d\epsilon_\mu \wedge d\pi_\nu - d\epsilon_5 \wedge d\pi_5 - d\chi \wedge d\pi$$

de lo cual se obtienen los superparntesis de Poisson

$$\begin{array}{c} \{x_\mu, p_\nu\} = -g_{\mu\nu} \ , \quad \{\epsilon_5, \pi_5\} = -1 \ , \\ \{\epsilon_\mu, \pi_\nu\} = g_{\mu\nu} \ , \quad \{\chi, \pi\} = -1. \end{array} \tag{2.47}$$

De los superparntesis de Poisson anteriores se puede deducir que las ligaduras χ_0 , Π son de primera clase; mientras que χ_μ, χ_5 son de segunda clase, y por tanto es posible eliminarlas introduciendo los superparntesis de Dirac (**??**)

$$\{A, B\}^\star = \{A, B\} + i\{A, \chi_\mu\} g^{\mu\nu} \{\chi_\nu, B\} - i\{A, \chi_5\}\{\chi_5, B\} \ . \tag{2.48}$$

Sobre el espacio reducido (obtenido eliminando las variables π_μ, π_5) los superparntesis de Dirac son

$$\begin{array}{c} \{x_\mu, p_\nu\} = -g_{\mu\nu} \ , \quad \{\epsilon_5, \epsilon_5\}^\star = -i \ , \\ \{\epsilon_\mu, \epsilon_\nu\}^\star = i g_{\mu\nu} \ , \quad \{\chi, \pi\} = -1 \ . \end{array} \tag{2.49}$$

El superhamiltoniano cannico viene dado por

$$H_c = -\frac{i}{2}\chi(p \cdot \epsilon - m\epsilon_5) + \dot{\chi}\pi \tag{2.50}$$

del cual se obtiene tambin una ligadura secundaria

$$\chi_D = p \cdot \epsilon - m\epsilon_5 \ . \tag{2.51}$$

Utilizando los superparntesis de Dirac (2.49) puede comprobarse el carcter de primera clase de las ligaduras χ_0, χ_D y Π. As pues, el superhamiltoniano de Dirac es

$$H_D = -\frac{i}{2}\chi(p \cdot \epsilon - m\epsilon_5) + \dot{\chi}\pi + \lambda_0\chi_0 + \lambda\pi \ , \tag{2.52}$$

donde λ_0 y λ son funciones arbitrarias del tiempo propio τ.

Ahora habra que eliminar las funciones arbitrarias que aparecen en (2.52). Para ello, impondremos primero una fijacin del gauge que elimine las variables suplementarias χ y π. Tomemos

$$\varphi_\pi = \chi - 2i\lambda_D \ , \tag{2.53}$$

con λ una funcin arbitraria de x^μ, p_μ, ϵ_μ y ϵ_5.

Puede verse que φ_π, Π son ligaduras de segunda clase, y por tanto podemos usarlas para eliminar las variables auxiliares χ, π. El superhamiltoniano correspondiente en el verdadero espacio de fases es finalmente

$$H_D = \lambda_0\chi_0 + \lambda_D\chi_D \ , \tag{2.54}$$

que da lugar a las ecuaciones del movimiento

$$\dot{x}^\mu = -(2p_\mu\lambda_0 + \lambda_D\epsilon_\mu) \ , \quad \dot{p}_\mu = 0 \ , \tag{2.55}$$

$$\dot{\epsilon}_\mu = -i\lambda_D p_\mu \ , \qquad \dot{\epsilon}_5 = -im\lambda_D \ . \tag{2.56}$$

El superoscilador armnico

En el captulo anterior habamos encontrado la familia de superlagrangianos pares e impares

$$L_0 = \frac{1}{2}((F^a_{++})_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + (F^a_{--})_{ij}\dot{\theta}^i\dot{\theta}^j - (F^a_{++})_{ij}q^iq^j - (F^a_{--})_{ij}\theta^i\theta^j) \tag{2.57}$$

y

$$L_1 = (F^a_{+-})_{ij}\dot{q}^i\dot{\theta}^j - (F^a_{+-})_{ij}q^i\theta^j \tag{2.58}$$

para el superoscilador armnico

$$\ddot{q}^a = -q^a \ ; \quad \ddot{\theta}^a = -\theta^a, \tag{2.59}$$

Es fcil calcular las superenergas asociadas

$$E_{L_0} = \frac{1}{2}((F^a_{++})_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + (F^a_{--})_{ij}\dot{\theta}^i\dot{\theta}^j + (F^a_{++})_{ij}q^iq^j + (F^a_{--})_{ij}\theta^i\theta^j), \tag{2.60}$$

$$E_{L_1} = (F^a_{+-})_{ij}\dot{q}^i\dot{\theta}^j + (F^a_{+-})_{ij}q^i\theta^j. \tag{2.61}$$

Superlagrangiano par. Estudiemos primero L_0. Aplicando la supertransformacin de Legendre se obtiene:

$$p_i = (F^a_{++})_{ij}\dot{q}^j, \tag{2.62}$$

$$\pi_i = (F^a_{--})_{ij}\dot{\theta}^j. \tag{2.63}$$

Por tanto, el superhamiltoniano es

$$H_0 = \frac{1}{2}\left[(F^a_{++})^{-1}\right]^{ij} p_i p_j + \frac{1}{2}\left[(F^a_{--})^{-1}\right]^{ij} \pi_j \pi_i + \frac{1}{2}(F^a_{++})_{ij} q^i q^j + \frac{1}{2}(F^a_{--})_{ij}\theta^i\theta^j). \quad (2.64)$$

Como $\Omega = dq^i \wedge dp_i + d\theta^i \wedge d\pi_i$, el supercampo hamiltoniano

$$X_{H_0} = f^i \frac{}{q^i} + g_i \frac{}{p_i} + h^i \frac{}{\theta^i} + k_i \frac{}{\pi_i}$$

ser

$$f^i = \left[(F^a_{++})^{-1}\right]^{ij} p_j, \quad g_i = -(F^a_{++})_{ij} q^j; \quad (2.65)$$

$$h^i = \left[(F^a_{--})^{-1}\right]^{ij} \pi_j, \quad k_i = -(F^a_{--})_{ij}\theta^j, \quad (2.66)$$

como sera de esperar.

Superlagrangiano impar Veamos ahora L_1. Dado que esta superfuncin es impar, la supertransformacin de Legendre dada por

$$\begin{aligned} p_i &= (F^a_{+-})_{ij}\dot{\theta}^j, & (2.67)\\ \pi_i &= (F^a_{+-})_{ji}\dot{q}^j & (2.68) \end{aligned}$$

no es de paridad par, luego no define un morfismo entre las supervariedades tangente y cotangente.

Superpartculas con fibrados estructurales arbitrarios, caso degenerado

Como ltimo ejemplo de esta seccin tomaremos el modelo para la superpartcula ya estudiado en el primer captulo. El superlagrangiano a considerar tena la forma (2.69)

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + \eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha(\dot{\theta}^\beta - A_i(q)^\beta_\gamma \dot{q}^i\theta^\gamma) \quad (2.69)$$

Puesto que L es degenerado, aparecern ligaduras al pasar al formalismo Hamiltoniano. La supertransformacin de Legendre es

$$\begin{aligned} p_i &= g_{ij}\dot{q}^j - \eta_{\alpha\beta}A_i(q)^\beta_\gamma\theta^\alpha\theta^\gamma, & (2.70)\\ \pi_\alpha &= -\eta_{\beta\alpha}\theta^\beta. & (2.71) \end{aligned}$$

De esta ltima ecuacin vemos que las ligaduras son

$$\chi = \pi_\alpha + \eta_{\beta\alpha}\theta^\beta \approx 0 \quad (2.72)$$

y el superhamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}\left[p_i p_j + 2p_i\eta_{\alpha\beta}A_j(q)^\beta_\gamma\theta^\alpha\dot{\theta}^\gamma + \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}A_j(q)^\nu_\delta\theta^\alpha\theta^\gamma\theta^\mu\theta^\delta\right]. \quad (2.73)$$

2.4 Supermecnica en supervariedades simplcticas

Hasta ahora se han considerado exclusivamente sistemas cuyos espacios de fases fuesen supervariedades tangentes o cotangentes. En este apartado, nuestro objetivo va a ser dar las lneas generales para emprender el estudio de sistemas definidos sobre supervariedades arbitrarias dotadas de una estructura supersimplctica. As pues, no nos vamos a extender en los diversos tpicos a desarrollar, sino que ms bien nos limitaremos a presentar las definiciones bsicas, para finalmente dar una caracterizacin general de la superformas simplcticas posibles en funcin de objetos geomtricos definidos sobre el fibrado estructural de la supervariedad [Ro91]. Tambin mostraremos que en el caso graduado no existe (ni puede hacerlo) un anlogo al teorema de Darboux para 2-superformas cerradas y degeneradas, como s ocurra en geometra ordinaria. Daremos de hecho algn contraejemplo de 2-superforma presimplctica de rango cero, pero nonula. Es esta una propiedad que muestra la mayor riqueza de las estructuras graduadas, y que por otro lado aade complicaciones extra al tratamiento de muchos problemas.

2.4.1 Supervariedades simplcticas y presimplcticas. Ecuaciones dinmicas

Sea $(M,^A)$ una supervariedad. Una estructura supersimplctica sobre $(M,^A)$ es una 2-superforma ω cerrada y no degenerada. Si tal estructura existe, denominaremos a la terna $(M,^A,\omega)$ una supervariedad simplctica. Esta ltima condicin de no degeneracin puede debilitarse para incluir 2-superformas cerradas pero degeneradas. Si en particular sucede que el rango de la 2-superforma es constante, diremos que esta es una 2-superforma presimplctica sobre $(M,^A)$. Todava podramos restringirnos un poco ms para considerar 2-superformas presimplcticas con slo ncleo fuerte. De hecho, este tipo de estructuras son las que van a ser estudiadas preferentemente a lo largo del captulo 4 de esta tesis. En general, sin embargo, supondremos que no imponemos ninguna condicin sobre la naturaleza del ncleo de la 2-superforma ω.

Ntese en primer lugar que una 2-superforma simplctica puede ser en principio par o impar. Sin embargo, resulta evidente de las propiedades de antisimetra de ω que para que exista una estructura supersimplctica par sobre una supervariedad, la dimensin par de esta (esto es, la dimensin de la variedad base) debe ser par. Por el contrario, no hay ninguna condicn en principio sobre la dimensin impar de $(M,^A)$. Asimismo, slo podr haber estructuras supersimplcticas impares sobre supervariedades de dimensin (n,n).

Sea H una superfuncin. Podemos definir, de forma anloga a como se haca en el formalismo Hamiltoniano sobre la supervariedad cotangente, el sistema dinmico Hamiltoniano $(M,^A,\omega,H)$, con superhamiltoniano asociado la superfuncin H. Los supercampos Hamiltonianos sern entonces las soluciones de la ecuacin dinmica

$$i_\Gamma \omega = dH. \tag{2.74}$$

Debido a la no degeneracin de ω, la ecuacin anterior tendr solucin nica.

Por un sistema dinmico localmente hamiltoniano entenderemos, como es de esperar, el asociado a una 1-superforma cerrada α, esto es, $(M,^A, \omega, \alpha)$. En tal caso, deberamos plantearnos la ecuacin

$$i_\Gamma \omega = \alpha \tag{2.75}$$

que de nuevo tendr solucin nica.

Observemos en este punto que ya hemos visto un ejemplo de supervariedad simplctica, con una dinmica asociada similar a la aqu descrita: la supervariedad cotangente con la 2-superforma cannica par asociada. Podramos decir que, en una supervariedad simplctica, la geometra, esto es, la parte cinemtica de un sistema, viene fijada de antemano. Y quien define la dinmica es el superhamiltoniano H. Por el contrario, en el formalismo Lagrangiano, a la hora de plantearnos la ecuacin dinmica, no se dispone de ninguna 2-superforma simplctica fijada de antemano, sino que el superlagrangiano L es el que define tanto la parte dinmica (va la superenerga E_L) como la cinemtica (con la 2-superforma de Cartan). Si bien, por supuesto, si el superlagrangiano es regular, tambin (TM, T^A, Ω_L) define una supervariedad simplctica.

Muchas de las propiedades que se cumplan para sistemas dinmicos Hamiltonianos definidos sobre la supervariedad cotangente se satisfacen tambin en este contexto ms general. En primer lugar, vemos que existe un homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} ^A & \longrightarrow & X_H(M) \\ F & \mapsto & X_F \end{array}$$

donde $X_F = \hat{\omega}^{-1}(dF)$. De manera absolutamente anloga puede definirse un homomorfismo entre las 1-superformas cerradas $\alpha \in \Lambda^1(M,^A)$ y los supercampos localmente Hamiltonianos a travs de $\alpha \mapsto X_\alpha = \hat{\omega}^{-1}(\alpha)$.

Utilizando el homomorfismo entre superfunciones sobre la supervariedad y supercampos hamiltonianos es posible ahora definir un superparntesis de Poisson entre dos superfunciones como

$$\{F, G\} = X_F(G) = i_{dG} X_F = \hat{\omega}^{-1}(dF, dG)$$

para todo par de superfunciones $F, G \in^A$. Que este corchete es una superderivacin en cada factor es obvio, mientras que la estructura de superlgebra de Lie (ver Apndice A), y en particular la superidentidad de Jacobi, se deduce de la condicin de cierre de ω.

Es fcil comprobar ahora que el conmutador de dos supercampos dinmicos localmente hamiltonianos es un supercampo hamiltoniano, con superhamiltoniano asociado anlogo al de la expresin (2.20). En el captulo siguiente, en el que trataremos de la teora de la simetra, consideraremos de hecho en muchos casos supersimetras de sistemas dinmicos definidos sobre supervariedades simplcticas (o de Poisson no degeneradas, como veremos en la prxima seccin) arbitrarias.

2.4.2 Estructuras simplcticas y presimplcticas graduadas: caracterizacin

Uno de los problemas con los que primero uno tropieza cuando estudia formas simplcticas sobre variedades ordinarias es su clasificacin. Como es bien conocido, no hay una respuesta general a esta cuestin. Lo que s se sabe es que todas pueden reducirse localmente a la misma expresin, haciendo uso del teorema de Darboux. En este trabajo no vamos a tratar, por supuesto, de resolver un problema que en el caso en principio ms sencillo (e incluido en este) permanece abierto. Lo que s que es posible es caracterizar todas las superformas simplcticas pares en funcin de unos cuantos objetos geomtricos definidos sobre el fibrado estructural. A saber, toda estructura simplctica sobre una supervariedad est en correspondencia con los datos $(M, \tilde{\omega}, E, g, \nabla)$, donde $(M, \tilde{\omega})$ es una variedad simplctica, E es el fibrado estructural de la supervariedad en cuestin, g es una mtrica no degenerada sobre E, y ∇ es una conexin sobre E compatible con la mtrica; esto es, $\nabla g = 0$ [Mo88],[Ro91].

Respecto de una extensin graduada del teorema de Darboux, pensamos que es posible hacerlo para superformas pares a partir de este y otros resultados dados por Rothstein [Ro91]. Para superformas simplcticas impares, es comnmente admitida la existencia de un resultado anlogo, que por desgracia este autor no ha llegado a ver plasmado con su demostracin correspondiente en la abundante bibliografa sobre el tema. No obstante, tal versin graduada del teorema de Darboux no va a ser necesaria a lo largo de este trabajo, y por tanto no nos extenderemos sobre este tpico.

Antes de establecer el resultado fundamental de este apartado, daremos una caracterizacin de los supercampos vectoriales sobre una variedad graduada [Mo88].

Sea D un supercampo vectorial sobre $(M, \Gamma(\Lambda E))$, o, lo que es lo mismo, una superderivacin sobre $\Gamma(\Lambda E)$, y sea ∇ una conexin en el fibrado E. Entonces existe una descomposicin nica de D como suma de dos supercampos vectoriales

$$D = i_\phi + \nabla_X$$

donde $X \in \Gamma(TM \otimes \Lambda E)$ y $\phi \in \Gamma(E^* \otimes \Lambda E)$.

En esta descomposicin, los supercampos X actan como derivaciones sobre la variedad base, mientras que los i_ϕ (que denotaremos en lo que sigue simplemente por ϕ) actan por contraccin con los elementos de E. Basndonos en esta descomposicin de los supercampos vectoriales, estamos ya en condiciones de a exponer el resultado fundamental de este apartado:

Dada una supervariedad simplctica $(M,^A,\omega)$, con $E \xrightarrow{\pi} M$ el fibrado estructural de la supervariedad, existen una estructura simplctica $\tilde{\omega}$ sobre la supervariedad base, una conexin lineal ∇ en el fibrado y una mtrica g sobre E invariante bajo la conexin, tales que ω puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\omega(\nabla_X, \nabla_Y) &= \tilde{\omega}(X,Y) + \frac{1}{2}\tilde{R}(X,Y)\ , \\
\omega(\phi,\psi) &= g(\phi,\psi)\ , \\
\omega(\nabla_X, \phi) &= 0\ ;
\end{aligned}$$

donde X, Y son campos vectoriales sobre M, ϕ, ψ son secciones de E, y $\tilde{R}$ denota la contraccin del tensor de curvatura R asociado a la conexin ∇ con g:

$$\tilde{R} = g_{bc} R^c_{ija} \theta^a \theta^b dx^i \wedge dx^j$$

donde $R^c_{ija} = [\nabla_i, \nabla_j]^c_a$ y $[\nabla_i, \nabla_j]\theta^c = [\nabla_i, \nabla_j]^c_a \theta^a$.

Como es bien conocido, en geometra diferencial ordinaria existe una versin del teorema de Darboux para formas presimplcticas. Este hecho permite en muchos casos obtener propiedades sobre sistemas dinmicos definidos por 2-formas cerradas degeneradas pero de rango constante. Sin embargo, tal extensin no es posible en el campo de los sistemas presimplcticos graduados (al menos cuando exista ncleo dbil). Un contraejemplo muy sencillo a esta generalizacin se obtiene tomando la supervariedad $(,\Lambda^2)$, con supercoordenadas $(q;\theta^1,\theta^2)$, y la 2-superforma sobre ella

$$\omega = \theta^1 dq \wedge d\theta^2 - \theta^2 dq \wedge d\theta^1 = d(\theta^2\theta^1 dq). \tag{2.76}$$

Evidentemente, como ω es la diferencial exterior de una 1-superforma, es cerrada. Adems, es de rango cero, pues $\epsilon(\omega(X,Y)) = 0$ para cualesquiera supercampos vectoriales X e Y. Sin embargo, no es posible encontrar supercoordenadas en las cuales $\omega = 0$, como resulta fcil comprobar.

2.5 Supervariedades de Poisson

En la formulacin clsica de la mecnica es ms comn utilizar la nocin de parntesis de Poisson entre dos funciones frente a la existencia de una 2-forma simplctica. As, por ejemplo, en la teora de las ligaduras de Dirac, se hace referencia en todo momento a los parntesis de Poisson antes que a 2-formas presimplcticas. Es bien conocido igualmente que existe una biyeccin entre corchetes de Poisson no degenerados y estructuras simplcticas sobre una variedad. En este apartado vamos a hacer una introduccin a lo que denominaremos supervariedades de Poisson, y la descripcin de la supermecnica asociada con ellas. Para una descripcin ms detallada de todo lo que se va a desarrollar aqu, puede consultarse la referencia [Ca91].

Recordemos primero la definicin de superlgebra de Poisson (ver, por ejemplo, [Ko87],[Br82]). Una superlgebra de Poisson es, un superespacio lineal $A = A_0 \oplus A_1$ con dos estructuras de lgebra definidas sobre l: una estructura de superlgebra asociativa superconmutativa con producto $A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto ab$, y una estructura de superlgebra de Lie con producto $A \times A \to A$, $(a,b) \mapsto \{a,b\}$, y tal que para cualesquiera $a,b,c \in A$, con a y b homogneos,

$$\{a, bc\} = \{a,b\}c + (-1)^{|a||b|} b\{a,c\}. \tag{2.77}$$

El parntesis $\{\cdot,\cdot\}$ es el superparntesis de Poisson, y es evidente de (2.77) que, para cada $a \in A$, la aplicacin $\{a,\cdot\} : A \to A$, $b \mapsto \{a,b\}$ es una superderivacin de la estructura de superlgebra asociativa sobre A. Adems, si $a \in A$ es homogneo, entonces $|\{a,\cdot\}| = |a|$.

Ahora, sea $(M,^{A})$ una supervariedad. Una superestructura de Poisson es una aplicacin de haces $\{\cdot,\cdot\} :^{A} \times^{A} \to^{A}$ tal que ^{A} es un haz de superlgebras de Poisson. El triplete $(M,^{A}, \{\cdot,\cdot\})$ se dice entonces que es una supervariedad de Poisson.

Debido al hecho de que el superparntesis de Poisson induce, para cada superfuncin $f \in^{A} (U)$ (con U un abierto de M), una superderivacin $\{f,\cdot\} :^{A} (U) \to^{A} (U)$, $g \mapsto \{f,g\}$, podemos definir el supercampo vectorial

$$X_f = \{f, \cdot\},$$

que llamaremos el supercampo hamiltoniano generado por la superfuncin $f \in^{A} (U)$. Puede comprobarse sin dificultad que esta asignacin

$$^{A}(U) \quad \longrightarrow \quad X(^{A}(U)) \ , \tag{2.78}$$

$$f \quad \mapsto \quad X_f \tag{2.79}$$

define un homomorfismo de superlgebras de Lie, esto es,

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}} \ .$$

Veamos ahora otra caracterizacin de una supervariedad de Poisson. Dado el superparntesis de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$, existe un nico supertensor antisimtrico dos veces contravariante definido a travs de

$$\Pi(df, dg) = \{f, g\}$$

para cualesquiera $f, g \in^{A} (M)$. De hecho, la antisimetra de Π viene de la supercommutatividad del superparntesis de Poisson, y puede comprobarse que la identidad de Jacobi graduada es equivalente a que el parntesis de Schouten de Π se anule, esto es, $[\Pi, \Pi] = 0$.

Si $(U,^{A}(U))$ es un superentorno coordenado de $(M,^{A})$, con supercoordenadas locales (x^i, θ^α), resulta interesante expresar localmente el corchete de Poisson como

$$\begin{aligned}
\Pi^{ij} &= \Pi_U(dx^i, dx^j) = \{x^i, x^j\}, \\
M^{i\alpha} &= \Pi_U(dx^i, d\theta^\alpha) = \{x^i, \theta^\alpha\}, \\
M^{\alpha i} &= \Pi_U(d\theta^\alpha, dx^i) = \{\theta^\alpha, x^i\}, \\
S^{\alpha\beta} &= \Pi_U(d\theta^\alpha, d\theta^\beta) = \{\theta^\alpha, \theta^\beta\}.
\end{aligned}$$

De las propiedades de antisimetra del superparntesis de Poisson tenemos que

$$\begin{aligned}
\Pi^{ij} &= -\Pi^{ji} \in^{A} (U)_0 \ , \\
M^{i\alpha} &= -M^{\alpha i} \in^{A} (U)_1 \ , \\
S^{\alpha\beta} &= S^{\beta\alpha} \in^{A} (U)_0 \ ,
\end{aligned}$$

y las expansiones correspondientes a estas superfunciones son

$$\begin{aligned}
\Pi^{ij} &= \Pi_0^{ij}(x) + \sum_{\alpha_1<\alpha_2} \Pi^{ij}_{\alpha_1\alpha_2}(x)\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2} + \cdots, \\
M^{i\alpha} &= M^{i\alpha}_\beta(x)\theta^\beta + \sum_{\beta_1<\beta_2<\beta_3} M^{i\alpha}_{\beta_1\beta_2\beta_3}(x)\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3} + \cdots, \\
S^{\alpha\beta} &= S_0^{\alpha\beta}(x) + \sum_{\alpha_1<\alpha_2} S^{\alpha\beta}_{\alpha_1\alpha_2}(x)\theta^{\alpha_1}\theta^{\alpha_2} + \cdots.
\end{aligned}$$

El ejemplo ms caracterstico de supervariedad de Poisson viene dado por una supervariedad simplctica $(M,^{A}, \omega)$ donde ω es una 2-superforma simplctica par, tal y como ya fue descrito en la seccin precedente. Recordemos que la superestructura de Poisson natural viene dada por $\{f, g\} = \omega^{-1}(df, dg)$, y es no degenerada.

Anlogamente, dada una superestructura de Poisson no degenerada, esto es, invertible, puede construirse la 2-superforma simplctica par ω definida de forma que, si $f, g \in^{A} (M)$ son superfunciones de la supervariedad,

$$\omega(X_f, X_g) = \{f, g\} = X_f(g). \tag{2.80}$$

Supongamos ahora que tenemos una superfuncin H, que ser el superhamiltoniano de un sistema. La dinmica que determinar este superhamiltoniano ser la dada por el supercampo vectorial hamiltoniano X_H asociado va el superparntesis de Poisson. Ntese que, si el superparntesis de Poisson es no degenerado, este supercampo ser el mismo de la solucin de la ecuacin dinmica

$$i(X_H)\omega = dH,$$

donde la 2-superforma ω viene definida como en (2.80).

Para el caso particular de la supervariedad cotangente, existe un superparntesis de Poisson cannico, que ser simplemente el definido por la 2-superforma de Liouville cannica $\Omega = dq^i \wedge dp_i + d\theta^\alpha \wedge d\pi_\alpha$. En estas supercoordenadas locales, el superparntesis de Poisson viene dado por las relaciones de conmutacin

$$\{q^i, p_j\} = -\delta^i_j \ , \qquad \{\theta^\alpha, \pi_\beta\} = \delta^\alpha_\beta \ ,$$

y todos los dems parntesis nulos.

Finalmente, quisiramos destacar que, en completa analoga con lo que suceda con la superformas presimplcticas de rango constante, tampoco va a existir un teorema de Darboux para las estructuras de Poisson graduadas y no degeneradas de rango constante (y mucho menos para las de rango no constante, por supuesto).

Chapter 3

Supersimetras y teorema de Noether

3.1 Introducción

Nuestro objetivo en este captulo va a ser describir con detalle la teora de simetra en supermecnica, esto es, lo que se suele conocer como supersimetras. En la seccin 3.2 nos centraremos en la teora de simetra en el contexto de la supermecnica Lagrangiana, para establecer el anlogo al teorema de Noether. Posteriormente, la seccin 3.3 ser dedicada al estudio de supersimetras en la supermecnica sobre supervariedades simplcticas, que comprenden en particular a los sistemas dinmicos Hamiltonianos definidos en la supervariedad cotangente. La teora de simetra en el contexto general de supervariedades de Poisson, as como la teora de la reduccin, sern descritas en la seccin 3.4.

3.2 Teorema de Noether en supermecnica Lagrangiana

En este apartado se van a estudiar los efectos de la existencia de supersimetras correspondientes a acciones de supergrupos de Lie de transformaciones gauge sobre sistemas superlagrangianos. Para ello, procederemos como sigue. En primer lugar, haremos un repaso de las acciones de supergrupos de Lie sobre supervariedades. A continuacin, definiremos superlagrangianos invariantes gauge, para restringirnos posteriormente a acciones de contacto sobre supervariedades tangentes, y finalmente se probar el teorema de Noether asociado. Por ltimo, describiremos la situacin para supersimetras generalizadas, esto es, acciones no necesariamente de contacto pero que preserven la estructura de las superecuaciones de segundo orden, estableciendo el teorema de Noether generalizado. De hecho, este es el caso que se obtiene al considerar el modelo bsico para superlagrangianos supersimtricos, que provienen de la mecnica cuntica supersimtrica estudiada por Witten [Wi82]. Analizaremos este ejemplo y algunos otros con detalle.

3.2.1 Acciones de supergrupos y superlagrangianos supersimtricos

Acciones de supergrupos de Lie

Un supergrupo de Lie es una supervariedad $(G, {}^A_G)$, tal que G es un grupo de Lie ordinario y ${}^A_G(G)^*$ es un lgebra de Lie-Hopf graduada, donde ${}^A_G(G)^*$ denota el conjunto de distribuciones de soporte finito sobre $(G, {}^A_G)$ (ver Apndice C, o [Ko77] para ms detalles sobre supergrupos de Lie y lgebras de Lie-Hopf graduadas). El coproducto en ${}^A_G(G)^*$ se denotar por Δ. Los elementos "de tipo grupo" de ${}^A_G(G)^*$, esto es, aquellos g tales que $\Delta g = g \otimes g$, pueden identificarse precisamente con el grupo G, mientras que es posible probar que ${}^A_G(G)^*$ es de la forma $(G) \odot U(g)$, donde $U(g)$ denota el lgebra envolvente universal de la superlgebra de Lie $g = g_0 \oplus g_1$, (G) es el lgebra del grupo G y el producto semidirecto $\odot$ es la extensin del producto semidirecto asociado con la accin adjunta de G sobre g. El superparntesis de Lie en g viene inducido por el superparntesis de Lie de los supercampos vectoriales sobre $(G, {}^A_G)$ como en el caso ordinario. La parte par g_0 de g es el lgebra de Lie del grupo G. Debido a que ${}^A_G(G)^*$ es el conjunto de las distribuciones sobre ${}^A_G(G)$ de soporte finito, es posible identificar sus elementos primitivos (aquellos a tales que $\Delta a = 1 \otimes a + a \otimes 1$), esto es, la superlgebra de Lie g, con el espacio tangente a $(G, {}^A_G)$ en la identidad (que no es la supervariedad tangente, ver Apndice B para la definicin de espacio tangente de una supervariedad). El haz ${}^A_G$ se obtiene fcilmente a partir del lgebra de Lie-Hopf graduada ${}^A_G(G)^*$, y resulta ser ${}^A_G = {}^C \otimes {}^D$, donde ^{C} es isomorfo al haz ${}^{C\infty}$ de las funciones diferenciables sobre G, y ^{D} es isomorfo al haz de secciones del fibrado trivial sobre G con fibra el lgebra exterior $\Lambda(g_1^*)$. El fibrado estructural del supergrupo de Lie $(G, {}^A_G)$ es el fibrado trivial, $g_0 \times g_1^* \to g_0$, y el haz de superfunciones es simplemente ${}^{C\infty} \otimes \Lambda(g_1^*)$.

Por una accin infinitesimal del supergrupo de Lie $(G, {}^A_G)$ sobre la supervariedad $(M, {}^A_M)$ entenderemos un homomorfismo par de superlgebras de Lie $\rho : g \longrightarrow X({}^A_M)$. Denotaremos la imagen del elemento $\xi \in g$ tanto por $\rho(\xi)$, como $\xi_{{}^A_M}$; y debido a la definicin debe satisfacerse que

$$\rho([\xi, \zeta]) = [\rho(\xi), \rho(\zeta)] \qquad \forall \xi, \zeta \in g \ . \tag{3.1}$$

Diremos que una accin infinitesimal es integrable (o simplemente una accin) si existe una accin ρ_0 del grupo de Lie G sobre M tal que los supercampos vectoriales fundamentales ξ_M asociados a los generadores infinitesimales $\xi \in g_0$ coinciden con la proyeccin del supercampo vectorial $\rho(\xi)$ por la aplicacin ϵ, es decir, $\epsilon(\rho(\xi)) = \xi_M$. En otras palabras, si el diagrama adjunto es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} g_0 & \xrightarrow{\rho_0} & X(M) \\ i\downarrow & & \uparrow \epsilon \\ g & \xrightarrow{\rho} & X({}^A_M) \end{array}$$

donde $\epsilon(X)(f) := \epsilon(X(f))$ para toda superfuncin $f \in^A (M)$.

Superlagrangianos invariantes gauge

Sea L un superlagrangiano en la supervariedad tangente (TM, T^A_M), y supongamos que tenemos una accin de un supergrupo de Lie $(G,^A_G)$ sobre la supervariedad. Diremos que L es invariante gauge respecto de la accin del supergrupo anterior si

$$\mathcal{L}_{\rho(\xi)}L = \hat{\sigma}_\xi \qquad \forall \xi \in g \ , \tag{3.2}$$

donde $\sigma_\xi = \sigma_i dq^i + \sigma_\alpha d\theta^\alpha$ es una 1-superforma cerrada sobre $(M,^A_M)$ y $\hat{\sigma}_\xi$ es la superfuncin sobre la supervariedad tangente (TM, T^A_M) definida en supercoordenadas locales $(q^i, \dot{q}^i; \theta^\alpha, \dot{\theta}^\alpha)$ por

$$\hat{\sigma}_\xi = \sigma_i \dot{q}^i + \sigma_\alpha \dot{\theta}^\alpha \ . \tag{3.3}$$

Utilizando las leyes de transformacin para las componentes σ_i y σ_α de la 1-superforma σ dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \acute{\sigma}_i &= \frac{q^j}{\acute{q}i}\left(\sigma_j - (\psi^{-1})^\beta_\alpha \sigma_\beta \frac{\psi^\alpha_\gamma}{q^j}\theta^\gamma\right) \\ \acute{\sigma}_\alpha &= (\psi^{-1})^\beta_\alpha \sigma_\beta \end{aligned}$$

para un cambio de supercoordenadas locales dado por (1.8-1.11), es fcil comprobar que $\hat{\sigma}_\xi$ es una superfuncin bien definida en T^A_M. En este caso, diremos tambin que $(G,^A_G)$ es un supergrupo de supersimetras gauge de L. Ntese que las 1-superformas σ_ξ tienen paridad $|\xi| + |L|$.

Como es bien conocido (ver Apndice B o [Ko77]), el anillo de cohomologa de la variedad graduada $(M,^A_M)$ es isomorfo a la cohomologa de de Rham de la variedad base M. En consecuencia, las superfunciones σ_ξ sern localmente exactas, lo cual significa que existirn superfunciones locales $h_\xi \in^A_M (U)$ tales que $dh_\xi = \sigma_\xi \in \Omega^1({}^A_M(U))$. Si el primer grupo de cohomologa $H^1(M)$ de M se anula, la existencia de tales h_ξ ser global, y entonces la condicin de invariancia gauge anterior (3.2) podra expresarse como

$$\mathcal{L}_{\rho(\xi)}L = \Gamma(h_\xi) \ , \tag{3.4}$$

donde Γ es cualquier super SODE sobre (TM, T^A_M), ya que

$$\Gamma(h_\xi) = \frac{h_\xi}{q^i}\dot{q}^i - \frac{h_\xi}{\theta^\alpha}\dot{\theta}^\alpha \ .$$

Ntese en este punto que la nocin de invariancia gauge para una superfuncin Lagrangiana es independiente de la regularidad o no del superlagrangiano L, y tiene sentido para superlagrangianos degenerados. Sin embargo, slo puede establecerse una correspondencia entre generadores de la superlgebra de Lie g y superfunciones conservadas si consideramos exclusivamente superlagrangianos regulares. Tal correspondencia constituye la versin supersimtrica del teorema de Noether, y ser probada en primer lugar para acciones de contacto.

Acciones de contacto

Vamos a tratar, en este apartado, acciones de contacto de supergrupos sobre supervariedades tangentes, una nocin que generaliza la idea de levantamiento completo o de contacto de una accin sobre el espacio de configuraciones en mecnica Lagrangiana ordinaria. Para cualquier supercampo vectorial X sobre $(M,{}^{A}_{M})$ es posible definir un levantamiento completo X^C sobre la supervariedad tangente (TM, T^{A}_{M}), como ya vimos en el apartado 1.2.3 del Captulo 1, y que localmente viene definido por la expresin (**??**). No resulta difcil comprobar, utilizando las expresiones en supercoordenadas locales de los levantamientos completo y vertical (**??**) de un supercampo vectorial, que las siguientes relaciones se satisfacen para cualesquiera $X, Y \in X({}^{A}_{M})$:

$$[X^C, Y^C] = [X, Y]^C; \qquad [X^C, Y^V] = [X, Y]^V; \qquad [X^V, Y^V] = 0 \ . \tag{3.5}$$

Estas igualdades muestran que los levantamientos vertical y completo de supercampos vectoriales de $(M,{}^{A}_{M})$ forman un producto semidirecto de las sublgebras de Lie graduadas $X^C({}^{A}_{M})$ y $X^V({}^{A}_{M})$ de la superlgebra de Lie de los supercampos vectoriales sobre (TM, T^{A}_{M}).

En particular, podemos considerar los supercampos vectoriales asociados a una accin de un supergrupo de Lie. Para ser precisos, sea $(G,{}^{A}_{G})$ un supergrupo de Lie con superlgebra de Lie g actuando sobre la supervariedad $(M,{}^{A}_{M})$. Entonces podemos considerar la accin de $(G,{}^{A}_{G})$ sobre la supervariedad tangente (TM, T^{A}_{M}) definida como sigue. La accin de G sobre TM es simplemente el levantamiento tangente de la accin de G en M. Respecto de la accin de los generadores ξ de la superlgebra de Lie g, definiremos $\xi_{T^{A}_{M}}$ como el levantamiento completo $\xi^C_{{}^{A}_{M}}$ de $\xi_{{}^{A}_{M}}$. Resulta claro de las ecuaciones (3.5) que esta asignacin define una accin sobre la supervariedad tangente.

Teorema de Noether para acciones de contacto

Sea L un superlagrangiano regular, y Γ_L la super SODE definida por l. Supongamos que L es supersimtrico gauge respecto de un supergrupo con superlgebra de Lie g actuando por transformaciones de contacto sobre la supervariedad tangente

(TM, T^A_M). Asumamos tambin, como en la ecuacin (3.4), que las 1-superformas cerradas σ_ξ definidas por $\xi^C_{\substack{A\\M}}(L)$ son exactas, es decir, existen superfunciones h_ξ tales que $\sigma_\xi = dh_\xi$. Entonces las superfunciones definidas por

$$\hat{J}_\xi = \langle \rho(\xi), \Theta_L \rangle - h_\xi \tag{3.6}$$

son constantes del movimiento. En otras palabras, $\Gamma_L(\hat{J}_\xi) = 0$ para todo $\xi \in g$.

Veamos unas cuantas observaciones a este resultado.

Observaciones:

1. Ntese que el supercampo X^C ser una simetra gauge de contacto como la indicada en el teorema si se satisface la expresin siguiente:

$${}^{L}_{X^C}L = \Gamma_L(h) \ ,$$

donde h es la superfuncin definida por la 1-superforma gauge asociada a X.

2. Esta presentacin del teorema de Noether es vlida slo para superlagrangianos no degenerados, y anlogamente con lo que sucede en mecnica Lagrangiana ordinaria, para tratar superlagrangianos singulares son necesarios ms refinamientos.

3. Las superfunciones conservadas $\hat{J}_\xi$ definidas por la ecuacin (3.6) definen en general una extensin de la superlgebra de Lie g correspondiente a un 2-cociclo definido por las superfunciones gauge h_ξ.

Debido a que esta versin simplificada del teorema de Noether es una consecuencia inmediata de la versin generalizada que vamos a describir a continuacin, no la demostraremos.

3.2.2 Supersimetras generalizadas y teorema de Noether generalizado

Supersimetras generalizadas

La versin que acabamos de ver del teorema de Noether es vlida solamente para supersimetras de contacto, esto es, los cambios infinitesimales en las coordenadas (q^i, θ^α) de la supervariedad (TM, T^A_M) dependen exclusivamente de ellas mismas, y por tanto las transformaciones infinitesimales que hemos considerado son de la forma

$$\begin{aligned} \delta q^i = \epsilon f^i(q,\theta) \ , \quad \delta\theta^\alpha &= \epsilon g^\alpha(q,\theta) \ , \\ \delta\dot{q}^i = \epsilon \frac{d}{dt} f^i(q,\theta) \ , \quad \delta\dot{\theta}^\alpha &= \epsilon \frac{d}{dt} g^\alpha(q,\theta) \ , \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde f^i, g^α son superfunciones sobre la supervariedad inicial que definen las componentes de un supercampo vectorial. Aqu, las derivadas totales respecto del tiempo deben entenderse de la manera usual en Fsica, esto es, geomtricamente deben interpretarse como $df^i(q,\theta)/dt = \dot{q}^j f^i(q,\theta)/\dot{q}^j + \dot{\theta}^\alpha f^i(q,\theta)/\dot{\theta}^\alpha$ y anlogamente con las superfunciones g^α.

Sin embargo, en multitud de ocasiones debemos enfrentarnos con supersimetras que no son levantamientos completos de supersimetras sobre el espacio de configuraciones, es decir, caracterizadas por cambios de supercoordenadas con expresiones locales

$$\begin{aligned}
\delta q^i &= \epsilon f^i(q,\dot{q};\theta,\dot{\theta}) && (3.8)\\
\delta \theta^\alpha &= \epsilon g^\alpha(q,\dot{q};\theta,\dot{\theta}) && (3.9)\\
\delta \dot{q}^i &= \epsilon \frac{d}{dt} f^i(q,\dot{q};\theta,\dot{\theta}) && (3.10)\\
\delta \dot{\theta}^\alpha &= \epsilon \frac{d}{dt} g^\alpha(q,\dot{q};\theta,\dot{\theta})\ . && (3.11)
\end{aligned}$$

Evidentemente, en este caso se hace necesario interpretar geomtricamente las derivadas totales respecto del tiempo, pues en la geometra del fibrado tangente no tienen sentido expresiones con aceleraciones. La respuesta natural a esta cuestiones es la siguiente: puesto que en un sistema dinmico Lagrangiano la evolucin temporal viene representada por un supercampo Γ, el operador d/dt debe entenderse simplemente como la accin del supercampo de Euler-Lagrange Γ sobre las superfunciones en consideracin. As, podemos dar la siguiente definicin:

Un supercampo vectorial par X en (TM, T_M^A) se dir que induce una supertransformacin Newtoniana respecto de una super SODE Γ si transforma Γ en otra super SODE, es decir, si existe una super SODE Γ' tal que ${}^{L}_{X}\Gamma = \Gamma'$.

La idea de las transformaciones Newtonianas en mecnica Lagrangiana ordinaria fue desarrollada por Marmo *et al* [Ma86b], y se refiere a que dichas transformaciones preservan la forma de la segunda ley de Newton. En el caso no graduado es bien conocido que las transformaciones de contacto forman un grupo, mientras que las transformaciones Newtonianas no lo harn, siendo as su estudio una tarea ms complicada en general. En este apartado nosotros vamos a desarrollar la idea de supersimetras asociadas con la presencia de supercampos Newtonianos, esto es, lo que se suelen conocer como supersimetras generalizadas o, tambien, supersimetras "ocultas". Un ejemplo bien conocido en que las supersimetras son de este tipo es la mecnica cuntica supersimtrica, como veremos posteriormente.

Llamaremos una supersimetra generalizada del superlagrangiano L a un supercampo vectorial X de (TM, T_M^A) tal que

$$ {}^{L}_{X(\Gamma)} L = \Gamma(F) \qquad (3.12)$$

para todas las super SODEs Γ, donde $X(\Gamma) = X + S[\Gamma, X]$, y F es una superfuncin (fijada) en T^A_M. En tal caso diremos que L es invariante gauge (generalizado) respecto de X.

Para ver el significado de esta nueva supersimetra, veamos qu significa $X(\Gamma)$ en supercoordenadas locales. Dado un supercampo vectorial X de la forma

$$X = f^i \frac{}{q^i} + g^i \frac{}{\dot{q}^i} + h^\alpha \frac{}{\theta^\alpha} + k^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} \ ,$$

y una super SODE Γ dada por

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{}{q^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{}{\theta^\alpha} + F^i \frac{}{\dot{q}^i} + G^\alpha \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} \ ,$$

podemos calcular cunto vale $X(\Gamma)$, obtenindose el resultado

$$\begin{aligned} X(\Gamma) &= X + S[\Gamma, X] = f^i \frac{}{q^i} + g^i \frac{}{\dot{q}^i} + \\ &+ \dot{q}^j \frac{f^i}{q^j} \frac{}{\dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{h^\alpha}{q^i} \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} + \dot{\theta}^\alpha \frac{f^i}{\theta^\alpha} \frac{}{\dot{q}^i} + \dot{\theta}^\beta \frac{h^\alpha}{\theta^\beta} \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} + \\ &+ F^j \frac{f^i}{\dot{q}^j} \frac{}{\dot{q}^i} + F^i \frac{h^\alpha}{\dot{q}^i} \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} + G^\alpha \frac{f^i}{\dot{\theta}^\alpha} \frac{}{\dot{q}^i} + G^\beta \frac{h^\alpha}{\dot{\theta}^\beta} \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} \ . \end{aligned}$$

Reagrupando trminos, puede obtenerse la expresin ms compacta

$$X(\Gamma) = f^i \frac{}{q^i} + h^\alpha \frac{}{\theta^\alpha} + (\mathcal{L}_\Gamma f^i) \frac{}{\dot{q}^i} + (\mathcal{L}_\Gamma h^\alpha) \frac{}{\dot{\theta}^\alpha} \ . \tag{3.13}$$

Es evidente entonces que si X es el levantamiento completo de un supercampo vectorial sobre $(M,^A_M)$ se cumplir $X(\Gamma) = X$, para todas las super SODEs Γ. Y no slo eso, sino que de la expresin (3.13) se deduce que podemos ver la definicin de $X(\Gamma)$ como la generalizacin del levantamiento completo de un supercampo vectorial buscada por las ecuaciones (3.10-3.11). Pues si X es un supercampo vectorial en $(M,^A_M)$, se satisface que $X(\Gamma) = X^C$. Por tanto, hemos encontrado as una caracterizacin intrnseca del levantamiento completo de supercampos que ya habamos definido en el primer captulo.

Por otra parte, ntese que para levantamientos completos de supercampos vectoriales en $(M,^A_M)$, la expresin (3.12) se reduce entonces a

$$\mathcal{L}_X L = \Gamma(F) \ .$$

Recurriendo al hecho de que Γ es una super SODE, basta tomar F de tal forma que $\Gamma(F)$ sea la superfuncin definida sobre la supervariedad tangente por la frmula (3.3), asociada a la diferencial exterior de una superfuncin h sobre ^A_M, para recuperar la situacin estudiada en el apartado anterior. Esto es, las supersimetras generalizadas incluyen a las supersimetras de contacto como un caso particular, tal y como sera de esperar.

Finalmente, vemos que, dado que Γ es una super SODE, las transformaciones generadas por Γ reproducen las supertransformaciones (3.8-3.11) sin necesidad de recurrir a la supervariedad (TTM, TT_M^A).

Teorema de Noether generalizado

Si X es una supersimetra generalizada del superlagrangiano L, es decir, satisface (3.12), entonces podemos asociarle la superfuncin

$$J_X = \langle X, \Theta_L \rangle - F \ . \tag{3.14}$$

Bajo ciertas condiciones sobre el superlagrangiano L, puede demostrarse que J_X se conserva. Por ejemplo, si L es un superlagrangiano regular, entonces $\Gamma_L(J_X) = 0$, donde Γ_L es el supercampo vectorial dinmico de Euler-Lagrange definido por L. Como veremos a continuacin, si existe una super SODE Γ tal que ${}^L_\Gamma\Theta_L = dL$, entonces J_X es una cantidad conservada para Γ, independientemente de que L sea regular o no.

En general, si tenemos un supergrupo de Lie actuando sobre la supervariedad tangente (TM, T_M^A) por supersimetras generalizadas

$$\mathcal{L}_{\xi_{T^A}(\Gamma)} L = \Gamma(F_\xi) \ , \qquad \forall \xi \in g \ , \tag{3.15}$$

este teorema de Noether asocia a cada uno de los generadores ξ de la superlgebra de Lie g una superfuncin conservada $\hat{J}_\xi$ definida por

$$\hat{J}_\xi = \langle \xi_{T^A}, \Theta_L \rangle - F_\xi . \tag{3.16}$$

Como en el caso de las simetras de contacto, las superfunciones conservadas definen una extensin de la superlgebra de Lie g que depende de la cohomologa definida por los trminos gauge de las supersimetras generalizadas. Debido a la importancia de este resultado, lo presentaremos como un teorema.

Sea L un superlagrangiano sobre (TM, T_M^A). Supongamos que X es una supersimetra generalizada de L. Entonces si existe una super SODE Γ tal que ${}^L_\Gamma\Theta_L = dL$, la superfuncin J_X definida en (3.14) se conserva.

Dem.- Por la definicin de supersimetra generalizada (3.12) tenemos que

$$\begin{aligned} {}^L_{X(\Gamma)}L &= {}^L_X L + {}^L_{S[\Gamma,X]} L = i_X dL + i_{S[\Gamma,X]} dL = \\ &= i_X dL + i_{[\Gamma,X]}\Theta_L = i_X dL - i_{[X,\Gamma]}\Theta_L = \\ &= i_X dL - i^L_{X\Gamma}\Theta_L + {}^L_\Gamma\, i_X \Theta_L \ , \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que las super SODEs son supercampos vectoriales pares y que S es un supertensor par. Entonces, recurriendo a que ${}^L_\Gamma\Theta_L = dL$, obtenemos el resultado deseado:

$$\Gamma(F) ={}^L_\Gamma i_X\Theta_L \Rightarrow \Gamma(J_X) = \mathcal{L}_\Gamma(i_X\Theta_L) - \Gamma(F) = 0 \ .$$

Para terminar mostraremos una versin recproca de este teorema. A saber, dada una cantidad conservada J_X, puede construirse una supersimetra generalizada. Sin embargo, esto tiene sentido tan slo para superlagrangianos regulares. De nuevo, establecemos el presente resultado como un teorema.

Sea L un superlagrangiano regular, y J una cantidad conservada bajo la dinmica asociada a ese lagrangiano, esto es, $\Gamma_L(J) = 0$. Entonces existe una supersimetra generalizada X que da lugar a dicha cantidad conservada.

Dem.- En primer lugar, demostraremos que si X es una supersimetra generalizada, entonces $X(\Gamma_L)$ es un supercampo vectorial hamiltoniano con superhamiltoniano J_X y $X(\Gamma_L) = X$.

