Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Postgrado en Matemática

# EL TEOREMA DE WEIERSTRASS EN ESPACIOS DE SOBOLEV CON PESO

Trabajo presentado ante la Ilustre Universidad Central de Venezuela por la Msc. Yamilet Quintana M., para optar al Título de Doctor en Ciencias Matemáticas.
TUTOR: Dr. José Manuel Rodríguez García.
Universidad Carlos III de Madrid. España.

Caracas - Venezuela
Enero 2004

# Resumen


En este trabajo, estudiamos problemas de aproximación al estilo del problema de aproximación polinomial de Weierstrass.

- Caracterizamos el conjunto de funciones que pueden ser aproximadas por funciones continuas en norma $L^\infty(w)$, con respecto a casi cualquier peso $w$. Esta caracterización a su vez nos permite describir el conjunto de funciones que pueden ser aproximadas por polinomios o funciones suaves para un amplio rango de pesos $w$.

- Caracterizamos el conjunto de funciones que pueden ser aproximadas por funciones de clase $C^1$ en el espacio de Sobolev con peso $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, donde los pesos $w_0$, $w_1$ no están ni necesariamente acotados ni necesariamente relacionados entre sí.

- Estudiamos el problema de aproximación por funciones de clase $C^\infty$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$.

- Haciendo uso de un juego diferente de ideas caracterizamos al conjunto de las funciones que pueden ser aproximadas por polinomios en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$.

- Extendemos algunos de los resultados anteriores al problema de aproximación simultánea, con derivadas débiles de orden superior a 1. De esta forma también encontramos caracterizaciones para el conjunto de funciones que pueden ser aproximadas por funciones de clase $C^k$, $C^\infty$ o por polinomios en el espacio de Sobolev con peso $W^{k,\infty}(w_0, \dots, w_k)$.

# Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que no aparecen explícitamente en las próximas líneas y que han colaborado para que este trabajo se hiciera realidad. También pido disculpas por la omisión a causa del descuido y del olvido.

Agradezco a mi Tutor, el Dr. José Manuel Rodríguez García, el entusiasmo, la dedicación, los consejos constructivos y el esfuerzo que en todo momento me ha prestado.

También me gustaría agradecer a los Doctores Guillermo López Lagomasino y Miguel A. Jiménez; al primero por su cuidadosa lectura del primer artículo producto de este trabajo y por muchas de sus útiles sugerencias y al segundo por su construcción de un peso no admisible.

Doy mi más sincero agradecimiento a los Doctores Wilfredo Urbina y Héctor Pijeira por su voto de confianza y su acertada visión de lo que debe ser el mundo científico.

Deseo hacer extensible este agradecimiento a mis compañeros del Departamento de Matemáticas y Física del Instituto Pedagógico de Caracas, Universidad Experimental Pedagógica Libertador, los cuales me han prestado todo su apoyo, y también a mis compañeros de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela, en especial a las Sras. Maribel Gómez, Eddy Petaquero y Diosa Nieto. Vaya mi gratitud también al grupo de trabajo de los cursos que estuvieron a mi cargo en estas Universidades durante los últimos dos años y medio.

Desde el punto de vista personal quiero agradecer a mis hermanos Carmen, Yenny y Ender, por su enorme e incansable apoyo. A mis amigos Manuel "Manguito" Maia y Lenis Bello, por su bálsamo de amenas conversaciones y por el afecto dispensado, -el afecto recíproco también es cierto-.

Una mención especial es para mi madre, Cirila y para mi madrina, Auristela que supieron darme ánimo en los momentos difíciles y a quienes debo mucho más de lo que jamás sería capaz de expresar.

Otra mención especial es para mis sobrinos Andy, Angy, Enderson, Darkelis y Ender Jesús por haber compartido conmigo sus juguetes.

Vicky

*A mi Madre.*

*“Aprendamos a soñar, caballeros, y luego puede que encontremos la Verdad...”*

*Kekulé*

# Contenido

# Introducción

Podemos abordar la Teoría de Aproximación de funciones desde las dos corrientes que se encargan de estudiarla: la corriente cualitativa y la corriente cuantitativa. La primera de éstas tiene como objetivo encontrar las condiciones necesarias para poder aproximar -dada una noción de cercanía sobre cierto espacio $X$ de funciones- y determinar las características de la función aproximante. La segunda, en cambio, se ocupa de encontrar un aproximante a distancia menor que una cota prefijada, dada la existencia de la función aproximante.

Nosotros utilizaremos el enfoque cualitativo de la Teoría de Aproximaxión de funciones para estudiar ciertos espacios de funciones, con estructura métrica que involucre no sólo a las funciones, sino también a sus derivadas hasta cierto orden. Tales espacios son originarios de la Teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales con valores en la frontera y son llamados *Espacios de Sobolev con Peso.*

Consideraremos normas que involucren las derivadas de una función hasta un cierto orden (*normas de Sobolev*). De manera natural surge la noción de cercanía entre puntos y la posibilidad de estudiar a los subconjuntos de tales espacios en términos de la corriente cualitativa de la Teoría de Aproximación (ver [1]).

Particularmente, si el espacio de Sobolev $X$ contiene al espacio de los polinomios $\mathbb{P}$ (o al menos a un subconjunto de $\mathbb{P}$), podemos preguntarnos cuál es el mayor conjunto de funciones en $X$ que pueden ser aproximadas por elementos de $\mathbb{P}$ en la métrica inducida por la *norma de Sobolev.*

Como un antecedente histórico de problemas similares al anterior tenemos el solucionado por Karl Weierstrass (1815-1897): Si $I$ es cualquier intervalo compacto, cuál es el mayor conjunto de funciones en $I$ aproximables por polinomios en la norma $L^\infty(I)$, si identificamos, como es usual, funciones que coinciden en casi todo punto.

La respuesta a esta pregunta es el espacio $C(I)$ de todas las funciones continuas sobre $I$, y fue dada por Weierstrass en 1885. En la actualidad, tal problema y su solución son conocidos como el teorema de aproximación de Weierstrass.

Existen muchas extensiones y ramificaciones del teorema de aproximación de Weierstrass (algunas de ellas serán mencionadas en el capítulo siguiente (ver también [23])). Nosotros estudiaremos el problema de aproximación polinomial, siempre y cuando tenga sentido plantearlo, con respecto a la norma Sobolev $W^{k,\infty}(w)$ definida por

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(w)} := \sum_{j=0}^{k} \|f^{(j)}\|_{L^\infty(w_j)}, \tag{1}$$

donde $w = (w_0, \dots, w_k)$ es un peso vectorial que satisface ciertas propiedades, y

$$\|f\|_{L^\infty(w_j)} := \operatorname{ess\,sup} |f(x)| w_j(x). \tag{2}$$

Observe que (2) no es la definición usual de la norma $L^\infty$ en el contexto de Teoría de la medida, aunque es la definición correcta cuando trabajamos con pesos (ver [4] y [9]). Note también que $W^{0,\infty}(w) = L^\infty(w)$. Para $k = 0$, $k = 1$ y $k$ arbitrario mejoramos los resultados presentados en [35].

El trabajo en su totalidad está constituido por cinco capítulos que describiremos a continuación.

El capítulo 1 está estructurado en tres secciones. La primera de éstas contiene algunos comentarios sobre el teorema de aproximación de Weierstrass y las demostraciones del mismo hechas por Weierstrass y Bernstein. La segunda sección está dedicada a una breve visión histórica de algunas extensiones de dicho teorema y la tercera muestra algunos datos biográficos sobre Weierstrass.

El capítulo 2 presenta el estudio del problema de aproximación en $L^\infty(w)$. La sección 2.2 contiene un resultado sobre aproximación por funciones continuas en norma $L^\infty(w)$ para pesos admisibles, mientras que la sección 2.3 está dedicada a la demostración de lemas de cubrimiento de tipo Besicovitch-Vitali que son necesarios para la demostración del resultado más importante de este capítulo, el teorema 2.2.1. Todos los resultados presentados en este capítulo aparecen en [30].

El capítulo 3 empieza el estudio del problema de aproximación simultánea de la función y su derivada de primer orden. Caracterizamos al conjunto de funciones que pueden ser aproximadas por funciones de clase $C^1$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, donde los pesos $w_0$, $w_1$ no están ni necesariamente acotados ni necesariamente relacionados entre sí. Esta caracterización dependerá de cierto valor asociado a cualquier punto singular $a$ de $w_1$. Todos los resultados presentados en este capítulo aparecen en [31].

En el mismo orden de ideas trabajamos en el capítulo 4 con derivadas de orden $k > 1$. Los resultados fundamentales de este capítulo garantizan que una función $f$ pertenece a la clausura de los polinomios (o a la clausura de funciones suaves, respectivamente) en norma $W^{k,\infty}(w_0, \dots, w_k)$, si y sólo si, $f^{(j)}$ pertenece a la clausura de los polinomios (las funciones suaves, respectivamente) en $L^\infty(w_j)$, para todo

$0 \leq j \leq k$. Todo el estudio hecho en este capítulo aparece en [32].

Por último, en el capítulo 5 se exponen las conclusiones y se plantean problemas que pueden conducir a futuras líneas de investigación. La tesis se completa con una bibliografía sobre Teoría de Aproximación y espacios de Sobolev, basada en artículos y textos clásicos de indudable interés.

Cada uno de los capítulos del trabajo se descompone en secciones. La numeración de cada resultado (lema, proposición, teorema o corolario), de las definiciones, observaciones y ejemplos está de acuerdo con la sección del texto donde se encuentra. Así, el lema 2.3.1 indica el primer resultado de la sección 3 del segundo capítulo.

# Capítulo 1

# El teorema de aproximación de Weierstrass.

En este capítulo se pretende dar una visión histórica de algunas generalizaciones del teorema de Karl Weierstrass de aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios sobre intervalos compactos de la recta, desde su aparición en 1885 hasta el presente.

La primera de las tres secciones que lo componen contiene el enunciado del teorema y las pruebas de K. Weierstrass y S. Bersntein. La segunda sección está dedicada a las extensiones y ramificaciones del teorema de Weierstrass. Finalmente, la tercera sección entrega algunos datos biográficos sobre K. Weierstrass.

## 1.1 Sobre el teorema de Karl Weierstrass.

Tal vez más que a ningún otro matemático, se debe a Karl Weierstrass (1815-1897) la tendencia moderna hacia el rigor en el Análisis Matemático. Weierstrass formuló un hecho importantísimo acerca de las funciones continuas:

TEOREMA 1.1.1 *(K. Weierstrass, 1885)*
*Sea* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *continua. Dado* $\epsilon > 0$ *podemos encontrar un polinomio que satisface*

$$|f(x) - p(x)| \leq \epsilon, \ \forall \ x \in [-1, 1]. \tag{1.1}$$

En otras palabras, el teorema 1.1.1 asegura la posibilidad de aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios sobre un intervalo compacto de la recta. La demostración del teorema 1.1.1

hecha por Weierstrass será mostrada más adelante.

Dos artículos de Runge publicados casi al mismo tiempo, dieron otra prueba del teorema (1.1.1), pero desafortunamente, el teorema no se tituló teorema de Weierstrass-Runge. El impacto del teorema de Weierstrass en el mundo de las Matemáticas fue inmediato. Hubo pruebas posteriores de famosos matemáticos tales como Picard (1891), Volterra (1897), Lebesgue (1898), Mittag-Leffler (1900), Landau (1908), de la Vallee Poussin (1912). Las demostraciones más comúnmente tomadas a nivel del pregrado en Matemáticas actualmente son las de Fejér (1900) y Bernstein (1912) (ver [7]). Nosotros sólo mostraremos la de Bernstein por ser la más fácil y elegante, aunque no es la demostración más simple.

### 1.1.1 Las demostraciones de Weierstrass y de Bernstein.

**Demostración de Weierstrass.**

Consideremos $\tilde{f}$ una extensión continua de $f$ sobre $\mathbb{R}$, tal que $\tilde{f} \equiv 0$ en $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$. Note que $\tilde{f}$ es uniformenmente continua en $\mathbb{R}$. Dado $h > 0$, consideremos

$$G_h(x) := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-\left(\frac{x-t}{h}\right)^2} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-t}{h}\right)^2} dt}. \tag{1.2}$$

Así que $G_h$ es la convolución de $\tilde{f}$ con el núcleo gaussiano normalizado $e^{-u^2}$. Como la integral en el denominador de (1.2) es independiente de $x$, haciendo un cambio de variable obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-t}{h}\right)^2} dt = h\sqrt{\pi},$$

luego

$$G_h(x) - \tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\tilde{f}(t) - \tilde{f}(x)\right] e^{-\left(\frac{x-t}{h}\right)^2}}{h\sqrt{\pi}} dt; \tag{1.3}$$

y por la continuidad uniforme de $\tilde{f}$, separando en los dos sumandos habituales cuando tratamos con aproximaciones de la identidad, tenemos que

$$\|G_h - \tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \to 0, \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$

Ya que $\tilde{f}$ tiene soporte compacto, sustituyendo en (1.2) por la serie de Maclaurin de la función exponencial, obtenemos que $G_h$ es una función entera. Finalmente, tomando $p_n$ como la $n$-ésima suma parcial de la serie de Maclaurin de $G_h$, para $n$ suficientemente grande, se obtiene el resultado del teorema.

$\blacksquare$

**Demostración de Bernstein.**

El resultado obtenido por Bernstein fue el siguiente.

Teorema 1.1.2 *(Bernstein).*
*Dada* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *acotada, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x),$$

*para cada* $x \in [0,1]$ *en donde* $f$ *sea continua. Si* $f \in C([0,1])$ *entonces* $B_n(f;x)$ *converge uniformemente a* $f$*.*

**Demostración.**

Consideremos $\delta > 0$ y $x \in [0,1]$, tales que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$, para $k = 0, \dots, n$. Entonces $\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \geq 1$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta,\ 0\leq k\leq n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta,\ 0\leq k\leq n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{\delta^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n^2 B_n(x^2;x) - 2xn^2 B_n(x;x) + xn^2 B_n(1;x) = nx(1-x),$$

de donde

$$\frac{1}{\delta^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2} \leq \frac{1}{4\delta^2 n},$$

pues $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ para todo $x \in [0,1]$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad \text{de donde} \\
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad \text{luego}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) - B_n(f;x) &= \sum_{k=0}^{n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta,\ 0\leq k\leq n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta,\ 0\leq k\leq n}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Por hipótesis, $f$ es acotada en $[0,1]$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [0,1]$, luego si $\alpha, \beta \in [0,1]$ tenemos que $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq 2M$. Si $x$ es un punto de continuidad de $f$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, siempre que $|x - y| < \delta_1$. Por lo que

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f;x)| &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_1,\ 0\leq k\leq n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta_1,\ 0\leq k\leq n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \epsilon \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_1,\ 0\leq k\leq n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta_1,\ 0\leq k\leq n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \epsilon \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta_1,\ 0\leq k\leq n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{2M}{4n(\delta_1)^2} \\
&\leq \epsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{M}{2n(\delta_1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Luego, para $n$ suficientemente grande $|f(x) - B_n(f;x)| \leq 2\epsilon$.

Supongamos que $f \in C([0,1])$; entonces $f$ es uniformemente continua en $[0,1]$, por lo que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, siempre que $|x - y| < \delta_2$, luego la cadena de desigualdades anterior es cierta independientemente del punto $x$ considerado. Por lo tanto la convergencia es uniforme.

$\blacksquare$

Observe que si $f \in C([a,b])$, haciendo el cambio de variable $y = \frac{x-a}{b-a}$, trasladamos el problema al intervalo $[0,1]$ y podemos trabajar con los polinomios de Bernstein $B_n(f;y)$.

El teorema de Bernstein no sólo prueba el resultado de Weierstrass, sino que además entrega una expresión explícita para los polinomios aproximantes.

También es interesante destacar que las ideas en la prueba de Bernstein son muy similares a las usadas con aproximaciones de la identidad.

## 1.2 Extensiones y ramificaciones del teorema de Weierstrass.

Simultáneamente con el estudio de la aproximación por polinomios algebraicos también fue investigada la aproximación por polinomios trigonométricos -comenzando con las series de Fourier-. El problema puede ser planteado más generalmente: Dada $\{f_i\}_i$ una sucesión en un espacio normado $X$, ¿bajo qué condiciones $\{f_i\}_i$ es fundamental en $X$?, es decir, ¿cuándo es cierto que para cualquier $g \in X$ y todo

$\epsilon > 0$, se pueden encontrar $n$ y una sucesión de escalares $\{c_i\}_i$ tales que

$$\left\| g - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right\| < \epsilon \ ?$$

Esta pregunta ocupó a muchos matemáticos durante el siglo pasado. Quizás el ejemplo más viejo y más simple se propuso, aproximadamente, en 1912 por Bernstein: Dada $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos distintos. ¿Cuándo las funciones $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3} \ldots$ son fundamentales en $C([0,1])$? La respuesta fue conjeturada por el mismo Bernstein y está dada en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2.1 *(Müntz, 1914).*
*Sea $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos distintos. Las funciones $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3} \ldots$ son fundamentales en $C([0,1])$, si y sólo si, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$.*

Este teorema por algún tiempo fue llamado el teorema de Müntz-Szasz, pues Szasz publicó una prueba independiente del mismo en 1916. Aparentemente, Bernstein resolvió parte del problema. De hecho, tomando $\lambda_i = i$ se recupera el teorema de Weierstrass para $[0,1]$.

La combinación de la Teoría de Espacios Duales y el Análisis Complejo es muy usual en el estudio de sucesiones fundamentales. Otra aplicación de estas técnicas es la dada para resolver el problema de Wiener sobre sucesiones fundamentales trasladadas, que data de la década de los treinta del siglo pasado y está relacionado con los problemas de espacios invariantes. Este problema ha generado casi tanta investigación como el teorema de Müntz. El siguiente teorema es una versión del problema de Wiener.

TEOREMA 1.2.2 *(Wiener, 1933, aproximadamente).*
*Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Para toda $g \in L^1(\mathbb{R})$ y todo $\epsilon > 0$ existen $\{c_j\}_j, \{\lambda_j\}_j \subset \mathbb{R}$, tales que*

$$\left\| g(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(x - \lambda_j) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} < \epsilon,$$

*si y sólo si, la transformada de Fourier de $f$ no tiene ceros reales, es decir,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Enunciaremos dos teoremas más sobre sucesiones fundamentales, publicados también en la década de los 30 del siglo pasado y que aparecen en la edición rusa del libro de Achieser [2], y también en la traducción de este libro al alemán, pero no en la traducción al inglés.

TEOREMA 1.2.3 *(Achieser-Krein. Susesiones fundamentales de funciones racionales con polos simples). Si* $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, *es tal que* $a_j \neq a_k$, $\forall j \neq k$, *entonces la sucesión* $\{\frac{1}{x-a_j}\}_{j=1}^{\infty}$ *es fundamental en* $L^p([-1,1])$, $(1 \leq p < \infty)$ *y en* $C([-1,1])$, *si y sólo si,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left|a_k - \sqrt{a_k^2 - 1}\right|\right) = \infty,$$

*donde la rama de la función* $f(z) = \sqrt{z}$ *que se está considerando es la usual, es decir,* $\sqrt{z} > 0$ *para* $z \in (0, \infty)$.

TEOREMA 1.2.4 *(Paley-Wiener, 1934. Series trigonométricas no armónicas).*
*Si* $\{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, *es tal que* $\sigma_j \neq \sigma_k$, $\forall\ j \neq k$ *e* $|\Im(\sigma_j)| < \frac{\pi}{2}$ , $j \geq 1$; *entonces la sucesión* $\{e^{-\frac{\pi}{2}|x| - ix\sigma_j}\}_{j=1}^{\infty}$ *es fundamental en* $L^2(\mathbb{R})$, *si y sólo si,*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(\Im(\sigma_j))}{\coth(\Re(\sigma_j))} = \infty,$$

*donde* $\Re(z)$, $\Im(z)$ *denotan las partes real e imaginaria de un número* $z \in \mathbb{C}$ *respectivamente.*

Existen otros tres problemas de aproximación clásicos que han tenido una sustancial influencia sobre el análisis en el siglo pasado, a saber,

1. El problema de aproximación polinomial de Bernstein sobre toda la recta real (entre 1912 y la década de los 50).

2. La clausura de los polinomios en familias de funciones definidas sobre conjuntos compactos $K \subset \mathbb{C}$ (entre 1885 y la década de los 50). Cabe mencionar también en este inciso los teoremas de Kakutani-Stone sobre la clausura de un reticulado de funciones a valores reales y el teorema de Stone-Weierstrass sobre la clausura de un álgebra de funciones continuas a valores complejos (ver [28]).

3. El problema extremal de Szegö (entre 1920 y la década de los 40).

Con respecto al primero de los problemas, se debe tratar para polinomios no acotados en $\pm\infty$. Si consideramos un peso $w : \mathbb{R} \to [0,1]$ y definimos

$$C_w := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{continuas con } \lim_{|x| \to \infty} (fw)(x) = 0 \right\},$$

con la norma

$$\|f\|_{C_w} := \|fw\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Bernstein se preguntó ¿cuándo es cierto que para toda $f \in C_w$ y todo $\epsilon > 0$, existe un polinomio $p$, tal que

$$\|(f-p)w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \epsilon \; ? \tag{1.4}$$

La condición de que $fw$ se anule en $\pm\infty$ es necesaria para que el problema tenga sentido: nos gustaría que $\|pw\|_{L^\infty(\mathbb{R})<\infty}$, $\forall p \in \mathbb{P}$, y en particular que $\|x^n w\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$, $\forall n \geq 0$. Esta condición hace que necesariamente $\lim_{|x|\to\infty} x^n w(x) = 0$, luego utilizando (1.4) tendríamos que $\|fw\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \epsilon$, de donde $fw$ se anula en $\pm\infty$.

Entre otros que contribuyeron a la solución de este problema, están el propio Bernstein (1912, 1924), T. S. Hall (1939, 1950), Dzrbasjan (1947) y Videnskii (1953). En el caso que $w$ es continuo la solución fue dada por el matemático norteamericano H. Pollard (1953); otras soluciones fueron dadas por Achieser (1954), Mergelyan (1956) y Lennart Carleson (1951).

Las técnicas utilizadas en la solución del problema de Bernstein incluyen Teoría de Dualidad, otros problemas de aproximación, Teoría de funciones enteras, funciones analíticas sobre el semiplano superior y mucho trabajo duro.

Para el problema de aproximación polinomial sobre subconjuntos compactos del plano complejo, la situación es la siguiente:

Dado $K$ un conjunto compacto del plano complejo, definimos

$$A(K) := \{f : K \to \mathbb{C}, \text{ continuas en } K \text{ y analíticas en } K^\circ\},$$

donde $K^\circ$ denota al interior de $K$ y la norma está dada por

$$\|f\| := \|f\|_{L^\infty(K)}.$$

Si consideramos

$$P(K) := \left\{f : K \to \mathbb{C}, \text{ tales que existen polinomios } \{p_n\}_n \text{ con } \lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_{L^\infty(K)} = 0\right\},$$

la pregunta de interés es ¿cuándo $P(K) = A(K)$?

Quizás a este problema nunca se le asignó un nombre, pero en el espíritu debería llevar el de Runge (1885) cuyas contribuciones fundamentales al área, todavía aparecen los cursos de análisis complejo. Entre otros contribuyentes, mencionamos a J. L. Walsh (1926), Hartogs-Rosenthal (1931), Lavrentiev (1936) y Keldysh (1945).

Teorema 1.2.5 *(Mergelyan).*
*Dado $K \subset \mathbb{C}$ compacto, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $P(K) = A(K)$.

2. $\mathbb{C} \setminus K$ *es conexo.*

Con respecto al problema extremal de Szegö, éste puede expresarse como sigue: Considerados una medida finita de Borel, no negativa $\mu$ sobre la circunferencia unitaria $\Pi := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $p > 0$. El problema extremal de Szegö consiste en encontrar

$$\delta_p(\mu) := \inf \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} |P(z)|^p \, d\mu(z) : P \text{ es un polinomio con } P(0) = 1 \right\} = \inf_{\{c_j\}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \Big| 1 - \sum_{j \geq 1} c_j z^j \Big|^p d\mu(z) \right\}.$$

Como para cualquier polinomio $P(z)$ de grado $\leq n$ con $P(0) = 1$,

$$Q(z) := z^n \overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

es un polinomio mónico de grado $n$, y $|Q(z)| = |P(z)|$, siempre que $|z| = 1$, tenemos que

$$\delta_p(\mu) = \inf \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} |Q(z)|^p \, d\mu(z) : Q \text{ es mónico} \right\}.$$

Este problema, aparentemente inofensivo, ha tenido más impacto que el problema de Bernstein o el teorema de Mergelyan. Su solución y las técnicas desarrolladas alrededor de él han tenido una gran influencia en la Teoría de Espacios Hardy y también sobre la Teoría de Funciones en el siglo XX.

Teorema 1.2.6 *(Szegö, 1921).*
*Sea $\mu$ una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue sobre la circunferencia unitaria $\Pi$, con $d\mu(z) = w(e^{i\theta})d\theta$. Entonces*

$$\delta_p(\mu) = \exp\left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(w(e^{i\theta}))d\theta \right).$$

Szegö demuestra primero el resultado cuando $w$ es un polinomio trigonométrico positivo y luego usa esta aproximación para extender el resultado al caso $w$ continuo, y al caso general (ver [40]). La extensión a medidas generales vino aproximadamente veinte años después, por Kolmogorov (1941) para $p = 2$, y por Krein (1945) para $p > 0$.