Si V es un supercampo vertical y X una supersimetra generalizada, entonces

$$i_V dF = i_V^L{}_X\Theta_L \ . \tag{3.17}$$

Esta afirmacin se deduce directamente evaluando ${}^L_{X(\Gamma)}\Theta_L$ utilizando dos super SODEs Γ_1 y Γ_2 que difieran en un supercampo vertical V. Vemoslo. Si $\Gamma_1 - \Gamma_2 = V$, entonces

$$\mathcal{L}_{\Gamma_1}F - \mathcal{L}_{\Gamma_2}F = \mathcal{L}_V F = i_V dF \ .$$

Por otro lado, haciendo uso de que $\mathcal{L}_{S(X)}L = i_X\Theta_L$, resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Gamma_1}F - \mathcal{L}_{\Gamma_2}F &= \mathcal{L}_{X(\Gamma_1)}L - \mathcal{L}_{X(\Gamma_2)}L = \mathcal{L}_X L + \\
&+ \mathcal{L}_{S[\Gamma_1,X]}L - \mathcal{L}_X L - \mathcal{L}_{S[\Gamma_2,X]}L = \\
&= \mathcal{L}_{S[V,X]}L = i_{[V,X]}\Theta_L = i_V\mathcal{L}_X\Theta_L - \\
&- (-1)^{|V||X|}\mathcal{L}_X i_V\Theta_L = i_V\mathcal{L}_X\Theta_L \ .
\end{aligned}$$

Se comprueba tambin mediante un sencillo clculo que

$$i_V^L{}_{S[\Gamma,X]}\Theta_L = 0 \tag{3.18}$$

para todo supercampo vertical V, ya que

$$0 = i_{[V,S[\Gamma,X]]}\Theta_L = i_V\mathcal{L}_{S[\Gamma,X]}\Theta_L - (-1)^{|V|(|\Gamma|+|X|)}\mathcal{L}_{S[\Gamma,X]}i_V\Theta_L$$

y como este ltimo trmino es nulo, se obtiene el resultado esperado.

De la ecuacin (3.17) obtenemos que

$$ {}^{L}_{X}\Theta_L = dF + \alpha \tag{3.19} $$

donde α es una 1-superforma semibsica, es decir, $i_V\alpha = 0$ para todo supercampo vertical V. Entonces, combinando las ecuaciones (3.17),(3.19) y (1.64), y utilizando que $({}^{L}_{\Gamma}\alpha) \circ S = \alpha$ para toda 1-superforma semibsica (como es fcil comprobar en supercoordenadas locales), demostramos que

$$ {}^{L}_{S[\Gamma,X]}\Theta_L = -\alpha \ , \tag{3.20} $$

pues

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S[\Gamma,X]}\Theta_L &= \mathcal{L}_{X(\Gamma)}\Theta_L - \mathcal{L}_X\Theta_L = \mathcal{L}_{X(\Gamma)}dL \circ S - \mathcal{L}_X\Theta_X = \\
&= \mathcal{L}_\Gamma dF \circ S - \mathcal{L}_X\Theta_L = \mathcal{L}_\Gamma\mathcal{L}_X\Theta_L \circ S - \mathcal{L}_\Gamma\alpha \circ S - \\
&- \mathcal{L}_X\Theta_L = (-1)^{|X||\Gamma|}\mathcal{L}_X\mathcal{L}_\Gamma\Theta_L \circ S - \mathcal{L}_X\Theta_L - \\
&- \mathcal{L}_\Gamma\alpha \circ S = \mathcal{L}_X\Theta_L - \mathcal{L}_X\Theta_L - \alpha = -\alpha \ .
\end{aligned}
$$

Finalmente, es fcil deducir de las ecuaciones (3.19) y (3.20) que

$$ {}^{L}_{X(\Gamma_L)}\Theta_L = dF \tag{3.21} $$

donde L es un superlagrangiano regular y Γ_L es su super SODE. Entonces, desarrollando la derivada de Lie en el trmino de la izquierda de la expresin (3.21) obtenemos

$$ -i_{X(\Gamma_L)}\Omega_L + d(i_{X(\Gamma_L)}\Theta_L) = dF $$

o, lo que es lo mismo,

$$ i_{X(\Gamma_L)}\Omega_L = dJ_X \ . $$

Por tanto, $X(\Gamma_L)$ es un supercampo vectorial Hamiltoniano respecto de la superforma simplctica Ω_L, con superhamiltoniano la superfuncin conservada J_X.

Recprocamente, asumamos ahora que tenemos una cantidad conservada J y queremos probar la existencia de una supersimetra generalizada X_J con cantidad conservada asociada precisamente J. Para ello, definamos X_J a travs de la ecuacin $i_{X_J}\Omega = dJ$. Debido a que J se conserva, observemos que $0 = \Gamma_L(J) = (-1)^{|L||J|}X_J(E_L)$ y , por tanto, $[\Gamma_L, X_J] = 0$. As, $X_J(\Gamma_L) = X_J + S([\Gamma_L, X_J]) = X_J$. Finalmente, debemos mostrar que X_J es una supersimetra generalizada. Sea Γ una super SODE arbitraria. Entonces $\Gamma = \Gamma_L + V$, donde V es un supercampo vertical. Entonces, $X_J(\Gamma) = X_J + S[V, X_J]$, y tras algunos clculos se obtiene que

$$ {}^{L}_{X_J(\Gamma)}L = \Gamma(F) \ , $$

donde $F = \langle X_J, \Theta_L\rangle + J$, concluyndose por tanto que X_J es una supersimetra generalizada de L.

Ejemplo: superlagrangianos supersimtricos y superpartculas elementales

Una aplicacin sencilla de la discusin precedente la proporciona la construccin de superpartculas elementales. Al igual que en mecnica Lagrangiana ordinaria, las superpartculas elementales vienen definidas por superlagrangianos invariantes gauge respecto de la accin de un supergrupo de Lie, de forma que sus espacios de configuraciones sean superespacios homogneos del supergrupo. Tal extensin graduada del programa de Wigner puede ser aplicada de manera sistemtica para cualquier supergrupo de Lie $(G,{}^{A}_{G})$. Por ejemplo, es posible construir las superpartculas relativistas Lorentz o relativistas Galileo a travs de superespacios homogneos de extensiones graduadas del supergrupo de Poincar [Br77][Az82] o del grupo de Galileo, respectivamente.

En esta seccin consideraremos el ejemplo de una superlgebra de Lie g real de dimensin $(1, N)$ generada por un solo elemento par E y N generadores impares Q_i, $i = 1, \ldots, N$, con las siguientes relaciones de conmutacin graduadas:

$$[Q_i, Q_j] = 2\delta_{ij}E; \qquad [E, Q_i] = 0 \ . \tag{3.22}$$

Asumamos que ρ es una accin de esta superlgebra de Lie sobre la supervariedad tangente (TM, T^A), con $\rho(E) = \Gamma_L$ el supercampo vectorial dinmico par correspondiente al superlagrangiano regular L, y $\rho(Q_i) = D_i$ los supercampos vectoriales impares generadores de la supersimetra. Debido a (3.22), estos supercampos deben cumplir que

$$D_i^2 = \Gamma; \qquad [\Gamma, D_i] = 0 \ , \tag{3.23}$$

y adems deben ser supersimetras generalizadas en el sentido de (3.12), es decir,

$${}^{L}_{D_i(\Gamma)}(L) = \Gamma(F_i) \tag{3.24}$$

para todas las superecuaciones diferenciales de segundo orden Γ. Ahora bien, $D_i(\Gamma_L) = D_i$, luego

$${}^{L}_{D_i}(L) = \Gamma_L(F_i) = \dot{F}_i \ .$$

Precisamente utilizando esta relacin es como se han calculado los generadores de las transformaciones de supersimetra obtenidas en la discusin sobre las superpartculas elementales. Observemos ahora que el teorema de Noether generalizado establece entonces que la cantidad $J_i = \langle D_i, \Theta_L \rangle - F_i$ es una constante del movimiento, y D_i es un supercampo vectorial hamiltoniano con superhamiltoniano asociado J_i. Ntese que si la contraccin $\langle D_i, \Theta_L \rangle \neq 0$, entonces el superhamiltoniano de D_i no es la superfuncin F_i.

La existencia de un lgebra de supersimetra como la superlgebra de Lie (3.22) impone fuertes restricciones sobre la forma de los D_i y sobre la supervariedad $(M,{}^{A}_{M})$. Puede demostrarse fcilmente [Ib92b] que la existencia de un supercampo vectorial D tal que $D^2 = \Gamma$ cuando Γ es una super SODE implica que las dimensiones par e impar de $(M,{}^{A}_{M})$ deben ser iguales, y en supercoordenadas locales, D debe tener un desarrollo del tipo (salvo factores constantes irrelevantes)

$$D = \theta^i \frac{}{q^i} + \cdots \ , \tag{3.25}$$

lo cual fuerza a que las superfunciones de transicin de la supervariedad satisfagan

$$\psi^i_j = \frac{\acute{q}^i}{q^j} \ ,$$

esto es, el fibrado estructural de $(M,{}^{A}_{M})$ es el fibrado cotangente de M, y ${}^{A}_{M} = \Gamma\Lambda(T^*M)$.

Estos resultados ya fueron implcitamente asumidos en la construccin de superlagrangianos supersimtricos, pero como consecuencia de la discusin anterior, hemos demostrados que las nicas supervariedades donde puede construirse un superlagrangiano regular con superlgebra de supersimetras generalizadas (3.22) es la supervariedad $(M, \Gamma\Lambda(T^*M))$. A pesar de esto, los modelos utilizados para superpartculas supersimtricas no tienen por qu ser regulares, y en consecuencia deberamos refinar algo ms estos resultados. En el Captulo 4 estudiaremos la reduccin de superlagrangianos degenerados, y veremos en particular algunos superlagrangianos supersimtricos degenerados, definidos sobre supervariedades con fibrados estructurales arbitrarios, y cmo efectivamente existe para ellos un supercampo D que realiza la superlgebra (3.22). La importancia de los superlagrangianos supersimtricos se revela, por ejemplo, en la demostracin basada en ellos derivada por Álvarez Gaum [Al83] del teorema del ndice de Atiyah-Singer. Tambin, Maes y Zumino [Ma86a] dieron una demostracin del teorema del ndice utilizando una aproximacin WBK y superlagrangianos supersimtricos.

3.3 Supersimetras en supervariedades supersimplcticas

En los apartados anteriores de este captulo, hemos estudiado la teora de supersimetras dentro del contexto Lagrangiano. En orden a tener una descripcin completa de la teora de simetra en supermecnica, habra que continuar este estudio para comprender los sistemas dinmicos Hamiltonianos. As pues, en esta seccin vamos a analizar los casos en que el espacio de fases del sistema sea una supervariedad supersimplctica, como caso particular del cual se encuentra la situacin en que el superespacio de fases es la supervariedad cotangente, con la estructura supersimplctica cannica descrita en el captulo anterior. Veremos que, al igual que en la situacin no graduada, hay una formulacin geomtrica natural del teorema de Noether, no tan oscura como la versin que hemos dado anteriormente de supersimetras generalizadas. El estudio de sistemas dinmicos definidos sobre supervariedades de Poisson en general, as como la teora de la reduccin, ser examinado en la prxima seccin.

3.3.1 Definiciones preliminares

Sea $(G,{}^A_G)$ un supergrupo de Lie, con superlgebra de Lie-Hopf $(G) \odot U(g)$; y sea $(M,{}^A_M,\Omega)$ una supervariedad simplctica. Supongamos que tenemos una accin infinitesimal del supergrupo de Lie $(G,{}^A_G)$ sobre la supervariedad simplctica $(M,{}^A_M,\Omega)$. Diremos que esta accin es hamiltoniana si los supercampos fundamentales ξ_P son supercampos vectoriales hamiltonianos, con superhamiltonianos asociados $\hat{J}_\xi$ tales que

$$\xi(\hat{J}_\zeta) = \hat{J}_{[\xi,\zeta]} \ . \tag{3.26}$$

Si la accin hamiltoniana de $(G,{}^A_G)$ sobre $(M,{}^A_M,\Omega)$ es integrable, entonces diremos que es una accin supersimplctica. Ntese que, por la extensin del teorema de Darboux para supervariedades simplcticas, la accin supersimplctica anterior define automticamente una accin simplctica ordinaria del grupo de Lie G sobre la variedad simplctica M.

La aplicacin $\hat{J} : g \to^A_M (M)$ que enva el elemento $\xi \in g$ en el superhamiltoniano $\hat{J}_\xi$ del supercampo vectorial fundamental definido por la accin supersimplctica de $(G,{}^A_G)$ sobre $(M,{}^A_M,\Omega)$ la denominaremos, en analoga con el caso ordinario, aplicacin supercomomento, la cual es un homomorfismo de superlgebras de Lie.

3.3.2 Cantidades conservadas y teorema de Noether para supervariedades simplcticas

Veamos ahora brevemente la versin graduada del teorema de Noether para supervariedades simplcticas. Por razones de consistencia, repasaremos primero algunas definiciones y conceptos, que tambin sern utilizados en la prxima seccin.

Si $(M,{}^A_M,\Omega,\Gamma)$ es un sistema dinmico localmente Hamiltoniano, un superdifeomorfismo Φ de $(M,{}^A_M)$ es una supersimetra de la geometra del sistema dinmico si es un supersimplectomorfismo o supertransformacin cannica de $(M,{}^A_M,\Omega)$, es decir, $\Phi^*\Omega = \Omega$. Φ es una supersimetra del campo Γ (o de la dinmica) si $\Phi_*(\Gamma) = \Gamma$. Decimos tambin que Φ es una supersimetra del sistema dinmico localmente Hamiltoniano cuando es una supersimetra de la geometra y del supercampo Γ, es decir, $\Phi^*\Omega = \Omega$ y $\Phi_*(\Gamma) = \Gamma$.

Anlogamente, si $(M,{}^A_M,\Omega,H)$ es un sistema dinmico, se dice que Φ es una supersimetra de H si $\Phi^*H = H$, y una supersimetra de $(M,{}^A_M,\Omega,H)$ si, adems, $\Phi^*\Omega = \Omega$. En particular, vemos que tambin sera una supersimetra del sistema dinmico localmente Hamiltoniano $(M,{}^A_M,\Omega,X_H)$ (con $X_H = \hat{\Omega}^{-1}(dH)$), pero el recproco no es cierto.

Tomemos ahora el sistema dinmico Hamiltonianos $(M,{}^A_M,\Omega,H)$. Podemos plantearnos la ecuacin dinmica

$$i_\Gamma\Omega = -dH \ .$$

Para toda superfuncin $G \in^A_M$, el supercampo vectorial Hamiltoniano X_G satisface

$$\mathcal{L}_{X_G}\Omega = i_{X_G}d\Omega + d(i_{X_G}\Omega) = d(-dG) = 0 \ ,$$

esto es, si existiese un flujo local para G, este supercampo vectorial sera el generador de una supertransformacin cannica infinitesimal. En cualquier caso, y para no entrar en discusiones sobre flujos asociados a supercampos pares e impares, diremos que X_G genera una supertransformacin cannica.

Esta transformacin cannica ser una supersimetra infinitesimal del sistema si preserva H, es decir,

$$X_G(H) = \{G, H\} = 0$$

(con $\{\cdot,\cdot\}$ el superparntesis de Poisson definido de manera natural por la 2-superforma simplctica, ver Captulo 2, seccin 2.2.3).

Si tal cosa ocurre, pueden extraerse dos consecuencias:

a) G es una constante del movimiento, pues

$$\mathcal{L}_{X_H}G = \{H, G\} = -(-1)^{|G||H|}\{G, H\} = 0 \ .$$

b) La supertransformacin cannica generada por X_G preserva las ecuaciones del movimiento, dado que

$$[X_G, X_H] = X_{\{G,H\}} = 0 \ .$$

Recprocamente, si $G \in^A (M)$ es una constante del movimiento, es decir, $X_H(G) = 0$, es evidente que X_G generar una transformacin de supersimetra del sistema.

Finalmente, dadas dos supersimetras generadas por los supercampos $X_{G^{(1)}}$, $X_{G^{(2)}}$, con constantes del movimiento asociadas $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, entonces el superconmutador de las dos supersimetras es de nuevo una supersimetra, con constante del movimiento asociada $\{G^{(1)}, G^{(2)}\}$.

Vemos as que, en el contexto Hamiltoniano, la versin geomtrica del teorema de Noether es prcticamente trivial.

Estos resultados se extenderan ahora de manera natural al caso de supergrupos de Lie actuando sobre el sistema dinmico $(M, \overset{A}{_M}, \Omega, H)$ por supersimetras. Efectivamente, si tenemos un supergrupo $(G, \overset{A}{_G})$ con una accin Hamiltoniana en $(M, \overset{A}{_M}, \Omega)$ tal que deje invariante la dinmica definida por H,

$$g^* H = H \ , \quad \forall g \in G;$$

$$\xi_{\overset{A}{_M}}(H) = 0 \ , \quad \forall \xi \in g \ ,$$

tendremos que

Teorema de Noether:

1.- $\hat{J}_\xi$ son constantes del movimiento, $\{H, \hat{J}_\xi\} = 0 \ \forall \xi \in g$, y

2.- $[\xi_{\overset{A}{_M}}, X_H] = 0$.

El caso ms interesante desde el punto de vista fsico aparece cuando el superespacio de evolucin es la supervariedad cotangente $(T^*Q, T^*\overset{A}{_Q})$ a una supervariedad $(Q, \overset{A}{_Q})$, en cuyo caso la 2-superforma simplctica Ω es simplemente la 2-superforma cannica dada por (2.17). Comoquiera que se trata de una situacin particular de la que acabamos de ver, todos los resultados que hemos mostrado se mantienen para los sistemas dinmicos Hamiltonianos de la forma $(T^*Q, T^*\overset{A}{_Q}, \Omega, H)$.

3.4 Supersimetras en supervariedades de Poisson y teora de la reduccin

Finalmente, nuestro objetivo en este ltimos apartado va a ser extender los resultados de la teora de simetra de la mecnica ordinaria al campo ms general de las supervariedades de Poisson, en las cuales estn incluidas como un caso particular las supervariedades simplcticas, como ya observamos en el captulo 2. En primer lugar, y como es habitual, estableceremos la relacin existente entre supersimetras y cantidades conservadas va una versin graduada del teorema de Noether, que resultar muy similar a la que ya hemos visto para supervariedades simplcticas. A continuacin veremos un ejemplo muy importante de supervariedades de Poisson, esto es, las supervariedades de Lie-Poisson, y trataremos la teora de la reduccin para supervariedades de Poisson, hasta llegar a un resultado que generaliza la situacin obtenida en el caso no graduado.

3.4.1 Supergrupos en supervariedades de Poisson

Acciones de Poisson graduadas

Sea $(G,^{A}_{G})$ un supergrupo de Lie, como es habitual, con superlgebra de Lie-Hopf $(G)\odot U(g)$; y sea $(P,^{A}_{P}, \{\cdot,\cdot\}_P)$ una supervariedad de Poisson. Por tanto, si el superparntesis de Poisson es no degenerado, definir de manera natural una 2-superforma simplctica Ω, como ya vimos al final del Captulo 2.

Supongamos que tenemos una accin infinitesimal del supergrupo de Lie $(G,^{A}_{G})$ sobre la supervariedad de Poisson $(P,^{A}_{P}, \{\cdot,\cdot\}_P)$ (posiblemente con $\{\cdot,\cdot\}_P$ degenerado). Diremos que esta accin es hamiltoniana si los supercampos fundamentales ξ_P son supercampos vectoriales hamiltonianos, con superhamiltonianos asociados J_ξ, y tales que

$$\xi(J_\zeta) = \{\hat{J}_\xi, \hat{J}_\zeta\}_P = \hat{J}_{[\xi,\zeta]} \ . \tag{3.27}$$

Si la accin hamiltoniana de $(G,^{A}_{G})$ sobre $(P,^{A}_{P}, \{\cdot,\cdot\}_P)$ es integrable, entonces diremos que es una accin de Poisson. Ntese que si la supervariedad de Poisson es no degenerada, entonces por la extensin del teorema de Darboux para supervariedades simplcticas, la accin de Poisson anterior define automticamente una accin de Poisson ordinaria del grupo de Lie G sobre la variedad de Poisson P. Lo mismo podr afirmarse en general para supervariedades de Poisson proyectables, esto es, aquellas supervariedades de Poisson en las que fuera posible encontrar supercoordenadas locales en las cuales las componentes del supertensor de Poisson fuesen funciones de las supercoordenadas pares solamente.

La aplicacin $\hat{J} : g \to^{A}_{P} (P)$ que enva el elemento $\xi \in g$ en el superhamiltoniano $\hat{J}_\xi$ del supercampo vectorial fundamental definido por la accin de Poisson de $(G,^{A}_{G})$ sobre $(P,^{A}_{P}, \{\cdot,\cdot\}_P)$ la denominaremos, en analoga con el caso ordinario, aplicacin supermomento, la cual es un homomorfismo de superlgebras de Lie.

Cantidades conservadas

Consideremos el sistema dinmico $(P,^A_P, \{\cdot,\cdot\}, H)$. La dinmica de este sistema Hamiltoniano viene definida por la ecuacin

$$\dot{F} = \{H, F\} \ ,$$

para toda superfuncin $F \in^A_P (P)$.

Tambin sabemos que las superfunciones $F \in^A_P (P)$ definen un supercampo vectorial, el supercampo vectorial Hamiltoniano $X_F = \{F, \cdot\}$, dado que el superparntesis de Poisson induce una superderivacin sobre las superfunciones de la supervariedad $(P,^A_P)$. Diremos que la transformacin inducida por X_F es una supersimetra infinitesimal del sistema si preserva la forma de H, es decir,

$$X_F H = \{F, H\} = 0 \ .$$

En tal caso, podr afirmarse que F es una constante del movimiento, pues

$$X_H(F) = \{H, F\} = -(-1)^{|H||F|}\{F, H\} = -(-1)^{|H||F|}X_F(H) = 0 \ .$$

Adems, la transformacin generada por X_F preservar las ecuaciones del movimiento, ya que

$$[X_F, X_H] = X_{\{F,H\}} = 0 \ .$$

Recprocamente, si $F \in^A_P (P)$ es una constante del movimiento, es decir, $\{F, H\} = 0$, es evidente que X_F generar una transformacin de supersimetra del sistema. Y dadas dos supersimetras generadas por las superfunciones $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, entonces el superconmutador de las dos supersimetras es de nuevo una supersimetra, con generador y constante del movimiento asociada $\{F^{(1)}, F^{(2)}\}$.

Sea ahora $(G,^A_G)$ un supergrupo de Lie con una accin hamiltoniana sobre $(P,^A_P, \{\cdot,\cdot\}$ tal que deje invariante la dinmica definida por el superhamiltoniano H, esto es, $\xi_{^A_P}(H) = 0$, $\forall \xi \in g$. Entonces los resultados que acabamos de mostrar se extenderan de manera natural para establecer la versin graduada del teorema de Noether:

En las condiciones anteriores:

1.- $\hat{J}_\xi$ son constantes del movimiento, $\{H, \hat{J}_\xi\} = 0 \ \forall \xi \in g$, y

2.- $[\xi_{^A_P}, X_H] = 0$.

3.4.2 Supervariedades de Lie-Poisson y teora de la reduccin

Supervariedades de Lie-Poisson

En este apartado vamos a analizar un ejemplo de supervariedad de Poisson distinto de los ya estudiados. Asimismo, daremos una aplicacin de Poisson sobre ella. Este ejemplo consiste en la extensin graduada de las bien conocidas variedades de Lie-Poisson, y ser imprescindible en la teora de reduccin, cuando tratemos de definir una aplicacin supermomento.

Sea como de costumbre $(G, {}^A_G)$ un supergrupo de Lie, con superlgebra de Lie asociada $g = g_0 \oplus g_1$, y ${}^A(G)^* = (G) \odot U(g)$ la correspondiente superlgebra de Lie-Hopf. La supervariedad cotangente $(T^*G, T^*{}^A_G)$ es de nuevo un supergrupo de Lie, con superlgebra de Lie-Hopf $(T^*{}^A(G))^* = (T^*G) \odot U(g \oplus g^*)$. El espacio $g \oplus g^*$ viene dotado de una estructura de superlgebra de Lie a travs de la representacin coadjunta ad^* de g sobre g^*. Esto es, para todo $\xi \in g$ y $\mu \in g^*$, el elemento $ad^*_\xi \mu$ de g^* est determinado por

$$\langle ad^*_\xi \mu, \zeta \rangle = -(-1)^{|\xi||\mu|} \langle \mu, [\xi, \zeta] \rangle \tag{3.28}$$

para todo $\zeta \in g$. Por tanto es posible dotar de una estructura de producto semidirecto a $g \oplus g^*$ con el supercorchete de Lie dado por

$$[(\xi, \mu), (\zeta, \nu)] = ([\xi, \zeta], ad^*_\xi \nu - (-1)^{|\nu||\zeta|} ad^*_\zeta \mu) \ , \tag{3.29}$$

donde el parntesis $[\cdot, \cdot]$ sobre el trmino de la derecha es el superparntesis de Lie sobre g [Ca91].

Utilizando la correspondencia biyectiva entre subgrupos de Lie graduados de un supergrupo de Lie dado y sublgebreas de Lie-Hopf graduadas del supergrupo de Lie (ver [Ko77] y Apndice C para ms detalles), resulta, debido a que $(G) \odot U(g)$ es una sublgebra de Lie-Hopf de $(T^*G) \odot U(g \oplus g^*)$, que $(G, {}^A_G)$ es un subgrupo de Lie graduado del supergrupo de Lie cotangente $(T^*G, T^*{}^A_G)$. Por otro lado, sabemos que los espacios homogneos de supergrupos de Lie por subgrupos graduados cerrados son supervariedades. Consideremos entonces la supervariedad $(T^*G, T^*{}^A_G)/(G, {}^A_G)$, con variedad base $T^*G/G \cong g_0^*$, y estructura de haz

$${}^A_1 = T^*{}^A_G / {}^A_G \cong \Gamma(\Lambda(g_1 \oplus g_1^*)) / \Gamma(\Lambda(g_1^*)) \cong \Gamma(\Lambda(g_1)) \ .$$

Puede comprobarse entonces que $(g_0^*, {}^A_1)$ puede ser dotada de una estructura de supervariedad de Poisson (de hecho degenerada), con los superparntesis de Poisson definidos por medio de

$$\{x_i, x_j\} = c_{ij}^k x_k \ ; \tag{3.30}$$

$$\{x_i, \xi_\alpha\} = c_{i\alpha}^\beta \xi_\beta \ ; \tag{3.31}$$

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = c_{\alpha\beta}^i x_i ; \tag{3.32}$$

donde ξ_i es una base lineal de g_0; ξ_α es una base lineal de g_1; c_{ij}^k, $c_{i\alpha}^\beta$ y $c_{\alpha\beta}^i$ son las constantes de estructura correspondientes a la superlgebra de Lie g; y x_i son las funciones coordenadas de g_0^* asociadas con la base dual de las ξ_i.

Tenemos entonces el siguiente resultado [Ca91]:

Sea $(G,{}_G^A)$ un supergrupo de Lie, y $(T^*G, T^*{}_G^A)$ su supergrupo de Lie cotangente. El espacio homogneo $(T^*G, T^*{}_G^A)/(G,{}_G^A)$ es una supervariedad de Poisson $(g_0^*,{}_1^A)$, llamada la supervariedad de Lie-Poisson de $(G,{}_G^A)$. Adems, la proyeccin de $(T^*G, T^*{}_G^A)$ con su estructura cannica (no degenerada) de supervariedad de Poisson sobre $(g_0^*,{}_1^A)$ es una aplicacin de Poisson.

Aplicacin supermomento y reduccin de supervariedades de Poisson

La aplicacin supermomento asociada a la accin de Poisson de un supergrupo de Lie $(G,{}_G^A)$ sobre una supervariedad de Poisson proyectable (por ejemplo, no degenerada, o proveniente de una estructura supersimplctica) $(P,{}_P^A, \{\cdot,\cdot\})$, con aplicacin supercomomento $\hat{J} : g \to{}_P^A$, se define como un morfismo de supervariedades diferenciables $J : (P,{}_P^A) \to (g_0^*,{}_1^A)$, donde $(g_0^*,{}_1^A)$ es la supervariedad de Lie-Poisson del supergrupo de Lie $(G,{}_G^A)$. El morfismo J induce automticamente una aplicacin diferenciable $J_0 : P \to g_0^*$, que es la aplicacin momento de la accin de Poisson del grupo de Lie G sobre la variedad de Poisson P. Adems, J acta sobre los generadores impares como

$$J^*(\xi) = \hat{J}_\xi. \tag{3.33}$$

Por la propia definicin resulta obvio que la aplicacin supermomento es una aplicacin de Poisson.

Antes de pasar al anlisis de la teora de reduccin veamos un ltimo concepto. Se define la superrbita coadjunta $({}_\mu^O,{}_\mu^A)$ como la supervariedad simplctica con variedad base la rbita coadjunta ${}_\mu^O$ del grupo de Lie G que pasa por el punto μ, y el haz ${}_\mu^A$ dado por $\Gamma(\Lambda g_1)/\Gamma(\Lambda g_{\mu_1})$, donde g_μ es la sublgebra de Lie graduada de isotropa del punto μ, es decir,

$$g_\mu = \{\xi \in g \ \mid \ ad_\xi^*\mu = 0\} \ , \tag{3.34}$$

y $g_\mu = g_{\mu_0} \oplus g_{\mu_1}$, donde $g_{\mu_i} = g_\mu \cap g_i$, $i = 0, 1$.

Ya estamos en condiciones de estudiar la teora de reduccin. Bajo las condiciones de regularidad usuales para la aplicacin momento J_0, el teorema de reduccin para supervariedades de Poisson consta de dos pasos, anlogos a los que se llevan a cabo en el teorema de reduccin no graduado para variedades de Poisson [Ma86c]. En primer lugar, se elige una superrbita coadjunta $({}_\mu^O,{}_\mu^A)$ del supergrupo de Lie $(G,{}_G^A)$, y se define la supervariedad $J^{-1}({}_\mu^O,{}_\mu^A)$. El segundo paso consiste en tomar el cociente de esta ltima supervariedad bajo la accin del supergrupo $(G,{}_G^A)$. Vemoslo ms detalladamente.

La supervariedad $J^{-1}({}^{O}_{\mu},{}^{A}_{\mu})$ se define como $(J_0^{-1}({}^{O}_{\mu}),{}^{A}_{J})$, supervariedad con base $J_0^{-1}({}^{O}_{\mu})$ y haz de superfunciones ${}^{A}_{J}$ dado por ${}^{A}_{P}/{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)$, y ${}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)$ denota el ideal generado por la imagen de g_μ en ${}^{A}_{P}$ bajo la aplicacin supercomomento $\hat{J}$. Esto es, para cada $U\in P$, ${}^{A}_{J}(U)={}^{A}_{P}(U)/{}^{A}_{P}(U)\cdot\hat{J}(g_\mu)$ donde ${}^{A}_{P}(U)\cdot\hat{J}(g_\mu)=\{\sum_i f_i\cdot\hat{J}_{\xi_i}|f_i\in{}^{A}_{P}(U),\ \xi_i\in g_\mu\}$. Ntese que $(J_0^{-1}({}^{O}_{\mu}),{}^{A}_{J})$ es una subvariedad graduada de $(P,{}^{A}_{P})$, con la inclusin $i_\mu:(J_0^{-1}({}^{O}_{\mu}),{}^{A}_{J})\to(P,{}^{A}_{P})$ dada por la inclusin natural de $J_0^{-1}({}^{O}_{\mu})$ en P y $i_\mu^*(F)=F+{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)$, para toda superfuncin $F\in{}^{A}_{P}$. La supervariedad cociente $(P_\mu,{}^{F}_{\mu})$ se define simplemente como la supervariedad con variedad base $P_\mu=J_0^{-1}({}^{O}_{\mu})/G$ y haz estructural ${}^{F}_{\mu}=\{f\in{}^{A}_{J}\ \mid\ \xi_{{}^{A}_{P}}(f)=0,\forall\xi\in g\}$.

Estamos ya en condiciones de establecer el resultado central de este apartado, que por su importancia recogeremos en un teorema.

(Teorema de superreduccin[Ca90a]). La supervariedad cociente $(P,{}^{F}_{\mu})$ hereda una estructura de supervariedad de Poisson, con superparntesis de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_\mu$, de forma que

$$\pi_\mu^*\{f,g\}_\mu=i_\mu^*\{F,G\}$$

donde $f,g\in{}^{F}_{\mu}$, $\pi_\mu:J^{-1}({}^{O}_{\mu},{}^{A}_{\mu})\to(P_\mu,{}^{F}_{\mu})$ es la proyeccin, y F, G son extensiones arbitrarias al haz ${}^{A}_{P}$ de las superfunciones π_μ^*f, π_μ^*g.

Dem.- Definamos el superparntesis de Poisson.

Sean f y g dos superfunciones arbitrarias de ${}^{F}_{\mu}$, y F, G dos extensiones de dichas superfunciones al haz ${}^{A}_{P}$. Definimos entonces el superparntesis de Poisson $\{\cdot,\cdot\}_\mu$ como

$$\{f,g\}_\mu=i_\mu^*\{F,G\}.$$

Debemos probar que $\{\cdot,\cdot\}_\mu$ est bien definido.

Ntese en primer lugar que para funciones ordinarias sobre P_μ esta definicin coincide con la dada para el parntesis de Poisson en el teorema de reduccin de variedades de Poisson.

Sean ahora F y G dos extensiones arbitrarias de las superfunciones invariantes f y g, respectivamente. Entonces resulta que $\pi_\mu^*f=F+{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)$, y $\pi_\mu^*g=G+{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)$.

Por tanto,

$$\{F+{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu),G+{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)\}=\{F,G\}+$$
$$+\{F,{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)\}+\{{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu),G\}+{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)$$

Debido a la invariancia de π_μ^*f, $\xi_{{}^{A}_{P}}(F)\in{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu)$, para todo $\xi\in g$, luego

$$\{F,\hat{J}(g_\mu)\}\subset{}^{A}_{P}\cdot\hat{J}(g_\mu),$$

de lo cual se sigue que

$$\{F,_P^A \cdot \hat{J}(g_\mu)\} = \{F,_P^A\} \cdot \hat{J}(g_\mu) +_P^A \cdot \{F, \hat{J}(g_\mu)\} \subset_P^A \cdot \hat{J}(g_\mu),$$

obtenindose finalmente

$$\{F +_P^A \cdot \hat{J}(g_\mu), G +_P^A \cdot \hat{J}(g_\mu)\} = \{F, G\} +_P^A \cdot \hat{J}(g_\mu).$$

Para terminar, es fcil comprobar que $\{F, G\} +_P^A \cdot \hat{J}(g_\mu)$ define una superfuncin invariante de $_J^A$, y de las propiedades del parntesis $\{\cdot, \cdot\}$ se concluye que el superparntesis $\{\cdot, \cdot\}_\mu$ satisface la regla de Leibnitz.

La supervariedad de Poisson cociente $(P_\mu,_\mu^F, \{\cdot, \cdot\}_\mu)$ la llamaremos la supervariedad de Poisson reducida de la rbita $_\mu^O$.

Part II

APLICACIONES

Chapter 4

Superlagrangianos degenerados y reduccin

4.1 Introduccin

En los captulos anteriores han sido establecidos los fundamentos de la supermecnica, tanto desde un punto de vista Lagrangiano como Hamiltoniano, en analoga con el caso ordinario. Si bien han aparecido ya algunos ejemplos asociados con superlagrangianos singulares, y hemos mencionado la existencia de superpartculas supersimtricas cuya dinmica viene determinada por superlagrangianos degenerados, no nos hemos preocupado en general de los problemas que surgen cuando tratamos sistemas de este tipo. As, en el estudio que hemos llevado a cabo, hemos asumido que los superlagrangianos que tratbamos eran regulares. Sin embargo, es muy comn encontrar en Fsica sistemas con ligaduras, que aparecen, por ejemplo, en teoras gauge. Este captulo va a estar dedicado al anlisis de superlagrangianos singulares. A tal efecto, revisaremos primero la situacin en el caso no graduado, para adentrarnos a continuacin en la extensin graduada de estos resultados.

La organizacin de este captulo es la siguiente. Primero estudiaremos la teora de Lagrangianos singulares (no graduados). Si bien en esta monografa estamos interesados fundamentalmente en superlagrangianos independientes del tiempo, en esta seccin trataremos con lagrangianos singulares dependientes del tiempo. En general, aunque existen diferencias en el tratamiento geomtrico de Lagrangianos dependientes e independientes del tiempo, las ideas son semejantes, y los resultados paralelos. As, obtendremos una clasificacin para el caso de Lagrangianos con slo ligaduras primarias, estudiaremos el problema inverso para sistemas de ecuaciones mixtas de primer y segundo orden, tanto en el caso autnomo como en el no autnomo, para terminar haciendo algunos comentarios sobre lagrangianos con ligaduras de orden superior, y el algoritmo de ligaduras. En la siguiente seccin, entraremos ya de lleno en el estudio de superlagrangianos degenerados (independientes del tiempo). Veremos en primer lugar que en este contexto surge un nuevo tipo de degeneracin, y estudiaremos sus implicaciones. Trataremos entonces el problema de la reduccin de superlagrangianos degenerados que admitan una dinmica global, y terminaremos con la generalizacin del algoritmo de ligaduras en supermecnica. Finalizaremos, por supuesto, discutiendo algunos ejemplos interesantes que ilustren la importancia de los tpicos estudiados a lo largo de este captulo.

4.2 Lagrangianos degenerados y reduccin de lagrangianos ordinarios

Como ya hemos sealado anteriormente, nuestro punto de partida para el estudio de sistemas degenerados va a ser el repaso de lo que ocurre en la situacin no graduada. En general, tanto en el caso de lagrangianos dependientes como independientes del tiempo, pueden ocurrir dos cosas: o que exista una dinmica global sobre todo el espacio de fases, o que no suceda as, apareciendo una serie de ligaduras secundarias que restringirn el movimiento a subespacios ms pequeos. Nosotros empezaremos estudiando la reduccin en el primer caso, y daremos al final algunas ideas sobre qu se suele hacer en el segundo, con la vista puesta en la extensin de estos resultados a la supermecnica.

El anlisis de la reduccin de lagrangianos degenerados independientes del tiempo se puede encontrar con todo detalle en la referencia [Ca86]. Para un estudio de la teora de ligaduras, con el conocido como algoritmo de ligaduras, est el trabajo pionero de P. A. M. Dirac [Di64], as como la revisin geomtrica debida a Gotay y Nester [Go80]. El caso dependiente del tiempo se puede encontrar estudiado, por ejemplo, en diversos trabajos de M. de Len, y en este captulo nos basaremos fundamentalmente en las referencias [Ib92a], [Ib91] para el problema inverso.

4.2.1 Lagrangianos que admiten una dinmica global

El esquema a seguir en este apartado es el siguiente. Primero definiremos el espacio de evolucin de sistemas dependientes del tiempo, y algunas estructuras geomtricas relevantes sobre l. A continuacin veremos cul es la ecuacin dinmica con la que tendremos que trabajar. Atendiendo al ncleo de la 2-forma de Cartan que construyamos, daremos una clasificacin de lagrangianos. Por ltimo, entraremos en la discusin sobre la reduccin de lagrangianos degenerados.

Espacio de evolucin y estructuras geomtricas naturales

El espacio de evolucin para sistemas mecnicos dependientes del tiempo es el primer fibrado de jets de las aplicaciones diferenciables de en Q (donde Q es el espacio de configuraciones de un sistema dinmico con coordenadas locales q^i, $i = 1, \ldots, m$), denotado por $J^1(, Q)$. Como es bien conocido, existe un isomorfismo cannico entre $J^1(, Q)$ y $TQ\times$. Las coordenadas locales en el espacio de evolucin son simplemente $t, q^i, \dot{q}^i$. Por tanto, en todo lo que sigue, cuando nos refiramos al espacio de evolucin, escribiremos $TQ\times$.

Sea $\tilde{\tau}_Q : TQ\times \to Q\times$ la proyeccin inducida por la proyeccin cannica $\tau_Q\colon TM \to Q$ y la identidad sobre . Entonces $J^1(, Q)$ resulta ser de esta forma un fibrado vectorial sobre $Q\times$ con proyeccin $\tilde{\tau}_Q$ y fibras los espacios tangentes T_qQ. Definimos el fibrado vertical $V(TQ\times)$ como el subfibrado $\ker \tilde{\tau}_Q^\star$ de $T(TQ\times)$, es decir, el conjunto de vectores $V \in T(TQ\times)$ tales que $\tilde{\tau}_{Q\star}(V) = 0$. Localmente, un campo vertical tiene la expresin $V = V^i(q, \dot{q}, t)/\dot{q}^i$.

Hay diversas estructuras geomtricas sobre el espacio de evolucin, algunas de ellas naturales en $TQ\times$, y otras asociadas a una funcin dada L. La mayora estn ligadas a la estructura cannica casi tangente integrable sobre TQ, el endomorfismo vertical S, que viene totalmente caracterizado por las propiedades de ser un campo tensorial de tipo $(1,1)$ sobre TQ tal que $\ker S = S$ y cuyo tensor de Nijenhuis N_S se anula. El otro ingrediente geomtrico de TQ es el campo de Liouville Δ. Puede demostrarse que en un cierto sentido S y Δ son las estructuras geomtricas ms importantes sobre TQ, desde el momento en que, bajo ciertas condiciones tcnicas, caracterizan totalmente el fibrado tangente TQ (ver [Cr85] y [DeF89]).

Por otra parte, en $TQ\times$ existe, aparte del campo de Liouville Δ, un tensor cannico de tipo $(1,1)$ dado por (ver [Cr84] para ms detalles sobre la geometra de $J^1(, Q)$)

$$\tilde{S} = S - \Delta \otimes dt. \tag{4.1}$$

Podemos observar que rank$\tilde{S} = m$, $\tilde{S}^2 = 0$, pero no es integrable, $N_{\tilde{S}} = -S \otimes dt \neq 0$. Localmente, utilizando una familia de 1-formas de contacto locales $\theta^i = dq^i - \dot{q}^i dt$, podemos escribir $\tilde{S} = /\dot{q}^i \otimes \theta^i$.

De manera alternativa, puede introducirse una estructura diferente, una estructura casi s-tangente [Ou83]. Esta se define como un triplete $(\bar{S}, \tau, \gamma)$ sobre una variedad M de dimensin $(2m+1)$, donde $\bar{S}$ es un campo tensorial de tipo $(1,1)$, τ es una 1-forma y γ un campo vectorial en M de forma que: (i) $i_\gamma \tau = 1$; (ii) $\bar{S}^2 = \gamma \otimes \tau$; y (iii) rank $\bar{S} = m + 1$. Una estructura casi s-tangente se dice que es integrable si $N_{\bar{S}} = 0$ y τ es cerrada. Es evidente que el triplete $(\bar{S}, dt, \frac{}{t})$ con

$$\bar{S} = S + \frac{}{t} \otimes dt \tag{4.2}$$

define una estructura casi s-tangente sobre $TQ\times$. Tambin es posible demostrar que una estructura casi s-tangente integrable caracteriza $TQ\times$ [deL91b].

Hay varias definiciones invariantes de ecuacin diferencial de segundo orden en el espacio de evolucin. Un campo vectorial Γ en $TQ\times$ se dice que es una ecuacin diferencial de segundo orden (SODE) si $S(\Gamma) = \Delta$ y $i_\Gamma dt = 1$. Claramente, la expresin local para una SODE es

$$\Gamma = \frac{}{t} + \dot{q}^i \frac{}{q^i} + f^j \frac{}{\dot{q}^j} \tag{4.3}$$

de lo cual vemos que Γ es una SODE si y slo si $\tilde{S}(\Gamma) = 0$ y $S(\Gamma) = \Delta$.

Podemos recoger toda la informacin sobre la estructura del ncleo y la imagen de los diversos tensores de tipo (1,1) $S, \tilde{S}$ y $\bar{S}$ que acabamos de definir como sigue:

i.- $\ker S = V(TQ\times) \oplus T$.
ii.- $S = V(TQ\times)$.
iii.- $\ker \bar{S} = V(TQ\times)$.
iv.- $\bar{S} = V(TQ\times) \oplus T$.
v.- $\tilde{S} = V(TQ\times)$.
vi.- $\tilde{S} = 0$ sobre los campos verticales y las SODEs.

Sistemas Lagrangianos

Sea $L : TQ\times \to$ una funcin diferenciable. La 1-forma de Cartan asociada con L es

$$\Theta_L = Ldt + dL \circ \tilde{S} \tag{4.4}$$

y la 2-forma de Cartan es la diferencial exterior de Θ_L, $\Omega_L = d\Theta_L$. La 2-forma Ω_L junto con dt pueden definir en algunas ocasiones una estructura cosimplctica [Li87] sobre el espacio de evolucin $TQ\times$. De hecho, una estructura cosimplctica sobre una variedad M de dimensin $(2m+1)$ es un triplete (M, Ω, η), donde Ω es una 2-forma cerrada, η es una 1-forma cerrada y $\Omega^m \wedge \eta \neq 0$. En particular, ntese que $\Omega^m \wedge \eta$ define una forma de volumen sobre M, y que Ω es necesariamente de rango maximal $2m$. Como consecuencia de ello, existe un nico campo vectorial Γ sobre Q tal que $i_\Gamma \Omega = 0$ y $i_\Gamma \eta = 1$, llamado el campo de Reeb de la estructura cosimplctica. Es posible debilitar la condicin de rango maximal de una estructura cosimplctica y definir una estructura precosimplctica sobre M como un triplete (M, Ω, η) donde Ω es una 2-forma cerrada, η es una 1-forma cerrada sobre Q y $\Omega^r \wedge \eta \neq 0$, $\Omega^{r+1} = 0$. Por tanto, Ω tiene rango constante $2r$ $(r < m)$. Claramente la distribucin $\ker \Omega \cap \ker \eta$ es involutiva.

Si Ω_L es de rango maximal $2m$, diremos que L es un lagrangiano regular, y entonces (Ω_L, dt) define una estructura cosimplctica sobre $TQ\times$, por lo que existir un nico campo vectorial Γ sobre $TQ\times$ tal que

$$i_\Gamma \Omega_L = 0, \qquad i_\Gamma dt = 1. \tag{4.5}$$

El campo Γ se conoce como campo vectorial de Euler-Lagrange de L, y puede demostrarse que es una SODE; adems, sus curvas integrales son las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\dot{q}^i}\right) - \frac{L}{q^i} = 0 \; ; \qquad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt} \; , \qquad 1 \leq i \leq m.$$

La situacin interesante para nuestros propsitos surge cuando Ω_L no es de rango maximal. En tales circunstancias aparecern problemas tanto de unicidad de las soluciones como de globalidad de su existencia. Con objeto de evitar tanto como nos sea posible algunas de las dificultades tcnicas con que podemos encontrarnos al estudiar la existencia global de campos vectoriales que satisfagan (4.63), asumiremos ciertas restricciones, que pasamos a describir inmediatamente.

Clasificacin de lagrangianos

La idea central que nos guiar para clasificar lagrangianos viene dada porque existe una relacin entre las dimensiones del ncleo de la estructura precosimplctica y su parte vertical. Para evitar las dificultades que surgen al considerar espacios cocientes (pues reducir es cocientar bajo una cierta distribucin) asumiremos que el par (Ω_L, dt) define una estructura precosimplctica sobre $TQ\times$. En tal caso sabemos que la distribucin K dada por $\ker \Omega_L \cap \ker dt$ es involutiva. Esta distribucin ser la *distribucin gauge* del lagrangiano degenerado L. Adems, tambin requeriremos que la foliacin definida por la distribucin gauge K sea una fibracin. Esto implica que el espacio cociente $TQ \times /K$ admite una estructura de variedad, y la proyeccin $\pi\colon TQ\times \to TQ \times /K$ es una submersin suprayectiva. Finalmente, puede demostrarse que si (Ω_L, dt) es precosimplctica L admite una dinmica global (ver [deL91a] para una demostracin de este hecho), es decir, existe al menos un campo vectorial X que satisface las ecuaciones (4.63).

Resumiendo, asumiremos que el lagrangiano L es tal que se cumplan las siguientes condiciones tcnicas:

(A1) (Ω_L, dt) is precosimplctica.

(A2) La foliacin definida por K es una fibracin.

Observemos que si Γ es una solucin particular de las ecuaciones dinmicas, la solucin general vendr dada por $\tilde{\Gamma} = \Gamma + X$, donde X es un campo vectorial en K. Sin embargo, en general no va a haber una solucin $\tilde{\Gamma}$ de las ecuaciones dinmicas (4.63) que sea una SODE. Esto tan slo ocurrir para un tipo especial de Lagrangianos (los tipo II), que caracterizaremos en lo que sigue.

Damos a continuacin una serie de resultados que utilizaremos en la clasificacin:

- Si $L : TQ\times \to$ es un lagrangiano, entonces

$$i_{\tilde{S}}\Omega_L = 0. \tag{4.6}$$

- Por el contrario, en general $i_S\Omega_L \neq 0$ y $i_{\bar{S}}\Omega_L \neq 0$.

-
$$\tilde{S}(\ker \Omega_L) \subset \ker \Omega_L \cap V(TQ\times). \tag{4.7}$$

-
$$S\mid_{\ker dt} = \tilde{S}\mid_{\ker dt} = \bar{S}\mid_{\ker dt}. \tag{4.8}$$

- Sea L un lagrangiano y K su distribucin gauge. Entonces
$$S(K) = \tilde{S}(K) = \bar{S}(K) \subset K. \tag{4.9}$$

- Bajo las condiciones anteriores,
$$\ker(\tilde{S}\mid_K) = K \cap V(TQ\times) \tag{4.10}$$

A partir de todas estas propiedades podemos deducir el siguiente resultado:

Si L es una funcin lagrangiana y denotamos por $V(K)$ la parte vertical de su distribucin gauge K, $V(K) = K \cap V(TQ\times)$, entonces
$$\dim V(K) \leq \dim K \leq 2 \dim V(K). \tag{4.11}$$

Para ver los detalles de todas estas demostraciones, consultar, por ejemplo, [Ib92a].

Utilizando esta propiedad podemos distinguir ya tres tipos de lagrangianos diferentes:

1. Tipo I: si $\dim K = \dim V(K) = 0$;
2. Tipo II: si $\dim K = 2 \dim V(K) \neq 0$;
3. Tipo III: si $\dim K < 2 \dim V(K)$.