TEOREMA 1.2.7 *(Kolmogorov-Krein).*
*Sea $\mu$ una medida de Borel no negativa sobre la circunferencia unitaria $\Pi$, tal que $d\mu(z) = w(z)d\theta + d\mu_s(z)$, $z = e^{i\theta}$. Entonces*

$$\delta_p(\mu) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(w(e^{i\theta}))d\theta\right).$$

COROLARIO 1.2.1 *(Kolmogorov-Krein).*
*Dados $p > 0$, y $\mu$ una medida de Borel no negativa sobre la circunferencia unitaria $\Pi$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Los polinomios son densos en $L^p(\mu)$.*
2. $\int_0^{2\pi}\log(w(e^{i\theta}))d\theta = -\infty$.

Por tanto, los polinomios son densos en $L^p(\mu)$ sólo en casos realmente excepcionales. En la Teoría de Polinomios Ortogonales, la condición

$$\int_0^{2\pi}\log(w(e^{i\theta}))d\theta > -\infty$$

es conocida como la condición de Szegö.

Finalmente, con respecto a algunos de los trabajos más recientes que siguen esta misma línea de investigación podemos mencionar [37], en donde obtienen cuatro resultados que entregan condiciones necesarias y suficientes para que el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto sobre la recta real $C_c^\infty(\mathbb{R})$ sea denso en el espacio de Sobolev con peso $W^{k,p}(I,\mu)$, $1 \leq p < \infty$, con la norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(I,\mu)}^p := \sum_{j=0}^{k}\int\left|f^{(j)}\right|^p d\mu_j\,,$$

donde $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ es una medida vectorial de Borel en $\mathbb{R}$, $p$-admissible, e $I$ es un intervalo compacto. Con esta hipótesis sobre $I$, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso, si y sólo si, $C^\infty(\mathbb{R})$ ó $\mathbb{P}$ son densos.

En [35], se aborda el caso $p = \infty$ para pesos acotados bastantes generales, sobre un intervalo compacto $I$.

En este trabajo se ha pretendido seguir el espíritu de Weiestrass, Bernstein,..., Dado que no siempre se puede garantizar la posibilidad de aproximación polinomial, de manera natural surge la propuesta de considerar problemas de aproximación por funciones continuas, de clase $C^k$ o de clase $C^\infty$. Además se obtienen mejoras con respecto a los resultados de [35] y se trabaja tanto con la norma $L^\infty(w)$ ([30]) como con aproximación simultánea ([31] y [32]).

## 1.3 Otros datos sobre la vida de Weierstrass.

Karl Weierstrass nace en Prusia dentro de una familia no muy adinerada, pero muy culta. Su padre Wilhelm era un importante agente de impuestos, trabajo que lo obligaba a tralasdarse continuamente de ciudad en ciudad con toda su familia. A finales de 1829, el padre de Weierstrass consiguió un trabajo estable en Paderborn. Karl, por consiguiente pudo entrar en el Gimnasio Católico donde aprendería Matemática, demostrando gran capacidad para la misma. Seguidamente, terminados sus estudios en 1834, decide dedicarse completamente a la Matemática, aunque el deseo de su padre era que se dedicara a las finanzas.

A principios de 1839 en la academia de Münster sigue las lecciones de Christoph Gudermann en funciones elípticas las cuales usó al año siguiente con el propósito de lograr la autorización para la enseñanza. Después de 11 años enseñando en la escuela primaria, en el Gimnasio Católico y en el Colegio Deutsche Krone y de Braunsberg, fue golpeado por una enfermedad nerviosa que lo debilitó, arriesgando sus estudios y su trabajo.

Durante muchos años trabajó en el anonimato; no obstante, en 1856 publicó su teoría de la inversión de la integral hiperelíptica en el Journal fr die reine und angewandte Mathematik; el trabajo fue titulado "Theorie der Abelschen Funktionen" (Teoría de las Funciones Abelianas), el cual estaba basado en los trabajos del matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829). Este trabajo le aseguró un puesto en La Escuela Regia Politécnica de Berlín (un instituto técnico). En el mismo año fue profesor de la también prestigiosa Universidad de Berlín. Cabe mencionar que esta investigación de Weierstrass, que también se apoyaba en la del matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851), ayudó a situar el Cálculo sobre una base lógica sólida.

En 1861 sus condiciones físicas empeoraron, pero esto no le impidió desarrollar su trabajo y crear en el mismo año un seminario de matemáticos en Berlín. Su ciclo de lecciones incluyó la introducción a la teoría de funciones elípticas, el cálculo de variaciones (también estuvo interesado en el trabajo del matemático francés Joseph-Luis Langrange (1736-1813), Miscellanea Taurinensia) y sus teorías en Análisis Matemático, disponiendo los cimientos para aritmetizar el Análisis Matemático a través de rigurosos desarrollos del sistema de números reales. A causa de conflictos internos en el ambiente matemático de la época , tuvo ciertos altercados con Leopold Kronecker, con respecto a esta tendencia de aritmetizar el Análisis. (En aquellos momentos Leopold Kronecker y su colega alemán Julius Dedekind se encontraban desarrollando la teoría abstracta de los cuerpos y su aplicación a la Teoría de Números, es decir, su aplicación a la Aritmética. J. Dedekind encontró una definición adecuada para los números reales, a partir de los racionales, y Weierstrass y Georg Cantor (1845-1918) también dieron otras definiciones casi al mismo tiempo).

Weierstrass fue asaltado por el miedo de no completar su estudio de las funciones abelianas y ver llegar así el fracaso de todo su trabajo, ya que las ideas fundamentales y la explicación de sus métodos no habían sido publicados. Ya en 1887 se encontraba profundamente seguro de la edición de sus trabajos después de su muerte. A pesar de su esfuerzo, la publicación estaba incompleta; no obstante, la polémica efectuada por L. Kronecker se desvaneció, debido a la desaparición prematura de este gran adversario matemático.

Weierstrass -también conocido como el padre del Análisis Moderno-, fue miembro de muchas academias y en 1892 se le confirió la medalla Helmoltz de la Academia en Berlín y la Medalla Copey de la Real Sociedad. Ya para ese entonces llevaba algún tiempo imposibilitado de caminar, y por consiguiente usaba una silla las ruedas... Una complicación pulmonar, le causó la muerte el 19 de Febrero de 1897.

La siguiente lista denota los sucesivos directores de tesis desde Weierstrass hasta la actualidad. Weierstrass-Schwarz-Fejér-Polya-Edrei-Shea-Baernstein-Fernández-Rodríguez-Quintana.

# Capítulo 2

# El teorema de aproximación de Weierstrass con pesos.

## 2.1 Preliminares.

Como ya mencionamos en el capítulo anterior, si $I$ es cualquier intervalo compacto, el teorema de aproximación de Weierstrass establece que $C(I)$ es el mayor conjunto de funciones que pueden ser aproximadas por polinomios en norma $L^\infty(I)$, si identificamos, como de costumbre, las funciones que coinciden en casi todo punto.

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar el problema de aproximación polinómica de funciones con la norma $L^\infty(w)$ definida por

$$\|f\|_{L^\infty(w)} := \operatorname{ess\,sup}|f(x)|w(x), \tag{2.1}$$

donde $w$ es un peso, es decir, una función medible no-negativa, y adoptaremos la convención $0 \cdot \infty = 0$. Observe que (2.1) no es la definición usual de la norma $L^\infty$ en el contexto de teoría de la medida, aunque es la definición correcta al trabajar con pesos (ver por ejemplo, [4] y [9]).

Este problema también fue estudiado en [35], para el caso de pesos acotados. En este capítulo obtendremos varias mejoras de los resultados de [35], y además manejaremos pesos mucho más generales no necesariamente acotados. Si $w$ no es acotado, entonces no es cierto en general que los polinomios pertenezcan a $L^\infty(w)$. Por tanto, es natural plantear el problema de aproximación por funciones en $C(\mathbb{R})$ ó $C^\infty(\mathbb{R})$.

Una herramienta importante que nos permite mejorar los resultados de [35] es un lema (Lema 2.2.8

en la sección 2.2), que se refiere a la regularidad de funciones cerca de los "peores" puntos de $w$ (en este lema nosotros estudiamos todos estos puntos simultáneamente).

Otra idea importante es usar lemas de cubrimiento similares a los acostumbrados en Análisis Armónico (sección 2.3).

La sección 2.2 muestra las definiciones que serán necesarias a lo largo del capítulo así como el resultado de aproximación más importante de este capítulo (ver proposición 2.2.1 y teorema 2.2.1). La sección 2.3, está dedicada al estudio de lemas de cubrimiento del tipo Besicovitch-Vitali; sin embargo, nuestra situación difiere del caso usual, pues el conjunto que cubrimos es posiblemente no acotado y los intervalos que lo cubren no están centrados en puntos del mismo. Este lema junto con los lemas 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6, 2.2.7 y 2.2.8, son las herramientas para la demostración de la proposición 2.2.1 y el teorema 2.2.1. Todos los resultados presentados en este capítulo aparecen en [30].

## 2.2 Aproximación en $L^\infty(w)$.

Comenzaremos esta sección con algunas definiciones.

Definicion 2.2.1 *Un peso $w$ es una función medible $w : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Si $w$ está definido solamente en un subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$, tomaremos $w := 0$ en $\mathbb{R} \setminus A$.*

Definicion 2.2.2 *Dados un conjunto medible $A \subset \mathbb{R}$ y un peso $w$, definimos el espacio $L^\infty(A, w)$ como el espacio de todas las clases de equivalencia de funciones medibles $f : A \to \mathbb{R}$, con respecto a la norma*

$$\|f\|_{L^\infty(A,w)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in A} |f(x)|\, w(x)\,. \tag{2.2}$$

Los principales resultados de esta sección pueden aplicarse a las funciones $f$ a valores complejos, descomponiendo a $f$ en sus partes real e imaginaria. En lo que sigue, si no especificamos al conjunto $A$, es porque estamos asumiendo $A = \mathbb{R}$; análogamente, si no hacemos explícito el peso $w$, es porque estamos asumiendo $w \equiv 1$.

Dado $A$ un subconjunto medible de $\mathbb{R}$; siempre consideraremos el espacio $L^1(A)$ con respecto a la restricción de la medida de Lebesgue en $A$.

Definicion 2.2.3 *Dado $A$ un subconjunto medible de $\mathbb{R}$, diremos que dos funciones $u, v$ son comparables sobre el conjunto $A$ si existen constantes positivas $c_1, c_2$ tales que $c_1 v(x) \le u(x) \le c_2 v(x)$ para casi todo $x \in A$.*

*Utilizaremos el símbolo $u \asymp v$ para denotar un par de funciones comparables $u$ y $v$ sobre $A$.*

Como las medidas y las normas son funciones sobre conjuntos medibles y subconjuntos de espacios vectoriales, respectivamente, podemos hablar de medidas comparables y de normas comparables. Observe que los espacios $L^\infty(A,w)$ y $L^\infty(A,v)$ coinciden y tienen normas comparables siempre que $w \asymp v$.

DEFINICION 2.2.4 *Dado un conjunto medible $A$, definimos la clausura esencial de $A$, como el conjunto*

$$\operatorname{ess\,cl} A := \{x \in \mathbb{R} : \, |A \cap (x-\delta, x+\delta)| > 0, \ \ \forall\, \delta > 0\},$$

*donde $|E|$ denota la medida de Lebesgue del conjunto $E$.*

DEFINICION 2.2.5 *Si $A$ es un conjunto medible, $f$ es una función a valores reales definida sobre $A$ y $a \in \operatorname{ess\,cl} A$, diremos que $\operatorname{ess\,lim}_{x\in A, x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ para casi todo punto $x \in A \cap (a-\delta, a+\delta)$. De manera similar podemos definir $\operatorname{ess\,lim}_{x\in A, x\to a} f(x) = \infty$ y $\operatorname{ess\,lim}_{x\in A, x\to a} f(x) = -\infty$.*

*Definimos el límite superior esencial y el límite inferior esencial en $A$, respectivamente, como*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\in A,\, x\to a} f(x) \ &:= \ \inf_{\delta>0} \operatorname{ess\,sup}_{x\in A\cap(a-\delta,a+\delta)} f(x)\,, \\
\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\in A,\, x\to a} f(x) \ &:= \ \sup_{\delta>0} \operatorname{ess\,inf}_{x\in A\cap(a-\delta,a+\delta)} f(x)\,.
\end{aligned}$$

OBSERVACION 2.2.1

1. *El límite superior (o inferior) esencial de una función $f$ no se altera si modificamos la función en un conjunto de medida de Lebesgue nula.*

2. *Es bien conocido que*

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\in A,\, x\to a} f(x) \geq \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\in A,\, x\to a} f(x)\,,$$

$$\operatorname{ess\,lim}_{x\in A,\, x\to a} f(x) = l \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\in A,\, x\to a} f(x) = \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\in A,\, x\to a} f(x) = l\,.$$

3. *Imponemos la condición de que $a \in \operatorname{ess\,cl} A$ para obtener la unicidad del límite esencial. Si $a \notin \operatorname{ess\,cl} A$, entonces cualquier número real es un límite esencial de cualquier función.*

DEFINICION 2.2.6 *Dado un peso $w$, el soporte de $w$, denotado por $\operatorname{supp} w$ es el complemento del mayor conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$ en el cual $w$ se anula casi siempre.*

Es claro que

1. $\operatorname{supp} w = \operatorname{ess\,cl}\{x \in \mathbb{R} : \, w(x) > 0\}$.

2. $L^\infty(w) = L^\infty(\text{supp } w, w)$.

3. Ya que $\operatorname{ess\,cl}(\operatorname{ess\,cl} A) = \operatorname{ess\,cl} A$ y $\text{supp } w = \operatorname{ess\,cl}\{x \in \mathbb{R} : w(x) > 0\}$, entonces $\text{supp } w = \operatorname{ess\,cl}(\text{supp } w)$.

Este hecho nos permite establecer la siguiente definición.

Definicion 2.2.7 *Dado un peso $w$ diremos que $a \in \text{supp } w$ es una singularidad de $w$ (o un punto singular para $w$) si*

$$\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\in \text{supp } w,\, x\to a} w(x) = 0\,.$$

*Diremos que una singularidad $a$ de $w$ es de*

*i)* **tipo 1** *si* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a} w(x) = 0$,

*ii)* **tipo 2** *si* $0 < \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w(x) < \infty$,

*iii)* **tipo 3** *si* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w(x) = \infty$.

*Denotaremos por $S$ y $S_i$ $(i = 1, 2, 3)$ al conjunto de las singularidades de $w$ y al conjunto de las singularidades de $w$ de tipo $i$.*

*Diremos que $a \in S_i^+$ (respectivamente $a \in S_i^-$) si $a$ verifica la propiedad de la definición de $S_i$ cuando tomamos límite cuando $x \to a^+$ (respectivamente $x \to a^-$). Definimos $S^+ := S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_3^+$ y $S^- := S_1^- \cup S_2^- \cup S_3^-$.*

Observacion 2.2.2

1. *Los conjuntos $S$ y $S_3$ son conjuntos cerrados de* $\text{supp} w$.

2. *La definición anterior de punto singular es mucho más restrictiva que la dada en [35]. Por consiguiente, el conjunto de puntos singulares es más pequeño que el dado en [35] (recordemos que con nuestra definición se tiene $S \subseteq \text{supp } w$, mientras que esta condición no se verifica si consideramos la definición de punto singular de [35]): por ejemplo, si consideramos que un conjunto de Cantor $C \subset [0, 1]$ de longitud positiva y tomamos $w$ como la función característica de $C$, obtenemos que $S = \emptyset$; sin embargo, con la definición de [35], el conjunto de puntos singulares es $\mathbb{R}$. Este hecho es crucial, ya que los puntos singulares hacen nuestro trabajo más difícil.*

Definicion 2.2.8 *Dado un peso $w$ definimos los puntos regulares por la derecha y regulares por la izquierda de $w$, repectivamente, como*

$$R^+ := \left\{ a \in \operatorname{supp} w : \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x \in \operatorname{supp}\, w,\, x \to a^+} w(x) > 0 \right\} \quad y$$

$$R^- := \left\{ a \in \operatorname{supp} w : \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x \in \operatorname{supp}\, w,\, x \to a^-} w(x) > 0 \right\}.$$

Observacion 2.2.3 *Note que* $R^+ \cup S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_3^+ = \operatorname{supp}\, w = R^- \cup S_1^- \cup S_2^- \cup S_3^-$.

Definicion 2.2.9 *Dados un peso $w$ y $\epsilon > 0$, definimos los conjuntos* $A_\epsilon := \{x \in \operatorname{supp}\, w : w(x) \geq \epsilon\}$ *y* $A_\epsilon^c := \operatorname{supp}\, w \setminus A_\epsilon$.

Ahora presentamos algunos resultados demostrados en [35] que serán útiles en nuestro trabajo.

Lema 2.2.1 *([35], Lema 2.4).*
*Si $A$ es un conjunto medible, tenemos que*

1. $\operatorname{ess\,cl} A$ *es un conjunto cerrado contenido en* $\overline{A}$.

2. $|A \setminus \operatorname{ess\,cl} A| = 0$.

3. *Si $f$ es una función medible en $A \cup \operatorname{ess\,cl} A$, $a \in \operatorname{ess\,cl} A$ y $\operatorname{ess\,lim}_{a \in \operatorname{ess\,cl} A, x \to a} f(x)$ existe, entonces* $\operatorname{ess\,lim}_{x \in A,\, x \to a} f(x)$ *también existe y*

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \in A,\, x \to a} f(x) = \operatorname{ess\,lim}_{x \in \operatorname{ess\,cl} A,\, x \to a} f(x).$$

4. *Si $|A| > 0$ y $f$ es una función continua en $\mathbb{R}$ tenemos que*

$$\|f\|_{L^\infty(A)} = \sup_{x \in \operatorname{ess\,cl} A} |f(x)|.$$

Lema 2.2.2 *([35], Lema 2.2).*
*Consideremos un peso $w$ y $a \in S_1$. Entonces, cualquier función $f$ en la clausura de $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ con la norma $L^\infty(w)$ satisface*

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \in \operatorname{supp}\, w, x \to a} f(x) w(x) = 0.$$

Observacion 2.2.4 *Un resultado similar es cierto si $a \in S_1^+$ ó $a \in S_1^-$.*

LEMA 2.2.3 *([35], Lema 2.6).*

*Consideremos un peso $w$ y $a \in S$. Entonces, cualquier función $f$ en la clausura de $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ con la norma $L^\infty(w)$ satisface*

$$\inf_{\epsilon>0} \Big( \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \in A_\epsilon^c,\, x \to a} |f(x)|\, w(x) \Big) = 0 \,.$$

LEMA 2.2.4 *([35], Lema 2.7).*

*Consideremos un peso $w$ y $a \in S_1$. Si*

$$\inf_{\epsilon>0} \Big( \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \in A_\epsilon^c,\, x \to a} |f(x)|\, w(x) \Big) = 0 \,,$$

*entonces* $\operatorname{ess\,lim}_{x \in \operatorname{supp}\, w, x \to a} f(x) w(x) = 0$.

OBSERVACION 2.2.5 *Un resultado similar es cierto si $a \in S_1^+$ ó $a \in S_1^-$.*

Los lemas 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4 están demostrados en [35] con $x$ en algún intervalo, en vez de $x \in \operatorname{supp}\, w$. Sin embargo, las pruebas en cada caso siguen siendo válidas.

Ahora demostraremos algunos lemas técnicos.

LEMA 2.2.5 *Consideremos un peso $w$ y $a \in \operatorname{supp} w$. Si $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \in \operatorname{supp} w,\, x \to a} w(x) = l \in (0, \infty]$, entonces para cualquier función $f$ en la clausura de $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ con la norma $L^\infty(w)$, tenemos que*

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \in A_\epsilon,\, x \to a} f(x) = f(a) \,, \qquad \textit{para todo} \quad 0 < \epsilon < l \,.$$

*Además, $f \in \cap_{\epsilon>0} C(\operatorname{ess\,cl} A_\epsilon)$; en particular, $f$ es continua por la derecha en cada punto de $R^+$ y continua por la izquierda en cada punto de $R^-$.*

OBSERVACION 2.2.6 *Note que las funciones en $L^\infty(w)$ están definidas en* supp $w$*; por lo tanto, la continuidad es referida a este conjunto. Recordemos que identificamos las funciones que coinciden en casi todo punto.*

**Demostración.**

Para cualquier $\delta > 0$ tenemos

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \operatorname{supp}\, w \cap (a-\delta, a+\delta)} w(x) \geq l > 0 \,,$$

y entonces

$$|\{ x \in \operatorname{supp}\, w \cap (a-\delta, a+\delta) :\, w(x) \geq \epsilon \}| > 0 \,,$$

para todo $\delta > 0$ y $0 < \epsilon < l$. Esto implica que $a$ pertenece a $\operatorname{ess\,cl} A_\epsilon$, para cualquier $0 < \epsilon < l$.

Si $g \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$, $0 < \epsilon < l$ y $\delta > 0$, tenemos que

$$\epsilon \, \|g\|_{L^\infty(A_\epsilon \cap [a-\delta, a+\delta])} \leq \|g\|_{L^\infty(A_\epsilon \cap [a-\delta, a+\delta], w)} \, .$$

Como $\operatorname{ess\,cl}(A_\epsilon \cap [a-\delta, a+\delta])$ es un conjunto compacto y $g \in C(\mathbb{R})$, del lema 2.2.1, parte 4 obtenemos

$$\epsilon \cdot \max_{x \in \operatorname{ess\,cl}(A_\epsilon \cap [a-\delta, a+\delta])} |g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(A_\epsilon \cap [a-\delta, a+\delta], w)} \, .$$

Consecuentemente, si $\{g_n\} \subset C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ converge a $f$ in $L^\infty(w)$, entonces $\{g_n\}$ converge a $f$ uniformemente en $\operatorname{ess\,cl}(A_\epsilon \cap [a-\delta, a+\delta])$ y $f \in C(\operatorname{ess\,cl}(A_\epsilon \cap [a-\delta, a+\delta]))$ para cualquier $\delta > 0$. Por lo tanto, $f \in C(\operatorname{ess\,cl} A_\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$. De este hecho y de la parte 3 del lema 2.2.1, obtenemos que, para $0 < \epsilon < l$, existe

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \in A_\epsilon,\, x \to a} f(x) = \operatorname{ess\,lim}_{x \in \operatorname{ess\,cl} A_\epsilon,\, x \to a} f(x) = \lim_{x \in \operatorname{ess\,cl} A_\epsilon,\, x \to a} f(x) = f(a) \, .$$

Si $y \in R^+$, entonces existen $\epsilon, \delta > 0$ con $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \operatorname{supp}\, w \cap (y, y+\delta)} w(x) \geq \epsilon$, y en consecuencia $\operatorname{supp}\, w \cap [y, y+\delta] \subseteq \operatorname{ess\,cl} A_\epsilon$. De este hecho y de que $f \in C(\operatorname{ess\,cl} A_\epsilon)$ se obtiene que $f$ es continua por la derecha en $y$. Si $y \in R^-$, un argumento similar nos permite concluir que $f$ es continua por la izquierda en $y$.

■

Definicion 2.2.10 *Diremos que una función $g$ preserva la continuidad de $f$ si $g$ es continua por la derecha en cada punto que $f$ sea continua por la derecha, y $g$ es continua por la izquierda en cada punto que $f$ sea continua por la izquierda.*

Es claro que si $g$ preseva la continuidad de $f$, entonces $g$ es continua en todo punto donde $f$ lo sea.

Lema 2.2.6 *Consideremos un peso $w$. Supongamos que $a \in S_1^+$ y $a \in \overline{(a, \infty) \setminus S}$. Entonces para cualquier $\eta > 0$ fijado y $f \in C(\operatorname{supp}\, w \setminus S) \cap L^\infty(w)$ con*

$$\inf_{\epsilon > 0} \left( \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \in A_\epsilon^c,\, x \to a^+} |f(x)| \, w(x) \right) = 0 \, ,$$

*existe $b \in (a, a+1) \setminus S$ y una función $g \in L^\infty(w) \cap C([a,b])$, que preseva la continuidad de $f$, tal que $g = f$ en $\operatorname{supp}\, w \setminus [a, b)$, $\|f - g\|_{L^\infty(w)} < \eta$ (y $\|f - g\|_{L^1(\operatorname{supp}\, w)} < \eta$ si $f \in L^1(\operatorname{supp}\, w)$). Además, si $f$ no es continua por la izquierda en $a$, $g$ puede ser elegida con la condición adicional $g(a) = 0$ ó $g(a) = \lambda$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ fijado.*

Observacion 2.2.7 *Un resultado similar también es cierto si* $a \in S_1^-$ *y* $a \in \overline{(-\infty, a) \setminus S}$.

**Demostración.**

Como $a \in \overline{(a,\infty) \setminus S}$ y $(a,\infty) \setminus S$ es un conjunto abierto, existen intervalos $[y_n^1, y_n] \subset (a, a+1/n) \setminus S$, para cada $n$. Asumamos primero que podemos elegir $[y_n^1, y_n] \subset \operatorname{supp} w$, para cualquier $n$. Eligiendo $y_n$ más pequeño si es necesario, podemos asumir que existe $\epsilon_n > 0$ con $[y_n^1, y_n+\epsilon_n] \subset \operatorname{supp} w \cap ((a, a+1/n) \setminus S)$, para cualquier $n$; de este hecho y de la última afirmación del lema 2.2.5 obtenemos que $f \in C([y_n^1, y_n+\epsilon_n])$.

Asumiremos que $f(y_n) > 0$. Consideremos la cápsula convexa $C$ del conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [y_n^1, y_n] \text{ e } y \geq f(x)\}$. Ya que $f \in C([y_n^1, y_n])$, tenemos que $\partial C \setminus (\{x = y_n^1, y > f(y_n^1)\} \cup \{x = y_n, y > f(y_n)\})$ es el gráfico de una función convexa $H_n \in C([y_n^1, y_n])$ con $H_n(y_n^1) = f(y_n^1)$ y $H_n(y_n) = f(y_n)$. Entonces, podemos encontrar una función $h_n \in C([a, y_n])$ con $|h_n| \leq |f|$ y $\operatorname{sgn} h_n = \operatorname{sgn} f$ si $h_n \neq 0$ en $[y_n^1, y_n]$, $h_n(y_n) = f(y_n)$ y $h_n = 0$ en $[a, y_n^1]$: Si $H_n(t) = 0$ para algún $t \in [y_n^1, y_n)$, podemos elegir $h_n = 0$ en $[a, t]$ y $h_n = H_n$ en $[t, y_n]$; si $H_n > 0$ en $[y_n^1, y_n]$, podemos elegir $h_n = 0$ en $[a, s]$ (con $s \in [y_n^1, y_n))$, $h_n = H_n$ en $[t, y_n]$ (con $t \in (s, y_n)$), y $h_n$ una recta en $[s, t]$.

Si $f(y_n) < 0$, podemos construir $h_n$ de manera similar. Si $f(y_n) = 0$, podemos tomar $h_n = 0$.

Si no podemos encontrar $[y_n^1, y_n] \subset \operatorname{supp} w$, para cualquier $n$, entonces existen intervalos $(y_n, z_n) \subset (a, a+1/n) \setminus \operatorname{supp} w$, para cada $n$, pues $(a, a+1/n) \setminus \operatorname{supp} w$ es un conjunto abierto. Además, podemos elegir $y_n \in \operatorname{supp} w$ para cualquier $n$, ya que $a \in S_1^+$. Definimos $h_n := 0$ en $[a, y_n]$, y la función $f_n$ como

$$f_n(x) := \begin{cases} h_n(x)\,, & \text{si } x \in [a, y_n]\,, \\ f(x)\,, & \text{si } x \in \operatorname{supp} w \setminus [a, y_n]\,. \end{cases}$$

Recordemos que $f_n$ es continua en $[a, y_n]$ y preseva la continuidad de $f$, salvo posiblemente en $x = a$.

Note que $|f_n| \leq |f|$ y $\operatorname{sgn} f_n = \operatorname{sgn} f$ si $f_n \neq 0$, en $[a, y_n] \cap \operatorname{supp} w$. Por lo tanto,

$$\|f - f_n\|_{L^\infty(w)} = \|f - f_n\|_{L^\infty([a,y_n],w)} \leq \|f\|_{L^\infty([a,y_n],w)}\,,$$

y esta expresión tiende a cero cuando $n \to \infty$, pues $\operatorname{ess\,lim}_{x \in \operatorname{supp} w,\, x \to a^+} f(x)\, w(x) = 0$, como consecuencia de la observación 2.2.5. Si $f \in L^1(\operatorname{supp} w)$, tenemos que

$$\|f - f_n\|_{L^1(\operatorname{supp} w)} = \|f - f_n\|_{L^1([a,y_n] \cap \operatorname{supp} w)} \leq \|f\|_{L^1([a,y_n] \cap \operatorname{supp} w)}\,,$$

y esta expresión tiende a cero cuando $n \to \infty$. Note que $f_n(a) = 0$; es sencillo modificar $f_n$ en un pequeño entorno a la derecha de $a$ para obtener $f_n(a) = \lambda$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ fijado, pues $a \in S_1^+$. Tomamos $\lambda = \operatorname{ess\,lim}_{x \in \operatorname{supp} w, x \to a^-} f(x)$ si este límite existe; entonces $f_n$ preserva la continuidad de $f$. Este hecho finaliza la prueba del lema.

■

Lema 2.2.7 *Consideremos un peso $w$. Asumamos que $a \in S_2^+$ y $a \in \overline{(a,\infty) \setminus S}$. Fijemos $\eta > 0$ y $f \in C(\operatorname{supp} w \setminus S) \cap L^\infty(w)$ tales que*

*(a)* $\inf_{\epsilon>0} \Big( \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \in A_\epsilon^c,\, x \to a^+} |f(x)|\, w(x) \Big) = 0,$

*(b)* $\operatorname{ess\,lim}_{x \in A_\epsilon,\, x \to a^+} f(x) = f(a)$, *para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.*

*Entonces, existen $b \in (a, a+1) \setminus S$ y una función $g \in L^\infty(w) \cap C([a,b])$, preservando la continuidad de $f$, con $g = f$ en $\operatorname{supp} w \setminus (a,b)$, $\|f - g\|_{L^\infty(w)} < \eta$ (y $\|f - g\|_{L^1(\operatorname{supp} w)} < \eta$ si $f \in L^1(\operatorname{supp} w)$).*

Observacion 2.2.8 *Un resultado similar es cierto si $a \in S_2^-$ y $a \in \overline{(-\infty, a) \setminus S}$.*

**Demostración.**

Para cada número natural $n$, elegimos $\epsilon_n > 0$ con $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ y

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \in A_{\epsilon_n}^c,\, x \to a^+} |f(x)|\, w(x) < \frac{1}{n} \,.$$

Consideremos ahora $0 < \delta_n < 1$ con $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ y

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in (a, a+\delta_n) \cap A_{\epsilon_n}^c} |f(x)|\, w(x) < \frac{1}{n} \,. \tag{2.3}$$

Podemos tomar $\delta_n$ con la propiedad adicional $|f(x) - f(a)| < 1/n$ en c.t.p. $x \in (a, a+\delta_n) \cap A_{\epsilon_n}$.

Como $a \in \overline{(a,\infty) \setminus S}$ y $(a,\infty) \setminus S$ es un conjunto abierto, existen intervalos $[y_n^1, y_n] \subset (a, a+\delta_n) \setminus S$, para cada $n$. Primero supondremos que podemos elegir $[y_n^1, y_n] \subset \operatorname{supp} w$, para todo $n$. Eligiendo $y_n$ más pequeño si es necesario, podemos asumir que existen $\varepsilon_n > 0$ con $[y_n^1, y_n + \varepsilon_n] \subset \operatorname{supp} w \cap ((a, a+\delta_n) \setminus S)$, para todo $n$; de este hecho y de la última afirmación del lema 2.2.5 obtenemos $f \in C([y_n^1, y_n + \varepsilon_n])$.

Asumamos que $f(y_n) > f(a)$. Consideremos la cápsula convexa $C$ del conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [y_n^1, y_n]$ e $y \geq f(x)\}$. Como $f \in C([y_n^1, y_n])$, tenemos que $\partial C \setminus (\{x = y_n^1, y > f(y_n^1)\} \cup \{x = y_n, y > f(y_n)\})$ es el gráfico de una función convexa $H_n \in C([y_n^1, y_n])$ con $H_n(y_n^1) = f(y_n^1)$ y $H_n(y_n) = f(y_n)$. Entonces, como en la demostración del lema 2.2.6, podemos encontrar una función $h_n \in C([a, y_n])$ con $|h_n - f(a)| \leq |f - f(a)|$ y $\operatorname{sgn}(h_n - f(a)) = \operatorname{sgn}(f - f(a))$ si $h_n \neq f(a)$ en $[y_n^1, y_n]$, $h_n(y_n) = f(y_n)$ y $h_n = f(a)$ en $[a, y_n^1]$.

Si $f(y_n) < f(a)$, podemos construir $h_n$ de manera similar. Si $f(y_n) = f(a)$, podemos tomar $h_n = f(a)$.

Si no podemos encontrar $[y_n^1, y_n] \subset \operatorname{supp} w$, para cualquier $n$, entonces existen intervalos $(y_n, z_n) \subset (a, a+1/n) \setminus \operatorname{supp} w$, para cada $n$, pues $(a, a+1/n) \setminus \operatorname{supp} w$ es un conjunto abierto. Además, podemos elegir $y_n \in \operatorname{supp} w$ para todo $n$, pues $a \in S_1^+$. Definimos $h_n := f(a)$ en $[a, y_n]$.

Definamos ahora la función $f_n$ como

$$f_n(x) := \begin{cases} h_n(x)\,, & \text{si} \quad x \in [a, y_n]\,, \\ f(x)\,, & \text{si } x \in \operatorname{supp} w \setminus [a, y_n]\,. \end{cases}$$

Recordemos que $f_n$ es continua en $[a, y_n]$ y preserva la continuidad de $f$.

Observe que $|f_n - f(a)| \le |f - f(a)|$ y $\operatorname{sgn}(f_n - f(a)) = \operatorname{sgn}(f - f(a))$ si $f_n \neq f(a)$, en $[a, y_n] \cap \operatorname{supp} w$. Recordemos que $|f(x) - f(a)| < 1/n$ en c.t.p. $x \in [a, y_n] \cap A_{\epsilon_n}$. Por lo que

$$\|f - f_n\|_{L^\infty([a,y_n]\cap A_{\epsilon_n}, w)} \le 2\|f - f(a)\|_{L^\infty([a,y_n]\cap A_{\epsilon_n}, w)} \le \frac{2}{n}\,\|w\|_{L^\infty([a,y_n])}\,. \tag{2.4}$$

Observe también que $\|w\|_{L^\infty([a,y_n])}$ está uniformemente acotado para para $n$ suficientemente grande, pues $a \in S_2^+$.

De la desigualdad (2.3) se obtiene

$$\|f - f_n\|_{L^\infty([a,y_n]\cap A^c_{\epsilon_n}, w)} \le 2\|f - f(a)\|_{L^\infty([a,y_n]\cap A^c_{\epsilon_n}, w)} \le 2\|f\|_{L^\infty([a,y_n]\cap A^c_{\epsilon_n}, w)} + 2|f(a)|\epsilon_n < \frac{2}{n} + 2|f(a)|\epsilon_n\,.$$

De esta desigualdad y de (2.4) se obtiene

$$\|f - f_n\|_{L^\infty([a,y_n], w)} < \frac{2}{n} + 2|f(a)|\epsilon_n + \frac{2}{n}\,\|w\|_{L^\infty([a,y_n])}\,.$$

Si $f \in L^1(\operatorname{supp} w)$, también tenemos

$$\|f - f_n\|_{L^1(\operatorname{supp} w)} = \|f - f_n\|_{L^1([a,y_n]\cap \operatorname{supp} w)} \le 2\|f - f(a)\|_{L^1([a,y_n]\cap \operatorname{supp} w)}\,.$$

Lo que finaliza la prueba.

$\blacksquare$

Lema 2.2.8 *Consideremos un peso $w$, y subconjuntos $T^+ \subseteq S^+ \setminus S_1^+$ y $T^- \subseteq S^- \setminus S_1^-$. Tomemos $f \in L^\infty(w)$ tal que para cualquier $a \in T^+$,*

*(a1)* $\inf_{\epsilon>0} \left(\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\in A^c_\epsilon,\, x\to a^+} |f(x)|\, w(x)\,\right) = 0$,

*(b1)* $\operatorname{ess\,lim}_{x\in A_\epsilon,\, x\to a^+} f(x) = f(a) = 0$, *para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,*

*y para todo $a \in T^-$,*

*(a2)* $\inf_{\epsilon>0} \left(\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\in A^c_\epsilon,\, x\to a^-} |f(x)|\, w(x)\,\right) = 0$,

*(b2)* $\operatorname{ess\,lim}_{x\in A_\epsilon,\, x\to a^-} f(x) = f(a) = 0$, *para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.*

*Entonces, para cada $\eta > 0$, existe una función $g \in L^\infty(w)$ que preserva la continuidad de $f$, es continua por la derecha en cualquier punto de $T^+$ y es continua por la izquierda en cualquier punto de $T^-$, con $\|f-g\|_{L^\infty(w)} \le \eta$ (y $\|f-g\|_{L^1(\operatorname{supp} w)} \le \eta$ si $f \in L^1(\operatorname{supp} w)$ y $|T^+ \cup T^-| = 0$). Además, tenemos $g = f = 0$ en $T^+ \cup T^-$.*

Observacion 2.2.9

1. *Si $f \in L^\infty(w)$, $\operatorname{ess\,lim}_{x\in A_\epsilon,\, x\to a^+} f(x) = f(a)$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, y $a \in S_3^+$, entonces $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a^+} w(x) = \infty$ y $\operatorname{ess\,lim}_{x\in A_\epsilon,\, x\to a^+} f(x) = 0$. Un resultado similar es cierto para $a \in S_3^-$.*

2. *Este resultado permite manejar simultáneamente cada punto de $S_3^+ \cup S_3^-$, en oposición a los lemas 2.2.6 y 2.2.7, los cuales sólo permiten tratar con un punto de $S_1^+ \cup S_1^-$ y un punto de $S_2^+ \cup S_2^-$.*

**Demostración.**

El corazón de esta prueba es modificar $f$ de una manera secuencial; en cada paso obtendremos una función más pequeña cerca de los puntos en $S_3^+ \cup S_3^-$.

Fijemos $\eta > 0$. De las condiciones $(a1)$ y $(b1)$ se tiene que para cualquier $a \in T^+$ existen $\epsilon^+_{a,1}, \delta^+_{a,1} > 0$, tales que

$$|f(x)|w(x) < \eta/2\,, \qquad \text{en c.t.p.} \qquad x \in [a, a+\delta^+_{a,1}] \cap A^c_{\epsilon^+_{a,1}}\,,$$
$$|f(x)| < \eta/2\,, \qquad \text{en c.t.p.} \qquad x \in [a, a+\delta^+_{a,1}] \cap A_{\epsilon^+_{a,1}}\,,$$

y $|f(a+\delta^+_{a,1})| < \eta/2$.

De manera similar, para cualquier $a \in T^-$, existen $\epsilon^-_{a,1}, \delta^-_{a,1} > 0$, tales que

$$|f(x)|w(x) < \eta/2\,, \qquad \text{en c.t.p.} \qquad x \in [a-\delta^-_{a,1}, a] \cap A^c_{\epsilon^-_{a,1}}\,,$$
$$|f(x)| < \eta/2\,, \qquad \text{en c.t.p.} \qquad x \in [a-\delta^-_{a,1}, a] \cap A_{\epsilon^-_{a,1}}\,,$$

y $|f(a-\delta^-_{a,1})| < \eta/2$.

Si $T_1 := \Big\{\Big(\cup_{a\in T^+}[a, a+\delta^+_{a,1}]\Big) \cup \Big(\cup_{a\in T^-}[a-\delta^-_{a,1}, a]\Big)\Big\} \cap \operatorname{supp} w$, y $T_1^c := \operatorname{supp} w \setminus T_1$, definimos

$$g_1(x) \;:=\; \begin{cases} \max\{\min\{f(x), \eta/2\}, -\eta/2\}\,, & \text{si} \quad x \in T_1\,, \\ f(x)\,, & \text{si} \quad x \in T_1^c\,. \end{cases}$$

De la definición de $\delta^+_{a,1}, \delta^-_{a,1}$, se deduce que $g_1$ preserva la continuidad de $f$: Asumamos que $f$ es continua por la derecha en $x$; si existe $\epsilon > 0$ con $[x, x+\epsilon) \cap \operatorname{supp} w \subseteq T_1$ ó $[x, x+\epsilon) \cap \operatorname{supp} w \subseteq T_1^c$, el resultado es claro; si existe $\epsilon > 0$ con $(x, x+\epsilon) \cap \operatorname{supp} w \subseteq T_1^c$ y $x \in T_1$, entonces $|f(x)| < \eta/2$ y $g_1 = f$

en $[x, x+\epsilon) \cap \operatorname{supp} w$ (si $x = a + \delta_{a,1}^+$, entonces $|f(x)| < \eta/2$; si $x = a$, entonces $f(x) = 0$); si no, existe una sucesión decreciente $\{x_n\}$ que converge a $x$ con $|f(x_n)| < \eta/2$, lo que implica que $|f(x)| \le \eta/2$ y, por lo tanto, $g_1(x) = f(x)$; por otro lado, si $g_1(y) = f(y)$, entonces $|g_1(y) - g_1(x)| = |f(y) - f(x)|$ y por otro lado, existe $\epsilon > 0$ con $|g_1(y) - g_1(x)| < |f(y) - f(x)|$ para $y \in [x, x+\epsilon) \cap \operatorname{supp} w$ si $g_1(y) \ne f(y)$. De estos hechos tenemos que $|g_1(y) - g_1(x)| \le |f(y) - f(x)|$ para $y \in [x, x+\epsilon) \cap \operatorname{supp} w$. Si $f$ es continua por la izquierda en $x$, el argumento es similar.

También tenemos que $|g_1| \le |f|$ y $\operatorname{sgn} g_1 = \operatorname{sgn} f$. Estos hechos implican que

$$\begin{aligned}
\|f - g_1\|_{L^\infty(w)} &= \max\left\{ \sup_{a\in T^+} \|f - g_1\|_{L^\infty([a, a+\delta_{a,1}^+], w)}, \sup_{a\in T^-} \|f - g_1\|_{L^\infty([a-\delta_{a,1}^-, a], w)} \right\} \\
&= \max\left\{ \sup_{a\in T^+} \|f - g_1\|_{L^\infty([a, a+\delta_{a,1}^+]\cap A^c_{\epsilon_{a,1}^+}, w)}, \sup_{a\in T^-} \|f - g_1\|_{L^\infty([a-\delta_{a,1}^-, a]\cap A^c_{\epsilon_{a,1}^-}, w)} \right\} \\
&\le \max\left\{ \sup_{a\in T^+} \|f\|_{L^\infty([a, a+\delta_{a,1}^+]\cap A^c_{\epsilon_{a,1}^+}, w)}, \sup_{a\in T^-} \|f\|_{L^\infty([a-\delta_{a,1}^-, a]\cap A^c_{\epsilon_{a,1}^-}, w)}, \right\} \\
&\le \eta/2\,.
\end{aligned}$$

Definimos $g_n$ de manera inductiva. De las condiciones $(a1)$ y $(b1)$ se tiene que para cualquier $a \in T^+$ existen $0 < \epsilon_{a,n}^+ \le \epsilon_{a,n-1}^+$, $0 < \delta_{a,n}^+ \le \delta_{a,n-1}^+$, tales que

$$\begin{aligned}
|f(x)|w(x) < \eta/2^n\,, &\qquad \text{en c.t.p.} \quad x \in [a, a+\delta_{a,n}^+] \cap A^c_{\epsilon_{a,n}^+}\,, \\
|f(x)| < \eta/2^n\,, &\qquad \text{en c.t.p.} \quad x \in [a, a+\delta_{a,n}^+] \cap A_{\epsilon_{a,n}^+}\,,
\end{aligned}$$

y $|f(a+\delta_{a,n}^+)| < \eta/2^n$.

De las condiciones $(a2)$ y $(b2)$ se tiene que para cualquier $a \in T^-$ existen $0 < \epsilon_{a,n}^- \le \epsilon_{a,n-1}^-$, $0 < \delta_{a,n}^- \le \delta_{a,n-1}^-$, tales que

$$\begin{aligned}
|f(x)|w(x) < \eta/2^n\,, &\qquad \text{en c.t.p.} \quad x \in [a-\delta_{a,n}^-, a] \cap A^c_{\epsilon_{a,n}^-}\,, \\
|f(x)| < \eta/2^n\,, &\qquad \text{en c.t.p.} \quad x \in [a-\delta_{a,n}^-, a] \cap A_{\epsilon_{a,n}^-}\,,
\end{aligned}$$

y $|f(a-\delta_{a,n}^-)| < \eta/2^n$.

Si $T_n := \left\{ \left(\cup_{a\in T^+} [a, a+\delta_{a,n}^+]\right) \cup \left(\cup_{a\in T^-} [a-\delta_{a,n}^-, a]\right) \right\} \cap \operatorname{supp} w$, y $T_n^c := \operatorname{supp} w \setminus T_n$, definimos

$$g_n(x) = \begin{cases} \max\{\min\{g_{n-1}(x), \eta/2^n\}, -\eta/2^n\}\,, & \text{si } x \in T_n\,, \\ g_{n-1}(x)\,, \quad \text{si } x \in T_n^c\,. \end{cases}$$

De la definición de $\delta_{a,n}^+, \delta_{a,n}^-$, se deduce que $g_n$ preserva la continuidad de $g_{n-1}$ y, en particular, de $f$. También tenemos que $|g_n| \le |g_{n-1}| \le |f|$ y $\operatorname{sgn} g_n = \operatorname{sgn} g_{n-1} = \operatorname{sgn} f$. Estos hechos implican

$$\|g_n - g_{n-1}\|_{L^\infty(w)} = \max\left\{ \sup_{a\in T^+} \|g_n - g_{n-1}\|_{L^\infty([a, a+\delta_{a,n}^+], w)}, \sup_{a\in T^-} \|g_n - g_{n-1}\|_{L^\infty([a-\delta_{a,n}^-, a], w)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \max\left\{ \sup_{a\in T^+} \|g_n - g_{n-1}\|_{L^\infty([a,a+\delta^+_{a,n}]\cap A^c_{\epsilon^+_{a,n}},\,w)}, \sup_{a\in T^-} \|g_n - g_{n-1}\|_{L^\infty([a-\delta^-_{a,n},a]\cap A^c_{\epsilon^-_{a,n}},\,w)} \right\} \\
&\le \max\left\{ \sup_{a\in T^+} \|g_{n-1}\|_{L^\infty([a,a+\delta^+_{a,n}]\cap A^c_{\epsilon^+_{a,n}},\,w)}, \sup_{a\in T^-} \|g_{n-1}\|_{L^\infty([a-\delta^-_{a,n},a]\cap A^c_{\epsilon^-_{a,n}},\,w)}, \right\} \\
&\le \eta/2^n\,.
\end{aligned}$$

Observe que $\|g_n - g_{n-1}\|_{L^\infty(\text{supp } w)} \le \eta/2^n$, pues $T_n \subseteq T_{n-1}$.

Como $\{|g_n(x)|\}_n$ es decreciente en $n$, y $\operatorname{sgn} g_n = \operatorname{sgn} f$, tenemos que $g_n(x)$ converge a algún $g(x)$ para cualquier $x \in \text{supp } w$. Si $m < n$, obtenemos que

$$\|g_n - g_m\|_{L^\infty(w)} \le \eta/2^n + \cdots + \eta/2^{m+1} \le \eta/2^m, \qquad \|g_n - g_m\|_{L^\infty(\text{supp}\, w)} \le \eta/2^n + \cdots + \eta/2^{m+1} \le \eta/2^m.$$

Por lo tanto $\{g_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(w)$ y $L^\infty(\text{supp } w)$; luego $\{g_n\}$ converge a $g$ tanto en $L^\infty(w)$ como en $L^\infty(\text{supp } w)$.

Entonces $\|f - g\|_{L^\infty(w)} \le \sum_{n=1}^\infty \eta/2^n = \eta$ y $g$ preserva la continuidad de $f$. Si $a \in T^+$, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos elegir $n$ con $\eta/2^n < \epsilon$; entonces $|g(x)| \le |g_n(x)| \le \eta/2^n < \epsilon$ para cualquier $x \in [a, a+\delta^+_{a,n}] \cap \text{supp } w$. En particular, $g(a) = 0$, y por lo tanto $g$ es continua por la derecha en $a$. Por un argumento similar $g = 0$ y $g$ es continua por la izquierda en cualquier punto de $T^-$.

Si $f \in L^1(\text{supp } w)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f| < \eta$ para cualquier conjunto medible $E \subseteq \text{supp } w$ con $|E| < \delta$. Si $|T^+ \cup T^-| = 0$, podemos elegir $\delta^-_{a,1}, \delta^+_{a,1}$ con la propiedad adicional $|T_1| < \delta$. Entonces $\|f - g\|_{L^1(\text{supp } w)} \le \|f\|_{L^1(T_1)} < \eta$.

DEFINICION 2.2.11 *Un peso $w$ se dice* **admisible** *si $a \in \overline{(a,\infty)\setminus S}$ para cualquier $a \in S_1^+ \cup S_2^+$, y $a \in \overline{(-\infty,a)\setminus S}$ para cualquier $a \in S_1^- \cup S_2^-$.*

Para caracterizar las funciones que pueden ser aproximadas en $L^\infty(w)$ por funciones continuas nuestros argumentos requieren que $w$ sea admisible. Esta hipótesis es muy débil; en efecto, es difícil encontrar un peso no admisible. Para que un peso sea no admisible debe existir un intervalo totalmente contenido en $S$. En particular, cualquier peso con $|S| = 0$ (por ejemplo, de variación total finita) es admisible. Cualquier peso que coincida casi siempre con una función inferiormente semi-continua es admisible; en particular, si existen intervalos abiertos disjuntos dos a dos $\{I_n\}$ con $w \in C(I_n)$ y $|\text{supp } w \setminus \cup_n I_n| = 0$, entonces $w$ es admisible. Ahora, daremos un ejemplo de Miguel A. Jiménez de un peso no admisible; reproducimos este ejemplo con su permiso.