Los lagrangianos de tipo I son los que hemos llamado lagrangianos regulares. Por otra parte, los lagrangianos tipo II, tambin llamados a veces casi regulares, tienen propiedades muy interesantes desde el punto de vista de la reduccin, como veremos enseguida.

Hay otra caracterizacin equivalente de los diferentes tipos de lagrangianos, a saber:

1. Tipo I (Lagrangianos regulares): $\dim \ker \Omega_L = 1$ y $\dim V(\ker \Omega_L) = 0$;
2. Tipo II: si $\dim \ker \Omega_L = 2 \dim V(\ker \Omega_L) + 1 \neq 1$;
3. Tipo III: si $\dim \ker \Omega_L < 2 \dim V(\ker \Omega_L) + 1$.

4.2.2 Reduccin de sistemas Lagrangianos no autnomos

Si L es un lagrangiano con distribucin gauge K, el programa de reduccin que vamos a desarrollar consiste en estudiar la estructura del espacio cociente $TQ \times /K$. K se identifica con los grados de libertad gauge del sistema asociados al Lagrangiano, y en consecuencia deberan ser eliminados. Basndonos en este argumento fsico, observemos que si (Ω_L, dt) define una estructura precosimplctica sobre $TQ\times$, entonces es un hecho bien conocido que el espacio cociente $TQ \times /K$ hereda una estructura cosimplctica (Ω, η), y por tanto un campo vectorial dinmico, su campo de Reeb. Ambas formas, tanto Ω_L como dt, son proyectables a lo largo de K, pues Ω_L satisface que ${}^L_Z\Omega_L = 0$, $i_Z\Omega_L = 0$ para todo $Z \in K$; y $i_Z dt = 0$ (y por tanto ${}^L_Z dt = 0$) para todo $Z \in K$. Tambin, cualquier campo vectorial X tal que $i_X\Omega_L = 0$, $i_X dt = 1$ proyecta sobre $TQ \times /K$. Vemoslo:

$$i_{[X,Z]}\Omega_L =^L_X i_Z\Omega_L - i_Z({}^L_X\Omega_L) = 0 \ , \quad \forall Z \in \ker \Omega_L$$

implica que $[X, Z] \in \ker \Omega_L \ , \ \forall Z \in \ker \Omega_L$. Adems, $[X, Z] \in \ker dt \ , \ \forall Z \in \ker dt$, dado que $dt([X, Z]) = 0$. As pues, $[X, Z] \in K \ , \ \ \forall Z \in K$. Y entonces el campo de Reeb Γ sobre $TQ \times /K$ ser solucin de las ecuaciones dinmicas

$$i_\Gamma\Omega = 0, \qquad i_\Gamma\eta = 1, \tag{4.12}$$

y $\pi^*\Omega = \Omega_L$, $\pi^*\eta = dt$ por construccin. La nocin de sistema Lagrangiano presupone, adems, la existencia de una estructura casi s-tangente integrable en $TQ \times /K$, o los anlogos de los objetos geomtricos $\tilde{S}$ y Δ. Por tanto, si queremos obtener como producto final del proceso de reduccin un sistema lagrangiano regular, debemos encontrar bajo qu circunstancias los tensores en cuestin son proyectables, y dotan al espacio reducido de las correspondientes estructuras, es decir, habra que probar, por ejemplo, que el triplete $(\bar{S}, dt, {}_{\bar{t}})$ proyecte en $TQ \times /K$, de forma que su proyeccin defina una estructura casi s-tangente integrable sobre $TQ \times /K$.

Las condiciones de proyectabilidad bajo una distribucin integrable para formas y campos vectoriales son bien conocidas y las acabamos de utilizar. Las condiciones de proyectabilidad para campos tensoriales de tipo (1,1) pueden establecerse como sigue. Sea D una distribucin integrable sobre una variedad M tal que la foliacin definida por D sea una fibracin, con M/D el espacio de hojas. Un campo tensorial R de tipo (1,1) en M proyecta sobre M/D si y slo si $R(D) \subset D$ y $({}^L_Z R) \subset D$, $\forall Z \in D$ (la demostracin de este hecho puede encontrarse en [Ca86]). Aplicando estas condiciones a nuestro caso particular obtenemos lo siguiente.

Sea L un lagrangiano degenerado sobre $TQ\times$. Entonces:

i. $\bar{S}$ proyecta sobre $TQ \times /K$ si y slo si $({}^L_Z\bar{S}) \subset K$, $\forall Z \in K$.

ii. ${}_{\bar{t}}$ proyecta sobre $TQ \times /K$ si y slo si $[{}_{\bar{t}}, Z] \in K$, $\forall Z \in K$.

iii. Si $\bar{S}$ y ${}_{\bar{t}}$ son proyectables, entonces S tambin lo es.

Tambin, puede demostrarse que si existe una SODE Γ tal que $i_\Gamma \Omega_L = 0$, $i_\Gamma dt = 1$ y S es proyectable, entonces tanto el campo de Liouville Δ de $TQ\times$ como $\tilde{S}$ son proyectables.

A continuacin, vamos a estudiar concretamente diversos tipos de lagrangianos degenerados, con idea de extender posteriormente estas nociones al caso graduado. En primer lugar, veremos qu propiedades caracterizan a los de tipo II, y que los hacen tan interesantes.

Lagrangianos tipo II

Incluso si un lagrangiano degenerado L es tal que las estructuras geomtricas relevantes proyecten, puede ocurrir (y ser lo ms normal) que la estructura cociente $(\bar{F}, \tau, T)$, donde $\bar{F}$ y T son las proyecciones de $\bar{S}$ y $_{\bar{t}}$ respectivamente, no sea una estructura casi s-tangente integrable en $TQ \times /K$. Podra ocurrir que el rango del tensor $\bar{F}$ no fuese el adecuado. La siguiente proposicin muestra que los Lagrangianos de tipo II son los nicos susceptibles de dar estructuras integrables casi s-tangentes al proyectar sobre el espacio cociente.

Sea L un lagrangiano degenerado tal que los tensores $\bar{S}$ and $/t$ son proyectables bajo K. Entonces si los tensores proyectados definen una estructura casi s-tangente integrable, L debe ser de tipo II.

Para proyectar globalmente el lagrangiano hace falta sin embargo algo ms. Supongamos que, efectivamente, la estructura casi s-tangente integrable en $TQ\times$ es proyectable. Entonces existir un lagrangiano local $\tilde{L}_U : U \subset TQ \times /K \to$ que definir localmente la estructura lagrangiana de la SODE Γ del sistema cosimplctico Hamiltoniano sobre el cociente (4.12); pero L y L_U (donde $L_U = \tilde{L}_U \circ \pi$) sern equivalentes gauge, esto es, existir una 1-forma cerrada α_U sobre $\tilde{\tau}_Q(\pi^{-1}(U)) \subset Q\times$ tal que $L = \tilde{L}_U + \hat{\alpha}_U$ salvo constantes. Esta familia de 1-formas α_U define una obstruccin a la existencia de un Lagrangiano proyectable globalmente definido $\tilde{L}$ en $TQ \times /K$ que tenga como dinmica asociada las ecuaciones del movimiento proyectadas (4.12).

Finalmente, veamos una de las propiedades ms importantes de los lagrangianos de tipo II:

Si L es un lagrangiano de tipo II, entonces existe una SODE proyectable Γ tal que $i_\Gamma \Omega_L = 0$, $i_\Gamma dt = 1$.

Lagrangianos completamente degenerados

Debido a la desigualdad $\dim V(K) \leq \dim K \leq 2 \dim V(K)$, el caso ms degenerado aparecer cuando el lagrangiano sea tal que $\dim K = \dim V(K)$, esto es, cuando $\ker \Omega_L$ conste solamente del campo vectorial solucin de las ecuaciones dinmicas y campos verticales. Los lagrangianos con estas caractersticas sern llamados lagrangianos completamente degenerados, y nos resultarn de particular inters cuando estudiemos el problema inverso de la mecnica para ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas.

Sea L entonces un lagrangiano tal que $\dim V(K) = \dim K$. Entonces necesariamente $K = V(K)$ es una distribucin integrable consistente exclusivamente de campos verticales.

Un modelo para este tipo de lagrangianos es el siguiente. Tmese como espacio de configuraciones el producto cartesiano $M \times N \times$, con x^i las coordenadas locales de M y z^α las coordenadas locales de N. Consideremos la funcin lagrangiana

$$L = L_0(x, \dot{x}; z, t) + A_\alpha(x, \dot{x}; z, t)\dot{z}^\alpha. \tag{4.13}$$

La 1-forma de Cartan es,

$$\Theta_L = \left(\frac{L_0}{\dot{x}^i} + \dot{z}^\alpha \frac{A_\alpha}{\dot{x}^i}\right) dx^i + A_\alpha dz^\alpha + \left(L_0 - \dot{x}^i \frac{L_0}{\dot{x}^i} - \dot{x}^i \dot{z}^\alpha \frac{A_\alpha}{\dot{x}^i}\right) dt, \tag{4.14}$$

y la 2-forma de Cartan,

$$\begin{aligned}
\Omega_L \;=\; & \left(\frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i\dot{x}^j} + \frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^i\dot{x}^j}\dot{z}^\alpha\right) dx^i \wedge d\dot{x}^j + \left(\frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i x^j} + \frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^i x^j}\dot{z}^\alpha\right) dx^i \wedge dx^j \\
+ \; & \left(\frac{-A_\alpha}{x^i} + \frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i z^\alpha} + \frac{{}^2A_\beta}{\dot{x}^i z^\alpha}\dot{z}^\beta\right) dx^i \wedge dz^\alpha \\
+ \; & \frac{A_\alpha}{\dot{x}^i} dz^\alpha \wedge d\dot{x}^i + \frac{A_\alpha}{\dot{x}^i} dx^i \wedge d\dot{z}^\alpha + F_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta \\
+ \; & \left(-\frac{L}{x^i} + \frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i t} + \frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^i t}\dot{z}^\alpha + \dot{x}^j \frac{{}^2L_0}{x^i\dot{x}^j} + \frac{A_\alpha}{x^i}\dot{z}^\alpha + \dot{x}^j \frac{{}^2A_\alpha}{x^i\dot{x}^j}\right) dx^i \wedge dt \\
+ \; & \left(\dot{x}^j \frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^i\dot{x}^j}\dot{z}^\alpha + \dot{x}^j \frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i\dot{x}^j} + \frac{A_\alpha}{\dot{x}^i}\dot{z}^\alpha\right) d\dot{x}^i \wedge dt \\
+ \; & \left(-\frac{L_0}{z^\alpha} - \frac{A_\alpha}{t} - \dot{x}^i \frac{{}^2A_\beta}{\dot{x}^i z^\alpha}\dot{z}^\beta - \dot{x}^i \frac{{}^2L_0}{z^\alpha\dot{x}^i}\right) dt \wedge dz^\alpha - \dot{x}^i \frac{A_\alpha}{\dot{x}^i} dt \wedge d\dot{z}^\alpha.
\end{aligned}$$

La matriz asociada con Ω_L en la base de 1-formas $(dx^i, d\dot{x}^i; dz^\alpha, d\dot{z}^\alpha; dt)$ es

$$(\Omega_L) = \begin{pmatrix} M & W & R & -T & H \\ -W^t & 0 & T & 0 & K \\ -R^t & -T^t & F & 0 & V \\ T^t & 0 & 0 & 0 & Z \\ -H^t & -K^t & -V^t & -Z^t & 0 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

donde

$$M_{ij} \;=\; \frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i x^j} - \frac{{}^2L_0}{\dot{x}^j x^i} + \left(\frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^i x^j}\dot{z}^\alpha - \frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^j x^i}\dot{z}^\alpha\right) \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
W_{ij} &= \frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i\dot{x}^j} + \frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^i\dot{x}^j}\dot{z}^\alpha && (4.17)\\
R_{i\alpha} &= \frac{-A_\alpha}{x^i} + \frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i z^\alpha} + \frac{{}^2A_\beta}{\dot{x}^i z^\alpha}\dot{z}^\beta && (4.18)\\
T_{i\alpha} &= -\frac{A_\alpha}{\dot{x}^i} && (4.19)\\
F_{\alpha\beta} &= \frac{A_\alpha}{z^\beta} - \frac{A_\beta}{z^\alpha} && (4.20)\\
Z_\alpha &= \dot{x}^i\frac{A_\alpha}{\dot{x}^i} && (4.21)\\
H_i &= -\frac{L}{x^i} + \frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i t} + \frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^i t}\dot{z}^\alpha + \dot{x}^j\frac{{}^2L_0}{x^i\dot{x}^j} + \frac{A_\alpha}{x^i}\dot{z}^\alpha + \dot{x}^j\frac{{}^2A_\alpha}{x^i\dot{x}^j} && (4.22)\\
K_i &= \dot{x}^j\frac{{}^2A_\alpha}{\dot{x}^i\dot{x}^j}\dot{z}^\alpha + \dot{x}^j\frac{{}^2L_0}{\dot{x}^i\dot{x}^j} + \frac{A_\alpha}{\dot{x}^i}\dot{z}^\alpha && (4.23)\\
V_\alpha &= \frac{L_0}{z^\alpha} + \frac{A_\alpha}{t} + \dot{x}^i\frac{{}^2A_\beta}{\dot{x}^i z^\alpha}\dot{z}^\beta + \dot{x}^i\frac{{}^2L_0}{z^\alpha\dot{x}^i}. && (4.24)
\end{aligned}$$

Como ya sabemos, el proceso lgico consiste en reducir el espacio total $T(M\times N)\times$ por los campos verticales de TN para obtener el espacio reducido $TM\times N\times$. Para ello es necesario que los trminos de Ω_L de la forma $d\dot{z}^\alpha\wedge\{otros\ trminos\}$ se anulen. Por tanto, Ω_L ser reducible si y slo si las submatrices T y Z son cero. Ahora bien, por (4.19) y (4.21) es evidente que $T=0$ implica que $Z=0$. As pues, slo necesitamos imponer que $A_\alpha/\dot{x}^i=0$. Proyectando ahora Ω_L sobre $TM\times N\times$ se obtiene la 2-forma $\tilde{\Omega}_L$ con matriz asociada

$$(\tilde{\Omega}_L) = \begin{pmatrix} M & W & R & H\\ -W^t & 0 & 0 & K\\ -R^t & 0 & F & N\\ -H^t & -K^t & -N^t & 0\end{pmatrix} \tag{4.25}$$

que asumiremos es de rango maximal. Ntese que este hecho implica que la dimensin de N debe ser par. Resulta claro que bajo estas circunstancias la distribucin gauge K del lagrangiano

$$L = L_0(x,\dot{x};z,t) + A_\alpha(x;z,t)\dot{z}^\alpha$$

es $K=V(TN)$. Las ecuaciones del movimiento son las soluciones de las ecuaciones dinmicas

$$i_\Gamma\tilde{\Omega}_L = 0\ ,\qquad i_\Gamma dt = 1 \tag{4.26}$$

y escribiendo el campo vectorial Γ en coordenadas locales como

$$\Gamma = \frac{}{t} + \dot{x}^i\frac{}{x^i} + f^i\frac{}{\dot{x}^i} + g^\alpha\frac{}{z^\alpha}$$

obtenemos que las fuerzas generalizadas f^i and g^α vienen dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned}
f &= W^{-1}RF^{-1}(N-R^t\dot{x}) - W^{-1}M\dot{x} - W^{-1}H\\
g &= F^{-1}(R^t\dot{x}-V)
\end{aligned}$$

Es fcil comprobar que si $\bar{S}$ es proyectable, todas las dems estructuras geomtricas relevantes (S, $/t$ y Δ) proyectan para lagrangianos completamente degenerados. En particular, $\bar{S}$ es siempre proyectable si la distribucin K es independiente del tiempo y constante a lo largo de las fibras de $TQ\times$, es decir, la distribucin K puede generarse localmente por una familia de campos vectoriales $Z_1, \ldots Z_k$ tales que si $Z_j = B^i_j/v^i$, entonces $B^i_j/t = B^i_j/v^l = 0$. Puede asimismo demostrarse que estas condiciones son equivalentes a la existencia de una distribucin independiente del tiempo F sobre $Q\times$ tal que $K = F^V$, donde F^V denota el levantamiento vertical de F, es decir, si $X = X^i \overline{q^i} + \tau \bar{t}$ es un campo vectorial de F, entonces $X^V = (X^i - \tau \dot{q}^i)\overline{\dot{q}^i}$. Podemos establecer entonces el siguiente teorema.

Sea L un lagrangiano completamente degenerado tal que K es el levantamiento vertical de una distribucin integrable F sobre Q. Entonces los tensores $\bar{S}$, $\tilde{S}$, S, Δ, $/t$ son todos proyectables sobre $TQ \times /K$, que localmente es de la forma $TM \times N\times$.

Para los detalles sobre la demostracin, ver [Ib92a].

Un tipo particular de lagrangianos tipo III con $\dim V(K) < \dim K$

Para lagrangianos generales de tipo III resulta imposible extraer resultados generales sobre proyectabilidad de los tensores naturales sobre $TQ\times$, como hemos hecho para los dos casos anteriores, a menos que asumamos algunas condiciones especficas sobre la estructura de K. En particular, hay una familia importante de lagrangianos tipo III, para los cuales K es una distribucin s-tangente (ver, por ejemplo, [deL91a] y [Ib92a]).

Una distribucin D sobre $TQ\times$ se dir casi tangente si existen dos distribuciones integrables $E \subset F$ sobre $Q\times$ localmente generadas por familias de campos vectoriales $X_1, \ldots, X_k$ e $Y_1, \ldots, Y_l$ respectivamente tales que D est localmente generada por la familia de campos vectoriales $X_1^{(1)}, \ldots, X_k^{(1)}$; $Y_1^V, \ldots, Y_l^V$, donde $X^{(1)}$ denota la primera extensin del campo vectorial X e Y^V denota el levantamiento vertical de Y. Denotaremos la distribucin casi tangente D $E^{(1)} \odot F^V$. Resulta claro entonces que si $E = F$, la distribucin D es una distribucin casi s-tangente [deL91a], y si E es independiente del tiempo, D es simplemente TE, siguiendo la notacin de [Ca86]. Es tambin evidente por la definicin anterior que si un lagrangiano degenerado es tal que su distribucin gauge K es casi tangente $K = E^{(1)} \odot F^V$, entonces el lagrangiano L ser proyectable, de tipo III, y con $\dim V(K) = \dim E < \dim F + \dim E = \dim K$. Aplicando entonces el teorema 4.2.2 es fcil probar lo siguiente:

Sea L una funcin lagrangiana tipo III tal que $K = E^{(1)} \odot F^V$ es una distribucin casi tangente e independiente del tiempo. Entonces los campos tensoriales $\bar{S}$, $\tilde{S}$, S, Δ, $/t$ proyectan sobre $TQ \times /K$, que es una variedad diferenciable localmente dada por $TM \times N\times$, donde M es transversa a una hoja de F y N es el cociente por E de una hoja de F.

Veamos un ejemplo de esta situacin. Consideremos lagrangianos lineales en grupos definidos por 1-formas invariantes por la izquierda. Sea G un grupo de Lie con lgebra de Lie g. Podemos identificar el dual g^* del lgebra de Lie g con el espacio de 1-formas invariantes por la izquierda sobre G. En otras palabras, si $\mu \in T^*G$, entonces existe una nica 1-forma invariante por la izquierda α_μ tal que $\alpha_\mu(e) = \mu$, y que viene definida por $\alpha_\mu(g) = L_g^*\mu$. Tomemos la funcin lagrangiana sobre $TG\times$

$$L_{\mu,V}(g,\dot{g},t) = \langle \alpha_\mu(g), \dot{g} \rangle - V(g,t) \tag{4.27}$$

con V una funcin G-invariante sobre $G\times$. Es fcil comprobar que la 1-forma de Cartan $\Theta_{\mu,V}$ de $L_{\mu,V}$ viene dada por

$$\Theta_{\mu,V} = \tau_G^*\alpha_\mu - V dt \tag{4.28}$$

y la 2-forma de Cartan $\Omega_{\mu,V} = d\Theta_{\mu,V}$ tiene la expresin

$$\Omega_{\mu,V} = \tau_G^* d\alpha_\mu - dV \wedge dt. \tag{4.29}$$

En estas condiciones, la distribucin gauge K de $L_{\mu,V}$ es $g_\mu \odot g$, el espacio cociente $TG \times /K$ es isomorfo a $\overset{O}{\mu}\times$ donde $\overset{O}{\mu}$ denota la rbita coadjunta de G que pasa por el punto μ, y la dinmica reducida es el sistema Hamiltoniano cosimplctico definido por la funcin proyectada V.

Podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Este resultado es la contrapartida Lagrangiana del teorema de Kostant-Kirillov-Souriau y da una descripcin alternativa de las rbitas coadjuntas en trminos de la geometra del fibrado tangente.

2. Si $G_\mu = G$, o lo que es lo mismo, si μ es un 1-cociclo en la cohomologa de Chevalley, entonces L_μ es un lagrangiano equivalente gauge al cero debido a que $d\alpha_\mu = 0$. Lo cual significa que $\Omega_\mu = 0$ y $TG \times /K =$.

3. Un caso particular de este resultado ha sido utilizado recientemente para discutir la cuantificacin y estructura de teoras gauge en rbitas coadjuntas (ver por ejemplo [Al91] y [Gr91]).

4.2.3 Problema inverso para sistemas mixtos de ecuaciones de primer y segundo orden

Como aplicacin del estudio anterior sobre lagrangianos degenerados, vamos a estudiar en este apartado el problema inverso del clculo de variaciones para una clase de sistemas dinmicos acoplados. Mostraremos, tanto para el caso autnomo como para el no autnomo, que puede encontrarse una familia de condiciones necesarias y suficientes que garanticen la existencia de una funcin lagrangiana local para este tipo de sistemas. Veremos primero el caso autnomo, para extender posteriormente los resultados obtenidos a sistemas no autnomos.

Sistemas autnomos

Nuestra intencin es analizar el problema inverso del clculo de variaciones para sistemas dinmicos de la forma

$$\begin{array}{rcll} \ddot{q}^i & = & f^i(q^j, \dot{q}^j; z^\alpha) & \qquad i = 1, \ldots, m \\ \dot{z}^\alpha & = & g^\alpha(q^j, \dot{q}^j; z^\beta) & \qquad \alpha = 1, \ldots, n, \end{array} \tag{4.30}$$

es decir, ecuaciones diferenciales de segundo orden sobre las variables q^i definidas por las fuerzas generalizadas f^i, dependientes de una familia de parmetros z^α que, a su vez, evolucionan sobre el espacio de parmetros de acuerdo con el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden definido por las funciones g^α. En general, la evolucin sobre el espacio de parmetros viene tambin afectada por la SODE debido a que las funciones g^α dependen de las variables $q^i, \dot{q}^i$. As pues, estamos describiendo una familia de sistemas dinmicos acoplados.

Pueden encontrarse ejemplos de este tipo de sistemas en teora de control, como los dados por

$$\begin{array}{rcll} \ddot{q}^i & = & f^i(q^j, \dot{q}^j; z^\alpha) & \qquad i = 1, \ldots, m \\ \dot{z}^\alpha & = & g^\alpha(z^\beta) & \qquad \alpha = 1, \ldots, n, \end{array} \tag{4.31}$$

donde la evolucin de las variables de control z^α no depende de las variables dinmicas q^i.

Pero esta clase de sistemas no slo aparece en teora de control, sino tambin en muchas otras reas. Un caso de particular inters para nosotros aparece en varios de los ejemplos en supermecnica que hemos venido dando a lo largo de este trabajo. As, las ecuaciones del movimiento para una partcula clsica con spin, donde las variables z^α deben entenderse como variables anticonmutantes o Grasmannianas, caen de lleno en este contexto, y tambin el caso ms general de superpartculas con fibrados estructurales arbitrarios.

Antes de empezar el estudio concreto de nuestro problema en cuestin, observemos que no estamos tratando con una SODE, y por tanto no es posible aplicar la geometra usual del clculo de variaciones para lagrangianos no degenerados. La aparicin de ecuaciones de primer orden implica necesariamente que deben buscarse lagrangianos lineales en las correspondientes velocidades generalizadas. Por tanto, en el estudio de la existencia de funciones lagrangianas $L = L(q^i, \dot{q}^i; z^\alpha, \dot{z}^\alpha)$ para (4.30) deberamos tratar con lagrangianos singulares (ms concretamente, lagrangianos de tipo III segn la clasificacin dada en [Ca86] para sistemas autnomos, similar a la obtenida por nosotros), con la esperanza de que las ecuaciones del movimiento resultantes de eliminar los grados de libertad gauge involucrados en la construccin del sistema dinmico asociado a L sea equivalente a (4.30). Ms concretamente, vamos a analizar la existencia de un lagrangiano singular definido sobre todo el espacio de fases de las variables q^i, z^α, tal que el sistema dinmico obtenido despus de la reduccin de L sea equivalente al sistema inicial (4.30).

Previamente a enunciar el resultado del teorema que nos va a dar una respuesta al problema planteado, veamos el contexto global del mismo, y un modelo de funciones lagrangianas que precisamente nos proporcionar los modelos adecuados para estos sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas.

Sea $M \times N$ el espacio de configuraciones para las variables q^i, z^α; es decir, M es una variedad m-dimensional con coordenadas locales (q^i), y N es otra variedad n-dimensional con coordenadas locales (z^α). El espacio de fases de (4.30) es $TM \times N$, donde TM denota el fibrado tangente de la variedad M con $\pi\colon T(M \times N) \to TM \times N$, dada por $\pi(q, \dot{q}; z, \dot{z}) = (q, \dot{q}; z)$. El ncleo de la aplicacin tangente π_* viene caracterizado por los campos verticales a lo largo de las fibras de $TN \to N$, esto es, vectores tangentes de la forma $v^\alpha \partial/\partial \dot{z}^\alpha$.

Hay un tensor natural S de tipo $(1,1)$ sobre $TM \times N$ dado en coordenadas locales por

$$S = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \otimes dq^i. \tag{4.32}$$

Una forma alternativa de definir globalmente S es

$$S_{(q,\dot{q},z)}(X) = i_{z*}(q, \dot{q}) \left(S_{M\,(q,\dot{q})}(\pi_{*(q,\dot{q};z)}(X)) \right) \qquad \forall X \in T_{(q,\dot{q};z)}(TM \times N) \tag{4.33}$$

donde i_z denota la inclusin natural $TM \to TM \times N$ definida por $i_z(q, \dot{q}) = (q, \dot{q}; z)$, y S_M denota el endomorfismo vertical cannico en TM. El campo tensorial S_M tiene exactamente la misma expresin coordenada que (4.32), y podemos pensar de hecho en S como la extensin trivial de S_M al producto cartesiano $TM \times N$. Ntese que S no es una estructura casi tangente sobre $TM \times N$ porque $\mathrm{Im} S$ est estrictamente contenida en $\ker S$. En cualquier caso, puesto que S es integrable, la podemos llamar una estructura pretangente sobre $TM \times N$.

Una preSODE es un campo vectorial Γ sobre $TM \times N$ tal que

$$S(\Gamma) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \tag{4.34}$$

La expresin local de Γ viene dada por

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f^i(q, \dot{q}; z) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + g^\alpha(q, \dot{q}; z) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}. \tag{4.35}$$

Resulta evidente que las curvas integrales del campo vectorial Γ son precisamente las soluciones del sistema de ecuaciones (4.30), y la ecuacin (4.62) proporciona una caracterizacin global para las preSODEs. El par de nmeros (m, n) lo llamaremos la dimensin de la preSODE. Ntese que los casos particulares $(m, 0)$ y $(0, n)$ corresponden a SODEs ordinarias sobre TM y a ecuaciones diferenciales de primer orden, respectivamente.

Una funcin lagrangiana L es una funcin sobre todo el espacio de fases de velocidades $T(M \times N) = TM \times TN$. Un modelo de lagrangiano que da lugar a preSODEs es el anlogo independiente del tiempo de los sistemas Lagrangianos completamente degenerados estudiados anteriormente. Esto es, lagrangianos de la forma

$$L = L_0(q, \dot{q}; z) + A_\alpha(q, \dot{q}; z) \dot{z}^\alpha. \tag{4.36}$$

Por los mismos motivos que en el caso dependiente del tiempo, ser necesario que $A_\alpha / \dot{q}^i = 0$. En el teorema que mostramos a continuacin veremos que no slo un Lagrangiano local con estas caractersticas es un candidato para describir sistemas de ecuaciones diferenciales como los que estamos tratando, sino que de hecho deberan ser de esa forma.

Sea Γ una preSODE sobre $TM \times N$. La condicin necesaria y suficiente para la existencia de un Lagrangiano (local) L sobre $T(M \times N)$ tal que la ecuaciones de Euler-Lagrange reducidas de L sean equivalentes a Γ es que exista una 2-forma ω en $TM \times N$ que satisfaga las siguientes condiciones:

i. ω es cerrada y no degenerada.
ii. ${}^{L}_{\Gamma}\omega = 0$.
iii. $i_S \omega = 0$.

Observaciones:

1. Antes que nada ntese que, a diferencia del teorema (**??**) dado en el primer captulo, hemos incluido la condicin de no degeneracin de la 2-forma ω. El motivo no es otro que el hecho de que en el enunciado nos hemos preguntado por un Lagrangiano cuyas ecuaciones del movimiento reducidas fuesen equivalentes a Γ. Si la cuestin hubiera sido buscar tan slo un lagrangiano que tuviese como solucin esa preSODE (y quizs otras, por qu no?), entonces la condicin de no degeneracin no sera necesaria.

2. Por otra parte, observemos mientras que las condiciones (i) y (ii) son similares las que se establecen en el caso de SODEs ordinarias ([Cr81], [He82a]), sin embargo la tercera condicin es ligeramente diferente. En realidad, sta se suele escribir como $\omega(/\dot{q}^i \wedge /\dot{q}^j) = 0$, para todo i, j. Mientras que la condicin (iii) significa que
$$i_S\omega(X, Y) = \omega(S(X), Y) + \omega(X, S(Y)) = 0$$
para todo par de campos vectoriales X, Y sobre $TM \times N$ y se obtiene automticamente de las otras condiciones para SODEs ordinarias. Sin embargo, en nuestro caso es ms fuerte, y debe ser impuesta desde un principio. Puede demostrarse que, si se considera N como una subvariedad de $TM \times N$ va la inclusin natural $i_{(q,\dot{q})}\colon N \to TM \times N$ definida por $i_{(q,\dot{q})}(z) = (q, \dot{q}; z)$, para todo $z \in N$, N es una subvariedad simplctica de $(TM \times N, \omega)$, y en consecuencia la dimensin de N debe ser par.

Para la demostracin del teorema y de todas las observaciones hechas en el presente apartado, puede verse [Ib92a].

Sistemas no autnomos

Supongamos ahora que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer y segundo orden, como en la seccin anterior, pero con dependencia explcita del tiempo. Entonces nuestro objetivo es buscar un lagrangiano que describa, al menos localmente, el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{aligned} \ddot{q}^i &= f^i(q, \dot{q}; z; t) \qquad i = 1, \cdots, m \\ \dot{z}^\alpha &= g^\alpha(q, \dot{q}; z; t) \qquad \alpha = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{4.37}$$

con n par.

Para ello, supongamos que $M \times N \times$ es el espacio de configuraciones de las variables q^i, z^α, o lo que es lo mismo, M es una variedad m-dimensional con coordenadas locales q^i, y N es una variedad n-dimensional con coordenadas locales z^α. Y por tanto el espacio de fases es $T(M \times N)\times$.

Sobre $TM \times N \times$ existen de manera natural una serie de estructuras geomtricas, que seran las dadas por las proyecciones de las cannicas ya estudiadas sobre $T(M \times N)\times$ tras cocientar por la distribucin integrable generada por $V(N)$. Sus expresiones locales son

$$\bar{S}_M = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \otimes dq^i + \frac{\partial}{\partial t} \otimes dt \tag{4.38}$$

$$\tilde{S}_M = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \otimes dq^i - \Delta_M \otimes dt \tag{4.39}$$

$$S_M = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \otimes dq^i \tag{4.40}$$

donde Δ_M es la proyeccin de Δ.

Volvamos ahora al sistema dinmico acoplado (4.37). Nos preguntamos por la existencia de un lagrangiano local sobre $T(M \times N)\times$ tal que su campo dinmico asociado $\tilde{\Gamma}$ tenga la expresin local

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f^i(q, \dot{q}; z; t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + g^\alpha(q, \dot{q}; z; t) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}. \tag{4.41}$$

De nuevo, un modelo para este tipo de sistemas son los lagrangianos completamente degenerados definidos anteriormente. Y de hecho en la demostracin del prximo resultado, que nos establece las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un lagrangiano (local) tal que la dinmica que describa sea equivalente a la dada por $\tilde{\Gamma}$, se observa que es la expresin local que debera tener tal lagrangiano si existiese (al igual que suceda en el caso autnomo). Establecemos, entonces, sin ms comentarios adicionales, el siguiente teorema, absolutamente anlogo en la demostracin, por otra parte, al que ya hemos citado en el apartado anterior.

Sea $\tilde{\Gamma}$ un campo vectorial sobre $TM \times N\times$ con la expresin local (4.41). La condicin necesaria y suficiente para la existencia de un lagrangiano L (localmente definido) en $T(M \times N)\times$ tal que sus ecuaciones de Euler-Lagrange reducidas sean equivalentes a $\tilde{\Gamma}$ es que exista una 2-forma ω sobre $TM \times N\times$ que satisfaga:

1. ω es cerrada y de rango maximal.
2. $i_\Gamma \omega = 0$.
3. $i_\Gamma dt = 1$
4. $i_{S_M}\omega(X, Y) = 0$ para $X, Y \in T_m(TM \times N)$ con $m \in TM \times N\times$.

4.2.4 Algunos comentarios sobre lagrangianos con ligaduras secundarias

Supongamos que tenemos un lagrangiano, dependiente o independiente del tiempo, tal que su ecuacin dinmica no admite una solucin global. En tal caso se dice que el lagrangiano tiene ligaduras secundarias, terciarias, etc.. Muchas veces se dice simplemente que L tiene ligaduras secundarias. Cul es la naturaleza de estas ligaduras? Si partimos de una ecuacin dinmica del tipo

$$i_\Gamma \Omega_L = dE_L$$

para lagrangianos degenerados independientes del tiempo, o bien de la forma

$$i_\Gamma \Omega_L = 0, \quad i_\Gamma dt = 1$$

para lagrangianos degenerados dependientes explcitamente del tiempo, podemos encontrarnos con los siguientes problemas:

a) Que no exista una campo Γ sobre todo el espacio de evolucin, y que en general slo est definido sobre alguna subvariedad del mismo. Este es precisamente el caso en que no existe dinmica global, y aparecen ligaduras secundarias.

b) Supongamos que P es la subvariedad sobre la que s existe solucin. Entonces Γ no definir en general una ecuacin diferencial sobre P, esto es, Γ puede no ser un campo vectorial sobre P tangente a P.

c) La solucin Γ, incluso en el caso de que exista, puede no ser nica. Para resolver este problema, deberamos proceder como lo hemos hecho en las secciones precedentes.

d) Γ puede ser discontinua, de forma que no tenga un flujo localmente definido.

e) La variedad reducida no ser en general una variedad tangente, o casi tangente, segn el caso que estemos tratando, y Γ una SODE. Este es el que se conoce como problema de la ecuacin diferencial de segundo orden.

Asumiremos en general que la dificultades tcnicas descritas en d) no estarn presentes en los sistemas lagrangianos que estemos estudiando. En este apartado vamos a ver esquemticamente el procedimiento a emplear cuando aparecen ligaduras secundarias, el algoritmo de Gotay-Nester [Go79], sin entrar en el problema de la ecuacin diferencial de segundo orden. Para una revisin ms profunda del algoritmo de ligaduras en el caso autnomo, ver, por ejemplo, [Go79], [Go80]. Sobre el caso no autnomo, pueden consultarse las referencias [deL91a], [deL91b].

Veamos en lneas generales cmo procede el algoritmo de ligaduras. Se toma M_2 como el conjunto de puntos x de TQ o $TQ\times$, segn el caso, tales que la ecuacin dinmica tenga solucin en esos puntos. Suponemos que M_2 es una variedad diferenciable, y la denominamos subvariedad de ligaduras secundarias. Entonces estamos seguros de que en cada punto de M_2 existe al menos un vector tangente al espacio de evolucin que satisface la ecuacin dinmica; pero estos vectores pueden no ser tangentes a M_2, con lo cual la evolucin descrita por ellos no sera compatible con M_2. Esto exige la eliminacin de estos puntos de M_2. Con este fin, definimos M_3 como el conjunto de puntos de M_2 tales que existe un vector $v \in T_x M_2$ que verifica la ecuacin en el punto x. Asumamos que M_3 es una variedad, la subvariedad de ligaduras terciarias. De nuevo, podemos encontrarnos el mismo problema que en M_2, lo cual nos llevara a definir una M_4, y as sucesivamente. Se genera de esta manera un algoritmo, que puede terminar o no. Obviamente, si estamos en dimensin finita, s deber acabar. Al espacio en que el algoritmo se estaciona se le llama subvariedad final de ligaduras. Lgicamente, podra ocurrir que no fuese una subvariedad, pero asumiremos que s lo es. Tambin puede suceder que la subvariedad final de ligaduras sea vaca, o un conjunto discreto de puntos, en cuyo caso diremos que no existe ningn conjunto M compatible con la dinmica. Finalmente, habra que resolver el problema de la ecuacin diferencial de segundo orden, y el de la posible no unicidad de las soluciones.

4.3 Superlagrangianos degenerados

4.3.1 Introduccin. Tipos de degeneracin

Ya en los ejemplos de los captulos anteriores han ido apareciendo situaciones en que los superlagrangianos a considerar eran degenerados, pero existiendo sin embargo una dinmica global. Siguiendo las lneas de la revisin que hemos visto sobre sistemas Lagrangianos degenerados ordinarios, vamos a hacer un estudio general de los superlagrangianos degenerados. Veremos cmo se extienden los resultados de la seccin anterior para superlagrangianos que admitan una dinmica global, as como el algoritmo de ligaduras. No obstante, y como ya se ha sealado en alguna ocasin, no todo va a ser igual que en el caso no graduado. Recordemos que ya habamos comprobado que existe de hecho un nuevo tipo de degeneracin, que surge de manera natural en el estudio de las 2-superformas degeneradas, el cual presentar dificultades adicionales. Vamos a concretar esto algo ms.

Sea L un superlagrangiano sobre la supervariedad tangente (TQ, T_Q^A). Entonces podemos construir su 2-superforma de Cartan Ω_L asociada, que supondremos es degenerada. El ncleo de Ω_L es

$$\ker \Omega_L = \{X \in X(T^A)/\epsilon(\Omega_L(X,Y)) = 0,\ \forall Y \in X(T_Q^A)\}. \tag{4.42}$$

Ntese, antes que nada, que Ω_L ser invertible si y slo si $\ker \Omega_L = 0$, tal y como sera de esperar.

Sobre la estructura de $\ker \Omega_L$, se aprecia que dentro de los supercampos vectoriales del ncleo, hay un conjunto de ellos que satisfacen una propiedad ms fuerte. As, definimos sl ncleo fuerte $\operatorname{sker} \Omega_L$ de Ω_L como los supercampos vectoriales $X_{(s)} \in T_Q^A$ tales que $i_{X_{(s)}} \Omega_L = 0$, esto es,

$$\operatorname{s} \ker \Omega_L = \{X_{(s)} \in T_Q^A / \Omega_L(X_{(s)}, Y) = 0,\ \forall Y \in T_Q^A\}. \tag{4.43}$$

Podemos definir entonces el ncleo dbil $w \ker \Omega_L$ de Ω_L como

$$w \ker \Omega_L = \frac{\ker \Omega_L}{s \ker \Omega_L},$$

donde debe tenerse en cuenta que el cociente se toma de manera formal, no como T_Q^A-mdulos, pues $w\ker\Omega_L$ no es un T_Q^A-mdulo.

La aparicin de estos tipos de ncleo para 2-superformas cerradas y degeneradas es debida a la propia naturaleza de la superlgebra matricial. Recordemos que ya en el captulo 2 (2.76) mostrbamos una 2-superforma cerrada de rango cero, pero no nula. No es lo mismo que existan supercampos vectoriales X tales que cumplan $\Omega_L(X,Y) = 0$ para todo Y, frente a la condicin ms dbil $\epsilon(\Omega_L(X,Y)) = 0$.

El ncleo fuerte presenta una serie de propiedades anlogas a las que se obtenan para sistemas ordinarios. Una de las ms importantes de ellas, y que ser de crucial importancia para nuestros propsitos, es la siguiente.

Sea $(M,{}^{A}_{M})$ una supervariedad, y Ω una 2-superforma cerrada en ella. Entonces el ncleo fuerte de Ω define una distribucin involutiva.

Dem.- Sean $X, Y \in \mathrm{s}\ker\omega$. Entonces sabemos que

$$\Omega(X,Z) = \Omega(Y,Z) = 0,$$

para todo supercampo vectorial Z sobre ${}^{A}_{M}$. Entonces utilizando la igualdad

$$d\Omega(X,Y,Z) = Z\Omega(X,Y)X\Omega(Z,Y)Y\Omega(Z,X)$$

$$\Omega([Z,X],Y)\Omega([Z,Y],X)\Omega([X,Y],Z),$$

donde los signos $+$ o $-$ dependen de la paridad de Ω y los supercampos X, Y, Z, se obtiene que

$$\Omega([X,Y],Z) = 0$$

lo cual implica que $[X,Y] \in \mathrm{sker}\Omega$ y la distribucin es involutiva .

Por el contrario, si tomamos todo el ncleo de Ω, vemos que no define una distribucin involutiva, pues del hecho de que $\epsilon(\Omega(X,Z)) = \epsilon(\Omega(Y,Z)) = 0$ para todo supercampo Y no puede concluirse que $\epsilon(\Omega([X,Y],Z)) = 0$.

Supongamos, no obstante, que s lo fuese. Esto es, sea L un superlagrangiano tal que $\ker\Omega_L$ defina una distribucin involutiva, con Ω_L una 2-superforma presimplctica. Supongamos adems que existe dinmica global, es decir, existe un supercampo $\Gamma \in T^A_M$ tal que

$$i_\Gamma\Omega_L = dE_L. \tag{4.44}$$

Entonces el procedimiento usual en la teora de reduccin es tomar como supervariedad reducida (si existe) el haz de superlgebras $\ker K$ de T^A_M dado por

$$\ker K = \{f \in T^A_M / X(f) = 0,\ \forall X \in \ker\Omega_L\}. \tag{4.45}$$

Sin embargo, no resulta correcto hacer esto en nuestro caso. Ntese que si hubiese algn supercampo Y en el ncleo dbil, esto es, $i_Y\Omega_L \neq 0$ (aunque $\epsilon(\Omega_L(Y,Z)) = 0$ para Z un supercampo vectorial arbitrario), entonces Ω_L no es proyectable. Estamos quitando ms grados de libertad que los necesarios. Si Γ es una solucin de la ecuacin dinmica (4.44), $\Gamma + X$ no tiene por qu ser solucin de dicha ecuacin dinmica. Esto tan slo se puede afirmar si $X \in s\ker\Omega_L$.

Una solucin alternativa, y ms razonable de hecho, sera cocientar exclusivamente por los campos en el ncleo fuerte. Ntese entonces que, de hecho, si un supercampo vectorial $Y_{(w)} \in\ w\ker\Omega_L$, existirn superfunciones $g_{(w)}Y_{(w)}$, con $g_{(w)}$ una superfuncin nilpotente, tales $i_{gY}\Omega_L = 0$. Lo cual muestra claramente la afirmacin anterior de que $w\ker\Omega_L$ tal y como lo hemos definido no es un T_Q^A-mdulo. Parece evidente que los verdaderos grados de libertad gauge deben ser los asociados con los supercampos del ncleo fuerte, mientras que los supercampos del ncleo dbil impondran tan slo una serie de ligaduras algebraicas. En consecuencia, el superespacio reducido con los autnticos grados de libertad debera ser la supervariedad

$$\mathrm{sker}K = \{f \in T_M^A / X(f) = 0 \ , \ \forall X \in \mathrm{sker}\Omega_L\}.$$

Sin embargo, esto tampoco tiene mucho sentido, pues aunque las superfunciones $g_{(w)} \in \mathcal{N}^k$ fuesen tales que los coeficientes de menor orden $g_{(w)k} \in N^k/N^{k+1}$ no se anulasen en ningn punto, es fcil ver que el espacio que acabamos de definir no puede ser una supervariedad (ver [Be87] para una revisin sobre cmo definir subvariedades graduadas de una supervariedad a travs de superfunciones). De hecho, los supercampos vectoriales en el ncleo fuerte de la forma $g_{(w)}Y_{(w)}$, con $Y_{(w)} \in w\ker\Omega_L$ no son regulares. Lo que s podemos garantizar es que si existe una solucin global Γ de (4.44), entonces la solucin general ser del tipo $\Gamma + \lambda^i X_i$, donde $X_i \in \mathrm{sker}\Omega_L$, y λ^i son superfunciones arbitrarias.

En conclusin, podramos decir que los supercampos vectoriales del ncleo fuerte definen unas ligaduras de naturaleza geomtrica, que demostraremos pueden ser eliminadas si satisfacen unas ciertas condiciones de regularidad, siguiendo el camino usual en estos casos. Mientras que, por otra parte, el ncleo dbil estara asociado con unas ligaduras de naturaleza algebraica, pero no se pueden eliminar sin perder la estructura de supervariedad.

Como consecuencia de todo lo anterior, de ahora en adelante asumiremos que slo existe ncleo fuerte en los sitemas dinmicos que estemos considerando. A continuacin estudiaremos la reduccin de superlagrangianos degenerados que admitan una dinmica global y con slo ncleo fuerte; y despus veremos la extensin del algorimo de ligaduras en supermecnica, para el caso en que existan ligaduras secundarias (y slo ncleo fuerte).

4.3.2 Reduccin de superlagrangianos degenerados que admiten una dinmica global

Sea $(Q, {}^A_Q)$ como es habitual el espacio de configuraciones de un sistema dinmico, y tomemos la supervariedad tangente (TQ, T_Q^A). Sea L un superlagrangiano degenerado, y plantemonos la ecuacin dinmica

$$i_\Gamma \Omega_L = dE_L.$$

La 2-superforma de Cartan Ω_L puede tener un ncleo fuerte, que define una distribucin involutiva, y un ncleo dbil. Asumamos que slo existe ncleo fuerte. Asumamos tambin que Ω_L es presimplctica; esto es, tiene rango constante, donde el rango vendr caracterizado por un par de nmeros (r, s), las dimensiones par e impar de la distribucin definida por Ω_L.

Diremos que la 2-superforma Ω_L presimplctica es reducible si:

a) Es de rango constante.

b) No tiene ncleo dbil.

Como ya hemos descrito anteriormente, reducir consiste en cocientar por el ncleo fuerte de la 2-superforma de Cartan. Esto es, en nuestro caso, deberamos tener una aplicacin de proyeccin

$$\pi : (TQ, T_Q^A) \to (TQ, T_Q^A)/\ker \Omega_L. \tag{4.46}$$

Recordemos que, en el caso no graduado, como $\ker \Omega_L$ es una distribucin involutiva, podemos aplicar el teorema de Frobenius para obtener el espacio de hojas $TQ/\ker \omega_L$, que en consecuencia s tiene sentido (aunque quizs no sea una variedad diferenciable). Sin embargo, en la situacin graduada slo disponemos de una extensin del teorema de Frobenius cuando $\ker \Omega_L$ define una distribucin $0-$regular (que incluye exclusivamente supercampos pares) [Gi86]. En consecuencia, tendremos que asumir tambin que $\ker \Omega_L$ define una distribucin para la cual el espacio

$$\ker K = \{f \in T_Q^A / X(f) = 0, \ \forall X \in \ker \Omega_L\}$$

sea susceptible de admitir una estructura de supervariedad.

Resumiendo, de aqu en adelante se asumir que las siguientes propiedades se satisfacen:

(A) La superforma Ω_L es presimplctica y reducible.

(B) Existe una dinmica global.

(C) $(TQ, T_Q^A)/\ker \Omega_L$ admite una estructura de supervariedad.

Una clasificacin de superlagrangianos

En este apartado vamos a comprobar que la clasificacin de lagrangianos singulares que hemos visto en la seccin anterior puede extenderse al caso graduado. Para ello, haremos uso de la siguiente propiedad. Si L es un superlagrangiano sobre (TQ, T_Q^A), en el captulo 1 ya probamos (1.64) que

$$i_S \Omega_L = 0,$$

esto es, si X, Y son dos supercampos vectoriales, $\Omega_L(S(X), Y) + \Omega_L(X, S(Y)) = 0$. As pues, si $X \in \ker \Omega_L$, entonces $\Omega_L(S(X), Y) = 0$, para todo $Y \in X(T_M^A)$. Por tanto, $S(X) \in \ker \Omega_L$, y

$$S(\ker \Omega_L) \subset \ker \Omega_L \cap S. \tag{4.47}$$

Ahora, puesto que $\ker \Omega_L$ define una distribucin involutiva, y tambin S es involutiva, obviamente $V(\ker \Omega_L)$ ser igualmente una distribucin involutiva.

Por otra parte, $V(\ker \Omega_L) = \ker(S\mid_{\ker \Omega_L})$, como es fcil ver, de lo cual obtenemos que

$$\dim(\ker \Omega_L) = \dim S(\ker \Omega_L) + \dim \ker(S\mid_{\ker \Omega_L}) =$$
$$= \dim S(\ker \Omega_L) + \dim V(\ker \Omega_L) \leq 2 \dim V(\ker \Omega_L),$$

donde la dimensin del ncleo de la 2-superforma vendr etiquetada por un par de nmeros (r, s), el primero haciendo referencia a la dimensin par del ncleo, esto es, el nmero de supercampos pares generadores de $\ker \Omega_L$, mientras que s es la dimensin impar del ncleo.