EJEMPLO 2.2.1

1. *Construiremos un peso acotado* $w$ *sobre* $[0,1]$*, cuyo soporte sea todo un intervalo, con límite inferior esencial* $0$ *en todo punto de su intervalo de definición y que no sea* $0$ *casi siempre. Este ejemplo es fácilmente extendido a la recta real como una función* $1$*- periódica.*

   *Expresamos el conjunto de los números racionales contenidos en* $(0,1)$ *como una sucesión* $\{r_k\}$, $k = 1,2,\ldots$. *Definimos* $Y_{k,n} := \left(r_k - 1/2^{n+k+1}, r_k + 1/2^{n+k+1}\right) \cap (0,1)$, $n = 1,2,\ldots$ *y* $Z_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_{k,n}$. *Entonces* $\{Z_n\}_n$ *es una sucesión de conjuntos abiertos en* $(0,1)$*, cuya longitud decrece a cero. Definimos* $X_n := (0,1) \setminus Z_n$. *Entonces* $\{X_n\}_n$ *es una sucesión de conjuntos relativamente cerrados en* $(0,1)$ *cuya longitud crece a* $1$. *Tomemos* $g_n$ *como la función característica del conjunto* $X_n$ *y* $f_n := \sum_{j=1}^{n} g_j/j^2$.

   *Las propiedades siguientes pueden verificarse sin inconvenientes:* $\{f_n\}_n$ *es una sucesión creciente de funciones positivas que convergen uniformemente a una función* $w$ *sobre* $(0,1)$. *La función* $w$ *es un peso acotado por* $\sum_n 1/n^2$. *El soporte de* $f_n$ *es el conjunto* $X_n$ *y como las longitudes de* $X_n$ *crecen a* $1$*, el soporte de* $f$ *es* $(0,1)$. *Para todo* $n$ *y todo* $x \in (0,1)$*, el límite inferior esencial de* $f_n$ *en* $x$ *es* $0$. *Como* $w - f_n \leq 1/n^2$ *uniformemente, el peso* $w$ *tiene esta misma propiedad en* $x$. *Finalmente ni* $f_n$ *ni* $w$ *son* $0$ *casi siempre.*

   *También tenemos un ejemplo no constructivo.*

2. *Es conocido que existe un conjunto de Borel* $E$ *con* $0 < |E \cap I| < |I|$ *para todo intervalo* $I$ *(ver por ejemplo, [39], capítulo 2). Es fácil chequear que el peso* $w$ *definido como la función característica de* $E$ *es no admisible, pues* $\operatorname{supp} w = S = \mathbb{R}$.

Observe que este concepto de peso admisible es diferente del dado en [3], [33], [34], [35], [36], [37] y [38].

PROPOSICION 2.2.1 *Si* $w$ *es un peso admisible, entonces la clausura de* $C(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(w)$ *en* $L^{\infty}(w)$ *es*

$$
H := \left\{
\begin{array}{l}
f \in L^{\infty}(w) : f \text{ es continua por la derecha en cualquier punto de } R^{+}, \\
\qquad \text{es continua por la izquierda en cualquier punto de } R^{-}, \\
\qquad \text{para cada } a \in S^{+},\ \inf_{\epsilon>0}\left(\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\in A_\epsilon^c,\, x\to a^+} |f(x)|\, w(x)\right) = 0 \ \ y, \\
\qquad \text{si } a \notin S_1^{+},\ \operatorname{ess\,lim}_{x\in A_\epsilon,\, x\to a^+} f(x) = f(a),\ \text{para cualquier } \epsilon > 0 \\
\qquad \text{suficientemente pequeño}, \\
\qquad \text{para cada } a \in S^{-},\ \inf_{\epsilon>0}\left(\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\in A_\epsilon^c,\, x\to a^-} |f(x)|\, w(x)\right) = 0 \ y, \\
\qquad \text{si } a \notin S_1^{-},\ \operatorname{ess\,lim}_{x\in A_\epsilon,\, x\to a^-} f(x) = f(a),\ \text{para cualquier } \epsilon > 0 \\
\qquad \text{suficientemente pequeño.}
\end{array}
\right\}.
$$

*Si $w \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, entonces la claususra de $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ en $L^\infty(w)$ es también $H$. Además, si* $\operatorname{supp} w$ *es compacto y $w \in L^\infty(\mathbb{R})$, entonces la clausura de los polinomios también es $H$.*

*Además, si $f \in H \cap L^1(\operatorname{supp} w)$, $S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_1^- \cup S_2^-$ es numerable y $|S| = 0$, entonces $f$ puede ser aproximada por funciones en $C(\mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_{L^\infty(w)} + \|\cdot\|_{L^1(\operatorname{supp} w)}$.*

**Demostración.**

De los lemas 2.2.5 y 2.2.4 se deduce que $H$ contiene a $\overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)}$. Para ver que $H$ está contenido en $\overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)}$, fijemos $f \in H$ and $\epsilon > 0$.

Los lemas 2.2.6, 2.2.7 y 2.2.8 son las claves para obtener una función continua que aproxime a $f$; sólo necesitamos combinarlos de una manera precisa y en un orden apropiado. Otro importante ingrediente para la demostración es un lema de cubrimiento (teorema 2.3.1), que será probado en la siguiente sección, para hacer esta prueba más clara.

Si aplicamos el lema 2.2.8 con $T^+ := S_3^+$ y $T^- := S_3^-$, obtenemos una función $g_1 \in L^\infty(w)$ que preseva la continuidad de $f$, es continua por la derecha en todo punto de $S_3^+$ y es continua por la izquierda en todo punto de $S_3^-$, con $\|f - g_1\|_{L^\infty(w)} < \epsilon/3$ (y $\|f - g_1\|_{L^1(\operatorname{supp} w)} < \epsilon/3$ si $f \in L^1(\operatorname{supp} w)$, ya que $|S_3^+ \cup S_3^-| = |S| = 0$). Recordemos que $g_1(a) = 0$ para todo $a \in S_3^+ \cup S_3^-$.

Como $w$ es admisible, de los lemas 2.2.6 y 2.2.7 se tiene que para cada $a \in S_3^- \cap (S_1^+ \cup S_2^+)$ existen $b_a \in (a, a+1) \setminus S$ y una función $g_a \in L^\infty(w) \cap C([a, b_a])$, preservando la continuidad de $g_1$, con $g_a = g_1$ en $\operatorname{supp} w \setminus (a, b_a)$, $\|g_1 - g_a\|_{L^\infty(w)} < \epsilon/3$. Definimos en este caso $U_a := (a, b_a)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que no existen puntos de $S_3$ en $U_a$, pues $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \to a^+} w(x) < \infty$ implica que $w$ está esencialmente acotado en un entorno abierto a la derecha de $a$.

De manera similar, para cada $a \in S_3^+ \cap (S_1^- \cup S_2^-)$ existen $b_a \in (a-1, a) \setminus S$ y una función $g_a \in L^\infty(w) \cap C([b_a, a])$, preservando la continuidad de $g_1$, con $g_a = g_1$ en $\operatorname{supp} w \setminus (b_a, a)$, $\|g_1 - g_a\|_{L^\infty(w)} < \epsilon/3$. Definimos en este caso $U_a := (b_a, a)$ y también tenemos $S_3 \cap U_a = \emptyset$.

Definimos $A := (S_3^- \cap (S_1^+ \cup S_2^+)) \cup (S_3^+ \cap (S_1^- \cup S_2^-))$. Como tenemos $S_3 \cap (\cup_{a \in A} U_a) = \emptyset$, deducimos que cualquier $U_a$ interseca a lo sumo otro entorno $U_a$ (en este caso, uno de ellos es un entorno a la derecha y el otro un entorno a la izquierda). Entonces, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\{U_a\}_{a \in A}$ son disjuntos dos a dos (si esto no es así, podemos tomar entornos más pequeños). Este hecho implica que $A$ es un conjunto numerable, y podemos escribir $A = \cup_n a_n$. Los lemas 2.2.6 y 2.2.7 garantizan que podemos elegir $g_{a_n}$ con $\|g_1 - g_{a_n}\|_{L^1(\operatorname{supp} w)} < 2^{-n}\epsilon/3$ si $f \in L^1(\operatorname{supp} w)$.

Definimos la función $g_2$ como

$$g_2(x) \quad := \quad \begin{cases} g_a(x)\,, & \text{si } x \in U_a \text{ para algún } a \in A\,, \\ g_1(x)\,, & \text{en otro caso}\,. \end{cases}$$

Tenemos que $\|f - g_2\|_{L^\infty(w)} < 2\epsilon/3$ (y $\|f - g_2\|_{L^1(\text{supp } w)} < 2\epsilon/3$ si $f \in L^1(\text{supp } w)$).

Es inmediato que $g_2$ es continua en supp $w$ excepto quizás en los puntos del conjunto $B := ((S_1^+ \cup S_2^+) \setminus S_3^-) \cup ((S_1^- \cup S_2^-) \setminus S_3^+)$. Los lemas 2.2.6 y 2.2.7 garantizan que para cada $a \in B$ existen $0 < r_1(a), r_2(a) < 1$ y una función $g_a$ tal que, si definimos $U_a := (a - r_1(a), a + r_2(a))$, entonces $g_a \in L^\infty(w) \cap C(\overline{U_a})$, $g_a$ preserva la continuidad de $g_2$, $g_a = g_2$ en supp $w \setminus U_a$, y $\|g_2 - g_a\|_{L^\infty(w)} < \epsilon/6$ (si $a \in B \cap R^-$, tomamos $g_a = g_2$ en $(a - r_1(a), a)$, es decir, $g_2$ permanece sin cambios del lado izquierdo de los puntos regulares por la izquierda; si $a \in B \cap R^+$, tomamos $g_a = g_2$ en $(a, a + r_2(a))$). Observe que, como en la construcción de $g_2$, podemos asumir que no existen puntos de $S_3$ en $(a - r_1(a), a + r_2(a))$.

Ahora, probaremos que $r_1(a)$ y $r_2(a)$ pueden ser elegidos tal que $20/21 \le r_1(a)/r_2(a) \le 21/20$: Esto es obvio si $r_1(a) = r_2(a)$. Entonces, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $r_1(a) < r_2(a)$; si $a + r_1(a) \notin S$, usando los lemas 2.2.6 y 2.2.7, podemos obtener otra aproximación $h_a$ de $g_2$ en el intervalo $(a - r_1(a), a + r_1(a))$; si $a + r_1(a) \in S$, entonces $a + r_1(a) \notin S_3^+ \cup S_3^-$, y existe un punto $a + r_3(a) \notin S$ tan cercano a $a + r_1(a)$ como queramos, pues $w$ es admisible; entonces podemos obtener otra aproximación $h_a$ de $g_2$ en el intervalo $(a - r_1(a), a + r_3(a))$.

Ya que $\{U_a\}_{a \in B}$ es un cubrimiento por abiertos de $B$, el teorema 2.3.1 de la próxima sección garantiza que existe una sucesión $\{a_n\} \subset B$ tal que $B \subset \cup_n U_{a_n}$, cada $U_{a_n}$ interseca a lo sumo dos $U_{a_m}$'s, y ningún $U_{a_n}$ está contenido en otro $U_{a_m}$. Consecuentemente, la intersección de dos intervalos no corta a ningún otro intervalo, es decir, $U_{a_i} \cap U_{a_j} \cap (\cup_{k \neq i,j} U_{a_k}) = \emptyset$.

Definimos $[\alpha_n, \beta_n] := \overline{U}_{a_n}$. Supongamos que $U_{a_i} \cap U_{a_j} \neq \emptyset$, con $\alpha_i < \alpha_j$; entonces $\overline{U}_{a_i} \cap \overline{U}_{a_j} = [\alpha_j, \beta_i]$ y $[\alpha_j, \beta_i] \cap U_{a_k} = \emptyset$ para cualquier $k \neq i, j$. Definimos las funciones

$$g_{a_j,a_i}(x) := g_{a_i,a_j}(x) := \frac{\beta_i - x}{\beta_i - \alpha_j}\, g_{a_i}(x) + \frac{x - \alpha_j}{\beta_i - \alpha_j}\, g_{a_j}(x)\,.$$

Observe que $g_{a_i,a_j} \in C([\alpha_j, \beta_i])$ y satisface $g_{a_i,a_j}(\alpha_j) = g_{a_i}(\alpha_j)$, $g_{a_i,a_j}(\beta_i) = g_{a_j}(\beta_i)$, y

$$\|g_{a_j,a_i} - g_2\|_{L^\infty([\alpha_j,\beta_i],w)} \le \left\| \frac{\beta_i - x}{\beta_i - \alpha_j}\, (g_{a_i}(x) - g_2(x)) \right\|_{L^\infty([\alpha_j,\beta_i],w)} + \left\| \frac{x - \alpha_j}{\beta_i - \alpha_j}\, \big(g_{a_j}(x) - g_2(x)\big) \right\|_{L^\infty([\alpha_j,\beta_i],w)} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Si definimos la función $g_3$ como

$$g(x) \quad := \quad \begin{cases} g_2(x)\,, & \text{si } x \in \text{supp } w \setminus \cup_n U_{a_n}, \\ g_{a_i}(x)\,, & \text{si } x \in U_{a_i},\ x \notin \cup_{m \neq i} U_{a_m}, \\ g_{a_i,a_j}(x)\,, & \text{si } x \in U_{a_i} \cap U_{a_j}, \end{cases}$$

entonces $g_3$ es una función continua en supp $w$, $\|g_2 - g_3\|_{L^\infty(w)} \le \epsilon/3$ y $\|f - g_3\|_{L^\infty(w)} < \epsilon$.

Si $f \in L^1(\text{supp } w)$ y $B$ es numerable, también podemos obtener $\|g_2 - g_3\|_{L^1(\text{supp } w)} < \epsilon/3$ (de la misma manera podemos obtener una aproximación $L^1$ para $g_2$), y entonces $\|f - g_3\|_{L^1(\text{supp } w)} < \epsilon$.

Es fácil elegir una función $g \in L^\infty(w) \cap C(\mathbb{R})$ con $g = g_3$ en supp $w$. Definimos $g := g_3$ en supp $w$; entonces $g \in C(\text{supp } w)$. Ya que supp $w$ es un conjunto cerrado, el complemento de supp $w$ es una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos $\mathbb{R} \setminus \text{supp } w = \cup_n(\alpha_n, \beta_n)$. Si $(\alpha_n, \beta_n)$ está acotado, entonces $\alpha_n, \beta_n \in$ supp $w$, y definimos $g$ en este intervalo como la función cuyo gráfico es el segmento de recta que une a los puntos $(\alpha_n, g_3(\alpha_n))$ y $(\beta_n, g_3(\beta_n))$; si $(\alpha_n, \beta_n) = (-\infty, \beta_n)$ para algún $n$, entonces $\beta_n \in$ supp $w$, y definimos $g := g_3(\beta_n)$ en este intervalo; si $(\alpha_n, \beta_n) = (\alpha_n, \infty)$ para algún $n$, entonces $\alpha_n \in$ supp $w$, y definimos $g := g_3(\alpha_n)$ en este intervalo. Es claro que esta función es continua en $\mathbb{R}$.

Si supp $w$ es compacto y $w \in L^\infty(\mathbb{R})$, la clausura de los polinomios es también $H$, como una consecuencia del teorema de aproximación de Weierstrass.

Si $w \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, dividimos $\mathbb{R}$ en los intervalos $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[2n-1, 2n+2]$. Para cada $\epsilon > 0$, existe $g_n \in C^\infty([2n-1, 2n+2])$ (de hecho, podemos tomar $g_n$ como un polinomio) con
$\|f - g_n\|_{L^\infty([2n-1,2n+2],w)} < 2^{-|n|-2}\epsilon$.

Consideremos una partición de la unidad $\{\phi_n\}$ que satisfaga: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n = 1$ en $\mathbb{R}$, $\phi_n|_{[2n,2n+1]} \equiv 1$, $0 \le \phi_n \le 1$ y $\phi_n \in C_c^\infty((2n-1, 2n+2))$. Observe que $g_n\phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$; por lo tanto la función $g := \sum_n g_n\phi_n$ pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$ (pues la suma es localmente finita) y satisface

$$\|f - g\|_{L^\infty(w)} = \left\| f\sum_n \phi_n - \sum_n g_n\phi_n \right\|_{L^\infty(w)} \le \sum_n \|(f - g_n)\phi_n\|_{L^\infty(w)} < \sum_n 2^{-|n|-2}\epsilon < \epsilon\,.$$

■

Podemos reformular la proposición 2.2.1 como sigue:

TEOREMA 2.2.1 *Sean $w$ un peso admisible y*

$$H_0 \;:=\; \left\{ \begin{array}{l} f \in L^\infty(w) : f \;\text{ es continua por la derecha en cualquier punto de } R^+, \\ \qquad\qquad\qquad \text{es continua por la izquierda en cualquier punto de } R^-, \\ \qquad\qquad\qquad \text{para cada } a \in S^+, \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a^+}|f(x) - f(a)|w(x) = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \text{para cada } a \in S^-, \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a^-}|f(x) - f(a)|w(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

*Entonces:*

*(a) La clausura de $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ en $L^\infty(w)$ es $H_0$.*

*(b) Si $w \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ entonces la clausura de $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ en $L^\infty(w)$ es también $H_0$.*

(c) *Si* $\operatorname{supp} w$ *es compacto y* $w \in L^\infty(\mathbb{R})$ *entonces la clausura de los polinomios es* $H_0$.

(d) *Si* $f \in H_0 \cap L^1(\operatorname{supp} w)$, $S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_1^- \cup S_2^-$ *es numerable y* $|S| = 0$, *entonces* $f$ *puede ser aproximada por funciones en* $C(\mathbb{R})$ *con la norma* $\|\cdot\|_{L^\infty(w)} + \|\cdot\|_{L^1(\operatorname{supp} w)}$.

Observacion 2.2.10

1. *Este resultado mejora el teorema 2.1 de [35], pues removemos la hipótesis de que* $w \in L^\infty$. *Además el conjunto de los puntos singulares es más pequeño que el que aparece en [35], ya que* $S \subseteq \operatorname{supp} w$ *(ver la observación tras la definición 2.2.7). Finalmente, la hipótesis* $|S| = 0$ *en [35] es reemplazada por la condición mucho más débil de que* $w$ *sea admisible.*

2. *Fijados* $x_1, \dots, x_m \in R(w)$, *la prueba de este teorema permite obtener funciones aproximantes a* $f$ *que coinciden con* $f$ *en algún entorno abierto de* $\{x_1, \dots, x_m\}$.

**Demostración.**

Sólo necesitamos mostrar la equivalencia de las condiciones (a) y (b) que siguen:

(a) para cada $a \in S^+$,

(a.1) $\inf_{\epsilon>0} \Big( \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \in A_\epsilon^c,\, x \to a^+} |f(x)|\, w(x) \Big) = 0$,

(a.2) si $a \notin S_1^+$, $\operatorname{ess\,lim}_{x \in A_\epsilon,\, x \to a^+} f(x) = f(a)$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño,

(b) para cada $a \in S^+$, $\operatorname{ess\,lim}_{x \in \operatorname{supp} w,\, x \to a^+} |f(x) - f(a)|\, w(x) = 0$.

(Es inmediato que (b) es equivalente a $\operatorname{ess\,lim}_{x \to a^+} |f(x) - f(a)|\, w(x) = 0$ para cada $a \in S^+$, pues $w(x) = 0$ en c.t.p. $x \notin \operatorname{supp} w$.)

La equivalencia de (a) y (b) cuando $a \in S^-$ es similar.

Es claro que (b) implica (a). De la hipótesis (a.1) se obtiene que para cada $\eta > 0$, existen $\epsilon, \delta > 0$ con $\|f\|_{L^\infty([a,a+\delta] \cap A_\epsilon^c, w)} < \eta/3$ y $|f(a)|\epsilon < \eta/3$. Por la hipótesis (a.2) podemos elegir $\delta$ con la condición adicional $\|f - f(a)\|_{L^\infty([a,a+\delta] \cap A_\epsilon, w)} < \eta/3$. Esta desigualdad implica

$$\|f - f(a)\|_{L^\infty([a,a+\delta], w)} \le \|f\|_{L^\infty([a,a+\delta] \cap A_\epsilon^c, w)} + |f(a)|\, \epsilon + \|f - f(a)\|_{L^\infty([a,a+\delta] \cap A_\epsilon, w)} < \eta\,.$$

■

La prueba de la parte $(a)$ del teorema anterior sólo usa la admisibilidad de $w$ para construir una sucesión $\{f_n\}_n \subset C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ que converge a $f \in H_0$ en norma $L^\infty(w)$. Consecuentemente, la siguiente afirmación también es cierta.

COROLARIO 2.2.1 *Para cualquier peso $w$, la clausura de $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ en $L^\infty(w)$ está contenida en $H_0$*

El teorema 2.2.1 también tiene la siguiente consecuencia directa.

COROLARIO 2.2.2 *Consideremos $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ y un peso admisible $w$ en $[\alpha_1, \alpha_n]$. Entonces, $f$ pertenece a la clausura de $C([\alpha_1, \alpha_n]) \cap L^\infty([\alpha_1, \alpha_n], w)$ en $L^\infty([\alpha_1, \alpha_n], w)$ si y sólo si $f$ pertenece a la clausura de $C([\alpha_m, \alpha_{m+1}]) \cap L^\infty([\alpha_m, \alpha_{m+1}], w)$ en $L^\infty([\alpha_m, \alpha_{m+1}], w)$ para todo $1 \le m < n$.*

Ahora trataremos el problema de aproximación por polinomios y funciones diferenciables.

DEFINICION 2.2.12 *Dado un peso $w$ con soporte compacto, un polinomio $p \in L^\infty(w)$ se dice* **polinomio minimal para** *$w$ si cualquier polinomio en $L^\infty(w)$ es un múltiplo de $p$. Un polinomio minimal para $w$ se dice* **el polinomio minimal para** *$w$ (y lo denotaremos por $p_w$) si él es $0$ o es mónico.*

Es claro que siempre existe un polinomio minimal para $w$ (aunque sea 0): es suficiente considerar un polinomio en $L^\infty(w)$ de grado mínimo. Los polinomios minimales para $w$ son únicos salvo multiplicación por un factor constante; este hecho siempre permite definir $p_w$.

Observemos que $p_w = 0$ si y sólo si el único polinomio en $L^\infty(w)$ es 0.

TEOREMA 2.2.2 *Consideremos un peso $w$ con soporte compacto. Si $p_w \equiv 0$, entonces la clausura del espacio de los polinomios en $L^\infty(w)$ es $\{0\}$. Si $p_w$ no es idénticamente $0$, la clausura del espacio de los polinomios en $L^\infty(w)$ es el conjunto de funciones $f$ tales que $f/p_w$ está en la clausura del espacio de los polinomios en $L^\infty(|p_w|w)$.*

OBSERVACION 2.2.11 *El peso $|p_w|w$ está acotado (ya que $p_w \in L^\infty(w)$) y tiene soporte compacto. Entonces -por el teorema 2.2.1- conocemos cuál es la clausura del espacio de los polinomios en $L^\infty(|p_w|w)$ (observe que $|p_w|w$ es admisible si $w$ es admisible).*

**Demostración.**

La primera afirmación es clara, porque $p_w = 0$ si y sólo si el único polinomio en $L^\infty(w)$ es 0.

Probaremos la segunda afirmación. Primero, asumamos que $f/p_w$ está en la clausura del espacio de los polinomios en $L^\infty(|p_w|w)$. Elegimos una sucesión de polinomios $\{q_n\}$ con $\|f/p_w - q_n\|_{L^\infty(|p_w|w)} < 1/n$. Tenemos que $\|f - p_w q_n\|_{L^\infty(w)} = \|f/p_w - q_n\|_{L^\infty(|p_w|w)} < 1/n$. Consecuentemente, $f$ pertenece a la clausura del espacio de los plinomios en $L^\infty(w)$.

Asumamos ahora que $f/p_w$ no está en la clausura del espacio de los polinomios en $L^\infty(|p_w|w)$. Entonces existe una constante $c > 0$ tal que $\|f/p_w - p\|_{L^\infty(|p_w|w)} \geq c$ para todo polinomio $p$ y, por consiguiente, $\|f - p_w p\|_{L^\infty(w)} = \|f/p_w - p\|_{L^\infty(|p_w|w)} \geq c$ para todo polinomio $p$. Como todo polinomio $q \in L^\infty(w)$ puede escribirse como $q = p_w p$ para algún polinomio $p$, tenemos que $f$ no puede ser aproximada por polinomios en $L^\infty(w)$.

■

Definicion 2.2.13 *Dado un peso $w$, definimos el conjunto*
$T := \{a \in \mathbb{R} :\ \text{ess}\limsup_{x\to a} w(x) = \infty\} \subset \text{supp } w.$

Observe que $T$ es un conjunto cerrado.