Luego tenemos que

$$\dim V(\ker \Omega_L) \geq \frac{1}{2} \dim(\ker \Omega_L). \tag{4.48}$$

En consecuencia, y en analoga con el caso no graduado, podemos distinguir tres tipos de sistemas superlagrangianos:

- Tipo I: $\dim[\ker \Omega_L] = \dim[V(\ker \Omega_L)] = 0$.
- Tipo II: $\dim[\ker \Omega_L] = 2 \dim[V(\ker \Omega_L)] \neq 0$.
- Tipo III: $\dim[\ker \Omega_L] \leq 2 \dim[V(\ker \Omega_L)]$.

Los superagrangianos de tipo I son los no degenerados, los de tipo II son los que ms se acercan a los regulares, como veremos, mientras que en los de tipo III en el superespacio reducido se pierde toda nocin de supersistema Lagrangiano.

Reduccin de superlagrangianos degenerados

Denotemos por $(M,^A_M)$ la supervariedad obtenida al cocientar (TQ, T^A_Q) por $\ker \Omega_L$, esto es, $(M,^A_M) \cong (TQ, T^A_Q)/\ker \Omega_L$. El objetivo es estudiar bajo qu condiciones este espacio cociente puede ser equipado con una superestructura casi tangente integrable y una estructura supersimplctica de forma que el supercampo Γ proyecte en un sistema Lagrangiano regular graduado respecto de estas estructuras graduadas. Con ese fin, veremos primero cules son las condiciones para la proyectabilidad de supercampos vectoriales, superformas diferenciales y supercampos tensoriales de tipo (1,1).

Proyectabilidad de supercampos vectoriales:

Veamos en primer lugar la proyectabilidad de los supercampos vectoriales. Sea X un supercampo vectorial sobre (TQ, T^A_Q), y sea $\pi : (TQ, T^A_Q) \to (M,^A_M)$ la aplicacin de proyeccin en cuestin. X es proyectable si est $\pi-$relacionado con un supercampo sobre ${}^A_M$, esto es, para $X \in X(T^A_Q)$, existe un $Y \in X({}^A_M)$ tal que

$$X(\pi^\star f) = \pi^\star(Y(f)) \tag{4.49}$$

para toda superfuncin $f \in^A_M (M)$. Diremos entonces que Y es la proyeccin de X bajo π.

Veamos una caracterizacin de este hecho, que nos permita calcular si un supercampo vectorial es proyectable o no. Es fcil demostrar que si $X \in X(T^A_Q)$ es proyectable, entonces $[X, \ker\Omega_L] \subset \ker\Omega_L$. Podemos dar entonces la siguiente definicin:

La distribucin involutiva generada por $\ker\Omega_L$ se dir que es fuertemente regular si todo supercampo vectorial X tal que $[X, \ker\Omega_L] \subset \ker\Omega_L$ es proyectable bajo $\pi : (TQ, T^A_Q) \to (TQ, T^A_Q)/\ker\Omega_L$.

A lo largo de todo este captulo asumiremos que $\ker\Omega_L$ es una distribucin fuertemente regular. En este caso tendremos entonces que X es proyectable si y slo si $[X, \ker\Omega_L] \subset \ker\Omega_L$.

Proyectabilidad de superformas:

Una superforma ω sobre (TQ, T^A_Q) es proyectable bajo $\pi : (TQ, T^A_Q) \to (M,{}^A_M)$ si y slo si existe otra superforma $\tilde{\omega}$ sobre $(Q,{}^A_Q)$, la superforma proyeccin de ω, tal que $\omega = \pi^\star\tilde{\omega}$. Si la distribucin $\ker\Omega_L$ es fuertemente regular en el sentido de la definicin anterior, puede demostrarse que esto es equivalente a que se cumplan las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{L}_Z\omega = 0$, y
2. $i_Z\omega = 0$

para todo supercampo vectorial $Z \in \ker\omega$.

Proyectabilidad de supercampos tensoriales de tipo (1,1):

Antes de dar la nocin de proyectabilidad para supertensores de tipo (1,1), as como los criterios para averiguar si proyectan o no, repasemos algunos conceptos. Puede demostrarse (ver [Ko77]) que dada la proyeccin $\pi_L(TQ, T^A_Q) \to (M,{}^A_M)$, y las supercoordenadas locales $(x^1, \ldots, x^r; \theta^1, \ldots, \theta^s)$ sobre $(M,{}^A_M)$, entonces $(\pi^\star x^1, \ldots, \pi^\star x^r; \pi^\star\theta^1, \ldots, \pi^\star\theta^s)$ puede ser completada hasta obtener un sistema local de supercoordenadas para (TQ, T^A_Q).

Sea ahora R un supercampo tensorial de tipo (1,1) sobre (TQ, T^A_Q). Entonces podemos ver R como una aplicacin lineal $R : X(T^A_Q) \to X(T^A_Q)$. Para un supercampo

$X \in X(T_Q^A)$ sabemos entonces que $R(X) \in X(T_Q^A)$. Definimos el supercampo $\acute{\pi}_\star(X)$ como

$$\acute{\pi}_\star(X)(x^i, \theta^\alpha) = (\pi^\star)^{-1} X(\pi^\star x^i, \pi^\star \theta^\alpha)$$

donde (x^i, θ^α) son supercoordenadas locales sobre $(M,_M^A)$. Diremos entonces que R es proyectable bajo π si existe un supercampo vectorial F, que llamaremos el proyectado de R, tal que

$$\acute{\pi}_\star(R(X)) = F(\acute{\pi}_\star(X)) \ , \quad \forall X \in X(T_Q^A). \tag{4.50}$$

Esto es, sobre superfunciones $f \in_M^A$,

$$F(\acute{\pi}_\star X) f = \acute{\pi}_\star(R(X)) f = (\pi^\star)^{-1}(R(X))(\pi^\star f).$$

Podemos establecer ahora el siguiente teorema, que da una caracterizacin operativa de los supercapos tensoriales de tipo (1,1). El resultado es absolutamente anlogo al que se obtiene en geometra diferencial no graduada. Sin embargo, para demostrarlo, debemos acudir a algunas expresiones locales bastante farragosas, como veremos.

En las condiciones anteriores (con $\ker \Omega_L$ fuertemente regular), un tensor R de tipo (1,1) es proyectable si y slo si:

a) $R(\ker \Omega_L) \subset \ker \Omega_L$, y

b) $\mathcal{L}_Z R \subset \ker \Omega_L$ para todo supercampo vectorial $Z \in \ker \Omega_L$.

Demostracin:

($\Rightarrow$) Supongamos que R es proyectable, y sea $Z \in \ker \Omega_L$. Entonces, si F es la proyeccin de R, sabemos que

$$\acute{\pi}_\star(R(X)) = F(\acute{\pi}_\star(X)),$$

para todo $X \in X(T_Q^A)$. En particular, para $g \in_M^A (M)$,

$$(\acute{\pi}_\star(Z))(g) = (\pi^\star)^{-1}(Z)(\pi^\star g) = 0.$$

Luego $F(\acute{\pi}_\star(Z)) = 0 \Rightarrow \acute{\pi}_\star(R(Z)) = 0$ y por tanto $R(Z) \in \ker \acute{\pi}_\star = \ker \Omega_L$.

Por otro lado, qu pasa con $\mathcal{L}_Z R$? Claramente,

$$\acute{\pi}_\star((\mathcal{L}_Z R)(X)) = \acute{\pi}_\star(\mathcal{L}_Z(R(X)) - \acute{\pi}_\star(R[Z,X]) = \mathcal{L}_{\acute{\pi}_\star Z} \acute{\pi}_\star(R(X)) - \acute{\pi}_\star(R[Z,X]).$$

Ahora bien, $\acute{\pi}_\star(R[Z,X]) = F\acute{\pi}_\star([Z,X]) = F\acute{\pi}_\star(\mathcal{L}_Z X) = F(\mathcal{L}_{\acute{\pi}_\star Z}(\acute{\pi}_\star X))$.

Y como $\acute{\pi}_\star Z = 0$ para todo $Z \in \ker \omega$, se concluye finalmente que $\mathcal{L}_Z R \subset \ker \omega$.

($\Leftarrow$) Partimos ahora de que $R(\ker \Omega_L) \subset \ker \Omega_L$, y tambin $\mathcal{L}_Z R \subset \ker \Omega_L$. Nuestra pregunta es: existe F supercampo tensorial de tipo (1,1) tal que $\acute{\pi}_\star R(X) = F(\acute{\pi}_\star X)$, con $X \in X(T_Q^A)$?

Vimos anteriormente que es posible completar sistemas de supercoordenadas locales tomando el pull-back bajo π de un sistema de supercoordenadas locales en el espacio imagen. Esto es, si (x^i, θ^α) es un sistema local de $(M,{}_M^A)$, identificando, para no recargar la notacin, las supercoordenadas locales sobre (TQ, T_Q^A), $(\pi^\star(x^i), \pi^\star(\theta^\alpha))$, con (x^i, θ^α), podemos obtener las supercoordenadas locales sobre la supervariedad tangente $(x^i, \theta^\alpha; y^j, z^\beta)$. Supongamos entonces que R tiene la siguiente expresin local en estas supercoordenadas:

$$\begin{aligned} R &= a_i^j dx^i \otimes \frac{\ }{x^j} + b_i^j dx^i \otimes \frac{\ }{y^j} + c_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\ }{\theta^\alpha} + e_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\ }{z^\alpha} + \\ &+ \acute{a}_i^j dy^i \otimes \frac{\ }{x^j} + \acute{b}_i^j dy^i \otimes \frac{\ }{y^j} + \acute{c}_i^\alpha dy^i \otimes \frac{\ }{\theta^\alpha} + \acute{e}_i^\alpha dy^i \otimes \frac{\ }{z^\alpha} + \\ &+ f_\alpha^i d\theta^\alpha \otimes \frac{\ }{x^i} + g_\alpha^i d\theta^\alpha \otimes \frac{\ }{y^i} + h_\alpha^\beta d\theta^\alpha \otimes \frac{\ }{\theta^\beta} + k_\alpha^\beta d\theta^\alpha \otimes \frac{\ }{z^\beta} + \\ &+ \acute{f}_\alpha^i dz^\alpha \otimes \frac{\ }{x^i} + \acute{g}_\alpha^i dz^\alpha \otimes \frac{\ }{y^i} + \acute{h}_\alpha^\beta dz^\alpha \otimes \frac{\ }{\theta^\beta} + \acute{k}_\alpha^\beta dz^\alpha \otimes \frac{\ }{z^\beta}. \end{aligned}$$

Supongamos F dada por

$$F = F_i^j dx^i \otimes \frac{\ }{x^j} + G_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\ }{\theta^\alpha} + H_\alpha^i d\theta^\alpha \otimes \frac{\ }{x^i} + K_\alpha^\beta d\theta^\alpha \otimes \frac{\ }{\theta^\beta}.$$

Por la definicin de proyectabilidad que hemos visto, tras algunos clculos se comprueba que para que R sea proyectable es necesario que

$$\acute{a}_i^j = \acute{f}_i^\alpha = \acute{c}_i^\alpha = \acute{h}_\alpha^\beta = 0, \tag{4.51}$$

y tambin

$$\frac{\ }{y^l}(a_i^j, f_\alpha^i, c_i^\alpha, h_\alpha^\beta) = \frac{\ }{z^\gamma}(a_i^j, f_\alpha^i, c_i^\alpha, h_\alpha^\beta) = 0. \tag{4.52}$$

En particular, se obtendra que

$$a_i^j = F_i^j,\ c_i^\alpha = G_i^\alpha,\ f_\alpha^i = H_\alpha^i \text{ y } h_\alpha^\beta = K_\alpha^\beta. \tag{4.53}$$

(Es importante hacer notar aqu que en las igualdades estamos identificando superfunciones sobre $(M,{}_M^A)$ con superfunciones sobre (TQ, T_Q^A), va el pull-back de la aplicacin proyeccin).

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar la implicacin inversa. Tras algunos clculos, se puede comprobar que la relacin $R(\ker \Omega_L) \subset \ker \Omega_L$ implica que $\acute{a}_i^j = \acute{c}_i^\alpha = \acute{f}_\alpha^i = \acute{h}_\alpha^\beta = 0$. Por otro lado, de $\mathcal{L}_Z R \subset \ker \omega$, para todo $Z \in \ker \Omega_L$, se obtienen las ecuaciones (4.52). As pues, definiendo F localmente por las expresiones (4.53), vemos que existe un supercampo tensorial F de tipo (1,1) tal que $\acute{\pi}(R(X)) = F(\acute{\pi}_\star(X))$. Que F est globalmente definido se deduce directamente del hecho de que R lo est.

Tras este estudio sobre las condiciones de proyectabilidad para superformas diferenciales, supercampos vectoriales y supercampos tensoriales de tipo (1,1), ya estamos en condiciones de estudiar la proyectabilidad de las estructuras relevantes en el formalismo Lagrangiano de la supermecnica.

En primer lugar, es evidente que bajo las condiciones (A), (B), y (C) impuestas anteriormente, existe una nica superforma simplctica $\tilde{\Omega}$ sobre $(TQ, T_Q^A)/\ker\Omega_L$ tal que

$$\Omega_L = \pi_L^\star \tilde{\Omega} \tag{4.54}$$

donde π_L es el morfismo de supervariedades dado por la aplicacin proyeccin, $\pi_L^\star :_M^A (M) \to T_Q^A(TQ)$.

La siguiente cuestin relevante se refiere a la proyectabilidad de las soluciones de la ecuacin dinmica $i_\Gamma\Omega_L = dE_L$. Es Γ tal que $[\Gamma, Z] \in \ker\Omega_L$, para todo $Z \in \ker\Omega_L$? Vemoslo.

$$i_{[\Gamma,Z]}\Omega_L = \mathcal{L}_\Gamma i_Z\Omega_L - i_Z\mathcal{L}_\Gamma\Omega_L = 0,$$

luego efectivamente Γ es proyectable.

De este hecho se concluye tambin que la superfuncin energa es proyectable, pues $0 = i_{[Z,\Gamma]}\Omega_L = \mathcal{L}_Z i_\Gamma\Omega_L - i_\Gamma\mathcal{L}_Z\Omega_L = \mathcal{L}_Z(dE_L) = Z(E_L)$, luego $\mathcal{L}_Z E_L = 0$, y E_L es proyectable.

Sobre el supercampo de Liouville no se puede en principio aseverar nada. Lo ms que se puede decir es lo que ya sabemos, esto es, Δ es proyectable si y slo si $[\ker\Omega_L, \Delta] \subset \ker\Omega_L$.

Otra estructura de particular relevancia en los sistemas superlagrangianos es el superendomorfismo vertical S. Debido a que de la condicin $i_S\Omega_L = 0$ se deduce directamente que $S(\ker\Omega_L) \subset \ker\Omega_L$, tendremos que S ser proyectable si y slo si $\mathcal{L}_Z S \in \ker\Omega_L$, para cualquier $Z \in \ker\Omega_L$. Debemos notar aqu que, al igual que en el caso no graduado, el hecho de que S proyecte no va a implicar en general que el supertensor proyectado F defina una superestructura casi tangente, lo cual impedir ver la ecuacin reducida como una ecuacin de Euler-Lagrange. Veremos en breve que, de hecho, esto slo ser posible para superlagrangianos de tipo II. En general, todas las reflexiones que habamos hecho en la primera parte de este captulo sobre estas cuestiones pueden ser extendidas sin grandes modificaciones al contexto graduado.

Para terminar, analicemos brevemente si la 1-superforma de Cartan es proyectable o no. Evidentemente, del hecho de que su diferencial exterior proyecte no puede concluirse que ella misma proyecte. Debido a que $\mathcal{L}_Z\Theta_L = 0$ (con $Z \in \ker\Omega_L$), Θ_L ser proyectable si y slo si $i_Z\Theta_L = 0$, lo cual es equivalente a afirmar que $S(Z)(L) = 0$. Claramente, si el superlagrangiano L del cual proviene fuese proyectable, como $S(\ker\Omega_L) \subset \ker\Omega_L$ siempre, $S(Z)(L) = 0$, y la 1-superforma de Cartan Θ_L sera proyectable. Si, adems, el superendomorfismo vertical S proyectara, Θ_L proyectara en la 1-superforma $\tilde{\Theta}_L = d\tilde{L} \circ F$, donde F y $\tilde{L}$ seran las proyecciones de S y L, respectivamente.

Superlagrangianos de tipo II

En general, los nicos superlagrangianos susceptibles de proyectar en un sistema que admita una descripcin Lagrangiana graduada son los superlagrangianos de tipo II, como vamos a ver. Ello los hace particularmente interesantes desde un punto de vista fsico. Antes de establecer los resultados que prueben esta afirmacin, daremos otra caracterizacin de este tipo de superlagragianos: un superlagrangiano L es de tipo II si y slo si $S(\ker \Omega_L) = V(\ker \Omega_L)$. Este resultado se deduce directamente de una anlisis de los diferentes espacios en cuestin. Enunciemos ya el resultado central de este apartado.

Si el superendomorfismo vertical S proyecta, su proyeccin F define una superestructura integrable casi tangente si y solamente si L es un superlagrangiano de tipo II.

Antes de entrar en la demostracin de esta proposicin, recordemos que por una estructura graduada casi tangente integrable entendemos un supercampo tensorial de tipo (1,1) integrable (esto es, puede hacerse localmente constante), y tal que su ncleo coincida con su imagen.

Demostracin: Debido a que S es integrable, su proyeccin F tambin lo es. Este es un resultado general, tanto en geometra no graduada como en supergeometra. Tambin, de $S^2 = 0$ se deduce que $F^2 = 0$, luego $F \subset \ker F$. Falta demostrar por tanto que $\ker F \subset F$ si y slo si S es un superlagrangiano de tipo II.

Asumamos primero que $\ker F \subset F$. Sabemos que $S(\ker \Omega_L) \subset V(\ker \Omega_L)$. Hay que probar que $V(\ker \Omega_L) \subset S(\ker \Omega_L)$. Sea $\tilde{Y} \in X(^{A}_{M})$, y consideremos cualquier supercampo $Y \in X(T^A_Q)$ tal que $\tilde{Y} = \pi_\star(Y)$. Entonces, por la propia definicin de F, se obtiene que $F(\tilde{Y}) = F(\pi_\star(Y)) = \pi_\star(S(Y))$. Luego $\dim F(X(^{A}_{M})) = \dim \pi_\star(S(X(T^A_Q))) = \dim S(X(T^A_Q)) - \dim \ker(\pi_\star)(S(X(T^A_Q)) = \dim V(X(T^A_Q)) - \dim V(\ker \Omega_L) = 1/2 \dim(X(T^A_Q)) - \dim V(\ker \Omega_L)$. Pero $\dim F(X(^{A}_{M})) = 1/2(\dim X(T^A_Q) - \dim \ker \Omega_L)$. Luego $1/2 \dim X(T^A_Q) - \dim V(\ker \Omega_L) = 1/2 \dim X(T^A_Q)) - 1/2 \dim \ker \Omega_L$ lo cual implica que $\dim \ker \Omega_L = 2 \dim V(\ker \Omega_L)$ y por tanto L es de tipo II.

Por supuesto, en las relaciones que relacionan las dimensiones, se entender que se refieren tanto a la dimensin par como impar del ncleo, no a la suma de ellas.

Recprocamente, si partimos de que L es de tipo II, utilizando el mismo argumento anterior se obtiene que $\dim(\ker F) = \dim(F)$. Pero como $\ker F \subset F$ esto implica que $\ker F = F$.

En las condiciones de la proposicin anterior, puede demostrarse que el subhaz generado por F es lagrangiano respecto de la proyeccin $\tilde{\Omega}$ de Ω_L. Efectivamente, hay que probar que $< \acute{V}, \acute{W} | \tilde{\Omega} >= 0$ para $\acute{V}, \acute{W} \in F$. Sea $V \in X(T_Q^A)$ un supercampo vectorial tal que $(\pi_L)_\star V = \tilde{V}$, con $\tilde{V} \in X(^A_Q)$. Sabemos que $i_{S(V)}\Omega_L = (i_{F(\tilde{V})}\tilde{\Omega}) \circ F \circ (\pi_L)_\star$ y tambin $i_V \Omega_L \circ S = i_{\tilde{V}} \tilde{\Omega} \circ F \circ (\pi_L)_\star$. Como $i_{S(V)}\Omega_L = -i_V \Omega_L \circ S$, entonces $i_{\tilde{V}}\tilde{\Omega} \circ F = -i_{F(\tilde{V})}\tilde{\Omega}$. Adems, $\dim(F) = 1/2 \dim X(^A_M)$. Sea ahora $\tilde{W} \in X(^A_M)$. Entonces $(i_{\tilde{V}}\tilde{\Omega}) \circ F(F(\tilde{W})) = -(i_{F(\tilde{V})}\tilde{\Omega})(F(\tilde{W}))$, tras lo cual se ve que $< F(\tilde{W}), F(\tilde{V}) | \tilde{\Omega} >= 0$ lo que implica que $F \subset (F)^\perp$. Pero $\dim(F) = \dim(F^\perp)$ por lo que $F = F^\perp$ y por tanto F es una distribucin lagrangiana respecto de $\tilde{\Omega}$.

Recordemos ahora que el otro ingrediente fundamental para tener un formalismo Lagrangiano era el supercampo de Liouville. Pues bien, si existe una super SODE Γ tal que $i_\Gamma \Omega_L = dE_L$ y S es proyectable,se tiene

$$[Z, \Delta] = (\mathcal{L}_Z)(\Gamma) + S([Z, \Gamma]) \in \ker \Omega_L$$

para todo $Z \in \ker \Omega_L$, y por tanto Δ es proyectable. En particular, para los superlagrangianos de tipo II que estamos estudiando, siempre existe una super SODE solucin de las ecuaciones de Euler-Lagrange, como probamos a continuacin.

Supongamos que $X \in X(T_Q^A)$ es una solucin de la ecuacin dinmica. Entonces

$$i_{S(X)}\Omega_L = dE_L \circ S = i_\Delta \Omega_L,$$

luego $(S(X) - \Delta) \in \ker \Omega_L$. Adems, $(S(X) - \Delta) \in V(\ker \Omega_L)$ lo cual implica que existe un supercampo vectorial $Z \in \ker \Omega_L$ tal que $S(X) - \Delta = S(Z)$. Definamos $\Gamma = X - Z$. Entonces Γ es de nuevo una solucin de las ecuaciones de Euler-Lagrange ($i_Z \Omega_L = 0$) y adems es una super SODE ($S(\Gamma) = S(X) - S(Z) = \Delta$). Es evidente adems que si denotamos por $\tilde{\Gamma}$ a la proyeccin de Γ, si S es proyectable, el supercampo proyectado seguir siendo una super SODE.

Para terminar, falta por estudiar la reduccin de la superfuncin Lagrangiana. Hemos obtenido un supercampo vectorial $\tilde{\Gamma}$ que es una super SODE, una 2-superforma cerrada y no degenerada $\tilde{\Omega}$, y F. Ntese que se satisfacen todas las condiciones para la existencia local (ver el teorema (1.4.1) del primer captulo) de una superfuncin $\tilde{L}_1$ tal que

$$\tilde{\Omega} = \Omega_{\tilde{L}_1},$$

siendo $\tilde{\Gamma}$ el supercampo de Euler-Lagrange asociado a $\tilde{L}_1$.

Sea L_1 la superfuncin local sobre (TQ, T_Q^A) dada por

$$\tilde{L}_1 = \pi_L^\star(L_1) = L_1 \circ \pi_L.$$

Claramente, $i_{\tilde{\Gamma}}\tilde{\Omega} = dE_{\tilde{L}_1}$ con

$$E_{\tilde{L}_1} = F(\tilde{\Gamma})(\tilde{L}_1) - \tilde{L}_1 = \tilde{\Delta}(\tilde{L}_1) - \tilde{L}_1.$$

Ntese que

$$\Omega_L = \pi_L^\star \tilde{\Omega} = \pi_L^\star(d(d\tilde{L}_1 \circ F)) = \Omega_{L_1}.$$

Tambin, como $i_{\tilde{\Gamma}}\tilde{\Omega} = d\tilde{E}_L$ (recordemos que $\tilde{E}_L$ es la proyeccin de E_L) y $i_{\tilde{\Gamma}}\tilde{\Omega} = dE_{\tilde{L}_1}$, entonces $d\tilde{E}_L = dE_{\tilde{L}_1}$.

Por otra parte, $\pi_L^\star E_{\tilde{L}_1} = \pi_L^\star(\tilde{\Delta}(\tilde{L}_1) - \tilde{L}_1) = \Delta(L_1) - L_1 = E_{L_1}$.

Luego $dE_{L_1} = d(\pi_L^\star E_{\tilde{L}_1}) = \pi_L^\star(dE_{\tilde{L}_1}) = \pi_L^\star(d\tilde{E}_L) = dE_L$.

As pues,

$$\begin{aligned} \Omega_L &= \Omega_{L_1} && (4.55) \\ dE_L &= dE_{L_1}, && (4.56) \end{aligned}$$

esto es, L y L_1 son superlagrangianos equivalentes (en el sentido de que determinan la misma dinmica) y geomtricamente equivalentes ($\Omega_L = \Omega_{L_1}$).

Ahora bien, en qu diferiran L y L_1? Sea $f \in T_Q^A$ la superfuncin definida por $f = L - L_1$. Puede comprobarse tras algunos clculos que f deber ser de la forma

$$f = F_i(q)\dot{q}^i + G_\alpha(\theta)\dot{\theta}^\alpha \tag{4.57}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{F_i}{q^j} + \frac{F_j}{q^i} &= 0 && (4.58) \\ \frac{G_\alpha}{\theta^\beta} - \frac{G_\beta}{\theta^\alpha} &= 0. && (4.59) \end{aligned}$$

Como $(q^i, \dot{q}^j; \theta^\alpha, \dot{\theta}^\beta)$ son supercoordenadas locales adaptadas al fibrado, la parte $F_i(q)\dot{q}^i$ puede verse como la funcin asociada con una 1-superforma cerrada sobre la variedad base Q, definida como $\alpha = F_i dq^i$ (donde la relacin entre $\hat{\alpha}(q, \dot{q}; \theta, \dot{\theta}) = F_i\dot{q}^i$ y α ya la vimos en el captulo 3, apartado 3.2.1). Pero hay adems otra obstruccin, la asociada con el trmino $G_\alpha\dot{\theta}^\alpha$. Ntese sin embargo que tomando $\tilde{f} = F_i(q)dq^i + G_\alpha(\theta)d\theta^\alpha$, $d\tilde{f} = 0$. Luego podemos pensar que $L = L_1 + \hat{f}$ ($\hat{f} = f$ en nuestra notacin), donde $\hat{f}$ es la superfuncin asociada con la suma de una 1-forma cerrada sobre M y una 1-superforma cerrada constante sobre $\Lambda(E)$. Finalmente, como todas las superformas cerradas constantes son exactas, realmente la obstruccin a que los superlagrangianos fuesen equivalentes (y a que por consiguiente exista un superlagrangiano global sobre el espacio reducido) vendr dada por el primer trmino, esto es una 1-superforma cerrada sobre M.

El problema inverso para ciertos sistemas degenerados

Entre los ejemplos que hemos dado en las secciones precedentes se cuentan varios en los cuales las ecuaciones dinmicas son de segundo orden en las variables pares y de primer orden en las supercoordenadas impares. Por tanto, parece interesante estudiar el problema inverso para estos sistemas de superecuaciones diferenciales. El resultado que se obtiene es muy similar al que tenamos para los sistemas de ecuaciones ordinarias estudiadas en el apartado 4.2.3.1 de este mismo captulo. As pues, consideremos el sistema de ecuaciones graduadas siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{q}^i &= f^i(q^j, \dot{q}^j; \theta^\alpha) \qquad i = 1, \ldots, m \\ \dot{\theta}^\alpha &= g^\alpha(q^j, \dot{q}^j; \theta^\beta) \qquad \alpha = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4.60}$$

es decir, superecuaciones diferenciales de segundo orden sobre las variables q^i definidas por las fuerzas generalizadas f^i, y de primer orden en las variables grasmannianas θ^α.

Es evidente que la aparicin de ecuaciones graduadas de primer orden en las supercoordenadas impares implica que deben buscarse superlagrangianos lineales en las correspondientes velocidades impares.

Sea $(Q, _Q^A)$ el espacio de configuraciones para las variables (q^i, θ^α). Supondremos que la supervariedad base tiene fibrado estructural trivial, esto es, si $E \to Q$ es el fibrado estructural de $(Q, _Q^A)$, E puede expresarse como $E = Q \times ^n$. Entonces hay un supertensor natural S de tipo $(1,1)$ sobre (TQ, T_Q^A) cocientado por la distribucin generada por los supercampos verticales sobre $T^n \; = ^{2n}$, dado en supercoordenadas locales por

$$S = dq^i \otimes \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \tag{4.61}$$

Una presuper SODE es un supercampo vectorial Γ sobre $(TQ, T_Q^A)/V(T^n)$ tal que

$$S(\Gamma) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \tag{4.62}$$

La expresin local de Γ viene dada por

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f^i(q, \dot{q}; \theta) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + g^\alpha(q, \dot{q}; \theta) \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}. \tag{4.63}$$

Un modelo de superlagrangiano local que da lugar a presuper SODEs es

$$L = L_0(q, \dot{q}; \theta) + A_\alpha(q; \theta) \dot{\theta}^\alpha. \tag{4.64}$$

Tras estas nociones preliminares, ya estamos en condiciones de establecer el resultado principal, cuya demostracin, que no haremos, es absolutamente anloga a la ya dada para el teorema (4.2.3).

Sea Γ una presuper SODE sobre $(TQ, T_Q^A)/V(T^n)$. La condicin necesaria y suficiente para la existencia de un superlagrangiano (local) L sobre (TQ, T_Q^A) tal que las superecuaciones de Euler-Lagrange reducidas de L sean equivalentes a Γ es que exista una 2-superforma Ω en $(TQ, T_Q^A)/V(T^n)$ que satisfaga las siguientes condiciones:

i. Ω es cerrada y no degenerada.

ii. $\mathcal{L}_\Gamma \Omega = 0$.

iii. $i_S \Omega = 0$.

4.3.3 Ligaduras secundarias y algoritmo de ligaduras para superlagrangianos degenerados

Supongamos ahora que el superlagrangiano que estemos considerando sea tal que su ecuacin dinmica asociada no admita una solucin global. En tal caso se dir que el superlagrangiano tiene ligaduras secundarias, terciarias, etc. Al igual que en el caso no graduado, cuando la 2-superforma de Cartan no es regular, pueden surgir una serie de problemas, a saber:

a) Que no exista una supercampo Γ sobre todo el superespacio de evolucin, y que en general slo est definido sobre alguna subvariedad graduada del mismo. Este es precisamente el caso en que no existe dinmica global, y aparecen ligaduras secundarias.

b) Supongamos que $(P,{}^{A}_{P})$ es la subvariedad graduada sobre la que s existe solucin. Entonces Γ no definir en general una superecuacin diferencial sobre P.

c) La solucin Γ, incluso en el caso de que exista, puede no ser nica. Para resolver este problema, deberamos proceder como lo hemos hecho en las secciones precedentes.

d) Γ puede ser discontinua, de forma que no tenga un flujo localmente definido (ntese que Γ es siempre par en el formalismo Lagrangiano, y que por tanto s tiene sentido hablar de flujos locales).

e) La supervariedad reducida no ser en general una supervariedad tangente, y por tanto Γ no ser una super SODE sobre ella.

Asumiremos en general que la dificultades tcnicas descritas en d) no estarn presentes en los supersistemas Lagrangianos que estemos estudiando. En este apartado vamos a ver esquemticamente cmo se exttiende el algoritmo de Gotay-Nester [Go79] para sistemas graduados, sin entrar en el problema de la superecuacin diferencial de segundo orden. Debemos resaltar que, si bien formalmente el procedimiento es el mismo, habr un incremento notable de las dificultades tcnicas en su desarrollo. As, la aparicin de ligaduras asociadas con la existencia de un ncleo dbil puede destrozar en ciertos casos las esperanzas de desarrollar el algoritmo de ligaduras desde los primeros pasos. Por tanto, asumiremos que slo existe ncleo fuerte.

Veamos en lneas generales cmo procede el algoritmo de ligaduras. Evidentemente, los problemas para la no existencia de una dinmica global surgen cuando la superforma dE_L no est en el rango de Ω_L, viendo la 2-superforma de Cartan como una aplicacin de los supercampos vectoriales sobre la supervariedad tangente en las superformas diferenciales. Se toma en primer lugar el superespacio $(M_2,{}^{A}_{M_2})$ donde la ecuacin dinmica tenga solucin. Suponemos que $(M_2,{}^{A}_{M_2})$ es una supervariedad diferenciable, y la denominamos subvariedad graduada de ligaduras secundarias. Puede suceder ahora que el supercampo solucin de la ecuacin dinmica no defina una superderivacin sobre ${}^{A}_{M_2}$, con lo cual la evolucin descrita por ella no sera compatible con M_2. Esto exige la eliminacin de estos grados de libertad de $(M_2,{}^{A}_{M_2})$. Con este fin, definimos $(M_3,{}^{A}_{M_3})$ como el superespacio de $(M_2,{}^{A}_{M_2})$ donde existe un supercampo vectorial $X \in X({}^{A}_{M_2})$ que verifica la ecuacin. Asumamos que $(M_3,{}^{A}_{M_3})$ es una supervariedad, la subvariedad graduada de ligaduras terciarias. De nuevo, podemos encontrarnos el mismo problema que en $(M_2,{}^{A}_{M_2})$, lo cual nos llevara a definir una $(M_4,{}^{A}_{M_4})$, y as sucesivamente. Se genera de esta manera un algoritmo, que puede terminar o no, al igual que en el caso no graduado. Al espacio en que el algoritmo se estaciona se le llama subvariedad graduada final de ligaduras. Finalmente, habra que resolver el problema de la superecuacin diferencial de segundo orden, y el de la posible no unicidad de las soluciones, donde aplicaramos el procedimiento que hemos descrito en los apartados anteriores.

4.4 Ejemplos

4.4.1 Superpartcula clsica no relativista

El primer ejemplo de sistema Lagrangiano graduado degenerado que hemos visto ha sido la descripcin de la superpartcula clsica con spin no relativista (ver captulo 1, seccin 1.3.4), con superespacio de configuraciones $(^3, \Lambda^3)$. Recordemos que el superlagrangiano tena la expresin

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^i\theta^i - V_1(q) - \theta^i\theta^j V_{ij}(q) \tag{4.65}$$

La 2-superforma de Cartan asociada con este superlagrangiano vimos que era

$$\Omega_L = dq^i \wedge d\dot{q}^i + \frac{1}{2}d\theta^i \wedge d\theta^i,$$

que evidentemente es degenerada. El ncleo de esta 2-superforma viene generado por la parte vertical del fibrado estructural de la supervariedad tangente $(^6, \Lambda^6)$ al superespacio de configuraciones (el superlagrangiano es de tipo III). Podemos eliminar entonces estos grados de libertad gauge cocientando por $\ker \omega_L$. La supervariedad final es $(^6, \Lambda^3)$, como es trivial comprobar en este caso. La 2-superforma sobre el espacio reducido es $\tilde{\Omega} = dq^i \wedge d\dot{q}^i + 1/2 d\theta^i \wedge d\theta^i$, que es no degenerada. La superenerga es $\tilde{E} = \frac{1}{2}(\dot{q}^i)^2 + V_1(q) + \theta^i\theta^j V_{ij}(q)$. Y el supercampo vectorial solucin de la ecuacin dinmica es finalmente

$$\Gamma = \dot{q}^i \frac{}{q^i} - (\frac{V_1}{q^i} + \theta^j\theta^k \frac{V_{jk}}{q^i})\frac{}{\dot{q}^i} - 2V_{ij}\theta^j \frac{}{\theta^i}. \tag{4.66}$$

4.4.2 Superpartculas con fibrados estructurales arbitrarios

Vamos a desarrollar aqu el ejemplo que ya vimos en el primer captulo, apartado 1.2.4.3, donde dbamos un modelo de superlagrangianos supersimtricos singulares sobre supervariedades con fibrados estructurales arbitrarios. Recordemos brevemente que estos superlagrangianos estaban definidos sobre una supervariedad tangente (TM, T_M^A), con fibrado estructural $TE \to TM$. La expresin local del superlagrangiano era (2.69)

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + \eta_{\alpha\beta}\theta^\alpha(\dot{\theta}^\beta - A_i(q)^\beta_\gamma \dot{q}^i\theta^\gamma) \tag{4.67}$$

La 2-superforma de Cartan era claramente degenerada, y tena la expresin (1.89)

$$\begin{aligned} \Omega_L &= g_{ij}dq^i \wedge d\dot{q}^j + \left(\frac{g_{ij}}{q^k}\dot{q}^j - \eta_{\alpha\beta}\frac{A_{i\gamma}^{\beta}}{q^k}\theta^\alpha\theta^\gamma\right) dq^i \wedge dq^k \\ &- (\eta_{\alpha\beta}A_{i\gamma}^{\beta} - \eta_{\gamma\beta}A_{i\alpha}^{\beta})\theta^\gamma d\theta^\alpha \wedge dq^i - \eta_{\alpha\beta}d\theta^\alpha \wedge d\theta^\beta. \end{aligned} \tag{4.68}$$

El ncleo fuerte (y de hecho todo el ncleo) de Ω_L est generado por los supercampos verticales de la forma $Z_\alpha = /\dot{\theta}^\alpha$, que definen una sublgebra de Lie graduada de $X(T_M^A)$, de forma que

$$\ker K = \{f \in T_M^A | Z_\alpha(f) = 0 \; \forall \alpha\}$$

define un subhaz de superlgebras de T_M^A, es decir, el subhaz $\ker K$ define una supervariedad cociente de la supervariedad tangente por la superdistribucin K. El superlagrangiano es de tipo III. La superforma de Cartan proyecta sobre la supervariedad cociente y su proyeccin es no degenerada. El fibrado estructural de la supervariedad cociente es $TE/V \to TM$, donde V es el subfibrado generado por $\dot{\theta}^\alpha$. Ahora bien, debido a las funciones de transicin de la supervariedad tangente (1.8-1.11), si se omiten los trminos $\dot{\theta}^\alpha = \xi^\alpha$, lo que se obtienen son la funciones de transicin del fibrado vectorial $E^\sharp$ obtenido haciendo el pull-back de E en TM a lo largo de la proyeccin natural $TM \to M$. El haz $\ker K$ es isomorfo a $\Gamma(\Lambda E^\sharp)$ y las supercoordenadas locales en la supervariedad cociente son $(q^i, \dot{q}^i, \theta^\alpha)$. Este "superespacio de velocidades" reducido es el que hay que utilizar para describir la dinmica asociada al superlagrangiano en sus aplicaciones.

La superenerga $E_L = 1/2 g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ es claramente invariante bajo los supercampos vectoriales Z del ncleo de Ω_L, y por tanto pertenece al haz de la supervariedad cociente. Denotando por Ω la superforma proyectada sobre la supervariedad cociente, la ecuacin que define la dinmica asociada con L en el superespacio de velocidades reducido es

$$i_{\tilde{\Gamma}}\Omega = dE_L \tag{4.69}$$

y tiene solucin nica debido a la no degeneracin de Ω. El supercampo de Euler-Lagrange tiene entonces la expresin

$$\tilde{\Gamma} = \dot{q}^i \frac{}{q^i} - (\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k - g^{ij}\eta_{\alpha\gamma}(R_{jk})^\alpha_\beta \dot{q}^k\theta^\beta\theta^\gamma)\frac{}{\dot{q}^k} + \dot{q}^i\nabla_i\theta^\alpha \frac{}{\theta^\alpha}. \tag{4.70}$$

La ecuaciones del movimiento pueden escribirse tambin de la forma ms usual

$$l\ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k - g^{ij}\eta_{\alpha\gamma}(R_{jk})^\alpha_\beta\dot{q}^k\theta^\beta\theta^\gamma = 0 \tag{4.71}$$

$$\dot{\theta}^\alpha = \dot{q}^i\nabla_i\theta^\alpha. \tag{4.72}$$

Es interesante observar que estas ecuaciones son muy similares a las ecuaciones de Wong para una partcula movindose en un potencial de Yang-Mills A.

La superpartcula que acabamos de describir no es supersimtrica a menos que el fibrado E coincida con el fibrado cotangente de M. En tal caso, el superespacio de configuraciones es la supervariedad $(M, \Gamma\Lambda(T^\star M))$, la supervariedad tangente es $(TM, \Gamma\Lambda(TT^\star M))$, y el superespacio de velocidades reducido es simplemente $(TM, \Gamma\Lambda(T^\star M))$, con supercoordenadas locales $(q^i, \dot{q}^i; \theta^i)$. Ntese que si se elige una mtrica Riemanniana g sobre M, entonces las supercoordenadas θ^i se transforman bajo la representacin fundamental de $SO(n)$. El superlagrangiano (2.69) toma entonces la expresin

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + g_{ij} \theta^i (\dot{\theta}^j - \Gamma^j_{lk} \dot{q}^l \theta^k) \tag{4.73}$$

donde Γ^k_{ij} son los smbolos de Christoffel de la conexin de Levi-Civita de g. Y las 1- y 2-superformas de Cartan son

$$\Theta_L = (g_{ij} \dot{q}^j - g_{jl} \Gamma^j_{ik} \theta^l \theta^k) dq^i + g_{ij} \theta^j d\theta^i \tag{4.74}$$

y

$$\begin{aligned} \Omega_L &= g_{ij} dq^i \wedge d\dot{q}^j + \left(\frac{g_{ij}}{q^k} \dot{q}^j - g_{jl} \frac{\Gamma^j_{im}}{q^k} \theta^l \theta^m - \frac{g_{jl}}{q^k} \Gamma^j_{im} \theta^l \theta^m \right) dq^i \wedge dq^k \\ &- \left(g_{jk} \Gamma^j_{il} - g_{jl} \Gamma^j_{ik} - \frac{g_{kl}}{q^i} \right) \theta^l d\theta^k \wedge dq^i - g_{ij} d\theta^i \wedge d\theta^j. \end{aligned} \tag{4.75}$$

El supercampo vectorial de Euler-Lagrange reducido $\tilde{\Gamma}$ tiene la expresin siguiente:

$$\tilde{\Gamma} = \dot{q}^i \frac{}{q^i} + (-\Gamma^i_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k + \dot{q}^j R^i_{klj} \theta^k \theta^l) \frac{}{\dot{q}^i} + \dot{q}^k \nabla_k \theta^i \frac{}{\theta^i}. \tag{4.76}$$

Es importante ahora observar que existe un supercampo vectorial D que realiza la superlgebra de Lie de supersimetras (3.22) con $N = 1$, dado por

$$D = \theta^i \frac{}{q^i} + \dot{q}^k \nabla_k \theta^i \frac{}{\dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{}{\theta^i}. \tag{4.77}$$

Es sencillo comprobar ahora que D es una supersimetra generalizada, con cantidad conservada asociada el superhamiltoniano impar

$$J = g_{ij} \theta^i \dot{q}^j. \tag{4.78}$$

As pues, hemos visto un ejemplo de superpartcula supersimtrica descrita por un superlagrangiano degenerado, tal y como ya habamos anticipado en el captulo anterior.

Hay, por supuesto, otras elecciones para superlagrangianos degenerados que admiten lgebras supersimtricas. Por ejemplo, podemos elegir como superespacio de configuraciones la supervariedad con variedad base M y fibrado estructural $T^\star M \oplus T^\star M$. En la supervariedad tangente correspondiente definimos el superlagrangiano

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \bar{\theta}^i \sigma_2 (\dot{\theta}^j - \Gamma^j_{lk} \dot{q}^l \theta^k) + \frac{1}{12} R_{ijkl} \bar{\theta}^i \theta^k \bar{\theta}^j \theta^l. \tag{4.79}$$

La variable θ^i denota un vector real con dos componentes $\begin{pmatrix} \theta_1^i \\ \theta_2^i \end{pmatrix}$, donde $(q^i, \theta_1^i, \theta_2^i)$ son las supercoordenadas locales del superespacio de configuraciones; y $\bar{\theta}_a^i = \theta_b^i(\sigma_2)_{ba}$.

El superlagrangiano L es invariante (en el sentido generalizado) respecto de la accin sobre la supervariedad tangente de la superlgebra de Lie g generada por un generador par E y dos generadores impares $Q, Q^\star$, con todas las relaciones de conmutacin nulas salvo $[Q, Q^\star] = 2E$ [Al83]. Es bien conocido que este modelo es la contrapartida clsica del sistema mecano-cuntico con espacio de Hilbert el espacio de las L^2-formas diferenciales sobre M y Hamiltoniano el operador de Laplace-Hodge, donde los generadore Q y $Q^\star$ se corresponden con la diferencial exterior y la codiferencial, respectivamente. El espacio de los L^2-espinores sobre M y Hamiltoniano el Laplaciano de Dirac constituye el modelo cuntico del superlagrangiano (4.73), y el operador de Dirac es el observable cuntico correspondiente al operador impar (4.78).

Chapter 5

Regularizacin de Lagrangianos singulares

5.1 Introduccin

Como ya hemos indicado anteriormente, una de las aplicaciones ms importantes de la supermecnica es el estudio de sistemas dinmicos con grados de libertad gauge utilizando el mecanismo de BRST. Si bien en el formalismo Hamiltoniano esta tcnica ya ha sido profusamente estudiada y sus aspectos geomtricos profusamente analizados, no ocurre lo mismo con el caso Lagrangiano. Parte de los problemas con que uno se encuentra al tratar de hacer BRST para lagrangianos degenerados surgen de la inexistencia hasta ahora de una formulacin geomtrica de la supermecnica Lagrangiana. As pues, el objetivo en los dos prximos captulos va a ser extender el formalismo BRST al caso Lagrangiano, utilizando las tcnicas estudiadas hasta ahora. Los pasos a seguir para ello son dos. Primero habr que resolver el conocido como problema de la regularizacin de un sistema Lagrangiano degenerado ordinario, para ya despus pasar a describir el mecanismo de BRST aplicado a un tipo particular de sistemas. En este captulo vamos a centrarnos en la regularizacin Hamiltoniana y Lagrangiana, utilizando el teorema del "embedding" coistropo de Gotay [Go82].

5.2 El problema de la regularizacin. Regularizacin Hamiltoniana

Sea (M, ω) una variedad presimplctica. Dada una 1-forma cerrada α, podemos plantearnos entonces el sistema dinmico localmente Hamiltoniano definido por α. Supongamos que existe una dinmica Γ globalmente definida, esto es, tal que $i_\Gamma \omega = \alpha$. Entonces, como ya hemos visto, el verdadero espacio fsico sera M/K, donde $K =$

$\ker \omega$. Este sera el procedimiento usual de reduccin. Ahora bien, hay una manera equivalente de describir este espacio, que explicaremos a continuacin.

En particular, nos centraremos en el caso de sistemas dinmicos localmente Hamiltonianos en los cuales la 1-forma α es exacta, esto es, existe una funcin hamiltoniana definida globalmente H tal que $\alpha = dH$. Entonces resulta que el sistema presimplctico definido por (M, ω, H) puede ser regularizado, esto es, es posible "meterlo" dentro de un sistema Hamiltoniano regular, utilizando el teorema del "embedding" coistropo [Go82].

El teorema del "embedding" coistropo, que enunciaremos a continuacin por su vital importancia en lo que sigue, muestra la existencia de una variedad simplctica (P, Ω) y un "embedding" $i : M \to P$ tal que $i^*\Omega = \omega$, con M una subvariedad coistropa (esto es, de primera clase) de P. La variedad simplctica P se construye como un entorno tubular de la seccin cero del fibrado vectorial $K^* \to M$, y Ω se construye descomponiendo el espacio M en $M = K \oplus G$, haciendo uso, por ejemplo, de una mtrica en M, de tal forma que $G = K^\perp$ respecto de esa mtrica. Entonces la 2-forma simplctica Ω se define como $\omega + \omega_K$, donde ω_K es la 2-forma lineal definida cannicamente en el espacio $K \oplus K^*$. Veremos esto ms concretamente en la demostracin del teorema del "embedding" coistropo de Gotay [Go82]. Pero antes de ello, enunciaremos otro resultado sin demostrar, el teorema de extensin de Weinstein, en el cual se apoya la demostracin del teorema de Gotay.

(Teorema de extensin de Weinstein [Ab78], [Gu77]). Sea M una variedad diferenciable, e $i : C \to M$ una subvariedad cerrada de M. Entonces:

i.- Supongamos que el fibrado vectorial $T_C M \to C$ es un fibrado simplctico con una forma ω en $T_C M$ tal que, si denotamos por j a un "embedding" de C en la seccin cero de $T_C M$, $j^*\omega$ es cerrada en C. Entonces existe un entorno tubular de $i(C)$ en M y una estructura simplctica Ω en l tal que $i^*\Omega = j^*\omega$.

ii.- Sean ω_α dos formas simplcticas en M_α $(\alpha = 1, 2)$, y sea C una subvariedad incrustada en M_1 y M_2 a travs de $i_\alpha : C \to M_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ respectivamente. Si $(T_C M_1, \omega_1)$ y $(T_C M_2, \omega_2)$ son isomorfos como fibrados simplcticos, entonces existen entornos U_α de $i_\alpha(C)$ en M_α $(\alpha = 1, 2)$, y un simplectomorfismo $\phi : (U_1, \omega_1) \to (U_2, \omega_2)$ tal que $\phi|_C = id_C$.

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado central en que nos basaremos en este captulo.

(Teorema del "embedding" coistropo [Go82])

i.- (Existencia). Dada una variedad presimplctica (M, ω), existe una estructura simplctica en un entorno de la seccin cero de K^*, donde K es el fibrado caracterstico de (M, ω), de forma que (M, ω) est "embedded" coistropamente en ese entorno de la seccin cero.

ii.- (Unicidad local). Todos los "embeddings" coistropos de (M, ω) son equivalentes en un entorno. Es decir, si $j_\alpha : M \to (P_\alpha, \Omega_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, son dos "embeddings" coistropos, existen dos entornos U_α de $j_\alpha(M)$ en P_α, y un simplectomorfismo $\psi : (U_1, \Omega) \to (U_2, \Omega_2)$ tal que $\psi \circ j_1 = j_2$.

Dem: i.- Veamos primero la existencia. Partimos en general de una variedad presimplctica (M, ω). Sea $K = \ker \omega$ el fibrado caracterstico de (M, ω), como es usual. Dada la proyeccin $\pi : K \to M$, tenemos el fibrado dual con proyeccin $\pi^* : K^* \to M$.

En primer lugar, es obvio que $T_M K^* = TM \oplus K^*$. Tomando ahora una mtrica en M podemos descomponer TM en $G \oplus K$, con G un complementario ortogonal a K respecto de la mtrica dada. Obtenemos por tanto

$$T_M K^* = G \oplus (K \oplus K^*).$$

El fibrado $G \to M$ es simplctico, ya que es isomorfo a TM/K. Denotemos por ω_G la forma simplctica sobre l.

Por otro lado, el fibrado $K \oplus K^*$ sobre M posee una estructura simplctica natural, que escribiremos ω_K.

Tenemos por tanto en el fibrado $T_M K^*$ una estructura simplctica $\Omega = \omega_G + \omega_K$. Ntese que, en particular, Ω restringida a los vectores de TM vale exactamente ω, es decir, $\Omega|_{TM} = \omega$. Aplicando entonces el teorema de extensin de Weinstein, dado que Ω es cerrada, sabemos que existe un entorno de la seccin cero de K^* y una estructura simplctica en l que coincide con la de M sobre la seccin cero.

Denotando por $j : M \to K^*$ el "embedding" de M en la seccin cero, se tiene que $j^*\Omega = \omega$. Adems, el "embedding" es coistropo, pues $TM^\perp = (G \oplus K)^\perp = G^\perp \cap K^\perp = (K \oplus K^*) \cap (G \oplus K) = K \subseteq T$.

ii.- Unicidad local. Consideremos un "embedding" coistropo $j : (M, \omega) \to (P, \Omega)$. Es fcil ver que $T_M P = G \oplus G^\perp$, donde $G^\perp$ es un complemento ortogonal de K en $TM \subseteq T_M P$ como antes (como G es un subfibrado simplctico, $G \cap G^\perp = 0$). Entonces, por un lado tenemos que $K \subseteq G^\perp$. Adems, $K^\perp \cap G^\perp = (K \oplus G)^\perp = K$, de lo cual se deduce que $K^\perp = K$. Por tanto K es un subfibrado lagrangiano de $G^\perp$ y $(G^\perp, \Omega) \cong (K \oplus K^*, \omega_K)$. Luego

$$T_M P = G \oplus K \oplus K^*$$

est dotado de la estructura simplctica $\omega_G + \omega_K$. La conclusin se sigue entonces fcilmente aplicando (ii) del teorema de extensin de Weinstein.

Sea ahora (M, ω, α) un sistema dinmico presimplctico localmente Hamiltoniano, y (P, Ω) un "embedding" coistropo. Siguiendo el estudio usual en la teora de la reduccin de sistemas presimplcticos (ver, por ejemplo, [Ib84] para una revisin de la teora de la reduccin), si denotamos por φ la aplicacin que identifica P con un entorno tubular de K^*, podemos definir una aplicacin momento generalizada

$$\begin{aligned} J : P \ &\longrightarrow \ K^* \\ x \ &\mapsto \ J(x) = \varphi(x) \ , \end{aligned} \tag{5.1}$$

esto es, $J(x)(X) = \langle \varphi(x), X(x) \rangle$, para todo $x \in P$, $X \in K$. De hecho, esta es la aplicacin momento para la accin de K en (P, Ω) (ver [Ib84]).

Claramente, J es una aplicacin que da la identidad sobre M, puesto que es el "embedding" natural de P en K^*. Notemos entonces que, obviamente, el conjunto de nivel cero de esta aplicacin momento es precisamente M, esto es, $M = J^{-1}(\mathbf{0})$, donde $\mathbf{0}$ denota la seccin cero del fibrado K^*.

Aplicando entonces el procedimiento usual en la teora de reduccin, habra que cocientar por $\ker \omega$ (la foliacin nula definida por ω en la hoja $\mathbf{0}$ de J), esto es, debemos tomar el espacio cociente $J^{-1}(\mathbf{0})/\ker \omega|_{J^{-1}(\mathbf{0})}$. Puede demostrarse entonces que

$$J^{-1}(\mathbf{0})/\ker \omega|_{J^{-1}(\mathbf{0})} = M/K, \tag{5.2}$$

esto es, el espacio obtenido de esta forma coincide precisamente con la foliacin definida por la accin de $\ker \omega$ sobre M. As, hemos encontrado una forma de describir el espacio reducido como reduccin por una subvariedad de primera clase de un sistema simplctico.

Ahora bien, qu sucede con la dinmica? Dado el sistema (M, ω, α), tenemos que construir una 1-forma cerrada α_P en P tal que su campo dinmico localmente hamiltoniano asociado $\tilde{\Gamma}$ sea tangente a M, es decir, $\tilde{\Gamma}|_M \in X(M)$; invariante bajo K, $[K, \tilde{\Gamma}] = 0$; y si denotamos por Γ a la restriccin sobre M, satisfaga la ecuacin dinmica $i_\Gamma \omega = \alpha$.

Hay toda una familia de campos dinmicos localmente hamiltonianos en P que extienden la dinmica en M, esto es, son tales que para cada campo vectorial Γ que sea solucin de la ecuacin dinmica $i_\Gamma \omega = \alpha$, existe un campo vectorial localmente hamiltoniano $\tilde{\Gamma}$ en P, tangente a M, que verifica $\Gamma = \tilde{\Gamma}|_M$, y tal que K es una simetra de $\tilde{\Gamma}$. Estos campos vectoriales pueden caracterizarse totalmente, y vienen dados por $\tilde{\Gamma} = \hat{\Omega}^{-1}(\alpha_P)$, donde α_P es una 1-forma cerrada en P tal que $j^* \alpha_P = \alpha$ (donde j denota el "embedding" coistropo de (M, ω) en (P, Ω)). De hecho, la familia ms general de tales campos hamiltonianos que extienden la dinmica son los definidos por las 1-formas cerradas $\alpha_P + \xi$, con ξ 1-formas cerradas de ligadura de primera clase. Sin embargo, es fcil darse cuenta de que, en nuestro caso, tales 1-formas ξ satisfacen $j^* \xi = 0$, y por tanto estarn incluidas en la definicin de α_P.

Todos estos campos $\tilde{\Gamma}_{\alpha_P}$ son fuertemente reducibles en el sentido de que satisfacen las condiciones que se han citado anteriormente (tangentes a M, K-invariantes y tales que su restriccin es solucin de la ecuacin dinmica sobre el espacio original).

Si α es exacta, es decir, $\alpha = dH$, es fcil construir un hamiltoniano H_1 que extienda la dinmica en M y tal que su campo dinmico hamiltoniano $\tilde{\Gamma}_{H_1}$ sea fuertemente reducible, simplemente eligiendo una mtrica fibrada η sobre K, y definiendo $H_1 = K_\eta + H$, esto es,

$$H_1(x,b) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(x)b_\mu b_\nu + H \tag{5.3}$$

donde (b_μ) denota un sistema de coordenadas locales a lo largo de las fibras del fibrado vectorial K^*. Vamos a calcular explcitamente cul es la expresin local de su campo dinmico hamiltoniano asociado $\tilde{\Gamma}_{H_1}$, para ver que efectivamente es fuertemente reducible.

Dado que la 2-forma ω es presimplctica, es posible encontrar coordenadas locales (q^i, p_j, z^μ) en las cuales

$$\omega = dq^i \wedge dp_i. \tag{5.4}$$

Las cordenadas (z^μ) son coordenadas locales a lo largo de la fibracin $M \to M/K$ y pueden verse como coordenadas locales a lo largo de las fibras de K. Por tanto podemos escribir

$$\omega_K = dz^\mu \wedge db_\mu. \tag{5.5}$$

Evaluando ahora $i_{\tilde{\Gamma}_{H_1}}\Omega = dH_1$, donde $\Omega = \omega + \omega_K$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{H_1} &= \left(\frac{H}{p_i} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{p_i}b_\mu b_\nu\right)\frac{}{q^i} - \left(\frac{H}{q^i} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{q^i}b_\mu b_\nu\right)\frac{}{p_i} + \\ &+ 2\eta^{\mu\nu}b_\nu\frac{}{z^\mu} - \left(\frac{H}{z^\mu} + \frac{\eta^{\nu\delta}}{z^\mu}b_\nu b_\delta\right)\frac{}{b_\mu}.\end{aligned}$$

Ahora bien, como estamos suponiendo que existe una dinmica global sobre M, ello implica que el hamiltoniano H debe ser proyectable sobre M/K, lo cual se traduce localmente en que $H/z^\mu = 0$. As pues,

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{H_1} &= \left(\frac{H}{p_i} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{p_i}b_\mu b_\nu\right)\frac{}{q^i} - \left(\frac{H}{q^i} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{q^i}b_\mu b_\nu\right)\frac{}{p_i} + \\ &+ 2\eta^{\mu\nu}b_\nu\frac{}{z^\mu} - \frac{\eta^{\nu\delta}}{z^\mu}b_\nu b_\delta\frac{}{b_\mu}\end{aligned} \tag{5.6}$$

Obviamente, $\tilde{\Gamma}_{H_1}$ es tangente a M, pues

$$\tilde{\Gamma}_{H_1}|_{b^\mu=0} = \frac{H}{p_i}\frac{}{q^i} - \frac{H}{q^i}\frac{}{p_i}.$$

Tambin se satisface que

$$i_{\tilde{\Gamma}_{H_1}}\Omega|_M = dH.$$

Por ltimo, es evidente que $\tilde{\Gamma}_{H_1}|_M$ es proyectable sobre M/K si H tambin lo es.

Llamaremos al sistema Hamiltoniano (P, Ω, H_1) una regularizacin Hamiltoniana del hamiltoniano H.

Observaciones:

La eleccin de las coordenadas z^μ a lo largo de las hojas de K define una seccin local de la proyeccin $M \xrightarrow{\pi} M/K$, ya que si (q^i, p_i, z^μ) son un sistema de coordenadas en un entorno U de $m \in M$, y $\pi(m) = x \in M/K$, tenemos la aplicacin $\sigma : V \to M$, donde V es la proyeccin de U por π, definida por $\sigma(V) = \{z^\mu = 0\}$ (suponiendo que $z^\mu(m) = 0$). Por tanto, las funciones coordenadas representan fsicamente una eleccin local del gauge. Notemos que el parntesis de Poisson en (P, Ω) define precisamente el parntesis de Dirac correspondiente a la subvariedad $M \hookrightarrow P$, ya que

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j \ , \qquad \{z^\mu, b_\nu\} = \delta^\mu_\nu \ . \tag{5.7}$$

Observemos que las funciones que definen a M en P son $\{b^\mu = 0\}$. En la teora clsica se Dirac se escogen funciones gauge χ_μ tales que $\{b^\mu, \chi_\nu\} = C^\mu_\nu$ y $\det C^\mu_\nu \neq 0$. El parntesis de Dirac es simplemente

$$\{q^\alpha, p_\beta\}^\star = \{q^\alpha, p_\beta\} + \sum_{\mu,\nu} \{q^\alpha, \chi_\mu\} C^\mu_\nu \{\chi^\nu, p_\beta\} \ .$$

5.3 Regularizacin Lagrangiana

5.3.1 Regularizacin Hamiltoniana de un sistema Lagrangiano

Supongamos ahora que el sistema presimplctico de partida es (TQ, ω_{L_0}), donde ω_{L_0} es la 2-forma de Cartan asociada con una funcin lagrangiana ordinaria L_0 sobre TQ. La 2-forma ω_{L_0} es degenerada, y siguiendo las lneas del captulo 4, restrinjmonos al caso en que su ncleo $K = \ker \omega_{L_0}$ defina, como antes, una distribucin. Sabemos entonces que K define una distribucin integrable cuyas secciones son el lgebra gauge de la teora. Cuando existe una dinmica globalmente definida Γ (no nica), el espacio fsico de la teora es el espacio cociente TQ/K, que asumiremos es tambin una variedad diferenciable (ver captulo 4).

Podemos aplicar el procedimiento estudiado en la seccin anterior al sistema dinmico Hamiltoniano $(TQ, \omega_{L_0}, E_{L_0})$, donde ahora sabemos que E_{L_0} es proyectable (ver captulo 4 para ms detalles). Tomando el "embedding" coistropo en una variedad simplctica (P, Ω), y el hamiltoniano $H_1 = K_\eta + E_{L_0}$ (5.3), es decir,

$$H_1(q, \dot{q}, b) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(q, \dot{q}) b_\mu b_\nu + \dot{q}^i \frac{L_0}{\dot{q}^i} - L_0 \tag{5.8}$$

donde η es una mtrica fibrada sobre K y (b_μ) denota las coordenadas a lo largo de las fibras de $K^* = (\ker \omega_{L_0})^*$, obtenemos una regularizacin Hamiltoniana del lagrangiano L_0.

Es importante resaltar ahora que P no va a ser necesariamente el fibrado tangente de una variedad N. Lo cual significa que en general no ser posible obtener una descripcin Lagrangiana del sistema regularizado (P, Ω, H). Por otra parte, aunque P s pudiese expresarse como $P \cong TN$, en general suceder que no habr ningn lagrangiano extendido sobre esta variedad tal que la 2-forma Ω (localmente nica salvo simplectomorfismos) sea lagrangiana.

En este apartado demostraremos que si el lgebra gauge es de la forma $\ker \omega_{L_0} = TF$ (que corresponde a un tipo particular de lagrangianos de tipo II en la clasificacin dada en el captulo anterior), donde F es una distribucin integrable sobre Q y TF es la distribucin tangente sobre TQ [Ca86] generada por campos vectoriales de la forma X^C, Y^V, donde $X, Y \in F$ y X^C, Y^V denota los levantamientos completo y vertical de X e Y respectivamente (ver captulo 2), entonces, bajo ciertas condiciones adicionales, P es simplcticamente equivalente al fibrado tangente de un entorno tubular N de la seccin cero del fibrado vectorial $F^* \to Q$, o, en otras palabras, $P \cong TN$. El campo vectorial hamiltoniano regularizado Γ_H puede elegirse para que sea una SODE en TN y el problema inverso para Γ_H puede resolverse para obtener una descripcin Lagrangiana, esto es, una regularizacin Lagrangiana de L_0. Veamos todo esto un poco ms despacio.

Recordemos primero una serie de propiedades acerca de las distribuciones tangentes. En primer lugar, para dos campos cualesquiera X e Y sobre Q, sus levantamientos completo y vertical satisfacen las reglas de conmutacin

$$[X^C, Y^C] = [X, Y]^C, \quad [X^V, Y^C] = [X, Y]^V, \quad [X^V, Y^V] = 0, \tag{5.9}$$

y

$$\mathop{}^{L}_{X^C} S =^{L}_{X^V} S = 0. \tag{5.10}$$

Por otra parte, si L_0 es un lagrangiano degenerado tal que para un cierto campo vectorial $X \in X(Q)$ se tiene que $X^C \in \ker \omega_{L_0}$, entonces $X^V = S(X^C) \in \ker \omega_{L_0}$. Adems, teniendo en cuenta las relaciones anteriores y la integrabilidad de $\ker \omega_{L_0}$, se obtiene que el conjunto $F = \{X \in X(Q) \mid X^C \in \ker \omega_{L_0}\}$ define una distribucin integrable. Pues bien, diremos que $\ker \omega_{L_0}$ es una distribucin tangente si existe una distribucin F sobre Q tal que $\ker \omega_{L_0}$ est generado por los levantamientos completos y verticales de los campos de F; tal distribucin se denotar por TF, y claramente, si $\ker \omega_{L_0}$ es una distribucin tangente, admitir una base local de la forma $X_1^C, X_2^C, \ldots, X_k^C, X_1^V, X_2^V, \ldots, X_k^V$ para algunos campos vectoriales X_i sobre Q. Puesto que $S(X_i^C) = X_i^V$ se ve fcilmente que $S(\ker \omega_{L_0}) = V(\ker \omega_{L_0})$, y en consecuencia un lagrangiano para el cual $\ker \omega_{L_0}$ sea una distribucin tangente ser necesariamente de tipo II.

La importancia de que un lagrangiano sea tal que su ncleo venga dado por una distribucin tangente (esto es, $\ker \omega_{L_0} = TF$) reside en que los nicos candidatos para admitir una reduccin Lagrangiana regular (ver [Ca86] para ms detalles) son los lagrangianos que tienen precisamente esta propiedad. Para un lagrangiano L_0 de este tipo puede demostrarse que L_0 induce un sistema Lagrangiano regular sobre el espacio cociente $TQ/\ker \omega_{L_0}$. As, por ejemplo, la estructura casi tangente integrable S sobre TQ proyecta en una estructura casi tangente integrable $\tilde{S}$ sobre $TQ/\ker \omega_{L_0}$. Adems, F define una distribucin integrable en Q, y si suponemos que $N = Q/F$ es una variedad diferenciable, entonces TQ/K puede identificarse cannicamente con $T(Q/F) = TN$ donde, si denotamos por $\pi : Q \to Q/F = N$ la submersin suprayectiva definida por la distribucin F, entonces $\pi_{L_0} = \pi_*$. Por ltimo, quisiramos resaltar que si $\ker \omega_{L_0} = TF$, entonces la 1-forma de Cartan θ_{L_0} ser proyectable si y solamente si el lagrangiano L_0 tambin lo es.

De todas las observaciones anteriores se puede intuir que los lagrangianos singulares cuyo ncleo sea una distribucin tangente van a ser los candidatos naturales sobre los cuales podamos plantearnos su posible regularizacin en un espacio en el cual estn inmersos coistropamente. Asumiremos por tanto en todo lo que sigue que el ncleo de la 2-forma de Cartan es una distribucin tangente, esto es, $\ker \omega_{L_0} = TF$.

Antes de continuar, fijemos la notacin. En primer lugar, sobre Q existe un sistema de coordenadas locales adaptadas $q^a = (x^i, f^\mu)$, donde x^i es un sistema local de coordenadas en N, $\pi(q^a) = x^i$, y f^μ son coordenadas locales sobre las hojas de F. Entonces sobre TQ existen unas coordenadas locales adaptadas a TF dadas por $(q^a, \dot{q}^a) = (x^i, \dot{x}^i; f^\mu, \dot{f}^\mu)$, con $(x^i, \dot{x}^i)$ coordenadas locales en TN y $(f^\mu, \dot{f}^\mu)$ coordenadas locales en las fibras de $K = TF$.

Definamos $K^* = (TF)^*$. Las coordenadas a lo largo de las fibras de K^* se denotarn por $b_\mu = (g_\mu, \dot{g}_\mu)$, correspondientes a un sistema dual al definido por $(f^\mu, \dot{f}^\mu)$ en K.

En consecuencia, podemos tomar el sistema de coordenadas locales en P adaptado a K y K^* dado por

$$(x^i, \dot{x}^i; f^\mu, \dot{f}^\mu; g_\mu, \dot{g}_\mu). \tag{5.11}$$

La 2-forma simplctica Ω en P puede escribirse entonces como

$$\Omega = \omega_{L_0} + df^\mu \wedge dg_\mu + d\dot{f}^\mu \wedge d\dot{g}_\mu. \tag{5.12}$$

5.3.2 Estructura tangente de P

Consideremos ahora la variedad M definida como un entorno tubular de la seccin cero de $F^* \to Q$. Sobre M pueden tomarse las coordenadas locales $(q^a, g_\mu) = (x^i, f^\mu, g_\mu)$. Sea TM su fibrado tangente con coordenadas locales $(x^i, f^\mu, g_\mu; \dot{x}^i, \dot{f}^\mu, \dot{g}_\mu)$. Existe entonces un difeomorfismo

$$\Phi : TM \longrightarrow P \tag{5.13}$$

localmente definido por $\Phi(x^i, f^\mu, g_\mu; \dot{x}^i, \dot{f}^\mu, \dot{g}_\mu) = (x^i, \dot{x}^i; f^\mu, g_\mu; \dot{f}^\mu, \dot{g}_\mu)$. Observemos que, respecto de (5.11), Φ intercambia $\dot{f}^\mu$ con g_μ.

Si bien esta definicin del difeomorfismo $\Phi : TM \to P$ que dota a la variedad P de la estructura de una variedad tangente (al menos localmente) es la que utilizaremos ms adelante, se hace necesario dar una definicin intrnseca de Φ para estudiar la globalidad del difeomorfismo. Con este fin, probaremos primero el siguiente lema:

Sea $X \hookrightarrow Y$ una subvariedad de Y, y $\phi : X \to X$ un difeomorfismo. Si $A : T_X Y \to T_X Y$ es un isomorfismo de espacios vectoriales tales que $A|_{TX} = T\phi$, entonces existe un entorno U de X en Y y un difeomorfismo $\Phi : U \to U$ tal que $\Phi|_X = \phi$ y $\Phi_*|_{T_X Y} = A$.

Dem: Sea g una mtrica en Y. Entonces puede hacerse la descomposicin $T_X Y \cong TX \oplus TX^\perp$. Tomemos η_t el spray geodsico definido por g, y definamos la aplicacin exponencial

$$\begin{array}{rcl} \exp : TX^\perp & \longrightarrow & Y \\ v & \mapsto & \eta_1(v) \end{array}$$

donde $\eta_t(v)$ es la geodsica de g tal que $\dot{\eta}_0(v) = v$.

La aplicacin exp es un difeomorfismo a lo largo de X. Por lo tanto existen entornos tubulares U de X en Y y W de X en $TX^{\perp}$ que son difeomorfos. Definamos $\Phi(\eta_1(v)) = \eta_1(Av)$, para todo $v \in U$. Claramente, Φ es un difeomorfismo tal que $\Phi_*|_{T_X Y} = A$.

Consideremos ahora la submersin $Q \xrightarrow{\pi} N$, con $N = Q/F$, y supongamos que F es tal que existe un "embedding" $i : N \to Q$ tal que $\pi \circ i =_N$, esto es, suponemos que π admite una seccin diferenciable global. Diremos en tal caso que L es un lagrangiano de tipo II *regularizable*. En tal caso, N estar "embedded" en M a travs de

$$N \overset{i}{\hookrightarrow} Q \to M, \tag{5.14}$$

"embedding" que denotaremos por

$$N \overset{l}{\hookrightarrow} M, \tag{5.15}$$

y que est dado por la composicin del "embedding" $i : N \to Q$ con el "embedding" natural de Q en M obtenido tomando la seccin cero del fibrado vectorial $F^* \to Q$.

La aplicacin $Tl : TN \to TM$ nos da entonces el "embedding" buscado de TN en TM. De manera semejante puede definirse el "embedding" de TN en P, simplemente tomando la composicin

$$TN \overset{Ti}{\hookrightarrow} TQ \hookrightarrow P. \tag{5.16}$$

Falta por definir $A : T_{TN}TM \to T_{TN}P$. Claramente

$$T_{TN}(TM) = T(TN) \oplus T(F \oplus F^*) = T(TN) \oplus F \oplus F^* \oplus F \oplus F^*,$$

con coordenadas locales (v, a, α, b, β); y

$$T_{TN}P = T(TN) \oplus TF \oplus (TF)^* = T(TN) \oplus F \oplus F \oplus F^* \oplus F^*.$$

As pues, podemos definir la aplicacin

$$A(v, a, \alpha, b, \beta) = (v, a, b, \alpha, \beta)$$

para cada $v \in T(TN)$, $a, b \in F$ y $\alpha, \beta \in F^*$.

Se tiene que $A|_{T(TN)} =$. Por lo tanto, aplicando el lema anterior, $\phi : TN \to TN$, que es la identidad en TN, junto con A definen un difeomorfismo de un entorno de TN en TM en un entorno de TN en P.

As pues, hemos demostrado que si (TQ, ω_{L_0}) es una variedad presimplctica tal que $\ker \omega_{L_0} = TF$, es decir, el ncleo de la 2-forma de Cartan es una distribucin tangente, entonces si $j : (TQ, \omega_{L_0}) \to (P, \Omega)$ es un "embedding" coistropo, P es difeomorfa a una variedad tangente TM.

5.3.3 Construccin de la estructura simplctica en TM

Una vez construido el difeomorfismo $\Phi : TM \to P$, podemos considerar la 2-forma simplctica $\tilde{\Omega} = \Phi^*\Omega$ sobre TM dada por el "pull-back" de la forma Ω sobre P. En coordenadas locales adaptadas, $\tilde{\Omega}$ tiene la expresin

$$\tilde{\Omega} = \omega_{L_0} + df^\mu \wedge d\dot{f}^\mu + dg_\mu \wedge d\dot{g}_\mu. \tag{5.17}$$

La estructura tangente sobre TM es, en estas coordenadas,

$$S_M = dx^i \otimes \frac{}{\dot{x}^i} + df^\mu \otimes \frac{}{\dot{f}^\mu} + dg_\mu \otimes \frac{}{\dot{g}_\mu}. \tag{5.18}$$

La pregunta a responder es si la 2-forma simplctica $\tilde{\Omega}$ puede ser lagrangiana. Para ello, recordemos que el problema inverso en la mecnica Lagrangiana establece que la condicin necesaria y suficiente para que un campo vectorial Γ_1 de tipo ecuacin diferencial de segundo orden sobre TM sea equivalente al campo solucin de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un cierto lagrangiano L_1 es que exista una 2-forma $\tilde{\Omega}$ que cumpla las siguientes condiciones [Cr81][He82a]:

i) $\tilde{\Omega}$ es cerrada y no degenerada.

ii) ${}^{L}_{\Gamma}\tilde{\Omega} = 0$.

iii) $\tilde{\Omega}(V_1, V_2) = 0$ para todo par de campos verticales V_1 y V_2.

En primer lugar, $\tilde{\Omega}$ es cerrada y no degenerada por construccin. Adems, si tomamos la distribucin vertical en TM generada por los campos $V_M = \langle /\dot{x}^i, /\dot{f}^\mu, /\dot{g}_\mu \rangle$, es evidente que $\tilde{\Omega}$ se anula en $V_M \wedge V_M$.

Ahora podemos tomar el "pull-back" bajo $\Phi : TM \to P$ del hamiltoniano H_1 a TM. Recordemos que H_1 tiene la expresin local

$$H_1(q, \dot{q}, b) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} b_\mu b_\nu + H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} b_\mu \eta^{\mu\nu} b_\nu + E_{L_0}(q, \dot{q}).$$

Como E_L es proyectable, en las coordenadas $(x^i, \dot{x}^i; f^\mu, \dot{f}^\mu; g_\mu, \dot{g}_\mu)$ de P

$$\begin{aligned} H_1(x, \dot{x}; f, \dot{f}; g, \dot{g} &= \frac{1}{2}(g, \dot{g}) \left(\begin{array}{c|c} \eta_{00} & \eta_{01} \\ \hline \eta_{10} & \eta_{11} \end{array} \right) \begin{pmatrix} g \\ \dot{g} \end{pmatrix} + E_L(x, \dot{x}) = \\ &= \frac{1}{2} g \cdot \eta_{00} \cdot g + \frac{1}{2}\dot{g} \cdot \eta_{11} \cdot \dot{g} + g \cdot \eta_{01} \cdot \dot{g} + E_L(x, \dot{x}). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Haciendo el "pull-back" por Φ obtenemos

$$\begin{aligned} E_1 &= \Phi^* H_1(x, \dot{x}; f, \dot{f}; g, \dot{g}) = \frac{1}{2}\dot{f} \cdot \eta_{00}(x, \dot{x}, f, g) \cdot \dot{f} + \\ &+ \frac{1}{2}\dot{g} \cdot \eta_{11}(x, \dot{x}, f, g) \cdot \dot{g} + \dot{f} \cdot \eta_{01}(x, \dot{x}, f, g) \cdot \dot{g} + E_L(x, \dot{x}). \end{aligned} \tag{5.20}$$

De la forma de E_1 puede concluirse que el campo solucin Γ_1 de la ecuacin dinmica $i_{\Gamma_1}\tilde{\Omega} = dE_1$ es una SODE, y entonces E_1 define la energa de una lagrangiano regular (local) L_1 cuya SODE asociada es la imagen por Φ_*^{-1} de $\tilde{\Gamma}_{H_1}$. Observemos que $\Phi_*^{-1}\tilde{\Gamma}_{H_1} = \Gamma_{\Phi_* H_1}$, luego $\Phi^* H_1$ es la energa (o hamiltoniano) del campo $\Phi_*^{-1}\tilde{\Gamma}_{H_1}$ respecto de la 2-forma $\Phi^*\Omega = \tilde{\Omega}$. Por otro lado, como ${}^{L}_{\tilde{\Gamma}_{H_1}}\Omega = 0$, entonces ${}^{L}_{\Gamma_1}\tilde{\Omega} = 0$, ya que

$$0 = \Phi^*({}^{L}_{\tilde{\Gamma}_{H_1}}\Omega) ={}^{L}_{\Phi_*^{-1}\tilde{\Gamma}_{H_1}} (\Phi^*\Omega) ={}^{L}_{\Gamma_1} \tilde{\Omega}.$$

Por tanto, $\tilde{\Omega}$ satisface las propiedades que garantizanla existencia de un lagrangiano local (regular) L_1 tal que $\tilde{\Omega}$ sea precisamente la 2-forma de Cartan asociada con L_1, y con SODE solucin de las ecuaciones de Euler-Lagrange la imagen por Φ_*^{-1} de $\tilde{\Gamma}_{H_1}$.

Chapter 6

Simetra BRST clsica y Reduccin

6.1 Introduccin

Desde su descubrimiento por Becchi, Rouet, Stora [Be74] y Tyutin [Ty75], la transformacin de BRST ha mostrado ser una herramienta de gran utilidad en el proceso de cuantificacin de sistemas con simetras gauge. De hecho, y a diferencia de los procedimientos de cuantificacin ms tradicionales, como la cuantificacin geomtrica, la cuantificacin BRST trata especficamente con sistemas dinmicos singulares, donde la naturaleza singular viene dada por la presencia de una simetra gauge local. Es importante resaltar que, si bien en su nacimiento se circunscriba al contexto de campos gauge de tipo Yang-Mills, puede aplicarse (como haremos nosotros) al contexto mucho ms general de teoras gauge con lgebras abiertas.

Una propiedad importante de la construccin BRST es que puede comprenderse completamente dentro de la mecnica clsica. La existencia de la simetra de BRST describe la estructura de las superficies de primera clase en el espacio de fases, y por tanto es, desde un punto de vista conceptual, previa a la mecnica cuntica. Dentro del contexto Lagrangiano estudiado en el captulo anterior, la simetra BRST nos dara una nueva descripcin del espacio reducido, o, lo que es lo mismo, del lgebra de funciones sobre el mismo.

La idea bsica de este mecanismo consiste en introducir unos grados de libertad adicionales (no fsicos), los comnmente llamados fantasmas, y sustituir la simetra gauge local por una supersimetra global, la simetra BRST, generada por un slo operador, el operador de BRST, cuyo cuadrado se anule, definiendo de esta manera una teora de cohomologa, la cohomologa BRST. El papel de este operador de BRST es caracterizar los verdaderos estados fsico de la teora, como describiremos a lo largo de este captulo.

Nosotros nos vamos a concentrar en principio en cohomologas BRST clsicas para teoras gauge con un nmero finito de grados de libertad. Sin embargo, la mayor parte de las construcciones que aqu se harn pueden extenderse de manera natural a teoras de campos, como veremos en algn ejemplo concreto.

Existen varias versiones diferentes de la tcnica BRST. En general se ha adoptado siempre un punto de vista Hamiltoniano (ver, por ejemplo, los trabajos de Henneaux [He85],[He88a],[He88b]). En estos trabajos se muestra tambin cmo el procedimiento BRST puede extenderse a sistemas dinmicos graduados sin mayores problemas. Podramos decir que existen varias descripciones diferentes, cada una de ellas con sus pros y sus contras. Una de ellas es la de Kostant y Sternberg [Ko87], donde se engloba la transformacin BRST dentro del contexto de los sistemas Hamiltonianos clsicos finito dimensionales (G-espacios Hamiltonianos) y la reduccin simplctica. La desventaja de este procedimiento est en que no es satisfactorio para estudiar sistemas dinmicos degenerados, y por tanto sistemas Lagrangianos singulares. Por otro lado, los trabajos de Henneaux *et al* [He88b],[Fi89] son una generalizacin de la construccin de [Ko87], si bien en una lnea algo diferente. Por ltimo, recientemente ha surgido una nueva interpretacin al problema [Fo92] que s permite considerar ciertos sistemas degenerados. Describamos brevemente las ideas subyacentes a este procedimiento.

En primer lugar, y de forma similar a como se hace en el formalismo Hamiltoniano, se considera una variedad diferenciable M y una subvariedad C de la anterior definida por un cierto conjunto de funciones de ligadura. Supongamos que estas ligaduras pueden describirse a travs de una funcin ϕ con valores en un cierto espacio vectorial $\phi : M \to V^*$ de forma que C aparezca como el conjunto de nivel cero de la aplicacin ϕ:

$$C = \phi^{-1}(\mathbf{0}) \ . \tag{6.1}$$

Adems se debe imponer alguna condicin de regularidad adicional, como por ejemplo que $\mathbf{0} \in V^*$ sea al menos un valor dbilmente regular de ϕ. Expliquemos ms detalladamente este punto. Recurdese primero que $\mathbf{0} \in V^*$ se dice que es un valor regular de ϕ si para todo punto $m \in C$ la aplicacin tangente $T_m\phi$ a ϕ en m, vista como una aplicacin lineal del espacio tangente T_mM de M en m en el espacio vectorial V^*, es sobreyectiva. Como es bien conocido, ello implica, por una lado, que C sea una subvariedad de M, y adems, para todo punto $m \in C$, el espacio tangente T_mC de C en m coincidir con el ncleo de $T_m\phi$ en T_mM:

$$T_mC = \ker T_m\phi \ . \tag{6.2}$$

Sin embargo, esta condicin de regularidad es frecuentemente demasiado fuerte, y en general bastar con que se cumplan las propiedades anteriores. As, se dice que $\mathbf{0} \in V^*$ es un valor dbilmente regular de ϕ si

a) C es una subvariedad de M, y

b) para cada punto $m \in C$, el espacio tangente T_mC de C en m coincide con el ncleo de $T_m\phi$.

Ntese en este punto que si nos hubisemos limitado a requerir que C fuera una subvariedad de M, entonces, para todo punto $m \in C$, el espacio tangente T_mC sera automticamente un subespacio del ncleo de $T_m\phi$ en T_mM, esto es,

$$T_mC \subset \ker T_mC \ ,$$

de forma que slo tendramos que imponer la inclusin recproca. Utilizando otro lenguaje ms familiar, diremos que el conjunto de ligaduras definidas por ϕ_i son irreducibles cuando $\mathbf{0} \in V^*$ sea un valor regular; y las llamaremos reducibles si el $\mathbf{0}$ es un valor dbilmente regular, pero no regular.

Hasta aqu, los datos de partida son similares al procedimiento de Henneaux *et al* citado anteriormente. La diferencia surge cuando hay que decidir cules son los aspectos geomtricos que se consideran relevantes. Las construcciones de Henneaux *et al* [He88b],[Fi89] se centran en la geometra simplctica del espacio. Esto es, se supone que M es una variedad simplctica y C una subvariedad coistropa de M (es decir, las ligaduras son de primera clase). En consecuencia, este formalismo, si bien suficiente para describir los sistemas dinmicos Hamiltonianos, no es extendible a sistemas presimplcticos. La otra forma de abordar el problema, debida a Forger y Kellendok [Fo92], no hace ninguna referencia a la existencia o no de una estructura simplctica sobre la variedad M, sino que supone la existencia de una accin sobre M y una representacin sobre V^* de un grupo de Lie G que haga la aplicacin ϕ G-covariante. La ventaja del mtodo simplctico est en que extiende de una manera natural lo que se conocen como lgebras gauge abiertas (caracterizadas por el hecho de que los parntesis de Poisson entre las ligaduras involucran funciones de estructura, y no constantes de estructura), mientras que este segundo puede aplicarse en principio a ciertos sistemas singulares y, haciendo las modificaciones oportunas, extenderse al contexto Lagrangiano, como vamos a ver. Por supuesto, ambos procedimientos coincidirn en muchas situaciones. Por ejemplo, ambos son aplicables a espacios G-Hamilonianos con ϕ la aplicacin momento (reproducindose por tanto los resultados dados en [Ko87]). Aunque slo sern completamente idnticos en el caso regular o irreducible, esto es, cuando la accin de G sobre C sea casi libre, debido a que slo entonces la construccin dada en [Ko87] produce el operador BRST correcto.

Lo realmente interesante para nosotros ser cmo conjugar los diversos formalismos BRST (el Hamiltoniano de Henneaux et al., el de Forger-Kellendok y una modificacin-extensin de este ltimo que vamos a definir) con los resultados expuestos en el captulo anterior para obtener un marco global donde estudiar los sistemas Lagrangianos singulares o sistemas presimplcticos en general utilizando las tcnicas de la cohomologa BRST. Esto es, supongamos que nos es dado un sistema dinmico sobre una variedad presimplctica (M, ω, α) tal que la ecuacin

$$i_\Gamma \omega = \alpha \tag{6.3}$$

tiene solucin (no nica) sobre M. Entonces, claramente, habr una serie de grados de libertad gauge generados por el ncleo de la 2-forma ω. Sobre este sistema dinmico aplicaremos un nuevo formalismo BRST para describir el lgebra de funciones sobre el espacio reducido $M/\ker\omega$ a travs de la cohomologa BRST. Por otro lado, tambin es posible proceder mediante la regularizacin Hamiltoniana descrita en el captulo 5 para obtener un sistema dinmico localmente Hamiltoniano $(P, \Omega, \tilde{\alpha})$, y aplicar ahora los mecanismos BRST ya conocidos para describir el espacio de fases reducido. Por ltimo, dentro de este contexto Hamiltoniano, faltara relacionar ambos procedimientos (el aplicado directamente sobre el espacio de fases original con el obtenido tras la regularizacin Hamiltoniana).

Dentro ya del contexto puramente Lagrangiano, podramos preguntarnos bajo qu condiciones existira una formulacin Lagrangiana en los diversos pasos que fusemos dando. En este punto supondremos que el ncleo de la 2-forma de Cartan es una distribucin tangente. En tal caso, siguiendo los pasos del captulo anterior, sabemos que existe una regularizacin Lagrangiana del espacio de fases original. De nuevo puede realizarse la construccin BRST y veremos cmo puede obtenerse en este caso un superlagrangiano extendido del inicialmente dado sobre una supervariedad tangente [Ib93a],[Ib93a]. Podemos dibujar el siguiente diagrama que expresa todos estos pasos posibles que acabamos de describir:

Esquema clsico		**Formalismo BRST**
L lagrangiano singular, (TQ, ω_L, E_L)	$\longrightarrow$	Forger-Kellendok generalizado
$\downarrow$		$\downarrow$
Regularizacin Hamiltoniana, (P, Ω, H)	$\longrightarrow$	BRST Hamiltoniana
$\downarrow$		$\downarrow$
Regularizacin Lagrangiana	$\longrightarrow$	BRST Lagrangiana

El programa de este captulo es como sigue. En el apartado siguiente describiremos la construccin abstracta del complejo BRST de Forger y Kellendok [Fo92], asumiendo que estamos tratando con un conjunto irreducible de ligaduras, esto es $\mathbf{0} \in V^*$ es un valor regular. La seccin 3 ser dedicada a generalizar el formalismo anterior para comprender sistemas dinmicos presimplcticos. En la seccin 4 nos centraremos en la parte puramente Hamiltoniana del diagrama anterior, para ya en el apartado 5 particularizar al caso Lagrangiano. En concreto, asumiremos que los grados de libertad gauge vienen generados por una distribucin tangente. Por supuesto, iremos comparando los resultados obtenidos mediante la diferentes tcnicas de BRST en cada caso.

6.2 Construccin de Forger-Kellendok del complejo BRST

El objetivo de este captulo es explicar cmo el lgebra de las funciones invariantes sobre una variedad de ligaduras puede describirse en trminos de grupos de cohomologa. Para ello supongamos que podemos describir las ligaduras a travs de la aplicacin ϕ como en el apartado anterior. Como veremos, esto no ser en general posible en el formalismo lagrangiano, si bien no ser difcil generalizar estos resultados para incluirlo.

Con estos supuestos, lo que se mostrar es que esta lgebra puede identificarse con el grupo de cohomologa de grado cero para el operador diferencial $D = d_1 + d_2$ definido en un doble complejo (S, d_1, d_2), el cual se obtiene como el producto tensorial del complejo de de Rham de un lgebra de Lie $(\Lambda g^*, d_2)$ con un cierto complejo de Koszul (K, d_1). La construccin completa combina tanto aspectos puramente algebraicos con otros ms geomtricos. Comencemos con los primeros.

En primer lugar, sean g un lgebra de Lie de dimensin finita, Λg^* el lgebra exterior o de Grassmann sobre su dual g^*, y tomemos la nica derivacin d_2 de grado 1 sobre Λg^* que satisfaga

$$d_2\alpha(\xi, \eta) = -(\alpha, [\xi, \eta]) \tag{6.4}$$

para todo $\alpha \in g^*$, $\xi, \eta \in g$. Entonces $d_2^2 = 0$, y por tanto $(\Lambda g^*, d_2)$ es un complejo

$$0 \rightarrow\xrightarrow{d_2} g^* \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_2} \Lambda^i g^* \xrightarrow{d_2} \Lambda^{i+1} g^* \xrightarrow{d_2} \cdots \tag{6.5}$$

cuya cohomologa es, por definicin, la cohomologa de Chevalley de g (como lgebra de Lie). Este complejo del lgebra de Lie $(\Lambda g^*, d_2)$ est dotado de una Z graduacin, con una estructura de lgebra conmutativa graduada, la cual es libremente generada por un nmero finito de generadores de grado 1; es conexa en el grado cero, es decir, satisface que $\Lambda^0 g^* =$; y adems est dotado con un operador diferencial de grado cero. Pues bien, puede demostrarse que, recprocamente, todo complejo con estas propiedades proviene de una cierta lgebra de Lie finito dimensional (dado un complejo con estas caractersticas, se recurre a (6.4) para definir el parntesis de Lie, y la identidad de Jacobi se deduce de que $d_2^2 = 0$).

A continuacin, asumamos que (K, d_1) es otro complejo, consistente en un lgebra conmutativa Z-graduada K, junto con un operador diferencial d_1 de grado 1, de forma que sobre K acte una representacin ρ_K de g (por derivaciones de grado cero) bajo la cual d_1 sea covariante, es decir,

$$\rho_K(\xi)(d_1(k)) = d_1(\rho_K(\xi)k) \tag{6.6}$$

para cada $k \in K$, $\xi \in g$.

Diremos que (K, d_1) es un complejo de Koszul si es acclico, esto es, si su cohomologa es trivial excepto posiblemente en grado cero:

$$H^i_{d_1}(K) = 0 \text{ para } i \neq 0. \tag{6.7}$$

Tomando entonces el producto tensorial graduado de K con Λg^* obtenemos el lgebra conmutativa graduada $S = K \otimes \Lambda g^*$. De hecho, S viene dotada de una doble graduacin $Z \times Z$, y por tanto es tambin simplemente graduada (Z-graduada) respecto del grado total definido como la suma de las dos componentes de la doble graduacin. Explcitamente,

$$S = \oplus_{k \in Z} S^k \quad , \quad S^k = \oplus_{i+j=k} S^{i,j} \quad , \quad S^{i,j} = K^i \otimes \Lambda^j g^*. \tag{6.8}$$

Adems, tanto d_1 como d_2 pueden extenderse a unos nicos operadores diferenciales d_1 y d_2, de bigrados $(1, 0)$ y $(0, 1)$, sobre S, simplemente haciendo que d_1 acte trivialmente sobre el segundo factor (esto es, $d_1(k \otimes \alpha) = d_1(k) \otimes \alpha$ para todo $k \in K$, $\alpha \in \Lambda g^*$), y requiriendo que d_2 satisfaga

$$(-1)^{|k|}(d_2 k)(\xi) = \rho_K(\xi)k \tag{6.9}$$

para cada $k \in K$ de grado $|k|$ (por supuesto, estamos identificando k con $k \otimes 1$). Adems, resulta que la condicin de g-covariancia para d_1 es equivalente a requerir que d_1 y d_2 anticonmuten sobre S, o que $D = d_1 + d_2$ sea tal que $D^2 = 0$ sobre S, de forma que con las condiciones que hemos impuesto (S, d_1, d_2) es un complejo doble y (S, D) es un complejo. Cada uno de los tres operadores diferenciales d_1, d_2 y D sobre S definen su propia cohomologa $H_{d_1}(S)$, $H_{d_2}(S)$ y $H_D(S)$, las cuales por supuesto no sern independientes. Sin embargo, a pesar de que la relacin entre d_1, d_2 y D es muy sencilla, no ocurre lo mismo en la relacin entre las cohomologas: puede determinarse a travs de la tcnica standard pero bastante tediosa y complicada de la topologa algebraica conocida con el nombre de secuencias espectrales (ver, por ejemplo, [Bo82]). En este contexto el requerimiento de que el complejo (K, d_1) sea acclico revela su capital importancia simplificadora, pues en tal caso puede demostrarse que la sucesin espectral colapsa en el trmino E_2 [Bo82], lo cual significa que

$$H^k_D(S) = H^k_{d_2}(H^0_{d_1}(S)). \tag{6.10}$$

Aqu, la igualdad se entiende en un sentido abstracto, esto es, satisfecha salvo isomorfismos. Concretamente, encontrar el elemento de $H^k_D(S)$ que corresponda a un elemento dado de $H^k_{d_2}(H^0_{d_1}(S))$ bajo este isomorfismo conduce a resolver explcitamente lo que se conocen como ecuaciones descendentes. A continuacin, asumiremos que se ha hecho una eleccin apropiada para el complejo de Koszul (K, d_2) y llamaremos al triplete (S, d_1, d_2) el doble complejo BRST, (S, D) el complejo BRST con D el operador de BRST.

Antes de continuar, desearamos resaltar que incluso olvidando todas las estructuras algebraicas sobre K, es decir, la operacin producto, la graduacin y el operador diferencial d_1, todava se obtiene un complejo

$$0 \to K \xrightarrow{d_2} K \otimes g^* \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_2} K \otimes \Lambda^i g^* \xrightarrow{d_2} K \otimes \Lambda^{i+1} g^* \xrightarrow{d_2} \cdots \tag{6.11}$$

cuya cohomologa es, por definicin, la cohomologa de g (como lgebra de Lie) con coeficientes en K; en particular, la cohomologa de grado cero da precisamente los elementos g-invariantes de K:

$$H^0_{d_2}(S) = K^g. \tag{6.12}$$

En particular, este resultado puede aplicarse sustituyendo K por $H^0_{d_1}(K)$, para obtener

$$H^0_{d_2}(H^0_{d_1}(S)) = H^0_{d_2}(H^0_{d_1}(K) \otimes \Lambda g^*) = (H^0_{d_1}(K))^g, \tag{6.13}$$

donde la primera igualdad se deduce del hecho de que d_1 acta trivialmente sobre Λg^*.

Salvo por la condicin de ser una representacin del lgebra de Lie g, el complejo de Koszul (K, d_1) es completamente arbitrario. Comnmente, sin embargo, se construye a partir de datos ms elementales, sugeridos por la situacin concreta de cada caso. En esta seccin elegiremos una construccin que luego generalizaremos en el apartado siguiente.

Sea V un espacio vectorial de dimensin finita, y sea R un lgebra conmutativa con unidad, siendo ambos representaciones de g, que denotaremos por ρ_V y ρ_R, respectivamente. Tomemos una aplicacin lineal g-covariante $d_1 : V \to R$ de V en R. Definamos entonces K como el lgebra conmutativa Z-graduada $K = R \otimes \Lambda V$, y extindase d_1 a una nica derivacin d_1 de grado 1 sobre K haciendo que acte trivialmente sobre R. As, en particular,

$$d_1(r \otimes v) = r d_1(v) \ , \quad \forall r \in R, \ \forall v \in V. \tag{6.14}$$

Entonces $d_1^2 = 0$, y por tanto (K, d_1) es un complejo

$$\cdots \xrightarrow{d_1} R \otimes \Lambda^i V \xrightarrow{d_1} R \otimes \Lambda^{i-1} V \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_1} R \otimes V \xrightarrow{d_1} R \xrightarrow{d_1} 0 \tag{6.15}$$

cuya cohomologa de grado cero viene dada por

$$H^0_{d_1}(K) = R / R \cdot d_1(V). \tag{6.16}$$

Ntese que para que d_1 tenga grado $+1$ (y no -1), debemos considerar K con la graduacin opuesta,

$$K^i = R \otimes \Lambda^{-i} V. \tag{6.17}$$

En adicin, observemos que las representaciones dadas ρ_V de g sobre V y ρ_R de g sobre R (por derivaciones) dan lugar a una representacin ρ_K de g sobre K (por derivaciones de grado cero) y que el hecho de que d_1 sea covariante como aplicacin lineal de V en R conduce a que d_1 sea covariante como operador diferencial sobre K. Por tanto slo falta por ver si el complejo resultante es realmente acclico. La importancia de esta condicin ya la hemos explicado anteriormente, y ms adelante discutiremos las caractersticas que debe tener d_1 para que estemos en esa situacin. Pero incluso en el caso de que d_1 no tenga cohomologa trivial en grado distinto de cero, existe un camino para construir un complejo acclico, el cual es una extensin del complejo $(R \otimes \Lambda V, d_1)$ considerado aqu. Este mtodo puede aplicarse al menos sobre anillos Noetherianos.

Centrndonos ahora en la parte ms geomtrica, nos gustara saber cmo utilizar la cohomologa BRST para describir el lgebra de las funciones invariantes sobre una variedad de ligaduras, ligando de esta manera los conceptos algebraicos con los geomtricos. Con este fin, supongamos dado un grupo de Lie conexo G con lgebra de Lie g, y sea M una varidad diferenciable sobre la que acta G. Sea R el lgebra de las funciones diferenciables sobre M, $R = C^\infty(M)$. La accin de G sobre M induce una representacin de g sobre $C^\infty(M)$ por derivaciones, la cual viene dada asociando a cada generador $\xi \in g$ de G la derivada de Lie con el signo cambiado a lo largo de los campos fundamentales ξ_M sobre M. Recordemos que los campos fundamentales ξ_M correspondientes a ξ se definen a travs de la relacin $\xi_M(m) = \frac{d}{dt}(g_t(\cdot m)|_{t=0}$, donde g_t es una curva en G con $g_0 = 1$ y $\dot{g}_0 = \xi$. As, $\rho_{C^\infty(M)}(\xi) = -\xi_M$.