Definicion 2.2.14 *Dado un peso $w$, una función $f_w \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty_{loc}(w)$ se dice* **función minimal para** *$w$ si toda función $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$ puede escribirse como $f = f_w\, g$, con $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

Es inmediato que las funciones minimales para $w$ son únicas salvo multiplicación por una función en $C^\infty(\mathbb{R})$ sin ceros, y que una función minimal $f_w$ verifica $f_w(x) = 0$ si y sólo si $x \in T$.

Observe que $\mathbb{R} \setminus T$ es un conjunto abierto no vacío, ya que el caso $w \equiv \infty$ está excluido; entonces existe alguna función en $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$. Consecuentemente, no es posible que $f_w$ sea idénticamente cero.

La misma prueba del teorema 2.2.2, usando una función minimal en vez de el polinomio minimal, nos permite obtener el siguiente resultado

Teorema 2.2.3 *Consideremos un peso $w$ tal que existe una función minimal $f_w$ para $w$. Entonces la clausura de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$ es el conjunto de funciones $f$ tales que $f/f_w$ está en la clausura de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(|f_w|w)$.*

Observacion 2.2.12 *El peso $|f_w|w$ es localmente acotado (pues $f_w \in L^\infty_{loc}(w)$). Entonces conocemos por el teorema 2.2.1, cuál es la clausura de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(|f_w|w)$, si $|f_w|w$ es admisible.*

Para hacer uso del teorema 2.2.3 necesitamos una función minimal para $w$. Enfrentemos el problema de construir tal función minimal.

Definicion 2.2.15 *Dado un peso $w$, una función $f_w$ se dice* **función minimal local para** *$w$* **en** *$a \in T$ si $f_w \in C^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon)) \cap L^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon), w)$ para algún $\epsilon > 0$, y cualquier función $f \in C^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon)) \cap L^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon), w)$ puede ser escrita como $f = f_w\, g$, con $g \in C^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon))$.*

Es claro que $f_w$ es una función minimal local para $w$ en $a$ si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $f_w$ es una función minimal para $w\,\chi_{(a-\epsilon,a+\epsilon)}$, donde $\chi_B$ denota la función característica del conjunto $B$.

PROPOSICION 2.2.2 *Consideremos un peso $w$. Si $T$ es discreto y para todo punto $a \in T$ existe una función minimal local $f_{w,a}$ para $w$ en $a$, entonces existe una función minimal $f_w$ para $w$ con $f_w = f_{w,a}$ en un entorno de $a$, para todo $a \in T$.*

**Demostración.**

Como $T$ es cerrado y discreto, no existen puntos de acumulación de $T$; entonces $T = \{a_n\}_{n\in\Lambda}$, con $\Lambda$ igual a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, o un conjunto finito, y $\{a_n\}_{n\in\Lambda}$ es una sucesión monótona. Consideremos $\epsilon_n^0 > 0$, la constante que aparece en la definición de función minimal local para $f_{w,a_n}$. Existen $0 < \epsilon_n < \epsilon_n^0$ tales que $\{(a_n-\epsilon_n, a_n+\epsilon_n)\}_{n\in\Lambda}$ son disjuntos dos a dos. Consideremos $\phi_n \in C_c^\infty((a_n-\epsilon_n, a_n+\epsilon_n))$ con $0 \le \phi_n \le 1$ y $\phi_n = 1$ in $(a_n - \epsilon_n/2, a_n + \epsilon_n/2)$; definimos también $\phi = 1 - \sum_{n\in\Lambda} \phi_n$.

Mostraremos ahora que $f_w = \phi + \sum_{n\in\Lambda} \phi_n f_{w,a_n}$ es una función minimal para $w$. Observe primero que $f_w = f_{w,a_n}$ en $(a_n-\epsilon_n/2, a_n+\epsilon_n/2)$; entonces, $f_w \in C^\infty(\mathbb{R})\cap L^\infty_{loc}(w)$, pues $w, f_w \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}\setminus\cup_{n\in\Lambda}(a_n-\epsilon_n/2, a_n+\epsilon_n/2))$.

Consideremos $f \in C^\infty(\mathbb{R})\cap L^\infty(w)$. Sólo necesitamos mostrar que $f/f_w = f/(\phi + \sum_{n\in\Lambda} \phi_n f_{w,a_n}) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Esta función es suave en todo punto de $\mathbb{R}\setminus T$, pues se expresa como el cociente de dos funciones suaves con denominador no nulo. Observe que $f/f_w = f/f_{w,a_n}$ en $(a_n - \epsilon_n/2, a_n + \epsilon_n/2)$; consecuentemente, $f/f_w$ es suuave en $a_n$, ya que $f_{w,a_n}$ es una función minimal local para $w$ en $a_n$.

■

DEFINICION 2.2.16 *Dado un peso $w$, diremos que $a \in T$ tiene* **orden** $n \in \mathbb{Z}^+$ *si* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\, x\in \operatorname{supp}\, w} w(x)|x-a|^{n-1} = \infty$ *y* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w(x)|x-a|^n < \infty$. *Diremos que $a \in T$ tiene* **orden finito** *si $a$ tiene orden $n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$.*

PROPOSICION 2.2.3 *Consideremos un peso $w$ y $a \in T$ con orden $n$. Entonces $(x-a)^n$ es una función minimal local para $w$ en $a$.*

**Demostración.**

Primero, observemos que la condición $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w(x)|x-a|^n < \infty$ implica que existe $\epsilon > 0$ con $(x-a)^n \in L^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon), w)$.

Sólo necesitamos mostrar que para cualquier función $f \in C^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon)) \cap L^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon), w)$, se tiene $f(x)/(x-a)^n \in C^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon))$.

Ya que $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|f(x)|w(x) < \infty$ y $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\, x\in \operatorname{supp} w} w(x)|x-a|^{n-1} = \infty$, tenemos que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\, x\in \operatorname{supp}\, w} f(x)/(x-a)^{n-1} = 0$.

Como $f \in C^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon))$, tenemos que para todo $m \geq 0$ existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(a)(x-a)^k/k!}{(x-a)^m} = \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!} .$$

Entonces $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, y tenemos que $f(x)/(x-a)^n \in C^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon))$.

■

Observe que el teorema 2.2.3 (respectivamente el teorema 2.2.2) junto con las proposiciones 2.2.2 y 2.2.3 describen la clausura de las funciones suaves (respectivamente polinomios) en $L^\infty(w)$, si todo punto de $T$ tiene orden finito (en este caso tenemos que $T$ es discreto).

De nuestros resultados se obtiene que para muchos pesos no acotados la clausura de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$ no coincide con la clausura de $C(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$.

Proposicion 2.2.4 *Consideremos un peso $w$ tal que $w \in L^\infty_{loc}([a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon])$ y $1/w$ es comparable con el módulo de una función minimal local para $w$ en $a$. Entonces la clausura de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$ no es igual a la clausura de $C(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$.*

Observacion 2.2.13 *Si $w$ es comparable con $|x-a|^{-n}$ en un entorno de $a$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $1/w$ es comparable con el módulo de una función minimal local para $w$ en $a$ (por la proposición 2.2.3, podemos tomar $(x-a)^n$ como esta función minimal).*

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $1/w = |f_w|$ en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, donde $f_w$ es una función minimal local para $w$ en $a$, y que $f_w \in C^\infty([a-\epsilon, a+\epsilon])$. Elegimos una función $\phi \in C_c^\infty((a-\epsilon, a+\epsilon))$ con $\phi = 1$ en $(a-\epsilon/2, a+\epsilon/2)$.

Veremos que la función

$$f(x) := f_w(x)\phi(x)\sin\frac{1}{x-a}$$

está en la clausura de $C(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$ y no está en la clausura de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$. Puesto que $\operatorname{supp} f \subset (a-\epsilon, a+\epsilon)$, podemos asumir que $w \equiv 0$ en $\mathbb{R} \setminus [a-\epsilon, a+\epsilon]$. Por consiguiente el peso $w$ no tiene puntos singulares, ya que $1/w = |f_w|$ en $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ y $f_w \in C^\infty([a-\epsilon, a+\epsilon])$.

Es claro que $f$ está en la clausura de $C(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$, pues $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w)$: recordemos que $T = \{a\}$, porque $w \in L^\infty_{loc}([a-\epsilon, a) \cup (a, a+\epsilon])$.

La función $f/f_w$ no pertenece a la clausura de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(1)$, ya que no es una función continua en $a$. Entonces del teorema 2.2.3 se obtiene que $f$ no está en la clausura de $C^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(w)$.

■

## 2.3 Lemas de cubrimiento.

El siguiente resultado es un lema tipo Besicovitch-Vitali; esta clase de lema juega un rol importante en Análisis Armónico (ver por ejemplo, [15]). La prueba del lema 2.3.1 sigue las ideas clásicas de las demostraciones de este tipo de lemas (ver por ejemplo [15], capítulo 3.2). Sin embargo, nuestra situación difiere de la situación estándar en que nosotros cubrimos un conjunto posiblemente no acotado $B$ por intervalos no centrados en los puntos de $B$; por esta razón incluimos los detalles de la prueba. El lema 2.3.1 es la herramienta principal en la demostración del teorema 2.3.1.

LEMA 2.3.1 *Sean $B$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $M$ un número positivo. Para cada $a \in B$ consideremos un intervalo abierto $U_a := (a - r_1(a), a + r_2(a))$, con $0 < r_1(a), r_2(a) < M$ y $20/21 \le r_1(a)/r_2(a) \le 21/20$. Entonces, podemos elegir una sucesión $\{a_n\} \subset B$ tal que $B \subset \cup_n U_{a_n}$, y $\{a_n\}$ puede ser distribuida en 42 sucesiones $\{a_{n_1}\}, \{a_{n_2}\}, \dots, \{a_{n_{42}}\}$ tal que para cada $j$ fijo tenemos que los miembros de $\{U_{a_{n_j}}\}$ son disjuntos dos a dos.*

OBSERVACION 2.3.1 *La prueba del lema permite obtener una constante mayor que $21/20$, pero en la prueba de la proposición 2.2.1 sólo necesitamos una constante mayor que $1$.*

**Demostración.**

Asumamos que el lema es cierto para conjuntos acotados $B$, con 14 sucesiones (en vez de 42). Si $B$ no está acotado, podemos considerar los conjuntos acotados $B_k := B \cap [2kM, (2k+2)M]$, para cualquier entero $k$. Aplicando el lema a cada $B_k$, obtenemos 14 sucesiones para cada $k$; como $0 < r_1(a), r_2(a) < M$, un intervalo correspondiente con $k$ sólo puede intersecarse con los intervalos correspondientes con $k-1$, $k$ y $k+1$. Por lo tanto, el lema es cierto con $3 \cdot 14 = 42$ sucesiones. Luego, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $B$ está acotado.

Para cada $a \in B$, definimos $r(a) := \min\{r_1(a), r_2(a)\}$. Elegimos la sucesión $\{a_n\} \subset B$ de la siguiente manera: $a_1$ con $r(a_1) > \frac{3}{4} \sup \{r(a) : a \in B\}$; elegidos $a_1, \dots, a_n$, consideremos $a_{n+1}$ con
$r(a_{n+1}) > \frac{3}{4} \sup \{r(a) : a \in B \setminus U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_n}\}$.

De esta manera obtenemos una sucesión $\{a_n\} \subset B$. Si esta sucesión es finita, entonces $B \subset \cup_n U_{a_n}$. Si esta sucesión es infinita, entonces $\lim_{n\to\infty} r(a_n) = 0$: Buscando una contradicción, supondremos que $r(a_n) > \alpha > 0$ para todo $n$. Definimos $m := 21/20$. Observe que los intervalos en la sucesión $\{(a_n - r_1(a_n)/(3m), a_n + r_2(a_n)/(3m))\}_n$ son disjuntos dos a dos: si $x \in U_{a_n} \cap U_{a_k}$, entonces $x \in (a_n - r(a_n)/3, a_n + r(a_n)/3) \cap (a_k - r(a_k)/3, a_k + r(a_k)/3)$, ya que $r_i(a_n)/m \leq r(a_n)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a_n < a_k$; por lo tanto, $x - a_n < r(a_n)/3$ y $a_k - x < r(a_k)/3$, y deducimos que $a_k - a_n < r(a_n)/3 + r(a_k)/3$; si estamos en el caso $k < n$, también tenemos $r(a_k) > 3r(a_n)/4$ y $r(a_k) < a_k - a_n$, pues $a_n \notin U_{a_k}$, y concluimos que $r(a_k) < a_k - a_n < r(a_n)/3 + r(a_k)/3$; por tanto, $r(a_k) < r(a_n)/2$, lo cual es una contradicción. El caso $k > n$ es análogo. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} r(a_n) = 0$. Si $a = a_n$ para algún $n$, tenemos directamente $a \in \cup_n U_{a_n}$. Si $a \in B \setminus \{a_n\}_n$, entonces existe $n$ con $r(a_{n+1}) \leq 3r(a)/4$, y esto implica que $a \in U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n}$. Por consiguiente, $B \subset \cup_n U_{a_n}$.

Para probar la segunda conclusión del lema, fijamos $U_{a_n}$ y preguntamos cuántos $U_{a_k}$'s, con $k < n$, intersecan a $U_{a_n}$. Tales $U_{a_k}$'s pueden ser clasificados en dos tipos: aquellos que verifican $|a_n - a_k| \leq 3mr(a_n)$ (tipo 1), y aquellos que verifican la desigualdad contraria (tipo 2). Recordemos que $r(a_k) > 3r(a_n)/4$ para todo $k < n$.

Asumiremos que es cierto el siguiente resultado.

**Afirmación.** Existe a lo sumo un $k < n$ con $U_{a_k} \cap U_{a_n} \neq \emptyset$, $|a_n - a_k| > \frac{5}{2}mr(a_n)$ y $a_k < a_n$. Lo anterior también es cierto si cambiamos $a_k < a_n$ por $a_k > a_n$.

Asumiendo que esta exigencia es cierta por el momento, completamos la demostración. Definimos ahora $V_k := \big(a_k - \frac{1}{4}r(a_n), a_k + \frac{1}{4}r(a_n)\big)$ si $k$ es de tipo 1, y $V_k := \big(a_k^* - \frac{1}{4}r(a_n), a_k^* + \frac{1}{4}r(a_n)\big)$ si $k$ es de tipo 2, donde $a_k^*$ es el punto entre $a_k$ y $a_n$ a distancia $3mr(a_n)$ de $a_n$.

Tenemos que los conjuntos $V_k$'s son disjuntos dos a dos: si $k_1$ y $k_2$ son de tipo 1, esto es una consecuencia de que $|a_{k_1} - a_{k_2}| \geq \min\{r(a_{k_1}), r(a_{k_2})\} > \frac{3}{4}r(a_n)$; si $k_1$ y $k_2$ son de tipo 2, esto es una consecuencia directa de nuestra exigencia; si $k_1$ es de tipo 1 y $k_2$ es de tipo 2, de la afirmación que imponemos se deduce que $|a_{k_1} - a_{k_2}^*| \geq \frac{1}{2}mr(a_n) > \frac{1}{2}r(a_n)$, lo que implica que $V_{a_{k_1}}$ y $V_{a_{k_2}}$ son disjuntos.

Ahora bien, todo $V_k$ está contenido en un intervalo centrado en $a_n$ con radio $(3m + \frac{1}{4})r(a_n)$. Como el radio de cualquier $V_k$ es $\frac{1}{4}r(a_n)$, existen a lo sumo $12m + 1$ tales índices $k$'s; en efecto, existen a lo sumo 13 $k$'s con $U_{a_k} \cap U_{a_n} \neq \emptyset$ y $k < n$, pues $12m + 1 < 14$.

Por lo tanto, $\{a_n\}$ puede ser distribuida en 14 sucesiones $\{a_{n_1}\}, \{a_{n_2}\}, \dots, \{a_{n_{14}}\}$ tales que para cada $j$ fijado, los conjuntos $\{U_{a_{n_j}}\}_{n_j}$ son disjuntos dos a dos.

**Demostración de la afirmación.** Buscando una contradicción, supongamos que existen $k_1, k_2 < n$ con $U_{a_{k_i}} \cap U_{a_n} \neq \emptyset$, $a_n - a_{k_i} > \frac{5}{2}mr(a_n)$ (for $i = 1, 2$) y $a_{k_1} < a_{k_2} < a_n$. Como $a_n - a_{k_2} > \frac{5}{2}mr(a_n)$ por hipótesis, $a_{k_2} \notin U_{a_n}$; si $k_1 < k_2$, también tenemos que $a_{k_2} \notin U_{a_{k_1}}$ por la elección de $a_{k_2}$ y, consecuentemente, $U_{a_{k_1}} \cap U_{a_n} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Si $k_1 > k_2$, tenemos que $r(a_{k_2}) > \frac{3}{4} r(a_{k_1}) > \frac{9}{16} r(a_n)$; si denotamos por $x$ la distancia entre $a_n$ y $U_{a_{k_2}}$, También tenemos $mr(a_{k_2}) + x > a_n - a_{k_2} > \frac{5}{2} mr(a_n)$, es decir,

$$\frac{21}{20} r(a_{k_2}) + x > \frac{21}{8} r(a_n). \tag{2.5}$$

Para encontrar una contradicción es suficiente ver que

$$\frac{3}{5} r(a_{k_2}) + x \geq \frac{21}{20} r(a_n), \tag{2.6}$$

pues esta desigualdad implica que sucesivamente (observe que $\frac{3}{5} = 2 - \frac{4}{3} m$)

$$\begin{aligned} 2r(a_{k_2}) + x &\geq \frac{4}{3} mr(a_{k_2}) + mr(a_n), \\ 2r(a_{k_2}) + x &> mr(a_{k_1}) + mr(a_n), \\ a_n - a_{k_1} &> mr(a_{k_1}) + mr(a_n), \\ U_{a_{k_1}} \cap U_{a_n} = \emptyset. & \end{aligned}$$

Observe que $r(a_{k_2}) > \frac{9}{16} r(a_n)$ es equivalente a $\frac{3}{5} r(a_{k_2}) + \frac{57}{80} r(a_n) > \frac{21}{20} r(a_n)$; si $x \geq \frac{57}{80} r(a_n)$, esto implica (2.6).

Si $x < \frac{57}{80} r(a_n)$, (2.5) garantiza que $\frac{21}{20} r(a_{k_2}) + \frac{57}{80} r(a_n) > \frac{21}{8} r(a_n)$.

Esta desigualdad implica que $r(a_{k_2}) > \frac{51}{28} r(a_n) > \frac{7}{4} r(a_n)$, lo que garantiza (2.6).

■

El siguiente teorema mejora el lema anterior.

TEOREMA 2.3.1 *Sean $B$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $M$ un número positivo. Para cada $a \in B$ consideramos un intervalo abierto $U_a := (a - r_1(a), a + r_2(a))$, con $0 < r_1(a), r_2(a) < M$ y $20/21 \leq r_1(a)/r_2(a) \leq 21/20$. Entonces, se puede elegir una sucesión $\{a_n\} \subset B$ tal que $B \subset \cup_n U_{a_n}$, cada $U_{a_n}$ interseca a lo sumo dos $U_{a_m}$'s, y ningún $U_{a_n}$ está contenido en otro $U_{a_m}$.*

**Demostración.**

Denotaremos por $\{\alpha_n\}_n$ una sucesión de elementos de $B$ arbitraria con las propiedades de la afirmación del lema 2.3.1. Como $\{\alpha_n\}_n$ es numerable, podemos asumir que ningún $U_{\alpha_n}$ está contenido en otro $U_{\alpha_m}$; si no es así, removemos de la sucesión (de manera secuencial) aquellos elementos cuyos entornos estén contenidos en otro $U_{\alpha_m}$.

Consideremos lo puntos en $\{\alpha_n\}_n$ tales que $U_{\alpha_n}$ interseca a $U_{\alpha_1}$. Observe que a lo sumo existen $83 = 1+2(42-1)$ puntos en $\{\alpha_n\}_n$ (incluyendo $\alpha_1$) con tal propiedad, porque ningún $U_{\alpha_n}$ está contenido en otro $U_{\alpha_m}$ y por el lema 2.3.1. Denotamos por $\{\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_r}\}$ a estos puntos ($r \leq 83$). Entonces podemos elegir a lo sumo tres $n_{j_1}, n_{j_2}, n_{j_3} \subset \{n_1, \ldots, n_r\}$, con $U_{\alpha_{n_1}} \cup \cdots \cup U_{\alpha_{n_r}} = U_{\alpha_{n_{j_1}}} \cup U_{\alpha_{n_{j_2}}} \cup U_{\alpha_{n_{j_3}}}$, y tales que para cualquier permutación $\{u, v, w\}$ de $\{1, 2, 3\}$, $U_{\alpha_{n_{j_u}}}$ no está contenida en $U_{\alpha_{n_{j_v}}} \cup U_{\alpha_{n_{j_w}}}$. Denotamos por $\{\alpha_n^1\}$ la subsucesión obtenida removiendo de $\{\alpha_n\}$ los elementos $\{\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_r}\} \setminus \{\alpha_{n_{j_1}} \cup \alpha_{n_{j_2}} \cup \alpha_{n_{j_3}}\}$. Es claro que $\cup_n U_{\alpha_n} = \cup_n U_{\alpha_n^1}$ y que los puntos en $U_{\alpha_1}$ están a lo sumo en dos intervalos de $\{U_{\alpha_n^1}\}$ (aunque $\alpha_1$ no pertenezca a $\{\alpha_n^1\}$).

Denotamos por $k$ el mayor de los enteros con $\alpha_k \in \{\alpha_n^1\}$ y $k > 1$. El último proceso puede ser repetido, con $\alpha_k$ en vez de $\alpha_1$, y $\{\alpha_n^1\}$ en vez de $\{\alpha_n\}$, obteniendo así una subsucesión $\{\alpha_n^2\}$ tal que $\cup_n U_{\alpha_n} = \cup_n U_{\alpha_n^2}$ y los puntos en $U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_k}$ están a lo sumo en dos intervalos de $\{U_{\alpha_n^2}\}$.

Iterando este proceso, obtenemos subsucesiones $\{\alpha_n^1\} \supset \{\alpha_n^2\} \supset \{\alpha_n^3\} \supset \cdots$. Denotamos por $\{a_n\}$ la intersecciones de tales subsucesiones. Tenemos que $\cup_n U_{\alpha_n} = \cup_n U_{a_n}$ y los puntos de este conjunto están a lo sumo en dos intervalos de $\{U_{a_n}\}$. Además, ningún $U_{a_n}$ está contenido en otro $U_{a_m}$. Por lo tanto, cada $U_{a_n}$ interseca a lo sumo dos $U_{a_m}$'s.

■

# Capítulo 3

# El teorema de Weierstrass con derivadas de primer orden.

## 3.1 Preliminares.

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de un problema de aproximación similar al del capítulo precedente, sólo que aproximaremos simultáneamente una función y su derivada. Caracterizaremos el conjunto de funciones que pueden ser aproximadas por funciones de clase $C^1$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, donde los pesos $w_0$, $w_1$ no están ni necesariamente acotados ni necesariamente relacionados entre sí. Esta caracterización dependerá del valor $L(a) := \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x)$ en cualquier punto singular $a$ de $w_1$.

Dependiendo de este valor ($L(a) = 0,\ 0 < L(a) < \infty,\ L(a) = \infty$), los teoremas 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4 describen, respectivamente, el conjunto de las funciones que pueden ser aproximadas por funciones de clase $C^1$ en $W^{1,\infty}(I, w_0, w_1)$, cuando $w_1$ tiene un sólo punto singular. Además, algunas de las condiciones que aparecen en las caracterizaciones no son del todo obvias, nuestros métodos de prueba son constructivos. El resultado principal de este capítulo es el teorema 3.2.6, el cual da una caracterización para el conjunto de las funciones que pueden ser aproximadas por funciones de clase $C^1$ en $W^{1,\infty}(I, w_0, w_1)$, cuando $w_1$ tiene infinitas singularidades (aún para intervalos no acotados), combinando los resultados de los teoremas 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4. También usaremos estos resultados para estudiar el problema de aproximación por funciones de clase $C^\infty$ (ver teorema 3.2.8).

Finalmente, un juego diferente de ideas nos permite caracterizar el conjunto de las funciones que pueden ser aproximadas por polinomios (ver teorema 3.2.9). Todo el estudio hecho en este capítulo aparece en [31].

## 3.2 Aproximación en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$.

Empezaremos esta sección con la definición de los espacios de Sobolev $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$; para ello seguiremos las ideas de [21]. Observemos que la derivada distribucional de una función $f$ en un dominio $\Omega$ es una función integrable sobre cualquier subconjunto compacto de $\Omega$, es decir, $f' \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si $f' \in L^\infty(\Omega, w_1)$, una condición suficiente para obtener la inclusión

$$L^\infty(\Omega, w_1) \subseteq L^1_{loc}(\Omega),$$

es que el recíproco del peso $w_1$ sea integrable sobre cualquier subconjunto compacto de $\Omega$, es decir, $1/w_1 \in L^1_{loc}(\Omega)$ (ver por ejemplo, las pruebas de los teoremas 3.2.6 y 3.2.8 de este capítulo). Consecuentemente, $f \in AC_{loc}(\Omega)$, es decir, $f$ es absolutamente continua sobre cualquier intervalo compacto contenido en $\Omega$.

DEFINICION 3.2.1 *Dados dos pesos $w_1$ y $w_2$, denotaremos por $\Omega$ el mayor conjunto (el cual es una unión de intervalos) que satisface $1/w_1 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Siempre requeriremos que* $\text{supp} w_1 = \overline{\Omega}$.

*Definimos el espacio de Sobolev con peso $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, como el conjunto de todas las (clases de equivalencia de) funciones $f \in L^\infty(w_0) \cap AC_{loc}(\Omega)$, tales que su derivada débil $f'$ en $\Omega$ pertenece a $L^\infty(w_1)$.*

Con esta definición, el espacio de Sobolev con peso $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es un espacio de Banach (ver [21], sección 3). En general, esto no es cierto sin nuestras hipótesis (ver algunos ejemplos en [21]).

Para controlar la norma Sobolev de una función, usando su derivada, necesitamos la siguiente versión (ver una prueba en [33], lema 3.2) de la desigualdad de Muckenhoupt (ver [27], [26], p. 44).

LEMA 3.2.1 *Consideremos dos pesos $w_0$, $w_1$ en $[\alpha, \beta]$ y $a \in [\alpha, \beta]$. Entonces existe una constante positiva $c$ tal que*

$$\left\| \int_a^x g(t)dt \right\|_{L^\infty([\alpha,\beta], w_0)} \le c \|g\|_{L^\infty([\alpha,\beta], w_1)}$$

*para cualquier función medible $g$ en $[\alpha, \beta]$, si y sólo si*

$$\operatorname{ess\,sup}_{\alpha < x < \beta} w_0(x) \left| \int_a^x 1/w_1 \right| < \infty.$$

OBSERVACION 3.2.1 *El resultado también es válido cuando $\alpha = -\infty$ y/o $\beta = \infty$.*

Ahora mostraremos las herramientas más importantes utilizadas para el desarrollo de la prueba del resultado principal de este capítulo (teorema 3.2.6).

LEMA 3.2.2 *Consideremos $\delta_0 > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in C([a-\delta_0, a))$. Para cada $0 < \delta < \delta_0$, existe $v \in C([a-\delta_0, a])$ con:*

1. *$v(x) = u(x)$ si $x \notin (a-\delta, a)$.*

2. *$|v(x) - u(a)| \leq 2|u(x) - u(a)|$ para cualquier $x \in [a-\delta_0, a)$.*

3. *Existe $\eta > 0$ con $v(x) = u(a)$ si $x \in [a-\eta, a]$.*

*Además, si definimos $U(x) := \int_{a-\delta_0}^{x} u$ y $V(x) := \int_{a-\delta_0}^{x} v$, también tenemos que:*

*i) $V(a) = U(a-)$ y $|V(x) - U(a-)| \leq |U(x) - U(a-)| + 2|u(a)||x-a|$ para cualquier $x \in [a-\delta_0, a)$, siempre que exista $U(a-) := \lim\limits_{x \to a^-} U(x)$.*

*ii) $V(a) = \lambda$ y $|V(x) - \lambda| \leq |U(x) - \lambda| + 2|u(a)||x-a|$ para cualquier $x \in [a-\delta_0, a)$, si $\lim\limits_{x \to a^-} U(x)$ no existe.*

OBSERVACION 3.2.2

1. *El valor de $u(a)$ no está necesariamente relacionado con los valores de $u$ en $[a-\delta_0, a)$.*

2. *Un resultado similar es cierto para $u \in C((a, a+\delta_0])$.*

**Demostración.**

Nuestro objetivo es construir una función $V$, que aproxime a $U$, que coincida con $U$ cuando estamos lejos del punto $a$ y que tenga gráfico igual a una recta $r$ cerca del punto $a$. Para hacer esto, realizaremos dos cambios en $u$: $v_1$ tendrá una primitiva que interseque a $r$ y $v_2$ suavizará de forma diferenciable la conexión con $r$.

Podemos asumir que $a = 0$. Sólo consideraremos el caso $u(0) > 0$; el caso $u(0) < 0$ es análogo y el caso $u(0) = 0$ es más sencillo.

**(i)** Asumamos que existe $U(0-) := \lim\limits_{x \to 0^-} U(x)$.

(1) Consideremos primero el caso $U(x) > r(x) := U(0-) + u(0)x$, para cualquier punto en algún intervalo $(-\delta', 0)$, con $\delta' < \delta$. Si $u(x) = u(0)$ para cualquier $x$ en un entorno abierto izquierdo

de 0, es suficiente tomar $v := u$. Si no es así, es posible elegir $0 < \delta_2 < \delta_1 < \min\{\delta, \delta'\}$ y una función $v_1 \in C([-\delta_0, 0))$ con

$$\begin{aligned} v_1(x) &= u(x), \qquad \text{si } x \notin (-\delta_1, -\delta_2), \\ v_1(x) &< u(x), \qquad \text{si } x \in (-\delta_1, -\delta_2), \\ |v_1(x) - u(0)| &\leq 2|u(x) - u(0)|, \qquad \text{para cualquier } x; \end{aligned}$$

entonces $V_1(x) \leq U(x)$, para cualquier $x$, si $V_1(x) := \int_{-\delta_0}^{x} v_1$.

Como $\lim_{x \to 0^-} V_1(x) < U(0-)$, entonces existe un valor mínimo $-\delta_3 \in (-\delta_1, 0)$ con $V_1(-\delta_3) = r(-\delta_3)$; esto implica que $V_1'(-\delta_3) = v_1(-\delta_3) \leq u(0) = r'(-\delta_3)$, ya que $V_1(-\delta_1) = U_1(-\delta_1) > r(-\delta_1)$.

(1.1) Si $v_1(-\delta_3) < u(0)$, elegimos $0 < \epsilon_1 < \delta_1 - \delta_3$ y $0 < \epsilon_2 < \delta_3/2$ con $v_1(x) < u(0)$ para $x \in [-\delta_3 - \epsilon_1, -\delta_3 + \epsilon_2]$. Consideremos una función $v_2 \in C([-\delta_3 - \epsilon_1, -\delta_3 + \epsilon_2])$ con

$$\begin{aligned} &v_1 \leq v_2 \leq u(0), \qquad && v_2(-\delta_3 - \epsilon_1) = v_1(-\delta_3 - \epsilon_1), \\ &v_2(-\delta_3 + \epsilon_2) = u(0), \quad \text{y} \quad && \textstyle\int_{-\delta_3-\epsilon_1}^{-\delta_3} (v_2 - v_1) = \int_{-\delta_3}^{-\delta_3+\epsilon_2} (u(0) - v_2) \leq u(0)\delta_3/2. \end{aligned}$$

Definimos

$$v(x) := \begin{cases} v_1(x), & \text{si } x < -\delta_3 - \epsilon_1, \\ v_2(x), & \text{si } x \in [-\delta_3 - \epsilon_1, -\delta_3 + \epsilon_2], \\ u(0), & \text{si } x > -\delta_3 + \epsilon_2. \end{cases}$$

Entonces $v \in C([-\delta, 0])$ y $|v(x) - u(0)| \leq |v_1(x) - u(0)| \leq 2|u(x) - u(0)|$ para cualquier $x$.

Si $V(x) := \int_{-\delta_0}^{x} v$, observemos que $V(x) = V_1(x) = U(x)$, siempre que $x \leq -\delta_1$, y $V(x) = V_1(x)$ si $x \in [-\delta_1, -\delta_3 - \epsilon_1]$. Es inmediato que $r(x) \leq V_1(x) \leq U(x)$ si $x \in [-\delta_1, -\delta_3]$; consecuentemente

$$u(0)x \leq V_1(x) - U(0-) \leq U(x) - U(0-),$$

$|V_1(x) - U(0-)| \leq \max\{|U(x) - U(0-)|, |u(0)x|\} \leq |U(x) - U(0-)| + |u(0)x|$ si $x \in [-\delta_1, -\delta_3]$.

Estas desigualdades también son ciertas si $x \in [-\delta_0, -\delta_3]$. Por lo tanto,

$|V(x) - U(0-)| = |V_1(x) - U(0-)| \leq |U(x) - U(0-)| + |u(0)x|$, siempre que $x \in [-\delta_0, -\delta_3 - \epsilon_3]$.

Consideremos $x \in [-\delta_3 - \epsilon_1, -\delta_3]$; si tal $x$ satisface $V(x) \leq U(0-)$, tenemos que $|V(x) - U(0-)| \leq |V_1(x) - U(0-)| \leq |U(x) - U(0-)| + |u(0)x|$, pues $V_1(x) \leq V(x)$. Por otro lado, si $x$ satisface $V(x) > U(0-)$, entonces

$$-u(0)x \geq u(0)\frac{\delta_3}{2} \geq \int_{-\delta_3-\epsilon_1}^{-\delta_3} (v_2 - v_1) \geq \int_{-\delta_3-\epsilon_1}^{x} (v_2 - v_1) = V(x) - V_1(x),$$

$$V(x)-U(0-)\le V_1(x)-U(0-)-u(0)x\le U(x)-U(0-)-u(0)x\le |U(x)-U(0-)|+|u(0)x|,$$

de donde, en cualquiera de los casos, se tiene $|V(x)-U(0-)|\le |U(x)-U(0-)|+|u(0)x|$, si $x\in[-\delta_3-\epsilon_1,-\delta_3]$.

Si $x\in[-\delta_3,-\delta_3+\epsilon_2]$, entonces $V(x)\ge V_1(x)$; está claro que

$$\begin{aligned}-u(0)x\ge u(0)(\delta_3-\epsilon_2)\ge u(0)\frac{\delta_3}{2} &\ge \int_{-\delta_3-\epsilon_1}^{-\delta_3}(v_2-v_1)=V(-\delta_3)-V_1(-\delta_3)=V(-\delta_3)-r(-\delta_3)\\ &\ge V(x)-r(x),\end{aligned}$$

si $x\in[-\delta_3,-\delta_3+\epsilon_2]$, (ya que $v_2\le u(0)$), y por tanto $V(x)-U(0-)\le 0$; también se tiene

$$\begin{aligned}-u(0)x &\ge \int_{-\delta_3}^{-\delta_3+\epsilon_2}(u(0)-v_2)\ge\int_{-\delta_3}^{x}(u(0)-v_2)=r(x)-r(-\delta_3)-V(x)+V(-\delta_3)\\ &\ge r(x)-r(-\delta_3)-V(x)+V_1(-\delta_3)=r(x)-V(x),\end{aligned}$$

si $x\in[-\delta_3,-\delta_3+\epsilon_2]$, y por tanto $V(x)-U(0-)\ge r(x)-U(0-)+u(0)x=2u(0)x$ en este intervalo; se deduce que $|V(x)-U(0-)|\le 2|u(0)x|$ si $x\in[-\delta_3,-\delta_3+\epsilon_2]$.

Si $x\in[-\delta_3+\epsilon_2,0)$, entonces $V(x)=r(x)$, pues $V'(x)=v(x)=u(0)=r'(x)$ en este intervalo, y

$$\begin{aligned}r(-\delta_3+\epsilon_2)-V(-\delta_3+\epsilon_2) &= \int_{-\delta_3}^{-\delta_3+\epsilon_2}(u(0)-v_2)+r(-\delta_3)-V(-\delta_3)\\ &= \int_{-\delta_3}^{-\delta_3+\epsilon_2}(u(0)-v_2)-(V(-\delta_3)-V_1(-\delta_3))\\ &= \int_{-\delta_3}^{-\delta_3+\epsilon_2}(u(0)-v_2)-\int_{-\delta_3-\epsilon_1}^{-\delta_3}(v_2-v_1)=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $V(x)-U(0-)=u(0)x$ y $|V(x)-U(0-)|=|u(0)x|$ si $x\in[-\delta_3+\epsilon_2,0)$.

(1.2) Si $v_1(-\delta_3)=u(0)$, definimos

$$v(x):=\begin{cases} v_1(x) & \text{si} \quad x\le-\delta_3\\ u(0) & \text{si} \quad x>-\delta_3\end{cases}. \tag{3.1}$$

Podemos argumentar como en el caso $v_1(-\delta_3)<u(0)$.

(2) Si $U(x)<r(x):=U(0-)+u(0)x$, para todo punto en un entorno abierto izquierdo de 0, podemos usar una construcción similar de $v$ (tomando ahora $v_1\ge u$).

(3) Si $U(x_n)=r(x_n)$, para una sucesión $x_n\nearrow 0$, es posible usar una construcción similar de $v$ (tomando $v_1=u$ y $-\delta_3=x_n$ para algún $n$ suficientemente grande).

**(ii)** Supongamos ahora que $\lim_{x\to 0^-} U(x)$ no existe; entonces $u \notin L^1([-\delta_0, 0])$.

(1) Consideremos primero el caso $U(x) > r(x) := \lambda + u(0)x$, para cualquier punto en un entorno abierto izquierdo de 0. La función $u_0 := u(0) - |u - u(0)|$ verifica $|u_0 - u(0)| = |u - u(0)|$ y $\lim_{x\to 0^-} \int_{-\delta_0}^{x} u_0 = -\infty$. Es posible elegir $0 < \delta_2 < \delta_1 < \delta$ y una función $v_1 \in C([-\delta_0, 0])$ con $v_1(x) = u(x)$ si $x \leq -\delta_1$, $v_1(x) = u_0(x)$ si $x \geq -\delta_2$, y $|v_1(x) - u(0)| \leq 2|v(x) - u(0)|$ para todo $x$. Si $V_1(x) := \int_{-\delta_0}^{x} v_1$, ya que $\lim_{x\to 0^-} V_1(x) = -\infty$, se tiene que existe un mínimo valor $-\delta_3 \in (-\delta_1, 0)$ con $V_1(-\delta_3) = r(-\delta_3)$.

Ahora podemos elegir las funciones $v_2$ y $v$ como en el caso $(i)$, y hacer los mismos cálculos.

(2) Si $U(x) < r(x) := \lambda + u(0)x$, para cualquier punto en un entorno abierto izquierdo de 0, podemos repetir el argumento con $u_1 := u(0) + |u - u(0)|$ en vez de $u_0$.

(3) Si $U(x_n) = r(x_n)$, para una sucesión $x_n \nearrow 0$, es posible usar una construcción similar de $v$ (tomando $v_1 = u$ y $-\delta_3 = x_n$ para algún $n$ suficientemente grande).

$\blacksquare$

LEMA 3.2.3 *Consideremos dos pesos $w_0$, $w_1$ en $[a - \delta_0, a]$ tales que $a \in S_1^-(w_0)$ y existe una función $F \in C([a-\delta_0, a))$ con $0 \leq F \leq \frac{1}{w_1}$ y $\int_{a-\delta_0}^{a} F = \infty$. Entonces para cada $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1) \cap C^1([a-\delta_0, a])$, cada $\delta, \epsilon > 0$ y cada $s \in \mathbb{R}$, existe $g \in C^1([a - \delta_0, a])$ con $\|f - g\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)} < \epsilon$, $g(x) = f(x)$ siempre que $x \notin (a - \delta, a]$, $g' = f'$ en algún entorno abierto de $a$, y $g(a) = s$.*

OBSERVACION 3.2.3

1. *Un resultado similar es cierto si $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1) \cap C^1([a, a + \delta_0])$.*
2. *Aunque en este lema sólo permitamos el caso particular $a \in S_1^-(w_0)$ y $\int_{a-\delta_0}^{a} \frac{1}{w_1} = \infty$, esto no supone una restricción, ya que solamente necesitamos aplicar este lema para la demostración del teorema 3.2.1.*

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $s > f(0)$; el caso $s < f(0)$ es análogo y el caso $s = f(0)$ es sencillo (es suficiente tomar $g = f$). También sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a = 0$. Como $a \in S_1^-$, tenemos que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to 0^-} w_0(x) = 0$; entonces existe $0 < \delta_1 < \delta$ con
$(s - f(0))w_0(x) < \frac{\epsilon}{3}$, c.t.p. $x \in (-\delta_1, 0)$ y $|f(x) - f(0)| < 1$ para todo $x \in (-\delta_1, 0)$.

Ya que $F \in C([-\delta_1, 0))$, $F \geq 0$ y $\int_{-\delta_1}^{0} F = \infty$, podemos encontrar una función $J \in C_c([-\delta_1, 0))$ con $0 \leq J \leq \epsilon \frac{F}{2}$ y $\int_{-\delta_1}^{0} J = s - f(0)$. Definiendo $h(x) := \int_{-\delta_1}^{x} J$ y $g := f + h$, tenemos que $0 \leq h(x) \leq s - f(0)$. Es claro que $g(x) = f(x)$ si $x \notin (-\delta, 0]$, $g' = f'$ en algún entorno abierto de 0, y $g(0) = s$. Por tanto, sólo necesitamos chequear que $\|h\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)} < \epsilon$, y esto es consecuencia de

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^\infty(w_0)} &= \operatorname{ess\,sup}_{x\in[-\delta_1,0]} h(x) w_0(x) \leq \operatorname{ess\,sup}_{x\in[-\delta_1,0]} (s - f(0)) w_0(x) \leq \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{2}, \\
\|h'\|_{L^\infty(w_1)} &= \operatorname{ess\,sup}_{x\in[-\delta_1,0]} J(x) w_1(x) \leq \frac{\epsilon}{2} \operatorname{ess\,sup}_{x\in[-\delta_1,0]} F(x) w_1(x) < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

■

La siguiente definición tiene sentido por el lema 2.2.5 del capítulo 2.

DEFINICION 3.2.2 *Dado un peso $w_1$, para cada $f$ tal que $f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}$, definimos $u_f(a) := \operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\, w_1(x)\geq\eta} f'(x)$ para cualquier $\eta > 0$ suficientemente pequeño si $a \notin S_1(w_1)$, y $u_f(a) := 0$ si $a \in S_1(w_1)$.*

Recordemos que $u_f(a)$ es finito también por el lema 2.2.5 del capítulo 2.

DEFINICION 3.2.3 *Consideremos un peso $w_1$ tal que $S(w_1) \cap [a-\delta, a+\delta] = \{a\}$ para algún $\delta$. Diremos que $w_1$ es dominado en $a$ si cuando $\int_{a-\delta}^{a} 1/w_1 = \infty$ existe una función $F_- \in C([a-\delta, a))$ con $0 \leq F_- \leq 1/w_1$ y $\int_{a-\delta}^{a} F_- = \infty$, y si cuando $\int_{a}^{a+\delta} 1/w_1 = \infty$ existe una función $F_+ \in C((a, a+\delta])$ con $0 \leq F_+ \leq 1/w_1$ y $\int_{a}^{a+\delta} F_+ = \infty$.*

OBSERVACION 3.2.4

1. *Cualquier peso $w_1$ con $1/w_1 \in L^1([a-\delta, a+\delta])$ es dominado en $a$. Si existen un par de sucesiones $x_n$ creciente convergiendo a $a$ e $y_n$ decreciente convergiendo a $a$, con $1/w_1 \in C((x_n, x_{n+1})) \cap C((y_{n+1}, y_n))$ para cualquier $n$, entonces $w_1$ es dominado en $a$.*

2. *La condición de "ser dominado" es muy débil; de hecho, no conocemos pesos que no la satisfagan, aunque tenemos argumentos no constructivos que garantizan la existencia de un peso no dominado.*

### 3.2.1 Aproximación por funciones de clase $C^1$.

TEOREMA 3.2.1 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha, \beta]$, tales que $S(w_1) = \{a\}$. Si $a \in (\alpha, \beta)$, asumiremos que $w_1$ es dominado en $a$. Entonces cualquier función en*

$$H_1 := \left\{ \begin{array}{r} f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1) : f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}, \quad f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}, \\ \operatorname{ess\,lim}_{x\to a} |f(x) - f(a)| w_0(x) = 0, \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a} u_f(a)(x-a) w_0(x) = 0 \end{array} \right\},$$

*puede ser aproximada por funciones en* $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ *en la norma* $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$. *Además, si* $f$ *satisface* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f'(x) - u_f(a)|w_1(x) = 0$, *entonces podemos aproximarla por funciones de clase* $C^1(\mathbb{R})$ *las cuales son polinomios de grado menor o igual a 1 en un entorno de* $a$.

Observacion 3.2.5

1. *La hipótesis* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a} u_f(a)(x-a)w_0(x) = 0$ *para toda función* $f$ *con* $f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}$, *es consecuencia de cualquiera de las siguientes condiciones:*

   *(a)* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}(x-a)w_0(x) = 0$,

   *(b)* $a \notin S_2(w_1)$, *es decir,* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a} w_1(x) = 0$ *ó* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_1(x) = \infty$ *(en ambos casos,* $u_f(a) = 0$*).*

2. *Cualquiera de las siguientes condiciones garantiza* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x) - f(a)|w_0(x) = 0$ *para toda función* $f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}$:

   *(a)* $a \in S^+(w_0) \cap S^-(w_0)$, *es decir,* $\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a^+} w_0(x) = \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a^-} w_0(x) = 0$,

   *(b)* $a \in S^+(w_0)$ *y* $w_0 \in L^\infty([a-\epsilon, a])$, *para algún* $\epsilon > 0$,

   *(c)* $a \in S^-(w_0)$ *y* $w_0 \in L^\infty([a, a+\epsilon])$, *para algún* $\epsilon > 0$,

   *(d)* $w_0 \in L^\infty([a-\epsilon, a+\epsilon])$, *para algún* $\epsilon > 0$.

3. *Cualquiera de las siguientes condiciones garantiza* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f'(x) - u_f(a)|w_1(x) = 0$ *para toda función* $f$ *con* $f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}$:

   *(a)* $a \in S^+(w_1) \cap S^-(w_1)$, *es decir,* $\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a^+} w_1(x) = \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a^-} w_1(x) = 0$,

   *(b)* $a \in S^+(w_1)$ *y* $w_1 \in L^\infty([a-\epsilon, a])$, *para algún* $\epsilon > 0$,

   *(c)* $a \in S^-(w_1)$ *y* $w_1 \in L^\infty([a, a+\epsilon])$, *para algún* $\epsilon > 0$,

   *(d)* $a = \alpha$ *ó* $a = \beta$ *(ya que* $a \in S(w_1)$*).*

4. *No hay absolutamente ninguna restricción sobre los puntos singulares de* $w_0$.

**Demostración.**

El corazón de la prueba es usar el lema 3.2.2 en la aproximación sobre $[\alpha, a]$ y al "vesión derecha" del mismo lema en la aproximación sobre $[a, \beta]$. Si estas dos aproximaciones no se pueden pegar de manera continua, debemos usar el lema 3.2.3 para obtener una función continua. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a \in (\alpha, \beta)$, ya que los casos $a = \alpha$ y $a = \beta$ son más sencillos (en estos casos no necesitamos usar el lema 3.2.3 y consecuentemente no necesitamos la hipótesis de que $w_1$ sea dominado en $a$).

Si $a \in S^-(w_1) \cap R^+(w_1)$, entonces cualquier $f \in H_1$ pertenece a $C^1([a, \beta])$, y sólo necesitamos aplicar el lema 3.2.2; si $a \in S^+(w_1) \cap R^-(w_1)$, entonces cualquier $f \in H_1$ pertenece a $C^1([\alpha, a])$, y sólo necesitamos aplicar la “vesión derecha” del lema 3.2.2; entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \in S^+(w_1) \cap S^-(w_1)$, ya que los otros casos son más sencillos. En el caso $a \in S^+(w_1) \cap S^-(w_1)$, cualquier función $f \in H_1$ satisface $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f'(x) - u_f(a)|w_1(x) = 0$ (ver teorema 2.2.1).

Consideremos cualquier $f \in H_1$ y $\epsilon > 0$. Definimos $u := f'$ en $[\alpha, \beta] \setminus \{a\}$ y $u(a) := u_f(a)$. Ya que $f \in H_1$, es posible elegir $\delta > 0$ con

$$3\|f' - u(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_1)} < \frac{\epsilon}{6}, \quad 4\|f - f(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} < \frac{\epsilon}{6}, \quad 4|u(a)|\|x - a\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} < \frac{\epsilon}{6}.$$

También requeriremos para $\delta$ que

$$|f(x) - f(a-)| \le |f(x) - f(a)|, \quad \text{para} \quad x \in [a-\delta, a) \quad \text{si existe } f(a-) \ne f(a), \ y \qquad (3.2)$$

$$|f(x) - f(a+)| \le |f(x) - f(a)|, \quad \text{para} \quad x \in (a, a+\delta] \quad \text{si existe } f(a+) \ne f(a). \qquad (3.3)$$

Definimos $U(x) := f(x) - f(\alpha) = \int_\alpha^x f'$ si $x \in [\alpha, a)$, y $U(x) := f(x) - f(\beta) = \int_\beta^x f'$ si $x \in (a, \beta]$. Consideremos la función $v \in C([\alpha, a])$ en el lema 3.2.2 tal que $v(x) = u(x)$ si $x \notin (a - \delta, a)$, $|v(x) - u(a)| \le 2|u(x) - u(a)|$ para todo $x \in [\alpha, a)$,

$$V(a) = \begin{cases} f(a-) - f(\alpha), & \text{si existe} \quad f(a-), \\ f(a) - f(\alpha), & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y $|V(x) - V(a)| \le |U(x) - V(a)| + 2|u(a)||x - a|$ para cualquier $x \in [\alpha, a)$, si $V(x) := \int_\alpha^x v$. Consideremos también la función $\tilde{v} \in C([a, \beta])$ en la “versión derecha” del lema 3.2.2 tal que $\tilde{v}(x) = u(x)$ si $x \notin (a, a+\delta)$, $|\tilde{v}(x) - u(a)| \le 2|u(x) - u(a)|$ para todo $x \in (a, \beta]$,

$$\tilde{V}(a) = \begin{cases} f(a+) - f(\beta), & \text{si existe} \quad f(a+), \\ f(a) - f(\beta), & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y $|\tilde{V}(x) - \tilde{V}(a)| \le |U(x) - \tilde{V}(a)| + 2|u(a)||x - a|$ para cualquier $x \in (a, \beta]$, si $\tilde{V}(x) := \int_\beta^x \tilde{v}$.