Sea V un espacio vectorial de dimensin finita sobre el que acta g por una representacin ρ_V, y tomemos su dual V^* con la representacin dual contragradiente ρ_V^* de g. Asumamos que tenemos tambin una aplicacin g-covariante (ρ_V^*-equivariante)

$$\phi : M \longrightarrow V^* \tag{6.18}$$

de M en V^*, o, equivalentemente, una aplicacin lineal g-covariante (ρ_V^*-equivariante)

$$d_1 : V \longrightarrow C^\infty(M) \tag{6.19}$$

de V en $C^\infty(M)$. Estas dos aplicaciones estn relacionadas como sigue:

$$d_1(v)(m) = \phi(m)(v) \ , \forall m \in M, \ v \in V. \tag{6.20}$$

Uno podra realmente escribir d_1^* en lugar de ϕ. Esta notacin vendra justificada por el hecho de que los puntos de M son precisamente los puntos de $C^\infty(M)$ como lgebra conmutativa, es decir, los homomorfismos continuos de $C^\infty(M)$ en . As que en este sentido M puede considerarse como el dual de $C^\infty(M)$ y d_1^* como el dual de d_1.

El conjunto de nivel cero C de ϕ, $C = \phi^{-1}(\mathbf{0})$, puede verse como un conjunto de ligaduras inmerso en M, siendo las ligaduras las funciones $\phi_i = d_1(v_i)$ respecto de una cierta base $\{v_i\}$ de V. Debido a la expresin (6.16), $H^0_{d_1}(K)$ proyecta sobre $C^\infty(C)$, el lgebra de las funciones sobre C (dado que $C^\infty(C) = C^\infty(M)/C_0^\infty(C)$, donde $C_0^\infty(C)$ es el ideal de las funciones en M que se anulan sobre C). En este contexto surgen de manera natural tres cuestiones, que seran las siguientes: bajo qu condiciones se cumplir que

- C sea una subvariedad de M,
- $H^0_{d_1}(K)$ coincida con $C^\infty(C)$, y
- el complejo $(C^\infty(M) \otimes \Lambda V, d_1)$ sea acclico?

A continuacin veremos que estas tres cuestiones tienen respuestas muy naturales, como se demuestra en las dos proposiciones siguientes.

Si $\mathbf{0} \in V^*$ es un valor dbilmente regular de ϕ, entonces C es (por definicin) una subvariedad de M y $C_0^\infty(C) = C^\infty(M)d_1(V)$, lo cual implica que

$$H^0_{d_1}(C^\infty(M) \otimes \Lambda V) = C^\infty(C). \tag{6.21}$$

Dem: La demostracin se basa en la observacin de que el requerimiento de que $\mathbf{0} \in V^*$ sea un valor dbilmente regular de ϕ es equivalente a la existencia de unas coordenadas especiales en los puntos de la subvariedad C, de la forma $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$, con $p + q = \dim M$ y $q = \dim C$, donde el subconjunto $(x_1, \ldots, x_p)$ se elige a partir de la familia de ligaduras ϕ_i respecto de alguna base $\{v_i\}$ de V, mientras que el subconjunto $(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ constituye un sistema de coordenadas locales para la subvariedad C. Adems, ntese que $\mathbf{0} \in V^*$ ser tambin un valor regular de ϕ si y slo si $p = \dim V^*$ (en otro caso, $p < \dim V^*$). La proposicin, junto con la relacin $C_{01}^\infty(C) = C_0^\infty(C) \cdot C_0^\infty(C)$ (donde $C_{01}^\infty(C)$ denota el espacio de las funciones en $C_0^\infty(C)$ que se anulan sobre C junto con sus derivadas), se sigue ahora aplicando el teorema del valor medio del anlisis real (en su forma integral, aplicado a las p primeras coordenadas, con las otras q restantes jugando el papel de parmetros).

Asumamos que $\mathbf{0} \in V^*$ es un valor dbilmente regular de ϕ. Entonces el $\mathbf{0}$ ser un valor fuertemente regular si y solamente si el complejo $(C^\infty(M) \otimes \Lambda V, d_1)$ es acclico.

Dem: Supongamos primero que $\mathbf{0}$ es un valor fuertemente regular de ϕ, y observemos que es posible calcular localmente la cohomologa del complejo $C^\infty(M) \otimes \Lambda V, d_1)$, simplemente sustituyendo M por subconjuntos abiertos suficientemente pequeos U de M. De hecho, todo d_1-cociclo y todo d_1-coborde sobre M puede ser "localizado" por medio de particiones de la unidad, debido a que d_1 se anula sobre $C^\infty(M)$. En el curso del clculo resulta til distinguir dos casos posibles, de acuerdo con que la interseccin $U \cap C$ sea vaca o no. En ambos casos, sin embargo, probaremos que la cohomologa es nula dando una contraccin homtopa, esto es, un operador $h : C^\infty(U) \otimes \Lambda^k(V) \to C^\infty(U) \otimes \Lambda^{k+1}V$ con la propiedad de que el operador $(hd_1 + d_1h)$ es la identidad sobre la parte del complejo que hemos supuesto que se anula. Ms concretamente, puede construirse h de tal forma que $(hd_1 + d_1h)t = t$ para todo $t \in C^\infty(U) \otimes \Lambda V$ si $U \cap C = \emptyset$ y para todo $t \in C^\infty(U) \otimes \Lambda^+ V$ si $U \cap C \neq \emptyset$, donde

$$\Lambda^+ V = \oplus_{k>0} \Lambda^k V. \tag{6.22}$$

(Ntese que la primera afirmacin significa que la cohomologa de $(C^\infty(U) \otimes \Lambda V, d_1)$ se anula incluso en grado cero cuando $U \cap C = \emptyset$).

Para $U \cap C = \emptyset$, se define h como

$$h = \frac{\sum_i \phi_i v_i}{\sum_i (\phi_i)^2}. \tag{6.23}$$

Es fcil ver que esta funcin h define una contraccin homtopa sobre los abiertos U tales que $U \cap C = \emptyset$, haciendo su cohomologa nula.

Cuando $U \cap C \neq \emptyset$, podemos elegir como coordenadas las indicadas en la proposicin anterior, de forma que $x_i = \phi_i$ para $i \leq i \leq p$. Entonces si $t \in C^\infty(U) \otimes \Lambda^k V$ se representa como $t = t^{i_1 \ldots i_k} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}$, se define $ht \in C^\infty(U) \otimes \Lambda^{k+1} V$ a travs de

$$(ht)(x) = \int_0^1 d\lambda \lambda^k \partial_{[i} t_{i_1 \ldots i_k]} (\lambda \cdot x) v_i \wedge v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k} \ , \tag{6.24}$$

donde los corchetes sobre los ndices deben comprenderse como la antisimetrizacin total, y $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$. Tras algunos clculos largos pero stndards se demuestra que h es de hecho una homotopa contractible sobre $C^\infty(U) \otimes \Lambda^+ V$.

Ntese que la condicin de que el $\mathbf{0}$ fuese un valor fuertemente regular de la aplicacin ϕ ha sido fundamental en la demostracin, pues el hecho de que las ϕ_i fuesen independientes (y por tanto pudiesen escogerse como un conjunto de p primeras coordenadas locales) ha sido fundamental en la construccin de las homotopas.

Veamos ahora la implicacin recproca. Para ello, supongamos que el $\mathbf{0}$ es un valor dbilmente regular pero no regular de ϕ. Ello es equivalente a que $p < \dim V^*$. Entonces las diferenciales $d\phi_i$ son linealmente dependientes sobre C, de forma que existirn funciones $f_i \in C^\infty(M)$ que no anulndose todas ellas sobre C satisfarn sin embargo $\sum_i f_i d\phi_i|_C = 0$. Esto implica que $\sum_i d(f_i \phi_i)|_C = 0$, es decir, $\sum_i f_i \phi_i \in C^\infty_{01}(C)$. Utilizando ahora que $C^\infty_{01}(C) = C^\infty_0(C) \cdot C^\infty_0(C)$, se sigue que existe una familia de funciones $g_i, h_j \in C^\infty(M)$ tales que

$$\sum_i f_i \phi_i = \sum_{i,j} g_i h_j \phi_j \phi_i \ .$$

En otras palabras, $\sum_i (f_i - \sum_j g_i h_j \phi_j) v_i$ es un d_1-cociclo que no puede ser un d_1-coborde, pues $(f_i - \sum_j g_i h_j \phi_j)|_C \neq 0$ para al menos un i.

Resumiendo, hemos demostrado que en el caso regular la cohomologa BRST en grado cero da precisamente las funciones G-invariantes sobre la variedad de ligaduras C, o, equivalentemente, las funciones sobre C/G, el espacio de las G-rbitas en C:

$$H^0_D(C^\infty(M) \otimes \Lambda V \otimes \Lambda g^*) = C^\infty(C)^g \ . \tag{6.25}$$

6.3 Formalismo BRST generalizado y aplicacin a sistemas presimplcticos

6.3.1 Cohomologa BRST clsica: una generalizacin del punto de vista de Forger-Kellendok

En el apartado anterior asumamos que la variedad de ligaduras vena escrita como el conjunto de nivel cero de una aplicacin $\phi : M \to V^*$, esto es, $C = \phi^{-1}(\mathbf{0})$. Es fcil comprobar que las ligaduras definidas por un sistema dinmico presimplctico no van a poder expresarse en general de esta forma tan simple. Por ello se hace necesario buscar el marco adecuado en que estos sistemas puedan ser descritos. Con esta idea, supongamos que tenemos dado un fibrado vectorial $E \to M$, de rango r, y su fibrado dual $E^* \to M$. Sea Φ una aplicacin diferenciable

$$\Phi : M \longrightarrow E^*, \tag{6.26}$$

y supongamos que definimos la variedad de ligaduras como $C = \Phi^{-1}(\mathbf{0}_{E^*})$, donde el $\mathbf{0}_{E^*}$ es la seccin cero del fibrado vectorial $E^* \to M$.

Ntese que, en particular, podemos tomar $E^* = M \times V^*$, con Φ la aplicacin definida por $\Phi(m) = (m, \phi(m))$, en cuyo caso la variedad de ligaduras sera $C = \phi^{-1}(\mathbf{0})$, con $\mathbf{0} \in V^*$. Este es el caso estudiado anteriormente.

Supongamos ahora que $E \to M$ no es un fibrado vectorial cualquiera, sino que es un subfibrado del fibrado tangente. Esto es, los campos vectoriales en E definen una distribucin involutiva o integrable en M. Entonces tambin $E^* \subset T^*M$. Recurdese que E no tiene por qu ser el dual de E^*, sino que en general, en dimensin infinita, $E \subset (E^*)^*$. Es necesaria ahora alguna condicin de regularidad sobre el conjunto de nivel cero $\mathbf{0}_{E^*}$ respecto de la aplicacin Φ. Recordemos que en el formalismo de Forger-Kellendok era necesario que el $\mathbf{0}$ fuese un valor regular de la aplicacin ϕ. En nuestro caso, la condicin que va a jugar un papel anlogo va a ser la transversalidad de Φ y $\mathbf{0}_{E^*}$. Esto es, asumiremos que la aplicacin Φ es transversal a la subvariedad $\mathbf{0}_{E^*}$. En tal caso se satisfacen las dos propiedades siguientes:

- La preimagen $C = \Phi^{-1}(\mathbf{0}_{E^*})$ es una subvariedad de M.

- Adems, la codimensin de $\Phi^{-1}(\mathbf{0})_{E^*}$ en M es igual a la codimensin de $\mathbf{0}_{E^*}$ en E^*, esto es, igual al rango de E.

Si bien el concepto de punto regular es ya bien conocido, revisaremos la nocin de transversalidad como un paso previo a la construccin del complejo BRST propiamente dicho. El lector interesado en profundizar un poco ms sobre el concepto de transversalidad puede consultar, por ejemplo, la referencia [Gu74].

6.3.2 Transversalidad

Sea $f : X \to Y$ una aplicacin diferenciable entre dos variedades X e Y. Supongamos que Z es una subvariedad de Y. La pregunta es: qu puede decirse en general de $f^{-1}(Z)$? Bajo qu condiciones $f^{-1}(Z)$ ser un objeto tratable geomtricamente?

En primer lugar, vemos que $f^{-1}(Z)$ ser una variedad si y slo si para todo punto x de $f^{-1}(Z)$ existe un entorno en X tal que $f^{-1}(Z) \cap U$ es una variedad. Esta propiedad local nos permite reducir el estudio de la relacin $f(x) \in Z$ al caso ms simple en que Z sea un nico punto. Pues si $y = f(x)$, podemos expresar Z en un entorno de y como el conjunto cero de una coleccin de funciones independientes $g_1, \ldots, g_l$. Entonces alrededor de x la preimagen $f^{-1}(Z)$ es el conjunto de ceros de las funciones $g_1 \circ f, \ldots, g_l \circ f$. Denotemos por g la submersin $(g_1, \ldots, g_l)$ definida alrededor de y. Ahora a la aplicacin $g \circ f : X \to^l$ podemos aplicarle los resultados ya conocidos para valores regulares: $(g \circ f)^{-1}(\mathbf{0})$ es una variedad si el $\mathbf{0}$ es un valor regular de $g \circ f$.

Si bien la aplicacin g es bastante arbitraria, la condicin de que el $\mathbf{0}$ sea un valor regular de $g \circ f$ puede reformularse fcilmente en trminos de f y Z solamente. Puesto que

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x,$$

la aplicacin lineal $d(g \circ f)_x : T_x(X) \to^l$ es sobreyectiva si y slo si dg_y aplica la imagen de df_x sobre ^{l}. Pero $dg_y : T_y(Y) \to^l$ es una transformacin lineal sobreyectiva cuyo ncleo es el subespacio $T_y(Z)$. Luego dg_y aplica un subespacio de $T_y(Y)$ sobre ^{l} precisamente si entre ese subespacio y $T_y(Z)$ generan todo $T_y(Y)$. De lo cual se concluye que $g \circ f$ es una submersin en $x \in f^{-1}(Z)$ si y solamente si

$$(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y). \tag{6.27}$$

Se dice entonces que f es *transversal* a la subvariedad Z si la relacin anterior se satisface para todo punto x de la preimagen de Z. Hemos probado por tanto el siguiente teorema.

Si $f : X \to Y$ es transversal a una subvariedad $Z \subset Y$, entonces la preimagen $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de X. Adems, la codimensin de $f^{-1}(Z)$ en X es igual a la codimensin de Z en Y.

Respecto de la afirmacin sobre la codimensin, ntese que localmente podamos haber descrito $f^{-1}(Z)$ como el conjunto de los ceros de l funciones independientes $g_1 \circ f, \ldots, g_l \circ f$. Por tanto la codimensin de $f^{-1}(Z)$ en X es l, que igualmente era la codimensin original de Z en Y.

Cuando Z es precisamente un solo punto y, su espacio tangente es el subespacio cero de $T_y(Y)$. As, vemos que f es transversal a y si $df_x[T_x(X)] = T_y(Y)$, para todo

$x \in f^{-1}(y)$, lo cual es lo mismo que decir que y es un valor regular de f. Por tanto, la definicin de transversalidad incluye la nocin de regularidad como un caso especial.

Veamos finalmente un caso particular. Sea X una subvariedad de Y, y tomemos como aplicacin f la inclusin $i : X \to Y$. Consideremos ahora otra subvariedad Z de Y. Entonces $x \in X$ pertenecer a la preimagen $i^{-1}(Z)$ si y slo si $x \in X \cap Z$. Tambin, la diferencial $di_x : T_x(X) \to T_x(Y)$ no es otra cosa que la inclusin cannica de $T_x(X)$ en $T_x(Y)$. Entonces afirmar que i sea tranversal a la subvariedad Z es equivalente a decir que para todo $x \in X \cap Z$ se satisface

$$T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y)\ .$$

Observemos que esta ecuacin es simtrica en X y en Z. Cuando se cumpla, diremos que las dos subvariedad X y Z son transversas. El teorema anterior toma entonces la forma siguiente:

La interseccin de dos subvariedades transversas de Y es de nuevo una subvariedad. Adems,

$$\mathrm{codim}(X \cap Z) = \mathrm{codim}X + \mathrm{codim}Z\ . \tag{6.28}$$

La aditividad de la codimensin (la cual se deriva trivialmente de la relacin entre las codimensiones establecida en el teorema anterior) es absolutamente natural. Alrededor de un punto $x \in X \cap Z$, la subvariedad X viene definida $k = \mathrm{codim}X$ funciones independientes sobre Y, mientras que Z puede describirse por medio de $l = \mathrm{codim}Z$ funciones independientes. Entonces $X \cap Z$ es localmente el conjunto de ceros de la coleccin combinada de $k + l$ funciones. Que estas $k + l$ funciones sean independientes entre s es precisamente la condicin de transversalidad.

6.3.3 Construcin del complejo BRST

Apliquemos los resultados que acabamos de mostrar al caso particular que describamos al principio de la seccin. Esto es, tenemos una variedad diferenciable M y una distribucin integrable E, de forma que el fibrado vectorial $E \to M$ es un subfibrado integrable del fibrado tangente TM. Tomemos el fibrado dual $E^* \to M$, que por tanto es tal que $E^* \subset T^*M$. Considrese una aplicacin diferenciable

$$\Phi : M \longrightarrow E^*.$$

Para una cierta subvariedad $O \subset E^*$, supongamos la subvariedad de ligaduras definida por

$$C = \Phi^{-1}(O). \tag{6.29}$$

Si Φ es transversal a O, entonces hemos demostrado que C es una subvariedad de M.

Veamos ya la construccin explcita del complejo BRST en este caso. Esto es, vamos a construir un complejo (S, D) de tal forma que podamos describir el lgebra de funciones sobre C a travs de la cohomologa $H_D(S)$. Para ello definiremos dos complejos (K, d_1) y $(\Gamma\Lambda E^*, d_2)$ de forma que

$$S = K \otimes \Gamma\Lambda E^* \ , \quad D = d_1 + d_2 \ . \tag{6.30}$$

- *Descripcin del complejo* $(\Gamma\Lambda E^*, d_2)$.

En primer lugar, ntese que en la construccin del apartado anterior de Forger-Kellendok del complejo BRST lo realmente relevante era la existencia de un lgebra de Lie, ms que de un verdadero grupo de Lie. Aqu, el lgebra de Lie que consideraremos para la construccin del segundo complejo es $\Gamma(E)$. Y como cohomologa tomamos la misma, esto es, la cohomologa de Chevalley de $\Gamma(E)$ vista como un lgebra de Lie. As, si $\alpha \in \Gamma(E^*)$, definimos $d_2\alpha$ como

$$(d_2\alpha)(X, Y) = -\langle \alpha, [X, Y] \rangle \ , \quad \forall X, Y \in \Gamma(E). \tag{6.31}$$

Evidentemente, $d_2^2 = 0$, y podemos definir el siguiente complejo:

$$0 \rightarrow \stackrel{d_2}{\rightarrow} C^\infty(M) \stackrel{d_2}{\rightarrow} \Gamma(E^*) \stackrel{d_2}{\rightarrow} \Gamma(\Lambda^2 E^*) = \Omega^2(E^*) \stackrel{d_2}{\rightarrow} \cdots \tag{6.32}$$

Para $f \in C^\infty(M)$ definimos $(d_2 f)(X) = X(f)$, para todo campo vectorial $X \in \Gamma(E)$.

- *Descripcin del complejo* (K, d_1).

Como complejo K tomamos simplemente $K = \Gamma(\Lambda E)$. Sin embargo, y al igual que hacamos en el caso descrito en el apartado 2 de este captulo, sobre K tomaremos la graduacin invertida, esto es,

$$K = \oplus_{i \geq 0} K^{-i} \ , \quad \text{con} \quad K^{-i} = \Gamma(\Lambda^i E). \tag{6.33}$$

As, $K^0 = C^\infty(M)$, $K^{-1} = \Gamma(E)$, etctera.

El operador de cohomologa d_1 se define como el operador $\delta : \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M)$, dado por

$$\delta(X)(m) = \langle \Phi(m), X(m) \rangle. \tag{6.34}$$

Como hemos invertido la graduacin, podemos tomar $d_1 = \delta$.

- *Construccin del complejo BRST* (S, D).

Ya hemos visto anteriormente que $S = K \otimes \Gamma\Lambda E^*$. El operador de cohomologa BRST se define simplemente como la suma $D = d_1 + d_2$. Sin embargo, este operador no va a ser nilpotente en general. Para que $D^2 = (d_1 + d_2)^2 = 0$ es necesario que K acte por una representacin sobre $\Gamma(E)$ bajo la cual d_1 sea covariante. Ahora bien, existe una representacin natural

$$\rho_K : g = \Gamma(E) \longrightarrow End(K) = End(\Gamma(\Lambda E), \tag{6.35}$$

que no es otra que la inducida por accin de $\Gamma(E)$ sobre $K^0 = C^\infty(M)$, la accin de una derivacin sobre una funcin en M. As, se ve que, efectivamente, la representacin ρ_K de K sobre $\Gamma(E)$ es d_1-covariante trivialmente.

Supongamos ahora que el primer complejo (K, d_1) fuese acclico. Entonces, como ya hemos visto en la seccin anterior,

$$H^k_D(S) = H^k_{d_2}(H^0_{d_1}(S)). \tag{6.36}$$

Aqu hemos asumido que los operadores d_1 y d_2 definen una cohomologa en S, lo cual ya vimos en la seccin 2 que se poda hacer.

En particular, lo que a nosostros nos interesa es calcular el primer grupo de cohomologa $H^1_D(S)$ (ntese aqu que por la definicin que hemos dado del segundo complejo $\Gamma\Lambda E^*$ debemos considerar el primer grupo de cohomologa en lugar del grupo cero para obtener un resultado no trivial). Sabemos que

$$H^1_D(S) = H^1_{d_2}(H^0_{d_1}(S)).$$

Ahora bien,

$$H^0_{d_1}(S) = (H^0_{d_1}(K) \otimes \Gamma\Lambda E^*), \text{ y por otro lado}$$

$$H^1_{d_2}(S) = K^E.$$

Luego

$$H^1_D(S) = (H^0_{d_1}(K))^E \ . \tag{6.37}$$

Ahora bien, es fcil ver que

$$H^0_{d_1}(K) = C^\infty(M)/(C^\infty(M) \cdot d_1(\Gamma E)). \tag{6.38}$$

La demostracin de este hecho es similar a la que dimos en la proposicin (6.2) del apartado anterior, pues de la transversalidad de Φ en O se deduce que igualmente podemos ver $\Phi^{-1}(O)$ como el cojunto cero de una serie de funciones independientes $g_1 \circ f, \ldots, g_l \circ f$. Y este era el resultado principal en que se apoyaba la demostracin de la proposicin citada.

Finalmente, falta por ver si el complejo (K, d_1) tal y como lo hemos definido es acclico. A este respecto ntese que en la demostracin de la proposicin 6.2 las cosas se hacan considerando todo slo sobre abiertos. Y que lo realmente relevante era la existencia local de una serie de funciones independientes. Ahora bien, precisamente esto es lo que garantiza la condicin de transversalidad. Por tanto, podemos copiar la demostracin de la proposicin 6.2 paso por paso para extenderla al siguiente resultado:

La condicin necesaria y suficiente para que el complejo (K, d_1) sea acclico es que la aplicacin Φ sea transversal a O.

Hemos demostrado por tanto que en el caso transversal la cohomologa BRST en grado 1 describe precisamente las funciones sobre la variedad de ligaduras C invariantes bajo la distribucin E, o lo que es lo mismo, las funciones sobre el espacio reducido son

$$H^1_D(\Gamma(\Lambda E) \otimes \Gamma(\Lambda E^*)) = C^\infty(C)^E = C^\infty(C/E). \tag{6.39}$$

6.4 Aplicacin a sistemas presimplcticos

Sea ahora (M, ω, α) un sistema dinmico presimplctico localmente Hamiltoniano, con ω una 2-forma presimplctica, y tal que admite una dinmica global. Entonces podemos aplicar el formalismo descrito en la seccin anterior para tratar de describir la dinmica sobre el espacio de los verdaderos grados de libertad fsicos, esto es, M/K, con $K = \ker \omega$. Existen, como ya habamos anticipado al comienzo de este captulo, dos posibles enfoques a este problema. Por un lado, es posible llevar a cabo el estudio del espacio de fases reducido a travs de una simetra BRST directamente aplicando el formalismo descrito en la seccin anterior, tal y como haremos en primer lugar. Por otra parte, tambin puede llevarse a cabo previamente una regularizacin Hamiltoniana, tal y como vimos en el captulo 5, seccin 2, para posteriormente utilizar el formalismo BRST haciendo uso, tanto del formalismo expuesto en el apartado anterior, como del hecho de la existencia de una estructura simplctica sobre el espacio de fases extendido, lo que nos permitir definir una supercarga BRST, extendiendo en un cierto sentido el formalismo BRST desarrollado por Henneaux *et al* [He88b],[Fi89]. Procedamos a continuacin al anlisis de estos dos mtodos.

6.4.1 Formalismo BRST sobre sistemas presimplcticos

Dado el sistema dinmico (M, ω, α), o (M, ω, H) por simplicidad, sea $K = \ker \omega$. Evidentemente $K \to M$ es un fibrado vectorial, con K un subfibrado del fibrado tangente TM. Para aplicar los resultados anteriores, tomemos la aplicacin $\Phi : M \to K$ dada por la seccin cero del fibrado. Ahora puede construirse el complejo (S, D), con $S = \Gamma(\Lambda K) \otimes \Gamma(\Lambda K^*)$ y $D = d_1 + d_2$ tal que $D^2 = 0$, donde d_1 y d_2 viene definidos como en el apartado anterior. Ntese que la supervariedad $(M, {}^{A}_{M})$ con el haz de superfunciones ${}^{A}_{M}$ el haz de secciones del fibrado vectorial $\Lambda(K \oplus K^*)$ puede identificarse con el complejo BRST (S, D). Entonces la subvariedad de los verdaderos grados de libertad fsicos $M/K = \Phi^{-1}(\mathbf{0})/K$ es, aplicando (6.39),

$$H^1_D(\Gamma(\Lambda K) \otimes \Gamma(\Lambda K^*)) = C^\infty(\Phi^{-1}(\mathbf{0}))^K = C^\infty(M/K). \tag{6.40}$$

Podramos ahora tratar de extender el hamiltoniano clsico a un superhamiltoniano, haciendo uso de la superestructura presimplctica sobre $(M, {}^{A}_{M})$ dada por ω_L y el acoplamiento natural en $K \oplus K^*$, en cuyo caso deberamos tomar superhamiltonianos de la forma $H + D\Psi$, con $\Psi \in S^{-1}$, para llevar entonces a cabo una regularizacin Hamiltoniana graduada de la supervariedad presimplctica $(M, {}^{A}_{M})$ con la 2-superforma que acabamos de definir, y un superhamiltoniano como el anterior. Esencialmente, habra que repetir el procedimiento descrito en el captulo anterior, que es perfectamente posible de realizar tambin en este caso.

6.4.2 Regularizacin Hamiltoniana + BRST Hamiltoniana

La otra posibilidad, que debe dar resultados similares a los obtenidos por el mtodo anterior, consiste en llevar a trmino primero la regularizacin Hamiltoniana, para despus aplicar el formalismo BRST tal y como se hara para variedades simplcticas. Esto es, podemos hacer el "embedding" coistropo $j : (M, \omega) \to (P, \Omega)$, definir una aplicacin momento generalizada $J : P \to K^*$ tal y como se hizo en el captulo 5 y obtener un sistema dinmico Hamiltoniano (o localmente Hamiltoniano, segn el caso) (P, Ω, H_1).

Para aplicar entonces el formalismo BRST tomaremos el fibrado vectorial $K \to P$ construido a partir del "pull-back" del fibrado $K \to M$ a lo largo de la proyeccin natural $P \to M$. La aplicacin que juegue el papel de Φ ser simplemente el "embedding" natural $J : P \to K^*$. Se construye entonces el complejo BRST (S, D) de la manera usual, esto es, $S = \Gamma(\Lambda K) \otimes \Gamma(\Lambda K^*)$. El espacio de fases reducido $M/K = J^{-1}(\mathbf{0})/K$ es

$$C^\infty(M/K) = H^1_D(\Gamma(\Lambda K) \otimes \Gamma(\Lambda K^*)). \tag{6.41}$$

De nuevo se puede definir una supervariedad $(P, {}^{A}_{P})$, con ${}^{A}_{P}$ el haz de secciones del fibrado vectorial $\Lambda(K \oplus K^*)$. Sobre esta supervariedad se tienen las supercoordenadas locales $(x^i, b_\mu; \xi_\mu, \zeta^\mu)$. El complejo BRST (S, D) puede identificarse con las superfunciones de ${}^{A}_{P}$, pero con una Z-graduacin diferente. Los operadores de cohomologa D, d_1 y d_2 actan sobre $(P, {}^{A}_{P})$ como superderivaciones impares, y definirn por tanto supercampos vectoriales impares sobre esta supervariedad.

Finalmente, la supervariedad $(P, {}^{A}_{P})$ puede ser dotada de una estructura de supervariedad simplctica va la 2-superforma Ω_{sp} construida a partir de la 2-forma simplctica Ω sobre P y el acoplamiento natural entre los elementos de las fibras de $K \oplus K^* \to P$ que define el fibrado estructural de la supervariedad [Ro91]. Por tanto, respecto de esta estrucutra simplctica graduada, d_1 ser un supercampo vectorial hamiltoniano impar, con superhamiltoniano impar asociado $J(x, b)$; d_2 ser igualmente un supercampo hamiltoniano impar con superhamiltoniano impar dado por $-1/2 C^k_{ij}(x)\zeta^i\zeta^j\xi_k$; y el operador de cohomologa D es un supercampo vectorial hamitoniano impar, con superhamiltoniano impar la supercarga BRST Q

$$Q = J(x, b) - \frac{1}{2} C^k_{ij}(x)\zeta^i\zeta^j\xi_k, \tag{6.42}$$

donde $C^k_{ij}(x)$ denota las funciones de estructura del lgebra gauge definida por $[\xi_i, \xi_j] = C^k_{ij}(x)\xi_k$. Es fcil comprobar que de la propiedad $D^2 = 0$ se deduce que $\{Q, Q\} = 0$. El inters de poder definir la supercarga BRST muestra su crucial importancia cuando se trata de cuantificar la teora siguiendo el procedimiento conocido como Cuantificacin BRST.

Los superhamiltonianos tales que describan correctamente la dinmica sobre el espacio de fases reducido M/K, es decir, los superhamiltonianos invariantes BRST, sern simplemente todos aquellos de la forma $\bar{H} = H + D\Psi$, con Ψ un elemento de S^{-1}.

6.5 Simetra BRST sobre lagrangianos degenerados

Supongamos ahora que se tiene un sistema dinmico definido sobre el espacio de velocidades TQ por un lagrangiano degenerado L. En tal caso, si existe una dinmica global, el espacio de fases reducido es TQ/K, con $K = \ker \omega_L$. Asumamos que el ncleo de la 2-forma de Cartan ω_L es una distribucin tangente, esto es, $K = TF$. En tal caso, podemos llevar a cabo el programa expuesto en el diagrama dado en la introduccin de este captulo. A saber, podemos empezar aplicando el formalismo BRST de Forger-Kellendok generalizado descrito en la seccin 3, o bien regularizar previamente el sistema para aplicar entonces el formalismo BRST para sistemas Hamiltonianos, o bien , si el lagrangiano es regularizable en el sentido del apartado 3 del captulo 5, llevar a cabo su regularizacin Lagrangiana y despus aplicar el formalismo BRST. Asimismo, habra que analizar la relacin entre los diversos procedimientos. Trataremos de explicar todos estos aspectos a continuacin.

6.5.1 Formalismo BRST de Forger-Kellendok generalizado sobre lagrangianos singulares

Dado el sistema Lagrangiano (TQ, ω_L) definido por un lagrangiano singular L, podemos aplicar en primer lugar el formalismo BRST directamente, tal y como se discutin en el apartado 4.1 anterior. As, si denotamos por $K = TF = \ker \omega_L$, como es habitual, puede construirse la supervariedad $(TQ, \Gamma\Lambda(K^* \oplus K))$, con supercoordenadas locales $(q^a, \dot{q}^a; \zeta^\mu, \dot{\zeta}^\mu; \xi_\mu, \dot{\xi}_\mu)$, y el complejo BRST exactamente igual a como se hizo en la seccin 4.1. La supervariedad anterior, que denotaremos por $(TQ, {}^A_{TQ})$ por brevedad, no es una supervariedad tangente. Sin embargo, puede construirse un difeomorfismo ϕ dado localmente por $\phi(q^a, \dot{q}^a; \zeta^\alpha, \dot{\zeta}^\alpha; \xi_\mu, \dot{\xi}_\mu) = (q^a, \dot{q}^a; \zeta^\alpha, \xi_\mu; \dot{\zeta}^\alpha, \dot{\xi}_\mu)$. Ntese que ϕ intercambia $\dot{\zeta}^\mu$ con ξ_μ, y deja todas las dems supercoordenadas igual. Sobre $(TQ, \Gamma\Lambda(K^* \oplus K))$ existe una 2-superforma presimplctica dada por ω_L y el acoplamiento natural en $K^* \oplus K$, que se transforma en una nueva 2-superforma presimplctica haciendo el "pull-back" por la aplicacin ϕ que convierte la supervariedad de partida en una supervariedad tangente. La expresin (6.39) implica entonces que todo superlagrangiano invariante bajo K debe corresponder a una clase de cohomologa BRST. Por tanto, estos superlagrangianos debern ser de la forma $\hat{L} = L + D\Psi$, con $\Psi \in S^{-1}$. Desde un punto de vista puramente Hamiltoniano, puede afirmarse que los superhamiltonianos invariantes BRST debern ser de la forma $\hat{E}_L = E_L + D\Psi$.

A continuacin puede realizarse la regularizacin Hamiltoniana va el "embedding" coistropo de la variedad base TQ en P. En tal caso se obtendr la supervariedad simplctica $(P, {}^A_P, \Omega_{sp})$. Sobre este espacio pueden tomarse superhamiltonianos de la forma $\bar{H}_1 = 1/2\eta^{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta + E_L + D\Psi$, con (b_α) coordenadas pares a lo largo de las fibras de K^*.

Finalmente, si L es un lagrangiano regularizable, puede aplicarse el difeomorfismo definido en la seccin 3.2 del captulo 5 para obtener una regularizacin Lagrangiana del sistema dinmico Hamiltoniano graduado definido por $(P,{}^{A}_{P}, \Omega_{sp}, \bar{H}_1)$. Sobre la supervariedad tangente obtenida al aplicar este difeomorfismo junto con el difeomorfismo ϕ que intercambia $\xi_\mu \leftrightarrow \dot{\zeta}^\mu$, puede construirse una superfuncin energa tomando el "pull-back" bajo estas transformaciones de un cierto superhamiltoniano elegido adecuadamente $\bar{H}_1$ para obtener un sistema Hamiltoniano graduado cuya solucin sea una super SODE. Aplicando entonces los resultados obtenidos para el problema inverso en la supermecnica Lagrangiana (ver [Ib92c] y captulo 1), existir un superlagrangiano generalizacin del superlagrangiano de Faddeev-Popov.

6.5.2 Regularizacin Hamiltoniana + Formalismo BRST

Otra posibilidad consiste en llevar a cabo primero una regularizacin Hamiltoniana del sistema Lagrangiano degenerado, de forma similar a como estudiamos en el apartado 4.2. Tras construir el complejo BRST, si E_L es la funcin energa de partida y H_1 es el hamiltoniano regular sobre (P, Ω), entonces los superhamiltonianos invariantes BRST debern ser de la forma $\bar{H}_2 = H_1 + D\Psi$. En realidad, como H se ha extendido de manera K invariante a P, H por s mismo es una solucin, y los superhamiltonianos invariantes BRST debern ser de la forma $\bar{H}_2 = H + D\Psi$, con $\Psi \in S^{-1}$. Elijamos,en particular, el superhamiltoniano $\bar{H}_2 = H_1 + D\Psi$, con $\Psi = \xi \cdot (1/2g - J) + \dot{\xi}(1/2\dot{g} - \dot{J})$, donde en J, $\dot{J}$ tomamos las coordenadas de $J = J_\mu \zeta^\mu$, $\dot{J} = \dot{J}_\mu \zeta^\mu$ respectivamente. Entonces

$$D\Psi = \frac{1}{2} g \cdot g + \frac{1}{2} \dot{g} \cdot \dot{g} + g \cdot \dot{g} - g \cdot J - \dot{g} \cdot J -$$
$$- g \cdot \dot{J} - \dot{g} \cdot \dot{J} + \xi \cdot (DJ) + \dot{\xi} \cdot (DJ) + \xi \cdot (D\dot{J}) + \dot{\xi} \cdot (D\dot{J})$$

y

$$\begin{aligned} \bar{H}_2 &= H_1 + \frac{1}{2} g \cdot g + \frac{1}{2} \dot{g} \cdot \dot{g} - g \cdot J - \dot{g} \cdot J - \\ &- g \cdot \dot{J} - \dot{g} \cdot \dot{J} + \xi \cdot (DJ) + \dot{\xi} \cdot (DJ) + \xi \cdot (D\dot{J}) + \dot{\xi} \cdot (D\dot{J}). \end{aligned}$$

Si el lagrangiano de partida L es regularizable, haciendo actuar los difeomorfismos que transforman la supervariedad $(P,{}^{A}_{P})$ en una supervariedad simplctica, se obtiene un superhamiltoniano tal que su supercampo vectorial asociado, obtenido con la 2-superforma simplctica $\tilde{\Omega}_{sp}$ dada por el "pull-back" de Ω_{sp} bajo los difeomorfismos anteriores, es una super SODE, de tal forma que, resolviendo el problema inverso de la supermecnica, se encontrar un superlagrangiano $\bar{L}_1$ generalizacin del superlagrangiano de Faddeev-Popov.

6.5.3 Regularizacin Lagrangiana + Formalismo BRST

La ltima posibilidad que falta por analizar es cuando se lleva a cabo previamente una regularizacin Lagrangiana, supuesto que el lagrangiano es regularizable, y se trata despus de aplicar el formalismo BRST. En tal caso, habr que tener un mayor cuidado, pues los objetos que obtengamos ya no van a ser invariantes bajo la distribucin K. Sin embargo, s ocurrir que sean invariantes bajo otra distribucin que contiene tanto campos de K como campos de K^*. Podra tratar de aplicarse de nuevo el formalismo de BRST, tomar la nueva estructura simplctica graduada, etc. En cualquier caso, los resultados que se obtuviesen por este mtodo respecto de los otros dos son esencialmente los mismos, y el hecho de elegir unos u otros depender en general de los aspectos del problema en que estemos ms interesados.

Appendix A

Superlgebra lineal

A.1 Espacios Z_2-graduados

Todas las definiciones y resultados siguientes pueden encontrarse con una mayor profundidad en las referencias [Be87],[Le80],[Ma88].

Un espacio vectorial V sobre un cuerpo K es un espacio Z_2-graduado o superespacio si puede descomponerse como suma directa de dos subespacios V_0 (parte par de V) y V_1 (parte impar de V), $V = V_0 \oplus V_1$.

Para un superespacio dado V, diremos que V_0 y V_1 son las partes homogéneas de V, de tal forma que un elemento $v \in V$ se dice que es homogneo si es par o impar, donde los elementos pares son los que pertenecen a V_0, y los impares son los $v \in V_1$. Si $v \in V_i$, "i" será el grado del elemento homogéneo v, y si $v \neq 0$, se denotará $|v| = i$.

De aquí en adelante, todas las graduaciones lo serán respecto del anillo $Z_2 = Z/2Z = \{0, 1\}$, y, así, en lo que sigue, omitiremos hacer referencia a este hecho. Por otra parte, en principio K puede ser cualquier cuerpo con característica distinta de dos (en particular, los nmeros reales).

Un subespacio $W \subseteq V$ es graduado si $W = W \cap V_0 \oplus W \cap V_1$. En tal caso, W será un espacio vectorial graduado con componentes homogéneas $W_0 = W \cap V_0$ y $W_1 = W \cap V_1$.

Sean V,W dos espacios vectoriales graduados. Entonces la suma directa $V \oplus W$ y el producto tensorial $V \otimes W = V \otimes_K W$ son graduados. Si $v \in V$, $w \in W$ son homogéneos, $v \otimes w$ es homogéneo. La graduación de $V \oplus W$ está dada por $(V \oplus W)_0 = V_0 \oplus W_0$ y $(V \oplus W)_1 = V_1 \oplus W_1$. Por el contrario, la graduación de $(V \otimes W) = (V \otimes W)_0 \oplus (V \otimes W)_1$ vendr dada por $(V \otimes W)_0 = V_0 \otimes W_0 + V_1 \otimes W_1$ y $(V \otimes W)_1 = V_0 \otimes W_1 + V_1 \otimes W_0$.

De manera análoga, V^* es un espacio graduado, ya que $V^* = V_0^* \oplus V_1^*$ y entonces $(V^*)_0 = V_0^*$, $(V^*)_1 = V_1^*$. Nótese que $V_0^* = \{\alpha \in V^* \mid \langle \alpha, v_1 \rangle = 0,\ \forall v_1 \in V_1\}$ y $V_1^* = \{\alpha \in V^* \mid \langle \alpha, v_0 \rangle = 0,\ \forall v_0 \in V_0\}$.

Como consecuencia de todo lo anterior, los homomorfismos entre espacios vectoriales graduados van a ser graduados. En efecto, $Hom(V,W) \cong W \otimes V^*$. Así, $Hom(V,W)_0 \cong (W \otimes V^*)_0 = (W_0 \otimes V_0^*) \oplus (W_1 \otimes V_1^*)$ y $Hom(V,W)_1 \cong (W_0 \otimes V_1^*) \oplus (W_1 \otimes V_0^*)$. En otras palabras, los elementos de grado cero de $Hom(V,W)$ envan V_0 en W_0 y V_1 en W_1, mientras que los elementos de grado uno aplican V_0 en W_1 y V_1 en W_0.

A.2 Superálgebras

Una superálgebra es un álgebra asociativa $(A, +, \cdot)$ tal que:

i.- A es un superespacio ($A = A_0 \oplus A_1$),

ii.- $A_i A_j \subseteq A_{i+j(\mathrm{mod} 2)}$, y

iii.- existe elemento unidad, $I \in A_0$.

Si $x, y \in A$ son homogéneos, $|xy| = |x| + |y|$. En el caso de que no sean homogéneos, la igualdad anterior se entiende como la suma de sus componentes homogéneas.

Sean x,$y \in A$ dos elementos homogéneos de la superlgebra A. Se define el superconmutador entre x e y como

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|} yx.$$

Si bien x no va a ser en general homogéneo, puede descomponerse en sus partes par e impar, y la definición anterior se extiende así de manera natural a elementos no homogéneos por aditividad.

Dos elementos $x, y \in A$ se dirá que superconmutan si $[x, y] = 0$. A se dirá superconmutativa si $[x, y] = 0$, para cada $x, y \in A$.

Se define el supercentro de A como $Z(A) = \{a \in A \mid [a, b] = 0,\ \forall b \in A\}$.

Un homomorfismo entre dos superálgebras A y B es una aplicación lineal $\Phi : A \to B$ tal que $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$. Es inmediato comprobar que la condición anterior implica que Φ sea de grado cero, es decir, $\Phi(A_0) \subseteq B_0$ y $\Phi(A_1) \subseteq B_1$.

Ejemplo. El ejemplo básico de superálgebra viene proporcionado por $\Lambda V = \oplus_{k \geq 0} \Lambda^k V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión n y $\Lambda^k V = \{$aplicaciones multilineales antisimétricas de $V \times \overset{k}{\cdots} \times$ en $K\}$. ΛV es un espacio Z_2-graduado.

$$(\Lambda V)_0 = \Lambda^{par} V = \oplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k} V$$

$$(\Lambda V)_1 = \Lambda^{impar} V = \oplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k+1} V.$$

El producto exterior $\wedge$ proporciona una estructura de superálgebra superconmutativa en ΛV.

A.3 Módulos

Por un módulo a izquierda M para la superálgebra A se entenderá un módulo a izquierda en el sentido usual, junto con el hecho adicional de que M sea un espacio vectorial Z_2-graduado sobre el mismo cuerpo que A $\forall a, b \in A$, $\forall m \in M$, y $A_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j(\text{mod}2)}$.

De manera análoga se definirían A-módulos por la derecha, y bimódulos cuando M sea A-módulo por la derecha y por la izquierda y $(am)b = a(mb)$.

Si A es superconmutativa, un módulo por un lado puede (al igual que en álgebras conmutativas) ser transformado canónicamente en un bimódulo. Dos estructuras sobre M, una de módulo por la izquierda y otra de módulo por la derecha, se dicen consistentes si $am = (-1)^{|a||m|}ma$, para cualquier $a \in A$, $m \in M$. Entonces:

1. Correspondiente con cualquier A-módulo por la izquierda hay una única estructura de A-módulo por la derecha consistente con la anterior, y viceversa.

2. Un módulo con estructuras consistentes es un bimódulo ya que $(am)b = (-1)^{|m||a|}(ma)b = (-1)^{|m||a|}m(ab) = (-1)^{|m||a|}(-1)^{|ab||m|}(ab)m = (-1)^{|m||a|}(-1)^{|a||m|+|b||m|}a(bm) = a(mb)$. Así, si A es superconmutativa, podemos pasar siempre de una estructura a otra.

Si $M = M_0 \oplus M_1$, M_0 y M_1 son A_0-submódulos de M.

Una aplicación aditiva de A-módulos $f : M \to N$ es un (homo)morfismo par si preserva la graduación y es A-lineal. Como $f(am) = af(m)$ y $f(mb) = f(m)b$ (al ser aplicación de A-módulos), y vicecersa, todo homomorfismo de A-módulos por la izquierda (o por la derecha) es un morfismo de bimódulos. Denotaremos el grupo aditivo de tales morfismos por $Hom_0(M, N)$.

Una aplicación aditiva $f : M \to N$ de A-módulos se dice un homomorfismo impar si: (i) $|f(m)| = |m| + 1$ (mod2), $\forall m \in M$, (ii) es A-lineal en el sentido de que $f(am) = (-1)^{|a|}f(m)$, $f(mb) = f(m)b$ (cada una de estas fórmulas se sigue de la otra y es un morfismo de bimódulos). Este grupo aditivo será $Hom_1(M, N)$.

Así pues, $Hom(M, N) = Hom_0(M, N) \oplus Hom_1(M, N)$. $Hom(M, N)$ puede ser dotado de la estructura de un A-módulo a través de la expresin $(af)(m) = a(f(m))$, $a \in A$, $m \in M$.

Sobre un A-módulo M puede definirse el módulo $\Pi(M)$ a través de:

(a) $(\Pi M)_0 = M_1$, $(\Pi M)_1 = M_0$.
(b) Adición en ΠM como espacio Z_2-graduado igual que en M.
(c) $\Pi(m)a = \Pi(ma)$, $a\Pi(m) = (-1)^{|a|}\Pi(am)$.

Nótese que $\Pi^2 M = M$. Ahora, para cada homomorfismo $f : M \to N$ de A-módulos se define un homomorfismo

$$\begin{aligned} f^\pi : \Pi(M) &\to \Pi(N) \\ \Pi(m) &\mapsto f^\pi(\Pi(m)) = \Pi(f(m)). \end{aligned}$$

Claramente, $f = (f^\pi)^\pi$.

Un A-módulo libre de rango $p \mid q$ es un A-módulo isomorfo a $A^{p|q} = A^p \oplus (\Pi A)^q$. Tiene un sistema libre de generadores, p de los cuales son pares, y q impares.

Si A es superconmutativo, el rango viene definido de manera unívoca en el sentido de que módulos libres de rango diferente no son isomorfos. Nótese que la descomposición de $A^{p|q}$ en $A^{p|0}$ y $A^{0|q}$ no va en general a estar definida de manera invariante; y no coincidirá con la descomposición en las partes par e impar $[A_0^p \oplus (\Pi A_1)^q] \oplus [A_1^p \oplus (\Pi A_0)^q]$, a menos que $A_1 = (0)$, como resulta evidente.

A.4 Supermatrices

En el álgebra lineal, sabemos que los homomorfismos $Hom(A^m, A^n)$ (por ejemplo, si $A =, Hom(^m,^n))$ se pueden representar por las matrices de rango $n \times m$ con coeficientes en A, siendo la composición de homomorfismos equivalente a la multiplicación de las matrices que los representan. En superálgebra lineal, queremos definir unos "superobjetos" isomorfos a $Hom(A^{p|q}, A^{m|n})$; y que en el caso $q = n = 0$, coincidan con las matrices. Ahora habrá que tener en cuenta la paridad de los elementos.

Si definimos una estructura matricial como un conjunto de "celdas" dispuestas de manera rectangular, cada una de ellas numerada con dos dígitos (fila y columna que ocupa), puede entonces definirse una *estructura supermatricial* como una estructura matricial en la cual asociamos una paridad a cada fila y columna. Por simplicidad, suelen colocarse primero las filas y columnas pares, y luego las impares. Así, esta "superestructura" puede dividirse en cuatro cajas:

$$X = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$$

con las filas $i = 1, ..., m$ pares, las $i = m + 1, ..., m + n$ impares, y las columnas $j = 1, ..., p$ pares y las $j = p + 1, ..., p + q$ impares.

Una supermatriz ser entonces una estructura supermatricial en la que, en cada celda X_{ij}, se coloca un elemento de la superálgebra A. Denotando la paridad de una fila o columna de la supermatriz por $p_f(i)$ (para la paridad de la fila i) o $p_c(j)$ (para la paridad de la columna j), la paridad de X queda definida como sigue:

$$p(X) = 0 \text{ (par) si } |X_{ij}| + p_f(i) + p_c(j) = 0 \ , \forall i, j \ , \text{ y}$$

$$p(X) = 1 \text{ (impar) si } |X_{ij}| + p_f(i) + p_c(j) = 1 \ , \forall i, j \ ,$$

lógicamente todo mod2.