Sea $g_0$ la función dada por

$$g_0(x) := \begin{cases} V(x) + f(\alpha), & \text{si} \quad x \in [\alpha, a], \\ \tilde{V}(x) + f(\beta), & \text{si} \quad x \in (a, \beta]. \end{cases}$$

Observe que $g_0 \in C^1([\alpha,\beta]\setminus\{a\})$ y $g_0'(a-) = g_0'(a+) = u(a)$. De hecho, $g$ es un polinomio de grado a lo sumo 1 en un entorno abierto izquierdo (respectivamente derecho) de $a$, ya que $g_0'(x) = u(a)$ existe (por el lema 3.2.2).

Esta función también satisface $g_0(x) = f(x)$ si $x \notin (a-\delta, a+\delta)$, $|g_0'(x) - u(a)| \le 2|f'(x) - u(a)|$ para cualquier $x \in [\alpha,\beta]\setminus\{a\}$. De donde se deduce que $g_0$ verifica

$$
\begin{aligned}
\|f-g_0\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)} &= \|f-g_0\|_{L^\infty(w_0)} + \|f'-g_0'\|_{L^\infty(w_1)}\\
&= \max\Big\{\|U-V\|_{L^\infty([a-\delta,a],w_0)}, \|U-\tilde V\|_{L^\infty([a,a+\delta],w_0)}\Big\} + \|f'-g_0'\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_1)}\\
&\le \|U-V(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a],w_0)} + \|V-V(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a],w_0)} + \|U-\tilde V(a)\|_{L^\infty([a,a+\delta],w_0)}\\
&\quad + \|\tilde V-\tilde V(a)\|_{L^\infty([a,a+\delta],w_0)} + \|f'-u(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_1)} + \|g_0'-u(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_1)}\\
&\le 2\|U-V(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a],w_0)} + 2|u(a)|\|x-a\|_{L^\infty([a-\delta,a],w_0)} + 2\|U-\tilde V(a)\|_{L^\infty([a,a+\delta],w_0)}\\
&\quad + 2|u(a)|\|x-a\|_{L^\infty([a,a+\delta],w_0)} + 3\|f'-u(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_1)}\\
&\le 2\|f-f(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a],w_0)} + 2|u(a)|\|x-a\|_{L^\infty([a-\delta,a],w_0)} + 2\|f-f(a)\|_{L^\infty([a,a+\delta],w_0)}\\
&\quad + 2|u(a)|\|x-a\|_{L^\infty([a,a+\delta],w_0)} + 3\|f'-u(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_1)}\\
&\le 4\|f-f(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} + 4|u(a)|\|x-a\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} + 3\|f'-u(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_1)}\\
&< \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}
$$

donde hemos usado (3.2) y (3.3) en la tercera desigualdad. Para finalizar la prueba sólo necesitamos construir una función $g \in C^1([\alpha,\beta])$ con $\|g-g_0\|_{W^{1,\infty}([\alpha,\beta],w_0,w_1)} < \epsilon/2$.

Recordemos que $g_0(a-) = f(a-)$ siempre que $f(a-)$ exista y $g_0(a-) = f(a)$ en otro caso, $g_0(a+) = f(a+)$ siempre que $f(a+)$ exista y $g_0(a+) = f(a)$ en otro caso. También tenemos que $g_0'(a-) = g_0'(a+) = u(a)$. Por lo tanto, $g_0 \in C^1([\alpha,\beta])$ si y sólo si $g_0(a-) = g_0(a+)$; en este caso es suficiente tomar $g := g_0$.

Ahora analizaremos las diferentes posibilidades:

**(1)** Si $1/w_1 \in L^1([\alpha,\beta])$, entonces $f \in C([\alpha,\beta])$, pues $f \in W^{1,\infty}(w_0,w_1)$, y consecuentemente $g_0 \in C([\alpha,\beta])$. Por lo tanto podemos tomar $g := g_0$.

**(2)** Asumamos ahora que $1/w_1 \notin L^1([\alpha,\beta])$. Observe que $1/w_1 \in L^1_{loc}([\alpha,\beta]\setminus\{a\})$, ya que $a$ es la única singularidad de $w_1$.

(2.1) Si no existe alguno de los valores $f(a-)$ ó $f(a+)$, también tenemos que $g_0 \in C([\alpha,\beta])$.

(2.2) Asumamos que $f(a-)$ existe y $f(a+)$ no existe (el caso en el que $f(a+)$ existe y $f(a-)$ no existe es similar). Si $f(a-) = f(a)$, se deduce que $g_0 \in C([\alpha,\beta])$. Si $f(a-) \ne f(a)$, se deduce que $a \in S_1^-(w_0)$ y $1/w_1 \notin L^1([\alpha, a])$: si $a \notin S_1^-(w_0)$, entonces el lema 2.2.5 y su observación implican que $f(a) = \operatorname{ess\,lim}_{x \to a^-,\, w_0(x) \geq \eta} f(x) = f(a-)$, para cualquier $\eta > 0$ suficientemente pequeño, lo cual es una contradicción; si $1/w_1 \in L^1([\alpha, a])$, entonces $f$ es continua por la izquierda en $a$, lo cual es una contradición. Consecuentemente podemos aplicar el lema 3.2.3 a $g_0|_{[\alpha,a]}$ para obtener una función $g \in C^1([\alpha, a])$ con $\|g - g_0\|_{W^{1,\infty}([\alpha,a],w_0,w_1)} < \epsilon/2$, $g'(a-) = g_0'(a-) = g_0'(a+)$, y $g(a) = g_0(a+)$; si definimos $g := g_0$ en $(a, \beta]$, esta $g$ es la función requerida.

Observe que los lemas 3.2.2 y 3.2.3 garantizan que $g$ es un polinomio de grado a lo sumo 1 en un entorno abierto de $a$, ya que $g'$ es constante en un entorno abierto de $a$.

(2.3) Finalmente, asumimos que $f(a-)$ y $f(a+)$ existen. Si $f(a-) = f(a+)$, se deduce que $g_0 \in C([\alpha, \beta])$. Si $f(a-) \neq f(a+)$, consideramos el par de casos:

(2.3.1) Si $a \in S_1(w_0)$, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $1/w_1 \notin L^1([\alpha, a])$ (el caso $1/w_1 \notin L^1([a, \beta])$ es similar). Consecuentemente podemos aplicar el lema 3.2.3 como en el caso (2.2).

(2.3.2) Si $a \notin S_1(w_0)$, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a \notin S_1^+(w_0)$ (el caso $a \notin S_1^-(w_0)$ es similar). Entonces, el lema 2.2.5 y su observación implican que $f(a) = \operatorname{ess\,lim}_{x \to a^+,\, w_0(x) \geq \eta} f(x) = f(a+)$. De donde $a \in S_1^-(w_0)$, ya que si esto no es así, $f(a) = \operatorname{ess\,lim}_{x \to a^-,\, w_0(x) \geq \eta} f(x) = f(a-)$ y por lo tanto $f(a+) = f(a-)$, lo cual es una contradicción. También tenemos que $1/w_1 \notin L^1([\alpha, a])$, ya que si esto no es así, $f$ es continua por la izquierda en $a$, lo cual es una contradicción. En consecuencia podemos aplicar el lema 3.2.3 como en el caso (2.2).

Esto finaliza la prueba del teorema.

■

LEMA 3.2.4 *Consideremos un peso $w_0$ con $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \to a} w_0(x) = \infty$ y $\operatorname{ess\,lim}_{x \to a} |x - a| w_0(x) = 0$. Si $f \in L^\infty(w_0)$ y $\|f\|_{L^\infty([a-\delta, a+\delta], w_0)} \geq c > 0$ para cualquier $\delta > 0$, entonces $\operatorname{dist}_{L^\infty(w_0)}(f, C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)) \geq c$.*

**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a = 0$. Si $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)$, entonces $g(0) = 0$, ya que $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \to 0} w_0(x) = \infty$, y consecuentemente $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = g'(0)$. Luego

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \to 0} |g(x)| w_0(x) = \left( \operatorname{ess\,lim}_{x \to 0} \frac{|g(x)|}{|x|} \right) \left( \operatorname{ess\,lim}_{x \to 0} |x| w_0(x) \right) = |g'(0)| \cdot 0 = 0\,.$$

Por lo tanto, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|g\|_{L^\infty([-\delta,\delta],w_0)} \le \epsilon$. Por lo que

$$\|f-g\|_{L^\infty(w_0)} \ge \|f-g\|_{L^\infty([-\delta,\delta],w_0)} \ge \|f\|_{L^\infty([-\delta,\delta],w_0)} - \|g\|_{L^\infty([-\delta,\delta],w_0)} \ge c - \epsilon\,,$$

para cualquier $\epsilon > 0$, y en consecuencia $\|f-g\|_{L^\infty(w_0)} \ge c$.

■

Teorema 3.2.2 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha,\beta]$, tales que $S(w_1) = \{a\}$ y $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|x-a|w_0(x) = 0$. Si $a \in (\alpha,\beta)$, asumiremos que $w_1$ es dominado en $a$. Entonces la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ es*

$$\begin{aligned} H_2 \; &:= \; \left\{ \begin{array}{c} f \in W^{1,\infty}(w_0,w_1) : f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}, \quad f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}, \\ \operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)-f(a)|w_0(x) = 0 \end{array} \right\} \\ = H_3 \; &:= \; \left\{ \begin{array}{r} f \in W^{1,\infty}(w_0,w_1) : f \in C^1([\alpha,\beta]\setminus\{a\}), \operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)-f(a)|w_0(x) = 0, \\ si \quad a \in S^+, \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a^+}|f'(x)-u_f(a)|w_1(x) = 0, \\ si \quad a \in S^-, \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a^-}|f'(x)-u_f(a)|w_1(x) = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

*Además, si $w_0, w_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, entonces la clausura del espacio de los polinomios en $W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ es también $H_2 = H_3$.*

Observacion 3.2.6

1. *El método de aproximación es constructivo.*

2. *Necesitamos en $H_2$ y $H_3$ que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)-f(a)|w_0(x) = 0$, incluso aunque $a \notin S(w_0)$.*

**Demostración.**

Si $f$ está en la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0,w_1)$, se sigue que $f \in W^{1,\infty}(w_0,w_1)$, $f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}$, y $f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}$. Si $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_0(x) < \infty$, podemos deducir que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)-f(a)|w_0(x) = 0$: veamos que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a^+}|f(x)-f(a)|w_0(x) = 0$ (el límite lateral izquierdo es similar); esto es una consecuencia del teorema 2.2.1 si $a \in S^+(w_0)$, y si esto no es así, $f$ es continua por la derecha en $a$, como consecuencia de que $f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}$ y el teorema 2.2.1. Si $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_0(x) = \infty$, tenemos que $f(a) = 0$, y el lema 3.2.4 implica que no existe una constante $c > 0$ con $\|f\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} \ge c$ para cualquier $\delta > 0$; por lo que obtenemos $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)-f(a)|w_0(x) = 0$ también en este caso. Entonces $f \in H_2$.

Es claro que $H_2$ está contenido en la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, ya que $f \in H_1$: $u_f(a)$ es finito y contamos con la hipótesis de que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|x-a|w_0(x) = 0$, en consecuencia $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a} u_f(a)|x-a|w_0(x) = 0$. Entonces es posible aplicar el teorema 3.2.1.

Para finalizar la prueba del teorema, es suficiente probar que $H_2 = H_3$, pero esta igualdad es consecuencia directa del teorema 2.2.1 y del lema 2.2.5, ya que la clausura de $C^1([\alpha, \beta])$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ está contenida en $C^1([\alpha, \beta] \setminus \{a\})$.

■

PROPOSICION 3.2.1 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha, \beta]$, con $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x) > 0$ y $a \in S(w_1)$.*

*(a) Si $f$ pertenece a la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)$ en $L^\infty(w_0)$, entonces para cada $\eta > 0$ suficientemente pequeño $l := \operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\, |x-a|w_0(x)\geq \eta} f(x)/(x-a)$ existe.*

*También tenemos que $\lim_{n\to\infty} g_n'(a) = l$, para cualquier sucuesión $\{g_n\} \subset C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)$ que converja a $f$ en $L^\infty(w_0)$.*

*(b) Si $f$ pertenece a la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ y $a \notin S_1(w_1)$, entonces $u_f(a) = l$. Además, si $f'(a)$ existe, entonces $u_f(a) = f'(a)$.*

*(c) Si $f'$ pertenece a la clausura de $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)$ en $L^\infty(w_1)$ y $a \notin S_1(w_1)$, entonces $u_f(a) = \lim_{n\to\infty} h_n(a)$, si $\{h_n\} \subset C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)$ converge a $f'$ en $L^\infty(w_1)$.*

**Demostración.**

Fijado $0 < \eta < \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x)$. Buscando una contradicción, supondremos que

$$\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a,\, |x-a|w_0(x)\geq\eta} \frac{f(x)}{x-a} = c_1 < c_2 = \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a,\, |x-a|w_0(x)\geq\eta} \frac{f(x)}{x-a} .$$

Si $g$ es cualquier función en $C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)$, se sigue que $g(a) = 0$ (porque $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_0(x) = \infty$) y

$$\|f-g\|_{L^\infty(w_0)} \geq \eta \left\| \frac{f(x)-g(x)}{x-a} \right\|_{L^\infty(\{|x-a|w_0(x)\geq\eta\})} \geq \eta \max\left\{|c_1 - g'(a)|, |c_2 - g'(a)|\right\} \geq \eta\, \frac{c_2 - c_1}{2} .$$

Esto es una contradicción con el hecho de que $f$ pertenezca a la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)$ en $L^\infty(w_0)$.

Elijamos $g_n \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)$ con $\|f - g_n\|_{L^\infty(w_0)} \leq 1/n$. Por lo tanto

$$\eta \left| \frac{f(x)-g_n(x)}{x-a} \right| \leq |f(x) - g_n(x)|w_0(x) \leq \|f-g_n\|_{L^\infty(w_0)} \leq \frac{1}{n} ,$$

en c.t.p. $x$ con $|x-a|w_0(x) \geq \eta$. De aquí se sigue que $\eta\,|l - g_n'(a)| \leq 1/n$, para todo $n$, ya que $g_n(a) = 0$ (porque $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_0(x) = \infty$). Por tanto, $l$ es finito y $\lim_{n\to\infty} g_n'(a) = l$.

Asumiremos ahora que $f$ pertenece a la claususra de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ y $a \notin S_1(w_1)$. Observe que por el lema 2.2.5 $u_f(a) := \operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\, w_1(x)\geq\eta} f'(x)$ existe, para cada $\eta > 0$ suficientemente pequeño, pues $a \notin S_1(w_1)$. Tenemos que existe $g_n \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ con $\|f - g_n\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)} \leq 1/n$. Por tanto,

$$\eta\,|f'(x) - g_n'(x)| \leq |f'(x) - g_n'(x)|w_1(x) \leq \|f' - g_n'\|_{L^\infty(w_1)} \leq \frac{1}{n}\,,$$

en c.t.p. $x$ con $w_1(x) \geq \eta$. Consecuentemente, $\eta|u_f(a) - g_n'(a)| \leq 1/n$, para todo $n$, y deducimos que $l = \lim_{n\to\infty} g_n'(a) = u_f(a)$. (El mismo argumento permite deducir que $\lim_{n\to\infty} h_n(a) = u_f(a)$ para cualquier sucesión $\{h_n\} \subset C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)$ que converja a $f'$ en $L^\infty(w_1)$. Esto prueba $(c)$).

Ahora asumiremos que existe $f'(a)$. Entonces $f'(a) = l$ y consecuentemente $f'(a) = l = u_f(a)$.

■

Proposicion 3.2.2 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha, \beta]$, con $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x) = \infty$ y $a \in S(w_1)$. Si $f$ pertenece a la claususra de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, entonces $u_f(a) = 0$.*

**Demostración.**

Sólo necesitamos considerar el caso $a \in S(w_1) \setminus S_1(w_1)$, ya que $u_f(a) = 0$ si $a \in S_1(w_1)$ (recordemos la definición 3.2.6).

Si tomamos $g_n \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ con $\|f - g_n\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)} \leq 1/n$, entonces los incisos $(a)$ y $(b)$ de la proposición 3.2.1 implican que $\lim_{n\to\infty} g_n'(a) = u_f(a)$.

Ya que $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x) = \infty$, para cada $m$

$$m\left|\frac{g_n(x)}{x-a}\right| \leq |g_n(x)|w_0(x) \leq \|g_n\|_{L^\infty(w_0)} \leq \|f\|_{L^\infty(w_0)} + \frac{1}{n}\,,$$

en c.t.p. $x$ con $|x-a|w_0(x) \geq m$. Entonces $m|g_n'(a)| \leq \|f\|_{L^\infty(w_0)} + 1/n$ para cualquier $m$, pues $g_n(a) = 0$. Consecuentemente, $g_n'(a) = 0$ y $u_f(a) = 0$.

■

Definicion 3.2.4 *Consideremos un peso $w_0$ en $[\alpha, \beta]$, con $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x) > 0$ y $a \in S(w_1)$, y una función $f$ en la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)$ en $L^\infty(w_0)$. Definimos la* **derivada de $f$ en $a$ a través de** *$\{|x-a|w_0(x) \geq \eta\}$ como $l(f,a) := \operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\, |x-a|w_0(x)\geq\eta} f(x)/(x-a)$, para todo $0 < \eta < \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x)$.*

TEOREMA 3.2.3 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha,\beta]$, tales que $S(w_1)=\{a\}$ y $0<\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|x-a|w_0(x)<\infty$. Si $a\in(\alpha,\beta)$, asumiremos que $w_1$ es dominado en $a$. Entonces la clausura de $C^1(\mathbb{R})\cap W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ es*

$$H_4 := \left\{ \begin{array}{r} f\in W^{1,\infty}(w_0,w_1): f\in \overline{C(\mathbb{R})\cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}, \quad f'\in \overline{C(\mathbb{R})\cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}, \\ \textit{existe} \quad l(f,a) \quad \textit{y} \operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)-l(f,a)(x-a)|w_0(x)=0, \\ \textit{y si} \quad a\notin S_1(w_1), \quad \textit{entonces} \quad u_f(a)=l(f,a) \end{array} \right\}.$$

OBSERVACION 3.2.7 *La condición "si $a\notin S_1(w_1)$, entonces $u_f(a)=l(f,a)$" muestra que debe existir interacción entre $f$, $w_0$ y $w_1$, para poder aproximar $f$ por funciones suaves (compare con el teorema 3.2.2). El ejemplo que colocaremos después de la demostración de este teorema muestra que esta condición es independiente de las otras hipótesis impuestas en la definición de $H_4$.*

**Demostración.**

Si $f$ está en la clausura de $C^1(\mathbb{R})\cap W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0,w_1)$, veremos que pertenece a $H_4$. Es inmediato que $f\in \overline{C(\mathbb{R})\cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}$, y $f'\in \overline{C(\mathbb{R})\cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}$. La proposición 3.2.1 implica que si $a\notin S_1(w_1)$, entonces $u_f(a)=l(f,a)$. Elegimos una sucesión $\{g_n\}\subset C^1(\mathbb{R})\cap W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ que converja a $f$ en $W^{1,\infty}(w_0,w_1)$. Por la proposición 3.2.1 se deduce que

$$l(f,a)=\operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\,|x-a|w_0(x)\ge\eta} f(x)/(x-a)=\lim_{n\to\infty} g_n'(a),$$

para $\eta>0$ suficientemente pequeño.

Fijemos $\epsilon>0$. Es inmediato que

$$\operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\,|x-a|w_0(x)\ge\eta}|f(x)-l(f,a)(x-a)|w_0(x)=\operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\,|x-a|w_0(x)\ge\eta}\left|\frac{f(x)}{x-a}-l(f,a)\right||x-a|w_0(x)=0\,,$$

ya que $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x)<\infty$; entonces existe $\delta_1>0$ con

$$\|f(x)-l(f,a)(x-a)\|_{L^\infty([a-\delta_1,a+\delta_1]\cap\{|x-a|w_0(x)\ge\eta\},w_0)}<\epsilon\,.$$

Ahora, es suficiente probar que $\|f(x)-l(f,a)(x-a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta]\cap\{|x-a|w_0(x)<\eta\},w_0)}<\epsilon$, para algún $0<\delta\le\delta_1$. La proposición 3.2.1 nos permite elegir $n$ con $\|f-g_n\|_{L^\infty(w_0)}<\epsilon/2$ y $|g_n'(a)-l(f,a)|\eta<\epsilon/2$; por tanto, existe $0<\delta\le\delta_1$ con $|g_n(x)/(x-a)-l(f,a)|\eta<\epsilon/2$ para cualquier $0<|x-a|<\delta$. Consecuentemente

$$\begin{aligned}\|g_n(x)-l(f,a)(x-a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta]\cap\{|x-a|w_0(x)<\eta\},w_0)} &= \left\|\frac{g_n(x)}{x-a}-l(f,a)\right\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta]\cap\{|x-a|w_0(x)<\eta\},|x-a|w_0)} \\ &\le \frac{\epsilon}{2}\,.\end{aligned}$$

También tenemos que $\|f - g_n\|_{L^\infty(w_0)} < \epsilon/2$; por lo tanto $\|f(x) - l(f,a)(x-a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta]\cap\{|x-a|w_0(x)<\eta\},w_0)} < \epsilon$, y $\|f(x) - l(f,a)(x-a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} < \epsilon$. Entonces $f \in H_4$.

Fijemos ahora $f \in H_4$. La hipótesis $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x) < \infty$ implica que existe $\delta_0 > 0$ tal que $x - a \in L^\infty([a-2\delta_0, a+2\delta_0], w_0)$; también requerimos $w_1 \in L^\infty([a-2\delta_0, a+2\delta_0])$, si $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_1(x) < \infty$. Fijemos El problema se reduce a mostrar que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x) - f(a)|w_0(x) = 0$, para ello se estudia la naturaleza de $a$ con respecto a $w_0$:

1. $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_0(x) < \infty \longmapsto \begin{cases} a \in S(w_0), \\ a \notin S(w_0) \end{cases}$
2. $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_0(x) = \infty \longmapsto f(a) = 0.$

$\phi \in C_c^\infty([a-2\delta_0, a+2\delta_0])$ con $0 \le \phi \le 1$ y $\phi = 1$ en $[a-\delta_0, a+\delta_0]$. Veremos que $l(f,a)(x-a)\phi(x) \in C_c^\infty([a-2\delta_0, a+2\delta_0]) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$: esta función pertenece a $L^\infty(w_0)$; su derivada está en $L^\infty(w_1)$ si $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_1(x) < \infty$; si esto no es así, $a \notin S_1(w_1)$, y se sigue que $l(f,a) = 0$: si $\{h_n\} \subset C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)$ converge a $f'$ en $L^\infty(w_1)$, el inciso $(c)$ de la proposición 3.2.1 implica que $u_f(a) = \lim_{n\to\infty} h_n(a)$; el hecho $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_1(x) = \infty$ implica $h_n(a) = 0$, y tenemos $0 = u_f(a) = l(f,a)$, pues $f \in H_4$.

Consideremos la función $g(x) := f(x) - l(f,a)(x-a)\phi(x)$. Ya que $l(f,a)(x-a)\phi(x)$ es una función suave en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, es suficiente mostrar que $g$ puede aproximarse por funciones de clase $C^1$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$. Tenemos que $f(a) = g(a) = 0$ pues $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_0(x) = \infty$; entonces $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|g(x) - g(a)|w_0(x) = 0$, ya que $f \in H_4$. Observe que $u_g(a) = 0$ si $a \in S_1(w_1)$; si $a \notin S_1(w_1)$, se sigue que $u_g(a) = \operatorname{ess\,lim}_{x\to a,\, w_1(x)\ge\eta} f'(x) - l(f,a) = 0$. Entonces el teorema 3.2.1 implica que $g$ puede ser aproximada por funciones de clase $C^1$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$.