Una supermatriz así definida actuaría enviando $A^{p|q}$ en $A^{m|n}$. En este sentido se entiende que X sea par si no cambia la paridad, e impar si sí la cambia. Lo cual implica que será par si R y U están formadas por elementos pares, y S, T por impares; e impar en el caso contrario. Y esto es exactamente lo que se ha expresado más explícitamente en la definición anterior.

El conjunto de las supermatrices así definidas se denotará por $Mat((m|n) \times (p|q); A)$. Forman un módulo Z_2-graduado. Si ahora se define la multiplicación entre ellas de la manera usual: $(XY)_{ij} = \sum_k X_{ik}Y_{kj}$, se aprecia que dicho conjunto es isomorfo de una manera natural a $Hom(A^{p|q}, A^{m|n})$, donde la composición de homomorfismos viene representada por el producto de supermatrices.

Habitualmente consideraremos supermatrices cuadradas $Mat(m|n; A)$ o simplemente $Mat(m|n)$ si el contexto ya especifica A, que corresponden a homomorfismos de $A^{m|n}$ en $A^{m|n}$. En el caso particular de $Mat(m|0; A)$, la estructura supermatricial es una matriz ordinaria con coeficientes en A; y una supermatriz X será par si todos sus elementos son pares e impar si todos sus elementos son impares. Análogamente podemos considerar la situación $Hom(A^{0|n}, A^{0|n})$ y las matrices $Mat(0|n; A)$.

A.4.1 Supertraspuesta

Sea B la representación matricial de un homomorfismo par o impar $b : S \to T$ de A-módulos libres. Puede definirse la aplicación dual $b^* : T^* \to S^*$ a través de

$$\langle b^*(t^*), s\rangle = (-1)^{|b||t|}\langle t^*, b(s)\rangle \quad \forall t \in T^*, s \in S.$$

En el álgebra lineal usual, esta aplicación venía descrita por la matriz traspuesta B^t. Ahora, se trata de buscar la expresión de la supertraspuesta a una supermatriz que represente al homomorfismo b^*. Es fácil comprobar que esta expresión viene dada por:

$$B^{st} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}^{st} = \begin{cases} \begin{pmatrix} R^t & T^t \\ -S^t & U^t \end{pmatrix} \ , & \text{, si } |B| = 0 \\ \begin{pmatrix} R^t & -T^t \\ S^t & U^t \end{pmatrix} \ , & \text{si } |B| = 1 \end{cases}$$

Propiedades:

1. $(B + C)^{st} = B^{st} + C^{st}$.
2. $(BC)^{st} = (-1)^{|B||C|}C^{st}B^{st}$.

3. $(st)^4 = id$, pero $(st)^2 \neq id$.

4. En coordenadas,

$$(X^{st})_{ij} = (-1)^{(p_f(i)+p_c(j))(|X|+p_f(i)}X_{ji} = (-1)^{(p_f(i)+p_c(j))(|X_{ij}|+p_c(j)}X_{ji}.$$

A.4.2 Supertraza

Sea A una superálgebra superconmutativa. La supertraza de una matriz $X \in Mat((p|q)\times(p|q); A) \equiv Mat_{p,q}(a)$ se define como

$$str(X) = \sum_i (-1)^{(|X|+1)|i|}X_{ii} = \sum_i (-1)^{(|X_{ii}|+1)|i|}X_{ii}.$$

En expresión matricial:

$$str\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} tr(A) - tr(D) & si|X| = 0 \\ tr(A) + tr(D) & si|X| = 1 \end{cases}$$

Sea M un A-módulo libre de dimensión finita. Se define la supertraza sobre $x \in End_A(M)$ por $str(x) = strX$, con X la matriz correspondiente a $x \in End_A(M)$ en alguna base.

Propiedades:

1. $str : End(S) \to A$ es un morfismo de A-módulos.
2. $str(X+Y) = str(X) + str(Y)$.
3. $str[X,Y] = 0$.
4. Si $X, Y \in Mat_{p,q}(A)$, con Y invertible, entonces $str(YXY^{-1}) = str(X)$ (la supertraza es cíclica).
5. Como bajo cambios de base X se transforma en YXY^{-1}, la supertraza no cambia ante cambios de base.
6. $str(aX) = a \cdot str(X)$, $str(Xa) = str(X) \cdot a$.
7. $str(X^{st}) = str(X)$.
8. $str(id_{p|q}) = p - q$.

A.4.3 Superdeterminante

Sea A una superálgebra superconmutativa; denotaremos por $GL(p|q;A)$ el grupo multiplicativo de los elementos pares invertibles de $Mat(p|q;A)$, es decir, supermatrices representando homomorfismos pares de $A^{p|q}$ en $A^{p|q}$ invertibles.

Sea
$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in (Mat(p \mid q; A))_0 \ .$$

X es invertible $\Longleftrightarrow$ A y D son invertibles, es decir, $A \in GL(p;A_0)$ y $D \in GL(q;A_0)$.

Sea $X \in GL(p|q;A)$. Se define el superdeterminante o "Bereziniano" de X como:

$$sdet \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(A - BD^{-1}C)(det(D))^{-1}.$$

Como $A \in GL(p|0;A_0)$ y $D \in GL(q|0;A_0)$, claramente el término de la derecha está bien definido. Si $A_0^\star$ es el conjunto de los elementos invertibles de A_0, $sdet(X) \in GL(1\ 0;A_0) \cong A_0^\star$.

La aplicación $sdet : GL(p|q;A) \longrightarrow A_0^\star$ es un homomorfismo de grupos que coincide con el determinante cuando $q = 0$.

Propiedades:

1. $sdet(XY) = sdet(X) \cdot sdet(Y)$.
2. Si $b \in GL(S)$, con S un A-módulo libre de rango finito, se define $sdet(x) = sdet(X)$, siendo X la supermatriz que representa a x. Pues bien, esta definición no depende de la elección de la base en S.
3. $sdet(X^{st}) = sdet(X)$ (luego $sdet(x^*) = sdet(x)$).
4. $sdet(X) = det(A) \cdot det(D - CA^{-1}B)^{-1}$.
5. $sdet(x \oplus y) = sdet(x) \cdot sdet(y)$, siendo x e y automorfismos pares de S y T, y $x \oplus y$ un automorfismo par de $S \oplus T$.
6. $sdet(e^{Xt}) = e^{str(X)t}$.

A.5 Superálgebras de Lie. Superderivaciones

Un espacio vectorial graduado $g = g_0 \oplus g_1$ junto con una operación bilineal $[x, y]$ sobre g tal que $[x, y] \in g_{|x|+|y|(\text{mod}2)}$ es una superálgebra de Lie si se satisfacen las siguientes condiciones:

i.- $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$.

ii.- $(-1)^{|x||z|}[[x, y], z]+(-1)^{|y||x|}[[y, z], x]+(-1)^{|z||y|}[[z, x], y] = 0$, para todo $x, y, z \in g$ (superidentidad de Jacobi).

Una sublgebra de Lie graduada es entonces un subespacio graduado h de g que además tiene la estructura de una superálgebra de Lie. Un ideal graduado se define análogamente como una subálgebra de Lie graduada I de g tal que $[I, g] \subseteq I$.

Sean g, h superálgebras de Lie. Un homomorfismo $\pi : h \to g$ de superálgebras de Lie es una aplicación lineal de grado cero que preserva el paréntesis de Lie: $\pi[x, y] = [\pi(x), \pi(y)]$, $\forall x, y \in h$.

Si g es una superálgebra de Lie, entonces g_0 es un álgebra de Lie ordinaria (como era de esperar), y g_1 es un g_0-módulo. Nótese que, si $x, y \in g_1$, $[x, y] = [y, x] \in g_0$, y $[x, x] \neq 0$ en general.

Es posible definir tambin una representación de la superlgebra de Lie g sobre V como un homomorfismo

$$\pi : g \to End(V)$$

de superálgebras de Lie. La representación adjunta es la representación

$$ad : g \to End(g)$$

$$y \mapsto ad_x(y) = [x, y]$$

Sea V un superespacio vectorial, y Q una operación bilineal en V tal que $Q(v_j, v_k) \in V_{j+k(\text{mod}2)}$, $\forall v_j, v_k \in V$. Un operador $\alpha \in End(V)_i$ se dice que es una superderivación de (V, Q) de grado i si se satisface la identidad de Leibnitz

$$\alpha[Q(v_j, v_k)] = Q(\alpha(v_j), v_k) + (-1)^{ij}Q(v_j, \alpha(v_k)),$$

para $v_j, v_k \in V$. Un operador $\alpha \in End(V)$ será una superderivación de (V, Q) si sus componentes homogéneas lo son.

Ntese que el espacio $Der(V, Q)$ (superderivaciones de (V, Q)) es una subálgebra de Lie graduada de $End(V)$, donde en $End(V)$ se toma la estructura de superlgebra de Lie dada por el superconmutador de supermatrices, esto es, $[X, Y] = X \cdot Y - (-1)^{|X||Y|}Y \cdot X$.

Por otra parte, si g es una superálgebra de Lie, entonces $ad_x \in Der(g)$, para cualquier $x \in g$, pues por la identidad de Jacobi, $[x, [y, z]] = [[x, y], z]+(-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]$. Luego $ad : g \to Der(g)$ es un homomorfismo de superálgebras de Lie.

Finalmente, si A es una superálgebra superconmutativa, $Der(A)$ es un A-módulo con multiplicación por la izquierda $(a\xi)(b) = a(\xi(b))$, para $a, b \in A$; $\xi \in Der(A)$.

A.6 Álgebra tensorial sobre un anillo superconmutativo

Sea A un anillo superconmutativo, y M, N dos A-módulos. El producto tensorial $M \otimes_A N$ se define de la forma usual, a partir de la estructura de A-módulo por la derecha sobre M y por la izquierda sobre N (pues la superálgebra es superconmutativa), y con la graduación $(M \otimes N)_k = \oplus_{i+j=k} M_i \otimes N_j$.

Observemos que este producto es un A-módulo respecto del producto:

$$a(s \otimes t) = as \otimes t = (-1)^{|a|(|s|+|t|)}(s \otimes t)a = (-1)^{|a|(|s|+|t|)} s \otimes ta.$$

Por tanto, por iteración, se ve que el álgebra tensorial $T_A(M) = \oplus_{k \geq 0} T_A^k(M)$, donde $T_A^k(M) = T_A^{k-1}(M) \otimes_A M$, está bien definida como un álgebra $Z \oplus Z_2$-bigraduada, donde $A = T_A^0(M)$.

Se define la superálgebra simétrica $S_A(M)$ de M sobre A como

$$S_A(M) = T_A(M)/^J$$

donde ^{J} es el ideal en $T_A(M)$ generado por todos los superconmutadores (elementos de la forma $x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x$, con $x, y \in M$).

La superálgebra exterior $\Lambda_A(M)$ de M sobre A es el cociente de $T_A(M)$ módulo el ideal generado por los elementos de la forma $x \otimes y + (-1)^{|x||y|} y \otimes x$.

Observaciones:

1. $S_A(M)$ y $\Lambda_A(M)$ son álgebras $Z \oplus Z_2$-bigraduadas.
2. $S_A(M)$ es una superálgebra superconmutativa.
3. Si $u_i \in \Lambda_A^{b_i}(M)_j$, $i = 1, 2$, entonces
$$u_1 u_2 = (-1)^{b_1 b_2 + j_1 j_2} u_2 u_1.$$
4. Si se denota por M^+ a M cuando se ignora la graduación, entonces
$$S(M) \cong S(M_0^+) \otimes \Lambda(M_1^+)$$
$$\Lambda(M) \cong \Lambda(M_0^+) \otimes S(M_1^+).$$
5. Sean A, B superálgebras. Entonces puede inducirse una estructura de superálgebra sobre $A \otimes_K B$ de forma que
$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$
Los elementos del tipo $a \otimes 1$ y $1 \otimes b$ serían así superconmutativos.

Appendix B

Supervariedades diferenciables

B.1 Variedades graduadas. Fundamentos

Para un estudio ms completo sobre las variedades graduadas, pueden consultarse las referencias [Ko77],[Be87],[Le80],[Ma88].

B.1.1 Haces de superálgebras conmutativas

Sea ^{A} un haz de superálgebras conmutativas sobre una variedad diferenciable M tal que para todo abierto $U \subseteq M$ exista un homomorfismo ϵ de álgebras graduadas

$$\begin{array}{rcl} \epsilon :^{A} (U) & \longrightarrow & C^{\infty}(U) \\ f & \mapsto & \epsilon(f) \end{array}$$

que conmuta con las aplicaciones de restricción. Como los homomorfismos conservan la graduación, y $C^{\infty}(U)$ es de grado cero, si $f \in^{A} (U)_1$ entonces $\epsilon(f) = 0$. Igualmente, puesto que los homomorfismos preservan la identidad, $\epsilon(I)_U$ será la función identidad sobre U.

Una subálgebra graduada $C(U) \subseteq^{A} (U)_0$ se dirá que es un factor funcional de $^{A}(U)$ si:

i) $I_U \in C(U)$.

ii) La aplicación

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : C(U) & \longrightarrow & C^{\infty}(U) \\ f & \mapsto & \epsilon(f) \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras.

Una subálgebra $D(U) \subset^{A} (U)$ se llama factor exterior de $^{A}(U)$ si $D(U)$ viene generado por I_U y n elementos impares algebraicamente independientes.

Claramente, $D(U)$ es una subálgebra (conmutativa) graduada de ${}^{A}(U)$. Además, como $\dim D(U) = 2^n$, el número de generadores impares para un factor exterior dado est unívocamente determinado.

Sea $U \subseteq M$ un conjunto abierto no vacío. $(C(U), D(U))$ se llaman factores simples para ${}^{A}(U)$ si:

1. $C(U)$ es un factor funcional de ${}^{A}(U)$.
2. $D(U)$ es un factor exterior de ${}^{A}(U)$.
3. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} C(U) \otimes D(U) & \longrightarrow & {}^{A}(U) \\ f \otimes w & \mapsto & fw \end{array}$$

   es un isomorfismo lineal.

Un abierto $U \subseteq M$ se dice que es un ^{A}-entorno simple de dimensión impar n si existen factores simples $(C(U), D(U))$ para ${}^{A}(U)$ tales que $\dim D(U) = 2^n$.

B.1.2 Supervariedades

Una variedad M de dimensión m junto con un haz ^{A} de superálgebras conmutativas y homomorfismos $\epsilon :^{A} (U) \to C^{\infty}(U)$, $f \mapsto \epsilon(f)$ se dice que es una supervariedad $(M,^{A})$ de dimensión (m, n) si cualquier conjunto abierto no vacío de M puede recubrirse por ^{A}-entornos simples de dimensión impar n.

Hay otras posibles definiciones equivalentes de variedades graduadas o supervariedades, como por ejemplo la que hemos descrito en el captulo 1 de esta tesis. Es fcil darse cuenta de que en realidad estamos hablando del mismo tipo de objetos.

Claramente, dada $(M,^{A})$ supervariedad, y $U \subseteq M$ un abierto, si ${}^{N}(U)$ es el conjunto de todos los elementos nilpotentes de ${}^{A}(U)$, entonces ${}^{A}(U)_1 \subseteq^{N} (U)$, y ${}^{N}(U)$ es un ideal graduado. De hecho, si U es un ^{A}-entorno simple, ${}^{N}(U)$ es el ideal generado por ${}^{A}(U)_1$.

Asimismo, un factor funcional de ${}^{A}(U)$ puede caracterizarse como una subálgebra $C(U) \subseteq^{A} (U)_0$ donde $I_U \in C(U)$ y tal que ${}^{A}(U) = C(U) \oplus N(U)$.

Tambin, es posible mostrar que las variedades graduadas admiten particiones de la unidad.

Sea $U = \cup_{j \in \Gamma} V_j$ un recubrimiento arbitrario de un conjunto abierto U. Entonces existe un refinamiento localmente finito $U = \cup_{i \in \Lambda} U_i$ y elementos $\varphi_i \in A(U)_0$ tales que *sop* $\varphi_i \subseteq U_i$ y $\sum_{i \in \Lambda} \varphi_i = I_U$, con los φ_i no negativos. A la familia de funciones $\{\varphi_i\}$ se la llamará una partición de la unidad sobre un refinamiento de $\{V_j\}$.

Para una supervariedad $(M,^{A})$, puede demostrarse que los factores simples $C(U)$ y $D(U)$ de ${}^{A}(U)$ vienen unívocamente definidos (salvo isomorfismos).

Entornos coordenados impares

Antes de continuar, fijemos algunas notaciones que nos sern tiles en lo que sigue:

Sea el conjunto de todos los enteros positivos, y $Z^+ = \cup\{0\}$. Si $d \in$, se denotará por M_d el conjunto de todas las sucesiones de nmeros $\mu = (\mu_1, ..., \mu_k)$ donde $\mu_i \in$ y $1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_k \leq d$. La longitud k de la sucesin la denotamos por $k(\mu)$ ($k(\mu) < d$). Por otra parte, N_d será el conjunto de todas las sucesiones $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d)$ donde $\nu_i \in Z^+$. $|\nu| = \sum_{i=1}^{d} \nu_i$.

Denótese por ${}^{Nj}(U)$ la j-ésima potencia del ideal nilpotente ${}^{N} - (U)$. Entonces, se tiene la secuencia de ideales en ${}^{A}(U)$

$$0 =^{N\ n+1}(U) \subseteq^{N\ n}(U) \subseteq \cdots \subseteq^{N\ 1}(U) \subseteq^{A} (U)$$

donde n es la dimensión impar de $(M,^{A})$. Así pues, una forma de caracterizar n es que, para cualquier abierto no vacío $U \subseteq M$, ${}^{Nn}(U) \neq 0$ y ${}^{Nn+1}(U) = 0$.

Como ${}^{A}(U)/^{N}(U) = C^\infty(U)$, $\tilde{}^{N^j}(U) =^{N\ j}(U)/^{Nj+1}(U)$ tiene la estructura de un $C^\infty(U)$-módulo. Ahora, para cada $p \in M$, se considera el ideal maximal en $C^\infty(M)$: $m_p = \{\varphi \in C^\infty(M) \mid \varphi(p) = 0\}$; y puede definirse el espacio vectorial sobre p

$$F_p^j(^{A}) = \tilde{}^{N^j}(M)/m_p \tilde{}^{N^j}(M) .$$

Entonces $F_j(^{A}) = \cup_{p\in M} F_p^j(^{A})$ es un fibrado vectorial diferenciable sobre M con fibras $F_p^j(^{A})$ en p de dimensión $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$.

Las proyecciones sobre cocientes inducen una aplicación

$$\tau_j :^{N\ j}(U) \to \Gamma(U, F^j(^{A}))$$

donde claramente $\Gamma(U, F^0(^{A})) = C^\infty(U)$ y $\tau_0(f) = \epsilon(f)$, para cualquier $f \in^{A} (U)$.

$F^n(^{A})$ es un fibrado de línea real sobre M. Y si $\theta^\alpha \in^{A} (U)_1$, $\alpha = 1, ..., n$, con U un subconjunto abierto, podemos tomar el producto $\theta = \theta^1 \cdots \theta^n \in^{A} (U)$. De aquí, la siguiente definición.

La familia de elementos $\{\theta^\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., n$ forma un sistema coordenado impar en ${}^{A}(U)$ si $\tau_n(\theta) \in \Gamma(U, F^n(^{A}))$ es una sección no nula en todo punto de $F^n(^{A})$ sobre U.

Resulta claro que, si los $\{\theta^\alpha\}$ constituyen un sistema coordenado impar en U, serán algebraicamente independientes y el álgebra $D(U)$ generada por ellos y por I_U será un factor exterior en ${}^{A}(U)$. En la siguiente proposicin se establece la existencia al menos local de tales sistemas coordenados impares, as como la independencia entre $C(U)$ y $D(U)$ si $(C(U), D(U))$ son factores simples para ${}^{A}(U)$.

1. Sea U un ^{A}-entorno simple, y $(C(U), D(U))$ factores simples para ${}^A(U)$. Entonces cualquier conjunto de n elementos $\theta^1, .., \theta^n \in D(U)_1$ tal que junto con I_U generen $D(U)$ es un sistema coordenado impar en U.

2. Recprocamente, si U es un abierto tal que ${}^A(U)$ tenga un factor funcional $C(U)$ y un sistema coordenado impar $\theta^1, ..., \theta^n$, U es un ^{A}-entorno coordenado con factores simples $(C(U), D(U))$, siendo $D(U)$ la subálgebra de ${}^A(U)$ generada por I_U y $\{\theta^\alpha\}$.

Si ${}^A(U)$ tiene un factor funcional $C(U)$ y un sistema coordenado impar $\theta^1, ..., \theta^n$, cualquier $f \in^A (U)$ puede expresarse de la forma

$$f = \sum_{\mu \in M_n} f_\mu \theta^\mu \text{ , con } f_\mu \in C(U).$$

Gr^A

Sea $F({}^A) = \oplus_{j=0}^n F^j({}^A)$. Entonces, $U \to \Gamma(U, F({}^A))$ es un haz de superálgebras conmutativas, que denotaremos por Gr^A. Por tanto, (M, Gr^A) es una supervariedad de dimensión (m, n) donde Gr^A proviene de un fibrado vectorial sobre M (las fibras serían $F_p({}^A)$, $\forall p \in M$), que considerado como espacio vectorial no graduado tiene la estructura de un álgebra exterior sobre $F_p^1({}^A)$; y en su estructura graduada es una álgebra conmutativa graduada de dimensión 2^n.

Resulta claro que si U es un ^{A}-entorno simple, ${}^A(U)$ y $Gr^A(U)$ son isomorfos, pues de la proposición $(B.1.2)$ se sigue que una elección de un factor funcional $C(U)$ y un sistema coordenado impar da lugar a un isomorfismo ${}^A(U) \to Gr^A(U)$. Así pues, localmente sí son isomorfas (si bien tal isomorfismo no es natural). Para el caso global, se tiene el siguiente teorema, que no demostramos:

[Ba79][Ga77] Toda supervariedad diferenciable real $(M,^A)$ es isomorfa (no canónicamente) a (M, Gr^A).

Sistemas coordenados pares. ^{A}-entornos coordenados

Sea $U \subset M$ abierto, y $q^1, .., q^m \in^A (U)_0$. La familia de elementos $\{q^i\}_{i=1,...,m}$ constituye un sistema coordenado par para U si U es un entorno coordenado en el sentido usual y las funciones $\epsilon(q^i) \in C^\infty(U)$ $(i = 1, ..., m)$ forman un sistema coordenado en el sentido usual.

Si $\{q^i\}_{i=1,...,m}$ constituyen un sistema coordenado par en un abierto $U \subseteq M$, existe un único factor funcional $C(U) \subseteq^A (U)$ tal que todos los $q^i \in C(U)$.

Un conjunto abierto $U \subseteq M$ admite un sistema coordenado par $q^i \in^A (U)_0$ si y sólo si es un entorno coordenado en el sentido usual. Además si $u^i \in C^\infty(U)$,

$i = 1, ..., m$ es un sistema de funciones coordenadas, entonces existen $q^i \in^A (U)_0$, $i = 1, ..., m$ (necesariamente un entorno coordenado par) tales que $\epsilon(r)^i = u^i$.

Si $C(U) \subseteq^A (U)_0$ es el único factor funcional que contiene los $\{q^i\}$, la correspondencia

$$\{q^1, ..., q^m\} \to C(U)$$

es una biyección entre todos los sistemas coordenados pares en U que satisfacen la relacin $\epsilon(r)_i = u_i$ y todos los factores funcionales en ${}^A(U)$.

Una vez que hemos visto la existencia de ^{A}-entornos coordenados pares e impares para ^{A}-entornos simples, resulta natural que puedan definirse ^{A}-entornos coordenados y ^{A}-sistemas coordenados de la misma forma que podía hacerse para entornos coordenados y sistemas de coordenadas en conjuntos abiertos de una variedad diferenciable ordinaria, con todas las ventajas que ello reporta a nivel operativo.

Un conjunto abierto $U \subseteq M$ se dice que es un ^{A}-entorno coordenado si es un sistema coordenado en el sentido usual y ${}^A(U)$ contiene un sistema de coordenadas impares.

Si U es un ^{A}-entorno coordenado, los elementos $\{q^i, \theta^\alpha\}$ de ${}^A(U)$ ($i = 1, ..., m$; $\alpha = 1, ..., n$) forman lo que denominaremos un ^{A}-sistema de coordenadas si las $\{q^i\}$ son un sistema de coordenadas par y las $\{\theta^\alpha\}$ son un sistema de coordenadas impar. Un ^{A}-sistema coordenado se denomina tambin un sistema de supercoordenadas locales, o supercoordenadas locales simplemente.

Nótese que si U es un ^{A}-entorno coordenado, es también un ^{A}-entorno simple. Además, si $\{q^i, \theta^\alpha\}$ forman un ^{A}-sistema de coordenadas en U, $C(U)$ es el único factor funcional que contiene las q^i y $D(U)$ el álgebra generada por I_U y las θ^α, entonces $(C(U), D(U))$ son factores simples para ${}^A(U)$.

B.1.3 Supercampos vectoriales

Sea $Der^A(U)$ el álgebra de Lie graduada de las superderivaciones sobre ${}^A(U)$. Entonces, la correspondencia $U \to Der^A(U)$ es un haz de ^{A}-módulos.

Al igual que podamos hacer para el haz de las superfunciones, puede inducirse una aplicación similar entre $Der^A(U)$ y $Der\ C^\infty(U)$ simplemente como sigue. Si $\xi \in (Der^A(U))_0$, se define $\epsilon(\xi)(f) = \epsilon(\xi f)$, para toda $f \in^A (U)$. Si $\zeta \in (Der^A(U))_1$, simplemente $\epsilon(\zeta) = 0$.

Sea U un ^{A}-entorno coordenado con supercoordenadas $\{q^i, \theta^\alpha\}$. Entonces:

1. Para cada i existe una única derivación $\partial/\partial q^i \in Der^A(U)$ tal que $\partial q^k/\partial q^i = \delta_i^k I_U$, $\partial\theta^\alpha/\partial q^i = 0$.

2. Análogamente, para cada α existe una única derivación $\partial/\partial\theta^\alpha \in Der^A(U)$ tal que $\partial\theta^\alpha/\partial\theta^\beta = \delta_\beta^\alpha I_U$, $\partial q^i/\partial\theta^\alpha = 0$.

3. $\{\partial/\partial q^i\} \in (Der^A(U))_0$, $\{\partial/\partial\theta^\alpha\} \in (Der^A(U))_1$, y toda derivación $\xi \in Der^A(U)$ puede expresarse de manera nica como

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{\alpha=1}^{n} b^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \quad ; \ a^i, b^\alpha \in^A (U).$$

El conjunto de las superderivaciones $Der^A(U)$ es un ^{A}-módulo libre con $(\partial/\partial q^i)$ como generadores pares y $(\partial/\partial\theta^\alpha)$ como generadores impares, y se denominan comnmente como los supercampos vectoriales $X_A(U)$.

B.1.4 Espacios tangentes

Denótese por ${}^A_M{}' = Hom({}^A_M,)$ el dual de ${}^A_M$. Es obvio que ${}^A_M{}'$ es también un espacio vectorial graduado (el espacio ${}^A_M$ dotarse de una topologa adquiriendo la estructura de un espacio localmente convexo, y as ${}^A_M{}' \neq 0$).

Se dice que un elemento $v \in^A_M{}'$ homogneo es una diferenciacin de ${}^A_M$ en $p \in M$ si

$$v(fg) = (vf)\epsilon(g)(p) + (-1)^{|v||f|}\epsilon(f)(p)v(g).$$

Si $v \in^A_M{}'$, se dirá que es una diferenciación si sus componentes homogéneas lo son.

Se define el espacio tangente $T_p(M,^A)$ de $(M,^A)$ en p como el espacio de todas las diferenciaciones de ${}^A_M$ en p.

Ahora, si $p \in M$ y $v \in T_p(M,^A)_0$, entonces v se anula sobre ${}^{A1}_M$ (pues ${}^{A1}_M$ está generado por ${}^A(M)_1$ y $T_p(M,^A)_0$ se anula sobre ${}^A(M)_1$, al ser de grado cero y preservar los elementos de $T_p(M,^A)_0$ la graduación). Por tanto, v induce una diferenciación en p de ${}^A(M)/{}^N(M) \cong C^\infty(M)$. Es decir, define un elemento de $T_p(M)$, espacio tangente a la variedad M en $p \in M$. De hecho, esta aplicación $T_p(M,^A)_0 \to T_p(M)$ es un isomorfismo, tal y como se expresa en la siguiente proposición.

1. $\dim T_p(M,^A) = m + n$, $\dim T_p(M,^A)_1 = n$ y $\dim T_p(M,^A)_0 = m$.

2. La aplicación $T_p(M,^A)_0 \to T_p(M)$ es un isomorfismo.

Se define entonces el fibrado tangente de $(M,^A)$ como $T(M,^A) = \cup_{p\in M} T_p(M,^A)$, el cual tiene la estructura de un fibrado vectorial sobre M con fibra $T_p(M,^A)$ en p. Obsérvese que una base de $T_p(M,^A)$ sería $(\partial/\partial q^i)_p$, $(\partial/\partial\theta^\alpha)_p$, pues $\partial/\partial q^i)_p$ es base de $T_p(M,^A)_0 \cong T_p(M)$ y $(\partial/\partial\theta^\alpha)_p$ es base de $T_p(M,^A)_1$.

B.1.5 La coálgebra ${}_{M}^{A}{}^{*}$

Definiciones

Hasta ahora, todas las definiciones y consideraciones sobre variedades graduadas se han hecho a partir de la variedad M y de la superálgebra ${}_{M}^{A}$ sobre M. Sin embargo, resultará interesante en muchos casos recurrir a la coálgebra ${}_{M}^{A}{}^{*}$. Esta será en muchos casos más fácil de tratar debido a que juega el papel de "puntos", y será especialmente útil cuando se definan morfismos de supervariedades, construcción de nuevas supervariedades a partir de otras previas, etc..

Si consideramos el dual completo $({}_{M}^{A}\otimes{}_{M}^{A})'$ de ${}_{M}^{A}\otimes{}_{M}^{A} ={}_{M}^{A} \otimes{}^{A}{}_{M}$, se tiene la sucesión inyectiva

$$0 \longrightarrow{}_{M}^{A}{}' \otimes{}_{M}^{A}{}' \longrightarrow ({}_{M}^{A}\otimes{}_{M}^{A})'$$

donde si $v, w \in{}_{M}^{A}{}'$, $v \otimes w$ puede considerarse como el funcional lineal sobre $spA_M\otimes{}_{M}^{A}$ definido de la forma

$$(v \otimes w)(f \otimes g) = (-1)^{|w||f|}v(f)w(g)$$

para $f, g \in{}_{M}^{A}$.

Por otra parte, sea la coálgebra

$$\begin{array}{rcl} \Delta :{}_{M}^{A}{}' & \longrightarrow & ({}_{M}^{A}\otimes{}_{M}^{A})' \\ v & \mapsto & \Delta v \end{array} \qquad \begin{array}{r} (B.1) \\ (B.2) \end{array}$$

tal que $\Delta v(f \otimes g) = v(fg)$, para $f, g \in{}_{M}^{A}$. Se define entonces la colgebra ${}_{M}^{A}{}^{*}$ como:
${}_{M}^{A}{}^{*} = \{v \in{}_{M}^{A}{}' \mid v({}^{J}) = 0$ para algún ideal ${}^{J} \subseteq ({}_{M}^{A})$ con $\dim({}_{M}^{A})/J < \infty\}$.

Pues bien, si $v \in{}_{M}^{A}{}'$, se tiene que $\Delta v \in{}_{M}^{A}{}' \otimes{}_{M}^{A}{}'$ si y sólo si $v \in{}_{M}^{A}{}^{*}$. Además, Δ tal y como se ha definido actúa sobre ${}_{M}^{A}{}^{*}$ como $\Delta :{}_{M}^{A}{}^{*} \rightarrow{}_{M}^{A}{}^{*} \otimes{}_{M}^{A}{}^{*}$. Esta aplicación Δ induce sobre ${}_{M}^{A}{}^{*}$ la estructura de una coálgebra coconmutativa Z_2-graduada.

Veamos ahora dos conceptos importantes en teoría de coálgebras. Dada $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ una coálgebra Z_2-graduada, se dice que un elemento $\delta \in C$ es de tipo grupo (o grupal) si $0 \neq \delta \in C_0$ y $\Delta\delta = \delta \otimes \delta$. Y $v \in C$ se dice que es primitivo respecto de un elemento de tipo grupo δ si $\Delta v = \delta \otimes v + v \otimes \delta$.

En una supervariedad $(M,{}^{A})$ puede definirse, para cada $p \in M$, el elemento $\delta_p \in{}_{M}^{A}{}'$ por $\delta_p f = \tilde{f}(p)$, $\forall f \in{}_{M}^{A}$. Considérese también $M_p({}_{M}^{A}) = \ker \delta_p$. Entonces, $M_p({}_{M}^{A})$ es un ideal maximal en ${}_{M}^{A}$. Para $k \in Z^+$, sea

$${}_{p}^{N}{}^{k}(M)^* = \{v \in{}_{M}^{N}{}' \mid v(M_p({}_{M}^{N}))^{k+1} = 0\}.$$

Resulta claro que ${}_{p}^{N}{}^{k}(M)^* \subseteq{}_{p}^{N}{}^{k+1}(M)^*$. Asimismo, puede verse que ${}_{p}^{N}{}^{0}(M)^* = \delta_p$ y ${}_{p}^{N}{}^{1}(M)^* = T_p(M,{}^{A}) \oplus \delta_p$.

Si se define

$$ {}^{A}_{p}(M)^* = \bigcup_{k}^{N} {}^{k}_{p}(M)^* $$

se tiene el siguiente resultado.

1. $({}^{A}_{M})^* = \oplus^{A}_{p\in M\,p}(M)^*$.
2. δ_p es el único elemento de tipo grupo en ${}^{A}_{p}(M)^*$.
3. $T_p(M,{}^{A})$ es el conjunto de todos los elementos en ${}^{A}_{p}(M)^*$ que son primitivos respecto de δ_p.

De esta proposición se deduce que pueden identificarse p y δ_p de forma que $M \subseteq^{A}_{M}$ *; M sería el conjunto de todos los elementos de tipo grupo en ${}^{A}_{M}{}^*$. Además, también implica que $M_p({}^{A}_{M})$ es el ideal maximal más general de codimensión finita en ${}^{A}_{M}$.

B.1.6 Morfismos entre variedades graduadas

Por definición, un morfismo entre supervariedades

$$ \sigma : (M,{}^{A}_{M}) \longrightarrow (N,{}^{A}_{N}) $$

es un homomorfismo entre las álgebras Z_2-graduadas

$$ \sigma^* :{}^{A}_{N} \longrightarrow {}^{A}_{M} \ . $$

La aplicacin σ ser un isomorfismo de variedades graduadas si σ^* es un isomorfismo de superálgebras.

Si $v \in^{A}_{M}{}^*$, el funcional lineal $\sigma^* v$ sobre ${}^{A}_{N}$ definido de la forma

$$ (\sigma_* v)(g) = v\sigma^*(g) \ , \ g \in^{A}_{N} $$

se anula sobre un ideal de codimensión finita, luego $v \mapsto \sigma_* v$ define una aplicación

$$ \sigma_* :{}^{A}_{M}{}^* \longrightarrow {}^{A}_{N}{}^* $$

que es un morfismo de álgebras Z_2-graduadas. En particular, los elementos grupales se aplican en elementos grupales.

Si denotamos por $\tilde{\sigma}$ la restricción de σ_* a M, entonces

$$ \tilde{\sigma} : M \longrightarrow N \ . $$

La aplicación $\tilde{\sigma}$ es una aplicación diferenciable de variedades de clase C^∞.

Es fcil comprobar que el morfismo $\sigma^* :{}^{A}_{N} \to {}^{A}_{M}$ es un isomorfismo si y sólo si:

1. $\tilde{\sigma}$ es un difeomorfismo, y
2. la aplicación $\sigma^* :{}^{A}_{N}(V) \to^{A} (\tilde{\sigma}^{-1}(V))$ es un isomorfismo de álgebras graduadas para todo abierto $V \subseteq N$.

B.1.7 La diferencial $d\sigma : T(M,{}^{A}_{M}) \to T(N,{}^{A}_{N})$

Dado un morfismo entre dos supervariedades $\sigma : (M,{}^{A}_{M}) \to (N,{}^{A}_{N})$, cuál será la aplicación entre los espacios tangentes inducida por ese morfismo? Por analogía con la geometría diferencial ordinaria, se definirá la diferencial $d\sigma$ como tal morfismo, que en el caso no graduado coincidirá con la definición usual.

Sean $p \in M$, $q = \sigma_*(p) \in N$. Entonces, se tiene que

$$\sigma_* :{}^{A}_{p} (M)^* \to^{A}_{q} (N)^* \ .$$

Además, σ^* aplica elementos de tipo grupo en elementos de tipo grupo, y elementos primitivos en elementos primitivos, como se observa inmediatamente. Ahora bien, como $T_p(M,{}^{A}_{M}) = \{v \in^{A}_{p} (M)^* \mid v \text{ son primitivos respecto de } \delta_p\}$, podemos definir la aplicacin $d\sigma$ como la restricción de σ_* a $T(M,{}^{A}_{M})$, y entonces

$$d\sigma : T_p(M,{}^{A}_{M}) \longrightarrow T_q(N,{}^{A}_{N}) \ ; \qquad d\sigma = \sigma_*|_{T(M,{}^{A}_{M})}.$$

En la situación ordinaria, la diferencial de una aplicación da información sobre el comportamiento local de ésta. A continuación se verá que esto sigue siendo cierto en el caso graduado. Sean $q \in V \subseteq N$, con V un ${}^{A}_{N}$-entorno coordenado con coordenadas $\{q^i, \theta^\alpha\}$, y $p \in U \subseteq M$, con U un ${}^{A}_{M}$-entorno coordenado tal que $\tilde{\sigma}(U) \subseteq V$. Entonces:

1. Si $d\sigma : T_p(M,{}^{A}_{M}) \to T_q(N,{}^{A}_{N})$ es inyectiva, pueden elegirse U, V de forma que la restricción de $\{\sigma^* q^i, \sigma^*\theta^\alpha\}$ a U contenga un ${}^{A}_{M}$-sistema coordenado para U.

2. Si $d\sigma : T_p(M,{}^{A}_{M}) \to T_q(N,{}^{A}_{N})$ es suprayectiva, pueden elegirse U y V tales que $\{\sigma^* q^i, \sigma^*\theta^\alpha\}|_U$ pueda completarse hasta formar un ${}^{A}_{M}$-sistema coordenado de U.

B.1.8 Subvariedades graduadas

Sean $(M,{}^{A}_{M})$, $(N,{}^{A}_{M})$ supervariedades, y

$$\lambda :{}^{A}_{M}{}^{*} \to^{A}_{N}{}^{*}$$

un morfismo de coálgebras graduadas. Se dirá que λ es diferenciable si $\lambda = \sigma_*$, con $\sigma : (M,{}^{A}_{M}) \to (N,{}^{A}_{N})$ un morfismo de supervariedades.

Lógicamente, si λ es diferenciable σ es única, pues viene totalmente determinada por $\sigma_* = \lambda$.

Sean $(M,{}^{A}_{M})$, $(N,{}^{A}_{N})$ dos supervariedades, y $\sigma : (M,{}^{A}_{M}) \to (N,{}^{A}_{N})$ un morfismo entre ellas. Entonces $(M,{}^{A}_{M}, \sigma)$ (o simplemente $(M,{}^{A}_{M})$) se dirá que es una subvariedad graduada de $(N,{}^{A}_{N})$ si ${}^{A}_{M}{}^{*} \subseteq^{A}_{N}{}^{*}$ y $\sigma_* :{}^{A}_{M}{}^{*} \to^{A}_{N}{}^{*}$ es la aplicación inyectiva que las relaciona.

Ntese que si $(M,{}^{A}_{M})$ es una subvariedad graduada de $(N,{}^{A}_{N})$, entonces M es subvariedad de N en el sentido usual.

B.2 Álgebra exterior sobre una supervariedad

B.2.1 Superformas diferenciales

Sea $(M,_M^A)$ una supervariedad, y $U \subseteq M$ un subconjunto abierto. Sabemos que $Der^A(U)$ es un módulo sobre $^A(U)$. Así pues, consideremos el álgebra tensorial sobre $T(U)$ de las (super)derivaciones, que es $(Z \oplus Z_2)$-graduada. $T^b(U)$ es también un $^A(U)$-módulo por la izquierda. Por tanto, $\beta \in Hom_{A(U)}(T^b(U),^A(U))$ puede considerarse como una aplicación b-lineal sobre $Der\ ^A(U)$ con valores en $^A(U)$.

En lo que sigue, haremos uso de la siguiente notacin: el valor de β en $\xi_1, ..., \xi_b \in Der^A(U)$ lo denotaremos por $\langle \xi_1, ..., \xi_b \mid \beta \rangle \in^A(U)$.

Con esta notación, puede caracterizarse el conjunto $Hom_{A(U)}(T^b(U),^A(U))$ como el de todas las aplicaciones b-lineales (Z_2-graduadas) tales que

$$\langle \xi_1, ..., f\xi_l, ..., \xi_b \mid \beta \rangle = (-1)^{|f|\sum_{i=1}^{l-1}|\xi_i|} f \langle \xi_1, ..., \xi_l, ..., \xi_b \mid \beta \rangle.$$

Además, al ser $Hom_{A(U)}(T^b(U),^A(U))$ un $^A(U)$-módulo,

$$\langle \xi_1, ..., \xi_b \mid \beta f \rangle = \langle \xi_1, ..., \xi_b \mid \beta \rangle f,$$

$$\langle \xi_1, ..., f\xi_l, ..., \xi_b \mid \beta \rangle = (-1)^{|f|\sum_{i=l}^{b}|\xi_i|} \langle \xi_1, ..., \xi_b \mid f\beta \rangle.$$

Sea $^J(U)$ el ideal en $T(U)$ generado por todos los elementos de $T^2(U)$ de la forma $\xi \otimes \eta + (-1)^{|\xi||\eta|}\eta \otimes \xi$, con $\xi, \eta \in Der^A(U)$ homogéneos. Sea también $^{Jb}(U) =^J(U) \cap T^b(U)$. Entonces se define el espacio de las b-formas diferenciales graduadas (o superformas diferenciales) como $\Omega^b(U,^A) = \{\beta \in Hom_{A(U)}(T^b(U),^A(U))$ tales que se anulan sobre $^{Jb}(U)\}$.

Ntese entonces que una forma de caracterizar los elementos de $\Omega^b(U,^A)$ es añadir a todas las propiedades anteriores la condición adicional

$$\langle \xi_1, ..., \xi_j, \xi_{j+1}, ..., \xi_b \mid \beta \rangle = (-1)^{1+|\xi_j||\xi_{j+1}|} \langle \xi_1, ..., \xi_{j+1}, \xi_j, ..., \xi_b \mid \beta \rangle.$$

Si $\Omega^0(U,^A) =^A(U)$, el conjunto de las superformas diferenciales sobre $(M,^A)$ será $\Omega(U,^A) = \oplus_{b=0}^{\infty} \Omega^b(U,^A)$.

A continuación, definamos el producto de superformas o producto exterior. Sean $\beta_i \in \Omega^{b_i}(U,^A)_{j_i}$, $i = 1, 2$; $b = b_1 + b_2$. Entonces $\beta_1 \wedge \beta_2$ es la b-superforma siguiente. Consideremos los siguientes conjuntos:

$B = \{1, ..., b\}$; $C = \{c_1, ..., c_d\}$ un subconjunto de B con los c_i ordenados en orden creciente; $\xi_C = \{\xi_{c_1}, ..., \xi_{c_d}\}$; $\bar{C}$ complementario de C en B; Γ el conjunto de todos los subconjuntos $C \subseteq B$ con cardinal b_1. Entonces, si se definen los números

$$|\xi_C| = \sum_{c\in C} |\xi_c|,$$
$$|\xi_{C,\bar{C}}| = \sum_{(c,\bar{C})\in C\times\bar{C},c>\bar{C}} (1+|\xi_c||\xi_{\bar{C}}|)$$

puede definirse $\beta_1 \wedge \beta_2$ por la relación

$$\langle \xi_1, ..., \xi_b \mid \beta_1 \wedge \beta_2 \rangle = \sum_{C\in\Gamma} (-1)^{|\xi_{C,\bar{C}}|+|\xi_{\bar{C}}||\beta_1|} \langle \xi_C \mid \beta_1 \rangle \langle \xi_{\bar{C}} \mid \beta_2 \rangle$$

donde $\xi_1, ..., \xi_b$ son derivaciones de ${}^A(U)$ homogéneas.

Observemos entonces que, con el producto exterior de superformas diferenciales, $\Omega(U,{}^A\,)$ tiene la estructura de un álgebra conmutativa $(Z \oplus Z_2)$-bigraduada sobre ${}^A(U)$, donde

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \in \Omega^{b_1+b_2}(U,{}^A\,)_{j_1+j_2}\ ,$$
$$\beta_1 \wedge \beta_2 = (-1)^{b_1b_2+j_1j_2}\beta_2\beta_1\ .$$

Tambin se satisface que $(\beta_1 \wedge \beta_2) \wedge \beta_3 = \beta_1 \wedge (\beta_2 \wedge \beta_3) = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta_3$.

En general, si $\beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_b$, con $\beta_i \in \Omega^1(U,{}^A\,)_i$, entonces, si $\xi_k \in Der^A(U)$ $(k = 1, ..., b)$, $\langle \xi_1, ..., \xi_b \mid \beta \rangle$ puede descomponerse en términos de los elementos $\langle \xi_i \mid \beta_k \rangle \in^A (U)$ sin más que ir aplicando la definición anterior a pares de superformas sucesivamente.

B.2.2 Existencia de una base local para $\Omega(U,{}^A\,)$

Una propiedad muy importante de $\Omega(U,{}^A\,)$ es que la correspondencia $U \to \Omega(U,{}^A\,)$ define un haz de álgebras (super)conmutativas bigraduadas: el haz de las superformas diferenciales sobre $(M,{}^A\,)$. Cabe preguntarse entonces por la existencia de bases locales de $\Omega(U,{}^A\,)$.

Si $U \subseteq M$, se define la aplicación

$$\begin{array}{rcl} d : \Omega^0(U,{}^A\,) & \longrightarrow & \Omega^1(U,{}^A\,) \\ g & \mapsto & dg \end{array} \tag{B.3}$$

como $\langle \xi \mid dg \rangle = \xi g$, $\forall \xi \in Der^A(U)$.

Así, si U es un ^{A}-entorno coordenado con supercoordenadas $\{q^i, \theta^\alpha\}$, pueden definirse las 1-superformas $\{dq^i, d\theta^\alpha\}$. Observemos también que, si $(\mu, \nu) \in M_m \times N_n$,

$$dq^\mu \wedge d\theta^\nu \in \Omega^{k(\mu)+|\nu|}(U,{}^A\,)_{|\nu|}.$$

Entonces puede formularse la siguiente proposición:

Sea $U \subseteq M$ un ^{A}-entorno coordenado con supercoordenadas $\{q^i, \theta^\alpha\}$. Entonces:

1. Toda superforma $\beta \in \Omega(U,^A)$ puede expresarse unívocamente como
$$\beta = \sum_{(\mu,\nu)\in M_m\times N_n} dq^\mu \wedge d\theta^\nu f_{\mu,\nu} \ , \quad f_{\mu,\nu} \in^A (U).$$
2. $\Omega^b(U,^A)$ es un $^A(U)$-módulo libre, y los elementos $\{dq^\mu, d\theta^\nu\}$, con $(\mu,\nu) \in (M_m\times N_n)_b$, constituyen una base para $\Omega^b(U,^A)$.

Como consecuencia de lo anterior, si $f \in^A (U)$, entonces
$$df = \sum_{i=1}^m dq^i \frac{\partial f}{\partial q^i} + \sum_{\alpha=1}^n d\theta^\alpha \frac{\partial f}{\partial \theta^\alpha} \ .$$

B.2.3 Derivaciones de $\Omega(U,^A)$: diferencial exterior, contracción y superderivada de Lie

Sea $U \subseteq M$ un abierto. Consideremos el conjunto de los endomorfismos de $\Omega(U,^A)$ ($End(\Omega(U,^A))$). Lógicamente, $End(\Omega(U,^A))$ será graduado respecto de $Z \oplus Z_2$. Así, diremos que $u \in End(\Omega(U,^A))$ es de grado (c,j) si:
$$u(\Omega^b(U,^A)_i) \subseteq \Omega^{b+c}(U,^A)_{i+j},$$
para cada par $(b,i) \in Z \oplus Z_2$.

Dado $u \in End(\Omega(U,^A))$, diremos que u es una derivación de grado (c,j) si para todo $\alpha \in \Omega^b(U,^A)_i$, $\beta \in \Omega(U,^A)$,
$$u(\alpha\wedge\beta) = u(\alpha)\wedge\beta + (-1)^{bc+ij}\alpha\wedge u(\beta).$$

Si $u_i \in End(\Omega(U,^A))$ son derivaciones de grado (b_i, j_i) $(i = 1,2)$ respectivamente, entonces
$$u = u_1u_2 - (-1)^{b_1b_2+j_1j_2}u_2u_1$$
es una derivación de $\Omega(U,^A)$ con grado (b_1+b_2, j_1+j_2). Así pues, $Der(\Omega(U,^A))$ tiene la estructura de un álgebra de Lie bigraduada.

A continuacin, veremos cmo es posible extender al caso graduado la diferencial exterior d, la contracción $i(X)$ con un campo vectorial X y la derivada de Lie $\underset{X}{L}$ a lo largo de un campo X en geometra diferencial ordinaria.

En primer lugar, observemos que el operador $d : \Omega^0(U,^A) \to \Omega^1(U,^A)$ que definimos en el apartado anterior es tal que $d(fg) = (df)g + f(dg)$.

Sea $U \subseteq M$ abierto. Entonces existe una única derivación d
$$d : \Omega(U,^A) \longrightarrow \Omega(U,^A)$$
de grado $(1,0)$ tal que:

1. $d : \Omega^0(U,^A) \to \Omega^1(U,^A)$ coincide con la anterior.

2. $d^2 = 0$.

Denominaremos a este operador d la diferencial exterior sobre las superformas diferenciales.

Sean ahora $U \subseteq M$ abierto, $\xi \in Der^A(U)$ homogéneo y $\beta \in \Omega^{b+1}(U,^A)$. Entonces:

Se define la contraccin por ξ, $i(\xi) \in End(\Omega(U,^A))$, como la derivación de grado $(-1, |\xi|)$ dada por

$$\langle \xi_1, ..., \xi_b \mid i(\xi)\beta \rangle = (-1)^{|\xi| \sum_{i=1}^{b} |\xi_i|} \langle \xi, \xi_1, ..., \xi_b \mid \beta \rangle$$

con $\xi_1, ..., \xi_b \in Der^A(U)$.

En esta y todas las dems definiciones, si ξ no es homogéneo en general, se considera la descomposición en sus componentes homogéneas, $i(\xi) = i(\xi_{(0)}) + i(\xi_{(1)})$.

Una propiedad importante es que si $f \in^A (U)$, $\xi \in Der^A(U)$, $\beta \in \Omega(U,^A)$, entonces

$$i(f\xi)\beta = fi(\xi)\beta.$$

Finalmente, veamos la definicin de superderivada de Lie:

Si $\xi \in Der^A(U)$ es homogéneo, se define la superderivada de Lie de $\Omega(U,^A)$ de grado $(0, |\xi|)$ como el operador

$$^L_\xi = di(\xi) + i(\xi)d.$$

Propiedades: Sean $\xi, \eta \in Der^A(U)$. Entonces:

- La diferencial exterior y la superderivada de Lie conmutan, $d^L_\xi =^L_\xi d$.
- $i(\xi)i(\eta) + (-1)^{|\xi||\eta|} i(\eta)i(\xi) = [i(\xi), i(\eta)] = 0$.
- $^L_\xi i(\eta) - (-1)^{|\xi||\eta|} i(\eta)^L_\xi = [^L_\xi, i(\eta)] = i([\xi, \eta])$.
- $^L_\xi{}^L_\eta - (-1)^{|\xi||\eta|} {}^L_\eta{}^L_\xi = [^L_\xi, ^L_\eta] =^L_{[\xi,\eta]}$.

Por último, daremos dos fórmulas operativas que relacionan, la primera, la derivada de Lie con la contracción, y la segunda, la diferencial exterior con los superconmutadores de supercampos vectoriales:

Sea $\beta \in \Omega^b(U,^A)$, y $\xi, \xi_i \in Der^A(U)$ homogéneas ($i = 1, ..., b$). Entonces:

1. $\xi\langle \xi_1, ..., \xi_b \mid \beta\rangle = \sum_{i=1}^{b}(-1)^{|\xi|j_{i-1}}\langle \xi_1, ..., [\xi, \xi_i], ..., \xi_b \mid \beta\rangle +$
$$+(-1)^{|\xi|j_b}\langle \xi_1, ..., \xi_b \mid^L_\xi \beta\rangle$$
donde $j_i = \sum_{k=1}^{i} |\xi_k|$.

2. Denotando $\xi = \xi_{b+1}$,
$$\langle \xi_1, ..., \xi_{b+1} \mid d\beta\rangle = \sum_{i=1}^{b+1}(-1)^{i-1+j_{i-1}|\xi_i|}\xi_i\langle \xi_1, ..., \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, ..., \xi_{b+1} \mid \beta\rangle$$
$$+\sum_{k<l}(-1)^{d_{k,l}}\langle [\xi_k, \xi_l], ..., \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, ..., \xi_{l-1}, \xi_{l+1}, ..., \xi_{b+1} \mid \beta\rangle$$
donde $d_{k,l} = |d\xi_k|j_{k-1} + |\xi_l|j_{l-1} + |\xi_k||\xi_l| + k + l$.

B.2.4 La aplicación $\sigma^* : \Omega(N,^A_N) \to \Omega(M,^A_M)$ inducida por un morfismo $\sigma : (M,^A_M) \to (N,^A_N)$

Sea σ un morfismo de supervariedades, $\sigma : (M,^A_M) \to (N,^A_N)$. Sabemos que si $W \subseteq N$ es un abierto, y $U = \sigma_x^{-1}N \subseteq M$, $\sigma^* :^A_N (W) \to^A_M (U)$ es un homomorfismo de superálgebras. Entonces:

1. σ^* puede extenderse a un único homomorfismo
$$\sigma^* : \Omega(W,^A_N) \to \Omega(U,^A_M)$$
de forma que σ^* conmute con la diferencial exterior.

2. El homomorfismo σ^* extendido de esa forma es compatible con las aplicaciones de restricción sobre abiertos.

B.2.5 Lema de Poincare graduado

En geometría diferencial ordinaria sabemos que toda forma cerrada es localmente exacta. En el caso Z_2-graduado se obtiene un resultado absolutamente análogo.

Sean $(M,^A_M)$ una supervariedad, y $U \subseteq M$ un subconjunto abierto conexo. En ese caso:

1. Si $f \in^A (U)$, entonces
$$df = 0 \Longleftrightarrow f = \lambda \cdot I_U \ , \ \lambda \in .$$

2. Si además U es un ^A_M-entorno coordenado contractible, y $\beta \in \Omega^b(U,^A_M)$ $(b \geq 1)$ es tal que $d\beta = 0$, entonces existe $\omega \in \Omega^{b-1}(U,^A_M)$ tal que $\beta = d\omega$.

Finalmente, puede demostrarse que, si se define la cohomologa de de Rham de superformas diferenciales utilizando el operador d de superderivacin exterior, esta teora de cohomologa ser isomorfa a la cohomologa de de Rham sobre la variedad base de la supervariedad.

Appendix C

Supergrupos de Lie

C.1 La superlgebra envolvente $U(g)$ de una superlgebra de Lie g

Los grupos de Lie ordinarios y las lgebras de Lie pueden ser tratados simultneamente introduciendo una cierta lgebra de Hopf coconmutativa, el lgebra envolvente universal. Tomando este punto de partida se definen los supergrupos de Lie sustituyendo esta lgebra de Hopf por una superlgebra de Hopf coconmutativa. De hecho, obtendremos que un supergrupo de Lie es una supervariedad $(G,{}_G^A)$ donde G es un grupo de Lie ordinario y ${}_G^{A*}$ tiene la estructura de una superlgebra de Hopf. Recurdese que para una variedad graduada $(M,{}_M^A)$ arbitraria, el espacio ${}_M^{A*}$ tiene nicamente la estructura de una colgebra coconmutativa graduada. Para un supergrupo de Lie $(G,{}_G^A)$ uno tiene adems una estructura de lgebra sobre ${}_G^{A*}$ tal que ambas estructuras estarn ligadas de forma que ${}_G^{A*}$ tenga una estructura de superlgebra de Hopf.

As pues, veamos primero algunas propiedades de las superlgebras de Lie y las superlgebras de Hopf. Sea $g = g_0 \oplus g_1$ una superlgebra de Lie sobre un cuerpo de caracterstica cero. Se define el lgebra envolvente universal $U(g)$ de g como el lgebra tensorial $T(g)$ mdulo el ideal en $T(g)$ generado por los elementos de la forma $x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x - [x, y]$, para todo $x, y \in g$. Entonces sabemos que la aplicacin cociente $T(g) \to U(g)$ es inyectiva para g y, por tanto, en lo que sigue identificaremos g con su imagen, de forma que podemos considerar $g \subseteq U(g)$.

Es posible aplicar ahora el teorema de Poincar-Birkhoff-Witt [?] para $U(g)$, que sigue siendo vlido. Este establece que si $x_i \in g_0$, $i \in I$, e $y_j \in g_1$, $j \in J$, son respectivamente bases de g_0 y g_1 donde I y J son conjuntos de ndices bien ordenados, entonces el conjunto de todos los elementos de $U(g)$ de la forma $X_{i_1}^{d_1} \cdots x_{i_k}^{d_k} y_{j_1} \cdots y_{j_l}$ es una base de $U(g)$, donde $i_1 > \cdots > i_k \in I$, $d_1, \ldots, d_k \in$ y $j_1 > \cdots > j_l \in J$. En particular, si g es finito dimensional, con $\dim g_0 = m$ y $\dim g_1 = n$, $x_1, \ldots, x_m$ es una base de g_0 e $y_1, \ldots, y_n$ es una base de g_1, entonces $x^\nu y_\mu$ es una base de $U(g)$

para $(\nu, \mu) \in N_m \times M_n$, donde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in N_m$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in M_n$ y $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_m^{\nu_m}$, $y_\mu = y_{\mu_1} \cdots y_{\mu_k}$.

Claramente, $U(g)$ es un lgebra graduada. De hecho, con la notacin anterior, $x^\nu y_\mu \in (U(g))_0$ si $k(\mu)$ es par y $x^\nu y_\mu \in (E(g))_1$ si $k(\mu)$ es impar.

Puede observarse tambin que $U(g)$ es universal respecto de homomorfismos de g en lgebras graduadas. Esto es, si W es una superlgebra (asociativa), entonces una aplicacin lineal $\pi : g \to W$ de grado cero es un homomorfismo si es un homomorfismo de superlgebras de Lie con la estructura de superlgebra de Lie sobre W natural para toda superlgebra asociativa. Si $\pi : g \to W$ es tal homomorfismo, entonces la aplicacin se extiende unvocamente a un homomorfismo $\pi : U(g) \to W$ de superlgebras. En particular, se encuentra el importante caso en que $W = End\, V$ con V un superespacio vectorial.

C.2 La estructura de Hopf sobre $U(g)$

Es posible identificar ahora de una manera natural $U(g \oplus g)$ con $U(g) \otimes U(g)$, simplemente expresando todo elemento (x, y) de $g \oplus g$ con $x \otimes 1 + 1 \otimes y$. La aplicacin diagonal

$$\begin{array}{ccc} g & \longrightarrow & g \oplus g \\ x & \mapsto & (x, x) \end{array} \tag{C.1}$$

es un homomorfismo de g en $U(g) \otimes U(g)$, que por la propiedad universal de $U(g)$ se extiende a un homomorfismo

$$\Delta : U(g) \longrightarrow U(g) \otimes U(g) \tag{C.2}$$

dotando a $U(g)$ de la estructura de una superlgebra coconmutativa. De hecho, $U(g)$ tiene la estructura de una superlgebra de Hopf conexa, como veremos a continuacin.

Recordemos primero la definicin de un lgebra de Hopf. Asumamos que E es una superlgebra sobre un cuerpo K, con un homomorfismo de superlgebras $_E : E \to K$, la aplicacin de aumentacin. Asumamos tambin que E tiene la estructura de una colgebra graduada respecto de una aplicacin diagonal

$$\Delta : E \longrightarrow E \otimes E \tag{C.3}$$

de forma que $_E$ sea la counidad. Esto significa que Δ es una aplicacin coasociativa de espacios vectoriales graduados (esto es, Δ es una aplicacin lineal de grado cero tal que las dos aplicaciones $E \to E \otimes E \otimes E$ dadas por $(\Delta \otimes) \circ \Delta$ y $(\otimes \Delta) \circ \Delta$ coinciden) y, si $h \in E$ y

$$\Delta h = \sum_i h_i' \otimes h_i'' \ , \tag{C.4}$$

entonces

$$\sum_i {}_E(h_i')h_i'' = \sum_i h_i' \ {}_E(h_i'') = h. \tag{C.5}$$

Se dice entonces que $(E,_E, \Delta)$ es un lgebra de Hopf si Δ es un homomorfismo de lgebras.

Supongamos que E es un lgebra de Hopf. Se dice que E es coconmutativa si $T \circ \Delta = \Delta$, con T definida por $T(x \otimes y) = y \otimes x$, para todo $x, y \in E$. Se dice tambin que E tiene antpoda si existe un elemento $S \in End\ E$, llamado el antpoda, tal que

$$\sum_i S(h_i')h_i'' = \sum_i h_i' S(h_i'') =_E (h). \tag{C.6}$$

El antpoda S, si existe, es nico. Se sigue entonces fcilmente que $S \in (End\ E)_0$ (ver [?] o [?] para ms detalles sobre lgebras de Hopf).

Recordemos ahora (Apndice B) que un elemento $0 \neq g \in E$ es grupal o de tipo grupo si $g \in E_0$ y $\Delta g = g \otimes g$. Es fcil ver que ${}_E(g) = 1$ para un elemento grupal. Adems, el conjunto G de los elementos grupales es cerrado bajo el producto y todos los elementos de G son linealmente independientes en E. Tambin, $1 \in G$, donde 1 es el elemento identidad de E. Y si E tiene antpoda S, entonces G ser necesariamente un grupo, con $S(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$.

Por otro lado el conjunto h de todos los elementos primitivos de E (esto es, aquellos elementos $x \in E$ tales que $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, ver apndice B) constituye un subespacio graduado, cerrado bajo los parntesis, de forma que es una superlgebra de Lie. Tambin se satisface que ${}_E(x) = 0$ para $x \in h$.

Ahora, el dual E' de E es una superlgebra. Adems, el conjunto

$$M_e(E') = \{f \in E' \mid \langle e, f \rangle = 0\} \tag{C.7}$$

es un ideal maximal de codimensin 1 en E'. Sea $E_{(k)}$ el complemento ortogonal en E de la k-sima potencia $(M_e(E'))^k$ de $M_e(E')$. Se tiene que $E_{(k)} \subseteq E_{(k+1)}$. Sea $E_e = \cup_{k=1}^{\infty} E_{(k)}$. Entonces E_e es una sublgebra de Hopf graduada de E. Tambin, $h \subseteq E_e$. La superlgebra de Hopf E se dice que es conexa si $E_e = E$. Para cualquier superlgebra de Hopf E nos referiremos a E_e como la componente conexa de E.

Ntese entonces que, efectivamente, la superlgebra envolvente universal $U(g)$ de una superlgebra de Lie es un lgebra de Hopf conexa coconmutativa graduada, siendo g precisamente el espacio de todos los elemento primitivos de $U(g)$. Adems, es posible probar [Ko77] que, dada cualquier lgebra de Hopf conexa coconmutativa graduada sobre un cuerpo K de caracterstica cero, E es isomorfo a la superlgebra envolvente universal $U(h)$ de su superlgebra de Lie $h \subseteq E$ de los elementos primitivos.

C.3 Teorema de estructura para superlgebras de Hopf coconmutativas

Sea g una superlgebra de Lie. Entonces sabemos que la superlgebra de Hopf $U(g)$ tiene antpoda. De hecho, es evidente que existe un nico elemento $U \in End(g)$ tal que

$$\begin{aligned} Sx &= -x \ \text{ para todo } \ x \in g \ , \quad \text{y} \qquad (C.8) \\ S(uv) &= (-1)^{|u||v|} S(v)S(u). \qquad (C.9) \end{aligned}$$

Esta aplicacin S es entonces el antpoda de $U(g)$.

Ahora, si G es un grupo arbitrario y $K(G)$ es el lgebra del grupo (combinaciones lineales finitas de los elementos del grupo) de G sobre K, entonces $E = K(G)$ es una superlgebra de Hopf coconmutativa con antpoda sobre K. Definamos entonces la aplicacin

$$\Delta : K(G) \longrightarrow K(G) \otimes K(G) \qquad (C.10)$$

de forma que, para cada $g \in G$, $\Delta(g) = g \otimes g$. Adems, $S(g) = g^{-1}$ y $_E(g) = 1$. Asumamos tambin que g es una superlgebra de Lie sobre K, de forma que se tiene una representacin $\pi : G \to Aut\ g$ tal que $\pi(g)$ es un automorfismo de superlgebras de Lie para todo $g \in G$. Entonces π se extiende de manera nica a una representacin

$$\pi : G \longrightarrow Aut\ U(g), \qquad (C.11)$$

esto es, G acta como un grupo de automorfismos de $E(g)$. Ahora el producto semidirecto

$$E = K(G) \odot U(g) \qquad (C.12)$$

respecto de π, o simplemente producto semidirecto, es una superlgebra de Hopf coconmutativa con antpoda donde:

1. $E = K(G) \otimes U(g)$ como superespacio vectorial,
2. como lgebras, $K(G)$ y $U(g)$ son sublgebras, pero $gug^{-1} = \pi(g)u$ para todo $g \in G$, $u \in U(g)$,
3. respecto de la aplicacin diagonal Δ, los elementos de G son de tipo grupo y los elementos de g son primitivos, y
4. se cumple que $S(g) = g$, $S(x) = -x$ e $_E(g) =$, $_E(x) = 0$ para cada $g \in G$, $x \in g$.

Es fcil comprobar que, para el producto semidirecto, G es precisamente el conjunto de todos los elementos de tipo grupo (de ah su nombre) de E, mientras que g es exactamente el espacio de todos los elementos primitivos de E. La principal diferencia entre el producto semidirecto y el lgebra de Hopf graduada que consideramos al final del apartado anterior surge cuando $G \neq \{e\}$, en cuyo caso la superlgebra de Hopf E no ser conexa. Esto es, si no tenemos en consideracin la conectividad, entonces podremos identificar los elementos de tipo grupo. Se tiene el siguiente teorema [Ko77]:

Sea E una superlgebra de Hopf coconmutativa con antpoda sobre un cuerpo algebraicamente cerrado K de caracterstica cero, y sean G y g el grupo de todos los elementos grupales de E y la superlgebra de Lie de todos los elementos primitivos de E, respectivamente. Entonces existe una representacin $\pi : G \to Aut\ g$ sobre g tal que $gxg^{-1} = \pi(g)x$, para cualesquiera $g \in G$, $x \in g$. Es ms, como superlgebras de Hopf, se tiene un isomorfismo

$$E \cong K(G) \odot U(g)$$

donde el producto semidirecto lo es respecto de π.

C.4 La superlgebra de Lie-Hopf $U(G, g) = R(G) \odot E(g)$

Sea ahora $g = g_0 + g_1$ una superlgebra de Lie de dimensin finita sobre el cuerpo de los nmeros reales . Entonces g_0 es un lgebra de Lie ordinaria, y si escribimos $(\mathrm{ad}_g x)(y) = [x, y]$ para todo $x \in g_0$, $y \in g$,

$$\mathrm{ad}_g : g_0 \longrightarrow End\ g \tag{C.13}$$

ser una representacin de g_0 sobre g. Tomemos G un grupo de Lie conexo cuyo lgebra de Lie sea g_o. Diremos que Ad_g est definida sobre G si la representacin ad_g puede exponenciarse a un representacin

$$\mathrm{Ad}_g : G \longrightarrow \mathrm{Aut} g. \tag{C.14}$$

Por ejemplo, si G es el grupo de Lie simplemente conexo cuyo lgebra de Lie es g_0 entonces Ad_g est bien definida sobre G.

Asumamos ahora que G es un grupo, g es una superlgebra de Lie sobre y E es la superlgebra de Hopf

$$E = (G) \odot U(g) \tag{C.15}$$

respecto de alguna representacin $\pi : G \to Aut\ g$. Diremos que E tiene la estructura de una superlgebra de Lie-Hopf si

1. G tiene la estructura de un grupo de Lie (no necesariamente conexo);

2. $g = g_0 + g_1$ es una superlgebra de Lie de dimensin finita donde g_0 es el lgebra de Lie de G. Esto implica, en particular, que g_0 es el espacio tangente $T_e(G)$ a G en la identidad e y se tiene una aplicacin exponencial

$$\exp : g_0 \longrightarrow G \; ; \tag{C.16}$$

   y, finalmente,

3. Ad_g est definida sobre la componente conexa con la identidad G_e de G, de forma que $\pi|G_e = \mathrm{Ad}_g$.

Si G es un grupo de Lie, g es una superlgebra de Lie sobre y G acta sobre g como un grupo de automorfismos de superlgebras de Lie de acuerdo con la representacin $\pi : G \to Aut\ g$ tal que las condiciones (2) y (3) anteriores son satisfechas, obtendremos la superlgebra de Lie-Hopf $U(G, g, \pi)$ dada por el producto semidirecto (C.12). Si π se da por sobreentendida, escribiremos simplemente $E(G, g)$ para esta superlgebra de Lie-Hopf. En particular, si G es un grupo analtico, entonces π es nica.

Ahora, si $U(G, g)$ es una superlgebra de Lie-Hopf, sea $U(G, g_0)$ el lgebra de Lie-Hopf que se obtiene al sustituir g por su parte par g_0. Como lgebra de Hopf sabemos que se puede considerar

$$U(G, g_0) = C^\infty(G)^* \tag{C.17}$$

donde $C^\infty(G)^*$ es el conjunto de las distribuciones sobre G con soporte finito (ver Apndice B). Desde el punto de vista de categoras, un morfismo

$$U(G, g) \longrightarrow U(H, h) \tag{C.18}$$

de superlgebras de Lie-Hopf es un morfismo de superlgebras de Hopf tal que la restriccin

$$U(G, g_0) \longrightarrow U(H, h_0) \tag{C.19}$$

viene inducida por un morfismo $G \to H$ de grupos de Lie. El morfismo (C.19) ser un isomorfismo si es biyectivo. En tal caso, se sabe que la aplicacin correspondiente de grupos de Lie $G \to H$ es un isomorfismo de grupos de Lie. Por supuesto, $U(G, g)$ y $U(H, h)$ sern isomorfos si existe un isomorfismo (C.18).

Ntese que si $g = g_0 + g_1$ es una superlgebra de Lie real finito dimensional arbitraria, siempre existir un grupo de Lie G (el grupo de Lie simplemente conexo cuyo lgebra de Lie sea g_0) tal que pueda contruirse la superlgebra de Lie-Hopf $U(G, g)$. En tal caso nos referiremos a $U(G, g)$ como la superlgebra de Lie-Hopf simplemente conexa correspondiente a g.

C.5 Definicin de supergrupos de Lie

Ya estamos en condiciones de dar la definicin de un supergrupo de Lie.

Sean $(X,{}^A)$ e $(Y,{}^B)$ dos variedades graduadas. Ahora bien, si $(X,{}^A)$ es una supervariedad, entonces puede contruirse la supervariedad $(X \times X,{}^A \times{}^A)$ (ver [Ko77] para ms detalles), y $({}^A\times{}^A)(X \times X)^* ={}^A (X)^* \otimes^A (X)^*$. As pues, tiene sentido decir que un morfismo de colgebras graduadas

$$\tau :^A (X)^* \otimes^A (X)^* \longrightarrow^A (X)^*$$

es diferenciable.

Sea ahora $(G,{}^A)$ una supervariedad de dimensin (m, n). Tmese la aplicacin diagonal

$$\Delta :^A (G)^* \to^A (G)^* \otimes^A (G)^* \tag{C.20}$$

respecto de la cual recordemos que ${}^A(G)^*$ es una colgebra coconmutativa. La counidad viene dada por el elemento identidad ${}_G \in^A (G)$, donde ${}_G(v) = v({}_G)$, para todo $v \in^A (G)^*$. Diremos que $(G,{}^A)$ est dotado de la estructura de un supergrupo de Lie si ${}^A(G)^*$ tiene tambin la estructura de un lgebra tal que:

1. $({}^A(G)^*,{}_G, \Delta)$ es una superlgebra de Hopf con antpoda S, y
2. tanto la aplicacin
$$^A(G)^* \otimes^A (G)^* \longrightarrow^A (G)^* \tag{C.21}$$
dada por el producto como la aplicacin
$$S :^A (G)^* \longrightarrow^A (G)^* \tag{C.22}$$
dada por el antpoda son diferenciables.

Ntese que si ${}^A(G)^*$ tiene la estructura de una superlgebra de Hopf con antpoda, entonces las aplicaciones (C.21) y (C.22) son morfismos de colgebras graduadas.

Asumamos que $(G,{}^A)$ es un supergrupo de Lie. Entonces, puesto de G es el conjunto de los elementos de tipo grupo de la superlgebra de Hopf ${}^A(G)^*$, y como ${}^A(G)^*$ tiene un antpoda, se sigue que G tiene la estructura de un grupo. Sea $e \in G$ el elemento identidad de ${}^A(G)^*$. Entonces si

$$g = T_e(G,{}^A) \tag{C.23}$$

es el espacio tangente a $(G,{}^A)$ en la identidad e, puede verse que $g = g_0 + g_1$ ser el espacio de los elementos primitivos de ${}^A(G)^*$. En particular, g tendr la estructura de una superlgebra de Lie. Diremos que g es la superlgebra de Lie del supergrupo de Lie

$(G,{}^A_G)$. Ntese que $g_0 = T_e(G)$. De todos los resultados anteriores puede concluirse entonces el siguiente teorema.

Sea $(G,^A)$ un supergrupo de Lie. Entonces G respecto de sus estructuras de variedad y de grupo es un grupo de Lie y g_0, con su estructura de lgebra de Lie, como sublgebra de g, es el lgebra de Lie de G. Adems, ${}^A(G)^*$ con la estructura de grupo de Lie sobre G tiene la estructura de una superlgebra de Lie-Hopf. De hecho, si se define $\pi : G \to Aut\ g$ a travs de la relacin $gxg^{-1} = \pi(g)x$, para todo $x \in g$, $g \in G$, entonces $\pi|G_e = Ad_g$, donde G_e es la componente conexa con la identidad de G, y como superlgebras de Lie-Hopf se tiene que

$$^A(G)^* = U(G, g). \tag{C.24}$$

Como superlgebra de Hopf, la expresin (C.24) implica que

$$^A(G)^* = (G) \odot U(g) = U(G, g). \tag{C.25}$$

Adems,

$$^A_e(G)^* = U(g), \tag{C.26}$$

de forma que, como grupo de Lie ordinario, el conjunto de las distribuciones de $(G,^A)$ con soporte en la identidad es la superlgebra envolvente de la superlgebra de Lie g de $(G,^A)$.

Ntese tambin que, para cada $p \in G$, utilizando la estructura multiplicativa de ${}^A(G)^*$, podemos escribir

$$^A_p(G)^* = pU(g) = U(g)p, \tag{C.27}$$

y para el espacio tangente en p se tiene que

$$T_p(G,^A) = p \cdot g = g \cdot p. \tag{C.28}$$

Ahora, si $(G,^A)$ y $(H,^B)$ son dos supergrupos de Lie, entonces un morfismo

$$\sigma : (H,^B) \longrightarrow (G,^A)$$

de supervariedades se dir que es un morfismo de supergrupos de Lie si

$$\sigma_* :^A (H)^* \longrightarrow^A (G)^*$$

es un homomorfismo de superlgebras. Tambin, σ se dir que es un isomorfismo si, adems, σ_* es biyectiva. Obsrvese que, como σ_* es siempre un morfismo de colgebras graduadas, σ ser un morfismo de supergrupos de Lie si y solamente si σ_* es un morfismo de superlgebras de Hopf.

Supongamos ahora que, dados $(G,^A)$ y $(H,^B)$ supergrupos de Lie, se tiene un morfismo $\tau :^B (H)^* \to^A (G)^*$ de superlgebras de Hopf. Este morfismo ser diferenciable si $\tau = \sigma_*$, para un cierto morfismo $\sigma : (H,^B) \to (G,^A)$ de supergrupos de Lie. De hecho, es fcil probar que τ es diferenciable si y slo si τ es un morfismo de superlgebras de Lie-Hopf. De nuevo, σ ser un isomorfismo de supergrupos de Lie si y solamente si σ_* es un isomorfismo de superlgebras de Lie-Hopf.

C.6 Representacin regular por la izquierda de $(G,^A)$

Sea $(G,^A)$ un supergrupo de Lie. Debido a que $(G,^A)$ es una supervariedad, podemos considerar ${}^A(G)^*$ y la superlgebra conmutativa ${}^A(G)$, con el producto natural entre ellas $\langle\ ,\ \rangle$. Ahora, para cada $w \in^A (G)^*$ puede definirse el operador $R_w \in \mathrm{End}^A(G)$ dado por la expresin

$$\langle v, R_w f\rangle = \langle v \cdot w, f\rangle \tag{C.29}$$

para $w, v \in^A (G)^*$, $f \in^A (G)$. La aplicacin

$$\begin{array}{rcl} {}^A(G)^* & \longrightarrow & End\ {}^A(G) \\ w & \mapsto & R_w \end{array} \tag{C.30}$$

es un homomorfismo de superlgebras, que denominaremos la representacin regular por la derecha de $(G,^A)$ sobre ${}^A(G)$. La representacin regular por la izquierda de $(G,^A)$ sobre ${}^A(G)$

$$\begin{array}{rcl} {}^A(G)^* & \longrightarrow & End\ {}^A(G) \\ w & \mapsto & L_w \end{array} \tag{C.31}$$

es el homomorfismo de superlgebras definido por

$$\langle v, L_w f\rangle = (-1)^{|w||v|}\langle S(w) \cdot v, f\rangle, \tag{C.32}$$

para todo $w, v \in^A (G)^*$, $f \in^A (G)$. Se tiene que

$$[R_u, L_v] = 0 \tag{C.33}$$

para cada $u, v \in^A (G)^*$, donde el superconmutador lo es respecto de la estructura graduada de $End\ {}^A(G)$.

Con esta definicin del superconmutador, diremos que un operador $\alpha \in End\ {}^A(G)$ es invariante por la izquierda si $[L_u, \alpha] = 0$ para todo $u \in^A (G)^*$. La invariancia por la derecha se define de manera anloga.

Ahora, si $u \in U(g) \subseteq^A (G)^*$, entonces $R_u, L_u \in Diff\ {}^A(G)$ son operadores diferenciales. Sera interesante caracterizar estos operadores diferenciales de una manera similar a como se hace en la teora de grupos de Lie ordinarios.

Sea $\alpha \in End\ ^A(G)$ un operador arbitrario, y sea α^t su traspuesta sobre el dual $^A(G)'$ de $^A(G)$. Diremos que α admite una $^A(G)^*$-traspuesta si $^A(G)^*$ es estable bajo α^t. Es fcil comprobar que α admitir una $^A(G)^*$-traspuesta si y slo si para todo ideal $I \subseteq^A (G)$ de codimensin finita existe otro ideal $J \subseteq^A (G)$ de codimensin finita tal que

$$\alpha(J) \subseteq I$$

.

Puede comprobarse que todo operador de la forma R_u o L_u, con $u \in^A (G)^*$, admite una $^A(G)^*$-traspuesta. En general, todo operador diferencial $\in Diff\ ^A(G)$ o cualquier automorfismo de $^A(G)$ admitir una $^A(G)^*$-traspuesta. Sin embargo, dado que el conjunto de los operadores sobre $^A(G)'$ de la forma $(L_u)^t$, $u \in^A (G)^*$, acta transitivamente sobre $^A(G)^*$, se tiene el siguiente resultado.

Supongamos que $\alpha \in End\ ^A(G)$ admite una $^A(G)^*$-traspuesta. Entonces habr un nico $u \in^A (G)^*$ tal que α sea de la forma R_u si y slo si α es invariante por la izquierda. En particular, un operador diferencial $\in Diff\ ^A(G)$ es de la forma R_u para un cierto $u \in U(g)$ si y solamente si es invariante por la izquierda. El mismo enunciado es vlido si se intercambian los papeles de izquierda y derecha.

Si $u \in^A (G)^*$, $R_u \in X(^A)$ si y slo si $u \in g$. Como corolario de la proposicin anterior puede verse que la superlgebra de Lie g del supergrupo de Lie $(G,^A)$ juega el mismo papel que el lgebra de Lie de un grupo de Lie ordinario.

Un supercampo vectorial $\xi \in X(^A)$ es invariante por la izquierda si y solamente si es de la forma R_x, para un cierto $x \in g$. Esto es, la aplicacin

$$\begin{array}{ccc} g & \longrightarrow & X(^A) \\ x & \mapsto & R_x \end{array} \tag{C.34}$$

es un isomorfismo de la superlgebra de Lie g de $(G,^A)$ sobre la superlgebra de Lie de todos los supercampos vectoriales (o superderivaciones) invariantes por la izquierda de $^A(G)$. Por supuesto, el enunciado seguir siendo vlido si se intercambian los papeles de izquierda y derecha.

Como consecuencia de todo lo anterior, si $(G,^A)$ es un supergrupo de Lie, entonces G es por s mismo un ^{A}-entorno simple, con factores simples $(C(G), D(G))$ dados por

$$C(G) = \{f \in^A (G) \mid L_x f = 0 \ \text{ para todo } \ x \in g_1\} \tag{C.35}$$

y

$$D(G) = \{f \in^A (G) \mid L_x f = 0 \ \text{ para todo } \ x \in g_0\}. \tag{C.36}$$

En particular, si $C(G)$ viene definido por (C.35), entonces la aplicacin $f \mapsto \epsilon(f)$ define un isomorfismo $C(G) \cong C^\infty(G)$, y si $D(G)$ se define a travs de (C.36), entonces $D(G)$ es un lgebra exterior con $\dim g_1$ generadores, y se tiene que

$$^A(G) \cong C(G) \otimes D(G) \cong C^\infty(G) \otimes \Lambda g_1. \tag{C.37}$$

C.7 Construccin de supergrupos de Lie a partir de superlgebras de Lie-Hopf $U(G, g)$

Finalmente, veamos algunos resultados sobre la construccin de supergrupos de Lie.

Dada una superlgebra de Lie-Hopf $E(G, g)$, puede construirse la sublgebra conmutativa graduada de $U(V, g)$ (con $V \subseteq G$ un conjunto abierto arbitrario)

$$^A(V) = \{f \in U(V, g)' \mid w \cdot f|_{C^\infty(U)^*} \in C^\infty(U) \text{ para todo } w \in U(g)\},$$

donde se ha hecho uso de la identificacin entre $C^\infty(G(^*$ y $U(G, g_0)$ (ver [Ko77] para ms detalles). La aplicacin $f \mapsto f|_{C^\infty(U)^*}$ define un homomorfismo

$$^A(U) \longrightarrow C^\infty(U) \tag{C.38}$$

y $U \rightarrow^A (U)$ define un haz ^{A} de superlgebras conmutativas sobre G de tal forma que, respecto del homomorfismo (C.38), $(G,^A)$ es una supervariedad. Adems, la contraccin entre $^A(G)$ y el conjunto $U(G, g)$ induce una biyeccin

$$E(G, g) \longrightarrow^A (G)^* \tag{C.39}$$

la cual es un morfismo de colgebras. Es ms, si se transporta la estructura de superlgebra de Hopf de $U(G, g)$ sobre $^A(G)^*$, entonces $(G,^A)$ tendr la estructura de un supergrupo de Lie, de forma que $^A(G)^*$ tendr la estructura de una superlgebra de Lie-Hopf. Pero entonces (C.39) ser un isomorfismo de superlgebras de Lie-Hopf. As pues, se tiene el siguiente resultado.

Sea $(G,^A)$ un supergrupo de Lie, de forma que el espacio $^A(G)^*$ de las ^{A}-distribuciones de soporte finito sobre G tiene la estructura de una superlgebra de Lie-Hopf (en particular, tiene la estructura de una superlgebra de Hopf coconmutativa con antpoda). Entonces la correspondencia $(G,^A) \rightarrow^A (G)^*$ establece una biyeccin entre el conjunto de las clases mdulo isomorfismos de supergrupos de Lie y el conjunto de las clases mdulo isomorfismos de las superlgebras de Lie-Hopf.

Como consecuencia de este teorema obtenemos el siguiente corolario sobre la existencia de supergrupos de Lie.

Si $g = g_0 + g_1$ es una superlgebra de Lie real de dimensin finita, entonces siempre existe un supergrupo de Lie $(G,^A)$ tal que g sea la superlgebra de Lie de $(G,^A)$. De hecho, existe un supergrupo de Lie simplemente conexo (esto es, con G un grupo de Lie ordinario simplemente conexo) con la propiedad anterior, nico salvo isomorfismos.

Bibliography

[Ab78] R. Abraham, J.E. Marsden. *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Benjamin (1978).

[Al83] L. Alvarez-Gaum. *Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem*, Commun. Math. Phys., **90**, 161-173 (1983).

[Al91] T. J. Allen. *BRST quantization and coadjoint orbit theories.* Phys. Rev. D, **43**, 3442-3446 (1991).

[Az82] J.A. de Azcrraga, J. Lukierski. *Supersymmetric particles with internal symmetries and central charges*, Phys. Lett., **113B**, 170-174 (1982).

[Ba83] A.P. Balachandran et al. *Gauge Symmetries and Fiber Bundles.* Lect. Notes in Phys. **188**, Springer (1983).

[Ba91] C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernndez-Ruprez. *The Geometry of Supermanifolds.* Mathematics and its Applications, vol. **71**. Kluwer Academic Publ. (1991).

[Ba77] I.A. Batalin, G. Vilkovisky. *Relativistic S-Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints.* Phys. Lett. **69B**, 309-312 (1977).

[Ba79] M. Batchelor. *The structure of supermanifolds.* Trans. Am. Math. Soc., **253**, 329-338 (1979).

[Ba80] M. Batchelor. *Two approaches to supermanifolds.* Trans. Am. Math. Soc., **258**, 257-270 (1980).

[Ba88] C. Batlle, J. Gomis, J.M. Pons, N. Romn-Roy. *Lagrangian and Hamiltonian constraints for second-order singular Lagrangians.* J. Phys. A: Math. Gen., **21**, 2693 (1988).

[Be74] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora. *The Abelian Higgs Kibble Model, Unitarity of the S-Operator.* Phys. Lett. **52B**, 344-354 (1974).

[Be77] F. Berezin, M.S. Marinov. *Particle spin Dynamics as the Grassmann variant of Classical Mechanics.* Ann. of Phys., **104**, 336-362 (1977).

[Be87] F. A. Berezin. *Introduction to Superanalysis*, A. A. Kirillov. Ed. Reidel Publ., (1987).

[Bo82] R. Bott, L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer-Verlag (1982).

[Br77] L. Brink, P. di Vecchia, P. Howe. *A Lagrangian formulation of the classical and quantum dynamics of spinning particles.* Nucl. Phys. **B118**, 76-94 (1977).

[Br82] J. Braconnier, *Elments d'algbre differentielle gradue.* Publ. du Dpt. de Math., Univ. Claude Bernard, Lyon 1 (nouvelle srie) (1982).

[Ca85] F. Cantrijn, W. Sarlet, M. Crampin. *Higher order....* J. Phys. A (1985).

[Ca86] F. Cantrijn, J. F. Cariena, M. Crampin, L.A. Ibort. *Reduction of degenerate Lagrangians.* J. Geom. Phys., **3**, 353-400 (1986).

[Ca90a] F. Cantrijn, L.A. Ibort. *Reduction of Poisson Supermanifolds.* C.R. Acad. Sci. Paris, **311**, Srie II, 567-572 (1990).

[Ca91] F. Cantrijn, L.A. Ibort. *Introduction to Poisson Supermanifolds.* Diff. Geom. and its Appl., 133-152 (1991).

[Ca88] J.F Cariena, C. Lpez, N. Romn-Roy. *Origin of th Lagrangian constraints and their relationwith the Hamiltonian formulation.* J. Math. Phys., **29**, 1143 (1988).

[Ca90b] J.F. Cariñena. *Theory of Singular Lagrangians.* Fortschr. Phys., **38**, 641-679 (1990).

[Ca93] J.F. Cariena, H. Figueroa. *A geometrical version of Noether's theorem in supermechanics.* Preprint Univ. Zaragoza (1993).

[Ca76] R. Casalbouni. *The Classical mechanics for Bose-Fermi systems*, Il Nouvo Cim., **33A**, 389-431 (1976).

[Cr81] M. Crampin. *On the Differential Geometry of the Euler-Lagrange Equations, and the Inverse Problem of Lagrangian Dynamics.* J. Phys. A: Math. & Gen. **14**, 2567-2575 (1981).

[Cr84] M. Crampin, G.E. Prince & G. Thompson. *A Geometrical Version of the Helmholtz Conditions in Time-Dependent Lagrangian Dynamics.* J. Phys. A:Math. Gen., **17**, 1437 (1984)

[Cr85] M. Crampin & G. Thompson. *Affine bundles and integrable almost tangent structure.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **98**, 61-71 (1985).

[DeF89] S. De Filippo, G. Landi, G. Marmo & G. Vilasi. *Tensor Fields defining a tangent bundle structure.* Ann. Inst. H. Poincar, **50**, 205 (1989).

[deL91a] M. de Len, M.H. Mello & P.R. Rodrigues. *Reduction of degenerate non-autonomous Lagrangians.* Preprint 1991.

[deL91b] M. de Len, E. Merino. *A characterization of tangent and stable tangent bundles.* Preprint (1991).

[Di64] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Yeshiva Univ. (1964)

[Do41] J. Douglas. Trans. Am. Math. Soc., **50**, 71-128 (1941).

[Fa67] L.D. Faddeev, V.N. Popov. *Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field.* Phys. Lett. **25B**, 29-30 (1967).

[Fi89] J. Fish, M. Henneaux, J. Stasheff, C. Teitelboim. *Existence, Uniqueness and Cohomology of the Classical BRST Charge with Ghosts of Ghosts*. Commun. Math. Phys., **120**, 379-407 (1989).

[Fo92] M. Forger, J. Kellendok. *Classical BRST Comology and Invariant Functions on Constraint Manifolds*. Commun. Math. Phys., **143**, 235-255 (1992).

[Fr75] E.S. Fradkin, G. Vilkovisky. *Quantization of Relativistic Systems with Constraints*. Phys. Lett., **55B**, 224-226 (1975).

[Ga80] C.A.P. Galvao, C. Teitelboim. *Classical supersymmetric particles*. J. Math. Phys. 21(7), 1980.

[Ga77] K. Gawezdky. *Supersymmetries-Mathematics of supergeometry*. Ann. Inst. H. Poincar. Sect. A, **27**, 335-366 (1977).

[Gd69] C. Godbillon. *Gometrie Differentielle et Mcanique Analytique*. Hermann Press (1969).

[Gi86] R. Giachetti, R. Ricci. *-actions, derivations and Frobenius theorem on graded manifolds*. Adv. in Math., **62**, 84-100 (1986)

[Gi88] S.B. Giddings. *A Brief Introduction to Super Riemann Surface Theory.* Preprint HUTP-88/A038.

[Go84] J. Gomis, P. Mato, M. Novell. *World-Line condition for a Spinning Particle in Superspace*. Il Nuovo Cimento, **82B**, N. 1, 17-28 (1984).

[Go86] J. Gomis, M. Novell. *Pseudoclassical description for a nonrelativistic spinning particle. I. The Levy-Leblond equation*. Phys. Rev. D, **33**, 2212-2219 (1986). Phys. Rev. D, **33**, 2220-2226 (1986).

[Go86b] J. Gomis, M. Novell, K. Rafanelli. *Pseudoclassical model of a particle with arbitrary spin*. Phys. Rev. D, **34**, 1072-1075 (1986).

[Go79] M. Gotay. *Presymplectic Manifolds, Geometric Constraint Theory and the Dirac-Bergmann Theory of Constraints*, Ph. D. Thesis (1979).

[Go80] M. Gotay, J. M. Nester. *Presymplectic Lagrangian Systems II: the second-order equation problem*. Ann. Inst. H. Poincar, **A32**, 1 (1980).

[Go82] M. Gotay. Proc. Am. Math. Soc. **84**, 377-389 (1982).

[Gr91] M. P. Grabowski & C.-H. Tze. *Classical gauge theories on the coadjoint orbits of infinite dimensional groups*. Phys. Lett. B, **258**, 145-150 (1991).

[Gu74] V, Guillemin, A, Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

[Gu77] V. Guillemin, S. Sternberg. *Geometric Asymptotics*. Math. Surveys 14, Am, Math. Soc., Providence, Rhode Islands (1977).

[He82a] M. Henneaux. *Equations of Motion, Commutation Relation and Ambiguities in the Lagrangian Formalism*. Annals of Phys. **140**, 45-64 (1982).

[He82b] M. Henneaux, C. Teitelboim. *Relativistic Quantum Mechanics and Supersymmetric particles*. Ann. of Phys., **143**, 127-159 (1982).

[He85] M. Henneaux. *Hamiltonian Form of the Path Integral for Theories with a Gauge Freedom*. Phys. Rep., **126**, No.1, 1-66 (1985).

[He88a] M. Henneaux. *Classical Foundations of BRST Symmetry*, Bibliopolis, edizioni di filosofia e scienze (1988).

[He88b] M. Henneaux, C. Teitelboim. *BRST Cohomology in Classical Mechanics*. Commun. Math. Phys. **120**, 379-407 (1988).

[Ib84] L.A. Ibort. *Estructura Geomtrica de los Sistemas con Simetra en Mecnica Clsica y Teora Clsica de Campos*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza (1984).

[Ib90] L.A. Ibort & C. Lopez-Lacasta. *On the Existence of Local and Global Lagrangians for Ordinary Differential Equations*. J. Phys. A: Math. Gen., **23**, 4779-4792 (1990).

[Ib91] L.A. Ibort, J. Marn-Solano. *On the inverse problem of the calculus of variations for a class of coupled dynamical systems*. Inverse Problems, **7**, 713-725 (1991).

[Ib92a] L.A. Ibort, J. Marn-Solano. *A geometric classification of Lagrangian functions and the reduction of evolution space*. J. Phys. A: Math. & Gen., **25**, 3353-3367 (1992).

[Ib92b] L.A. Ibort, J. Marn-Solano. *Geometrical foundations of Lagrangian supermechanics and supersymmetry*. Rep. on Math. Phys.. En prensa (1993).

[Ib92c] L.A. Ibort, G. Landi, J. Marn-Solano, G. Marmo. *On the inverse problem of Lagrangian supermechanics*. Int. J. Mod. Phys.. En prensa (1993).

[Ib93a] L.A. Ibort, J. Marn-Solano. *Geometrical foundations of lagrangian supermechanics and BRST symmetry*. Anales de Fsica, Monografas. Vols 1 and 2. M.O., M.S. and J.M.J. (Eds). CIEMAT/RSEF, Madrid (1993).

[Ib93a] L.A. Ibort, J. Marn-Solano. *Reduction and Parisi-Sourlas symmetry*. En preparacin (1993).

[Ja81] A. Jadczyk, K. Pilch. *Superspaces and Supersymmetries*, Commun. Math. Phys., **78**, 373-390 (1981).

[Ko77] B. Kostant. *Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization*, Proceedings Bonn, July 1975. Lecture Notes in Mathematics **570**, 177 (1977).

[Ko87] B. Kostant, S, Sternberg. *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite dimensional Clifford algebras*, Ann. Phys. **176**, 49-113 (1987).

[La92] G. Landi, G. Marmo, G. Vilasi. *Remarks on the complete integrability of dynamical systems with fermionic variables*. J. Phys. A: Math. & Gen.**25**, 4413-4423 (1992).

[Le80] D.Leites. *Introduction to the theory of supermanifolds*. Russ. Math. Surv. **35:I**, 1 (1980).

[Li87] P. Libermann, C. M. Marle. *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics.* Reidel, Dordrecht (1987).

[Ma88] Y. Manin *Gauge Field Theory and Complex Geometry.* Springer-Verlag (1988).

[Ma86a] J.L. Maes, B. Zumino. *WBK Method, Susy Quantum Mechanics and the Index Theorem*. Nucl. Phys. **270B**, 651 (1986).

[Ma59] J.L. Martin. Proc. Roy. Soc. London. **A251**, 536-543 (1959).

[Ma86b] G. Marmo, N. Mukunda. *Symmetries and Constants of the Motion in the Lagrangian formalism on TQ: beyond point transformations.* Il Nuovo Cim., **92B**, 1-12 (1986).

[Ma86c] J. E. Marsden, T. Ratiu. *Reduction of Poisson Manifolds*. Lett. Math. Phys., **11**, 161-169 (1986).

[Mo84] R. Montgomery. *Canonical Formulation of a Classical Particle in a Yang-Mills Field and Wong's Equations*. Lett. Math. Phys., **8**, 59-67 (1984).

[Mo88] J. Monterde, A. Montesinos. *Integral curves of derivations*, Ann. Global Analysis Geom., **6**, 177-189 (1988).

[Mo90] G. Morandi, C. Ferrario, G. Lo Vecchio, G. Marmo, C. Rubano. *The inverse problem in the calculus of variations and the geometry of the tangent bundle*. Phys. Rep., **188**, 1 (1988).

[Ne88] P. Nelson. *Lectures on Supermanifolds and Strings*. Theoretical Advanced Study Institute, Brown Univ., and Spring School on Superstrings, Trieste (1988).

[Ou83] J.A. Oubia. *Almost s-tangent structures.* Geometria Dedicata, **14**, 395-403 (1983).

[Ra84] K. Rafanelli. *Theory of the relativistic spinning particle: Hamiltonian formulation and the world-line invariance*. Phys. Rev. D, **30**, 1707-1711 (1984).

[Ro80] A. Rogers, *A global theory of supermanifolds*, J. Math. Phys., **21**, 1352-1365 (1980).

[Ro86] A. Rogers, *Graded Manifolds, Supermanifolds and Infinite Grasmann algebras*, Commun. Math. Phys., **105**, 375-384 (1986).

[Ro85] M. Rothstein. *The axioms of supermanifolds and a new structure arising from them*, Trans. Am. Math. Soc., **297**, 159-180 (1985).

[Ro91] M. Rothstein. *The structure of supersymplectic supermanifolds*. Preprint 1991.

[Sa82] W. Sarlet. *The Helmholtz Conditions Revisited. A New Approach to the Inverse Problem of Lagrangian Dynamics*. J. Phys. A: Math & Gen., **15**, 1503-1517 (1982).

[Tu89] G. M. Tuynman. *Geometric Quantization of the BRST charge*. Preprint, MSRI 06124-89 (1989).

[Ty75] I.V. Tyutin, Report Fian **39** (1975). No publicado.

[We79] A. Weinstein. *Lectures on Sinplectic Manifolds*, C. B. M. S. Reg. Conf. Series Math., 29, Am. Math. Soc. Providence, Rhode Island (1979).

[Wi82] E. Witten. *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom., **17**, 661 (1982).

[Wi84] B. de Witt. *Supermanifolds*, Cambridge University Press (1984).