■

EJEMPLO 3.2.1 *Existen pesos $w_1$, $w_2$ y una función $f$ tales que $a \notin S_1(w_1)$, $u_f(a) \neq l(f,a)$, y verifican las otras hipótesis en la definición de $H_4$.*

*Consideremos la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y los pesos en $[0,1]$,*

$$w_0(x) = \tfrac{1}{x} \qquad w_1(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in \left(\frac{1}{2\pi n + 1/(n+1)}, \frac{1}{2\pi n - 1/n}\right], \\ \frac{1}{n}, & si \quad x \in \left(\frac{1}{2\pi n - 1/n}, \frac{1}{2\pi(n-1) + 1/n}\right]. \end{cases}$$

*Es claro que $a = 0$, $a \notin S_1(w_1)$, $f \in C([0,1])$, $f' \in C((0,1])$, $l(f,0) = f'(0) = 0$ y $\operatorname{ess\,lim}_{x\to 0} f(x)w_0(x) = 0$. Un cálculo directo muestra que $u_f(0) = -1$ y $\operatorname{ess\,lim}_{x\to 0}|f'(x) + 1|w_1(x) = 0$ (entonces $f'$ pertenece a la clausura de $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)$ en $L^\infty(w_1)$).*

Como consecuencia del teorema 3.2.3 tenemos

Corolario 3.2.1 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha, \beta]$, tales que $S(w_1) = \{a\}$ y $w_0$ comparable con $\frac{1}{|x-a|}$ en un entorno abierto de $a$. Si $a \in (\alpha, \beta)$, suponagamos también que $w_1$ es dominado en $a$. Entonces la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es*

$$H_4 := \left\{ \begin{array}{r} f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1) : f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}, \quad f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}, \\ \textit{existe} \quad f'(a) \quad \textit{y si} \quad a \notin S_1(w_1), \quad \textit{entonces} \quad u_f(a) = f'(a) \end{array} \right\}.$$

**Demostración.**

Como $w_0$ es comparable con $\frac{1}{|x-a|}$, es inmediato que $l(f, a) = f'(a)$, de donde se deduce que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a} |f(x) - f'(a)(x-a)| w_0(x) = 0$, ya que $f$ es derivable en $a$.

■

La introducción de la siguiente condición será esencial en la caracterización de las funciones $f$ que pueden ser aproximadas por funciones suaves en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en el caso del teorema 3.2.4.

Dada una función $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\phi_n \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ tal que

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} |f(x) - \phi_n(x)| w_0(x) < \frac{1}{n}. \tag{3.4}$$

Teorema 3.2.4 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha, \beta]$, tales que $S(w_1) = \{a\}$ y $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} |x-a| w_0(x) = \infty$. Si $a \in (\alpha, \beta)$, asumiremos que $w_1$ es dominado en $a$. Entonces la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es*

$$H_5 := \left\{ \begin{array}{c} f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1) : f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}, \quad f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}, \\ f \quad \textit{satisface la condición} \quad (3.4) \quad y \quad u_f(a) = 0 \end{array} \right\}.$$

Observacion 3.2.8

1. *Aunque (3.4) no es una condición tan limpia como las que aparecen en $H_3$ o en $H_4$, ella simplifica notablemente el problema de aproximación, pues no hace referencia ni a $f'$ ni a $w_1$, por lo que no necesitamos aproximar simultáneamente a $f$ y a $f'$.*

2. *La condición (3.4) muestra la interacción que debe haber entre $f$, $w_0$ y $w_1$ para poder aproximar por funciones suaves (note que $\phi_n \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$).*

3. *Si $f(a) \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ para cualquier $f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}$ con $f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}$ (en particular, si $w_0 \in L^\infty([\alpha, \beta])$), entonces la condición (3.4) puede ser removida, pues $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a} |f(x) - f(a)| w_0(x) = 0$, si estamos en alguna de las siguientes situaciones (ver observación 2 del teorema 3.2.1):*

*(a)* $a \in S^+(w_0) \cap S^-(w_0)$*, es decir,* $\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a^+} w_0(x) = \operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a^-} w_0(x) = 0$.

*(b)* $a \in S^+(w_0)$ *y* $w_0 \in L^\infty([a-\epsilon, a])$*, para algún* $\epsilon > 0$.

*(c)* $a \in S^-(w_0)$ *y* $w_0 \in L^\infty([a, a+\epsilon])$*, para algún* $\epsilon > 0$.

*(d)* $w_0 \in L^\infty([a-\epsilon, a+\epsilon])$*, para algún* $\epsilon > 0$.

*Por lo tanto, en esta situación el enunciado del teorema 3.2.4 resulta mucho más agradable, al eliminarse la condición (3.4).*

**Demostración.**

Es inmediato que si $f$ pertenece a la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, entonces $f \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}$ y $f' \in \overline{C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}$. De la proposición 3.2.2 se deduce que $u_f(a) = 0$. Probaremos que $f$ satisface la condición (3.4): Buscando una contradicción, supondremos que $f$ no satisface la condición (3.4); entonces existe una constante positiva $c$ tal que $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} |f(x) - \phi(x)|\, w_0(x) > c$ para cualquier $\phi \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$. Esto significa que $\|f - \phi\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} \geq c$ para cualquier $\delta > 0$. Por tanto, $\|f - \phi\|_{L^\infty(w_0)} \geq \|f - \phi\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} \geq c$ para cualquier $\phi \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, lo que proporciona la contradición esperada. Entonces $f \in H_5$.

Veremos ahora que $H_5$ está contenido en la clausura de $C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$. Dado $f_0 \in H_5$ y $\epsilon > 0$ podemos elegir $\phi \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ tal que la función definida por $f := f_0 - \phi$ satisfaga $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} |f(x)|\, w_0(x) < \epsilon/24$. Entonces existe $\delta > 0$ con $4\|f - f(a)\|_{L^\infty([a-\delta,a+\delta],w_0)} < \epsilon/6$.

Como $u_f(a) = 0$, aplicando el argumento de la prueba del teorema 3.2.1 es posible encontrar $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ con $\|f - g\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)} < \epsilon$. Por lo tanto, si $g_0 := g + \phi$, se sigue que $\|f_0 - g_0\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)} < \epsilon$.

■

El siguiente resultado nos permite reducir el problema de aproximación global en $W^{1,\infty}(I, w_0, w_1)$ por funciones suaves a un problema de aproximación local.

TEOREMA 3.2.5 *([35], Teorema 5.2). Consideremos un par de sucesiones estrictamente crecientes de números reales* $\{\alpha_n\}_{n\in J}$*,* $\{\beta_n\}_{n\in J}$ *(donde* $J$ *es un conjunto de índices finito,* $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+$ *ó* $\mathbb{Z}^-$*) con* $\alpha_{n+1} < \beta_n$ *para cualquier* $n$*. Dados dos pesos* $w_0$ *y* $w_1$ *definidos en el intervalo* $I := \cup_{n\in J}(\alpha_n, \beta_n)$*. Supongamos que para cada* $n$*, existe un intervalo* $I_n \subset [\alpha_{n+1}, \beta_n]$ *con* $w_1 \in L^\infty(I_n)$ *e* $\int_{I_n} w_0 > 0$*. Entonces* $f$ *puede ser aproximada por funciones de* $C^1(I)$ *en* $W^{1,\infty}(I, w_0, w_1)$*, si y sólo si, puede ser aproximada por funciones de* $C^1([\alpha_n, \beta_n])$ *en* $W^{1,\infty}([\alpha_n, \beta_n], w_0, w_1)$ *para cada* $n$*. El resultado también es cierto si reemplazamos* $C^1$ *por* $C^\infty$ *en ambos casos.*

De hecho, el teorema 5.2 en [35] tiene un enunciado más general, válido en el caso de aproximación simultánea de una función y sus $k$ primeras derivadas, pero esta versión es la más apropiada en nuestra situación. La prueba de este teorema es constructiva y la idea principal es natural: es suficiente considerar aproximantes $\{f_n\}$ en $[\alpha_n, \beta_n]$ y "pegarlos" con una aproximación de la identidad apropiada. En el capítulo siguiente utilizaremos esta idea para trabajar con el problema de aproximación simultánea para derivadas de orden superior a 1.

DEFINICION 3.2.5 *Dos pesos $w_0, w_1$ son* **conjuntamente admisibles** *sobre el intervalo $I$, si existen un par de sucesiones de números reales estrictamente crecientes $\{\alpha_n\}_{n\in J}$, $\{\beta_n\}_{n\in J}$ (donde $J$ es un subconjunto finito, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ ó $\mathbb{Z}^-$) con $\alpha_{n+1} < \beta_n$ para cualquier $n$ e $I := \cup_n[\alpha_n, \beta_n]$, y se verifican las siguientes condiciones:*

*(a) Para cada $n$ existe un intervalo $I_n \subset [\alpha_{n+1}, \beta_n]$ con $w_1 \in L^\infty(I_n)$ e $\int_{I_n} w_0 > 0$.*

*(b) Existe una partición $J_1, J_2$ de $J$, tal que*

*(b1) si $n \in J_1$, entonces $w_0 \in L^\infty([\alpha_n, \beta_n])$ y $1/w_1 \in L^1([\alpha_n, \beta_n])$,*

*(b2) si $n \in J_2$, entonces $S(w_1) \cap [\alpha_n, \beta_n] = \{a_n\}$ y $w_1$ es dominado en $a_n$.*

Ahora estableceremos el resultado principal de este capítulo. Observe que no consideramos ninguna hipótesis sobre las singularidades de $w_0$, que los pesos $w_0$ y $w_1$ apenas están relacionados entre sí y que el intervalo $I$ no requiere ser acotado.

TEOREMA 3.2.6 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha, \beta]$, los cuales son conjuntamente admisibles sobre un intervalo $I$. Entonces la clausura de $C^1(I) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es*

$$H := \left\{ \begin{array}{l} f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1) : f \in \overline{C(I) \cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}, \quad f' \in \overline{C(I) \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}, \\ \qquad\qquad \textit{para cada} \quad \{a_n\} = S(w_1) \cap [\alpha_n, \beta_n] \quad \textit{con} \quad n \in J_2 \quad \textit{tenemos} \\ \qquad\qquad \textit{si} \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a_n} |x - a_n| w_0(x) = 0, \quad \textit{entonces} \\ \qquad\qquad \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a_n} |f(x) - f(a_n)| w_0(x) = 0, \\ \qquad\qquad \textit{si} \quad 0 < \operatorname{ess\,lim}_{x\to a_n} |x - a_n)| w_0(x) < \infty, \quad \textit{entonces existe} \quad l(f, a_n) \quad \textit{y} \\ \qquad\qquad \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a_n} |f(x) - l(f, a_n)(x - a_n)| w_0(x) = 0, \\ \qquad\qquad \quad \textit{y si} \quad a_n \notin S_1(w_1), \quad \textit{entonces} \quad u_f(a_n) = l(f, a_n), \\ \qquad\qquad \textit{si} \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_n} |x - a_n| w_0(x) = \infty, \quad \textit{entonces} \\ \qquad\qquad \quad f \quad \textit{satisface la condición} \quad (3.4) \quad \textit{y} \quad u_f(a_n) = 0 \end{array} \right\}.$$

OBSERVACION 3.2.9 *Este teorema tiene un amplio rango de aplicación. Consideremos en particular el caso de los pesos Jacobi:* $w_0(x) = (1+x)^{s_1}(1-x)^{s_2}$, $w_1(x) = (1+x)^{t_1}(1-x)^{t_2}$, *en* $[-1,1]$. *El teorema 3.2.6 describe la clausura de* $C^1([-1,1]) \cap W^{1,\infty}([-1,1], w_0, w_1)$ *en* $W^{1,\infty}([-1,1], w_0, w_1)$ *para cualquier valor posible de los exponentes; si* $t_1 \le 0$ *(respectivamente* $t_2 \le 0$*), entonces* $-1$ *(respectivamente* $1$*) es un punto regular de* $w_1$*.*

*El teorema 3.2.6 también describe la clausura de las funciones de clase* $C^1$ *cuando los pesos tienen muchos puntos singulares, como* $w_0(x) = |x-a_1|^{s_1}|x-a_2|^{s_2}\cdots|x-a_m|^{s_m}$, $w_1(x) = |x-b_1|^{t_1}|x-b_2|^{t_2}\cdots|x-b_n|^{t_n}$*. Lo anterior también es cierto si cambiamos cada potencia* $|x-\alpha|^\beta$ *por cualquier función con una singularidad en* $\alpha$*, e incluso si consideramos pesos definidos en algún intervalo* $I$ *tal que* $S(w_1)$ *no tenga puntos de acumulación en el interior de* $I$*.*

**Demostración.**

Primero impondremos que si $w_0, w_1$ son pesos sobre algún intervalo $A$ (no necesariamente compacto), con $w_0 \in L^\infty(A)$ y $1/w_1 \in L^1(A)$, entonces

$$\overline{C^1(A) \cap W^{1,\infty}(A, w_0, w_1)}^{W^{1,\infty}(A,w_0,w_1)} = \left\{ f \in W^{1,\infty}(A, w_0, w_1) :\, f' \in \overline{C(A) \cap L^\infty(A, w_1)}^{L^\infty(A,w_1)} \right\}.$$

Asumiendo que esto es cierto de momento, el teorema 3.2.6 es una consecuencia directa de los teoremas 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 y 3.2.5.

Ahora, demostraremos la imposición anterior. Si $f' \in \overline{C(A) \cap L^\infty(A, w_1)}^{L^\infty(A,w_1)}$, consideramos una sucesión $\{g_n\} \subset C(A) \cap L^\infty(A, w_1)$ que converja a $f'$ en $L^\infty(A, w_1)$. Observe que $f \in W^{1,\infty}(A, w_0, w_1)$ y $1/w_1 \in L^1(A)$ implican que $f$ es una función absolutamente continua sobre $A$. Elijamos $a \in A$. Entonces las funciones $G_n(x) := f(a) + \int_a^x g_n$ son de clase $C^1$ y satisfacen

$$\begin{aligned} |f(x) - G_n(x)| &= \left| \int_a^x \left(f' - g_n\right) \right| \\ &\le \int_A |f' - g_n| \, \frac{w_1}{w_1} = \|f' - g_n\|_{L^\infty(A,w_1)} \int_A \frac{1}{w_1}. \end{aligned}$$

Entonces, $\|f - G_n\|_{L^\infty(A,w_0)} \le \|f' - g_n\|_{L^\infty(A,w_1)} \|w_0\|_{L^\infty(A)} \|1/w_1\|_{L^1(A)}$, que era lo que queríamos demostrar.

∎

### 3.2.2 Aproximación por funciones de clase $C^\infty$ y polinomios.

También estamos interesados en aproximación por funciones más regulares, tales como funciones de clase $C^\infty$ o polinomios. Con algunas condiciones adicionales podemos usar el teorema 3.2.1 para encontrar aproximantes de clase $C^\infty$.

TEOREMA 3.2.7 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha,\beta]$, tales que $S(w_1)=\{a\}$ y $w_0, w_1 \in L^\infty_{loc}([\alpha,\beta]\setminus\{a\})$. Si $a\in(\alpha,\beta)$, asumiremos que $w_1$ es dominado en $a$. Entonces cualquier función en*

$$H_6 := \left\{ \begin{array}{r} f\in W^{1,\infty}(w_0,w_1): f\in \overline{C(\mathbb{R})\cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}, \quad f'\in \overline{C(\mathbb{R})\cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}, \\ \operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)-f(a)|w_0(x)=0, \quad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a} u_f(a)(x-a)w_0(x)=0, \\ \operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f'(x)-u_f(a)|w_1(x)=0 \end{array} \right\},$$

*puede ser aproximada por funciones en $C^\infty(\mathbb{R})\cap W^{1,\infty}(w_0,w_1)$.*

OBSERVACION 3.2.10 *En la observación después del teorema 3.2.1 aparecen condiciones simples que garantizan las propiedades que definen $H_6$.*

**Demostración.**

Consideremos $f\in H_6$ y $\epsilon>0$. Por el teorema 3.2.1 existe $g_0\in C^1(\mathbb{R})$ con $\|f-g_0\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)}<\epsilon/2$, tal que $g_0$ es un polinomio de grado a lo sumo 1 en $[a-2\delta,a+2\delta]$ para algún $\delta>0$.

Elegimos una función par $\phi\in C_c^\infty([-1,1])$ con $\phi\ge 0$ e $\int\phi=1$. Para cada $t>0$, definimos $\phi_t(x):=t^{-1}\phi(x/t)$ y $g_t:=g_0*\phi_t$; estas funciones satisfacen $\phi_t\in C_c^\infty([-t,t])$, $\phi_t\ge 0$ y $\int\phi_t=1$.

Es bien conocido que $g_t\in C^\infty(\mathbb{R})$, y que $g_t$ (respectivamente $g_t'$) converge uniformemente en $[\alpha,\beta]$ a $g_0$ (respectivamente $g_0'$) cuando $t\to 0$.

Observe que si $h$ es un polinomio de grado a lo sumo 1, entonces $h*\phi_t=h$, ya que $1*\phi_t=\int\phi_t=1$ y $x*\phi_t=x$: es suficiente notar que $(x*\phi_t)(0)=\int y\phi_t(y)\,dy=0$ y $(x*\phi_t)'=1*\phi_t=1$. Consecuentemente, $g_t=g_0$ en $[a-\delta,a+\delta]$, para $0<t<\delta$, pues bajo estas hipótesis, la integral que define a $g_t$ sólo toma en cuenta los valores de $g_0$ en los cuales es un polinomio de grado a lo sumo 1.

Como $w_0,w_1\in L^\infty_{loc}([\alpha,\beta]\setminus\{a\})$, existe una constante $M$ con $w_0,w_1\le M$ en $[\alpha,\beta]\setminus(a-\delta,a+\delta)$. Por lo tanto

$$\|g_t-g_0\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)}\le \|g_t-g_0\|_{W^{1,\infty}([\alpha,\beta]\setminus(a-\delta,a+\delta),w_0,w_1)}\le M\|g_t-g_0\|_{W^{1,\infty}([\alpha,\beta]\setminus(a-\delta,a+\delta))}<\frac{\epsilon}{2},$$

si $t$ es suficientemente pequeño, pues $g_t$ y $g_t'$ convergen uniformemente en $[\alpha,\beta]$ a $g_0$ y $g_0'$ respectivamente.

Entonces $\|f-g_t\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)}<\epsilon$ si $t$ es suficientemente pequeño.

■

DEFINICION 3.2.6 *Diremos que un peso $w_1$ en $[\alpha,\beta]$ es* **balanceado en** *$a\in[\alpha,\beta]$, si es dominado en $a$ y se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

*(a)* $a\in S^+(w_1)\cap S^-(w_1)$, *es decir,* $\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a^+} w_1(x)=\operatorname{ess\,lim\,inf}_{x\to a^-} w_1(x)=0$,

*(b)* $a \in S^{+}(w_1)$ *y* $w_1 \in L^{\infty}([a-\epsilon, a])$*, para algún* $\epsilon > 0$*,*

*(c)* $a \in S^{-}(w_1)$ *y* $w_1 \in L^{\infty}([a, a+\epsilon])$*, para algún* $\epsilon > 0$*,*

*(d)* $a = \alpha$ *o* $a = \beta$*.*

*Diremos que* $w_1$ *es* **fuertemente balanceado en** $a$*, si es balanceado en* $a$ *y* $a \in (\alpha, \beta)$*.*

Del teorema 3.2.7 y la tercera observación del teorema 2.2.1, obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 3.2.2 *Consideremos dos pesos* $w_0, w_1$ *en* $[\alpha, \beta]$ *tales que* $S(w_1) = \{a\}$*,* $w_1$ *es balanceado en* $a$*, y* $w_0, w_1 \in L^{\infty}_{loc}([\alpha, \beta] \setminus \{a\})$*. Entonces toda función de* $H_1$ *puede ser aproximada por funciones en* $C^{\infty}(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ *con la norma* $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$*.*

Ahora introduciremos una condición que juega el mismo papel que la condición (3.4) en la aproximación por funciones de clase $C^{\infty}$:

Dada una función $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\phi_n \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ tal que

$$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \to a} |f(x) - \phi_n(x)| w_0(x) < \frac{1}{n}. \tag{3.5}$$

OBSERVACION 3.2.11 *Veremos en las proposiciones 3.2.3 y 3.2.4 que la condición (3.5) puede ser sustituida en muchos casos por condiciones más simples que sólo involucran a* $f$ *(sin hacer referencia a* $\phi_n$*).*

Asumimos que $w_0, w_1 \in L^{\infty}_{loc}([\alpha, \beta] \setminus \{a\})$, $S(w_1) = \{a\}$, y $w_1$ es balanceado en $a \in [\alpha, \beta]$. Del argumento en la prueba del teorema 3.2.2 (usando el corolario 3.2.2) se obtiene que si $\operatorname{ess\,lim}_{x \to a} |x - a| w_0(x) = 0$, entonces la clausura de $C^{\infty}(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es $H_2 = H_3$. De manera similar, si $0 < \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \to a} |x - a| w_0(x) < \infty$, entonces la clausura de $C^{\infty}(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es $H_4$. También tenemos que, si $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x \to a} |x - a| w_0(x) = \infty$, entonces la clausura de $C^{\infty}(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es $H_5$, siempre que cambiemos (3.4) por (3.5).

DEFINICION 3.2.7 *Dos pesos* $w_0, w_1$ *son* **fuertemente conjuntamente admisibles** *sobre el intervalo* $I$*, si verifican las condiciones en la definición de conjuntamente admisible (definición 3.2.5) reemplazando (b2) por*

*(b2') si* $n \in J_2$*, entonces* $S(w_1) \cap [\alpha_n, \beta_n] = \{a_n\}$*,* $w_0, w_1 \in L^{\infty}_{loc}([\alpha_n, \beta_n] \setminus \{a_n\})$*, y* $w_1$ *es fuertemente balanceado en* $a_n$*.*

TEOREMA 3.2.8 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ fuertemente conjuntamente admisibles sobre el intervalo $I$. Entonces la clausura de $C^\infty(I) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es*

$$H_7 := \left\{ \begin{array}{l} f \in W^{1,\infty}(w_0,w_1) : f \in \overline{C(I)\cap L^\infty(w_0)}^{L^\infty(w_0)}, \quad f' \in \overline{C(I)\cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)}, \\ \qquad f' \in \overline{C^\infty(I_n)\cap L^\infty(I_n,w_1)}^{L^\infty(I_n,w_1)}, \quad \textit{para cualquier} \quad n \in J_1, \\ \qquad \textit{para cada} \quad \{a_n\} = S(w_1)\cap[\alpha_n,\beta_n], \quad \textit{con} \quad n \in J_2, \quad \textit{tenemos que} \\ \qquad \textit{si } \operatorname{ess\,lim}_{x\to a_n}|x-a_n|w_0(x)=0, \ \operatorname{ess\,lim}_{x\to a_n}|f(x)-f(a_n)|w_0(x)=0, \\ \qquad \textit{si } 0<\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_n}|x-a_n|w_0(x)<\infty, \ \exists\, l(f,a_n) \ \textit{y} \\ \qquad \operatorname{ess\,lim}_{x\to a_n}|f(x)-l(f,a_n)(x-a_n)|w_0(x)=0, \\ \qquad \textit{y si} \quad a_n \notin S_1(w_1), \quad \textit{entonces} \quad u_f(a_n)=l(f,a_n), \\ \qquad \textit{si } \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_n}|x-a|w_0(x)=\infty, \ f \ \textit{satisface} \ (3.5) \ \textit{y} \ u_f(a_n)=0 \end{array} \right\}.$$

**Demostración.**

Sólo necesitamos seguir el argumento de la demostración del teorema 3.2.6, reemplazando las funciones en $C$ o en $C^1$ por funciones en $C^\infty$. Esta es la razón por la cual imponemos $f' \in \overline{C^\infty(I_n)\cap L^\infty(I_n,w_1)}^{L^\infty(I_n,w_1)}$ para cualquier $n \in J_1$.

■

En muchas situaciones podemos simplificar la condición (3.5).

OBSERVACION 3.2.12 *El teorema 2.2.3 y las proposiciones 2.2.2 y 2.2.3 caracterizan $\overline{C^\infty\cap L^\infty(w)}^{L^\infty(w)}$ para una clase bastante general de pesos.*

Aunque el enunciado de la siguiente proposición puede parecer algo artificial, es exactamente lo que necesitamos para probar la proposición 3.2.4, que ofrece condiciones sencillas equivalentes a (3.5).

PROPOSICION 3.2.3 *Consideremos un peso $w_0$ en $[\alpha,\beta]$ y un punto aislado $a$ de $S(w_0)$, satisfaciendo $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|w_0(x)=\infty$. Asumamos que para alguna función $s$ que verifica $0<m\le|s(x)|\le M$, existe $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}\phi(x)s(x)w_0(x)$ para cualquier $\phi\in C^\infty(\mathbb{R})\cap W^{1,\infty}(w_0,w_1)$. Denotemos por $D(w_0,a)$ el conjunto de valores que toman estos límites cuando consideramos cualquier $\phi\in C^\infty(\mathbb{R})\cap W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ ($D(w_0,a)$ es $\{0\}$ ó $\mathbb{R}$). Entonces (3.5) es equivalente a lo siguiente: para cualquier $f\in W^{1,\infty}(w_0,w_1)$ el límite $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}f(x)s(x)w_0(x)$ existe y pertenece a $D(w_0,a)$.*

Una elección natural para $s$ es $s(x):=1$ ó $s(x):=\operatorname{sgn}(x-a)$ (ver la prueba de la proposición 3.2.4).

**Demostración.**

Fijemos $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$. Si el límite $d := \operatorname{ess\,lim}_{x\to a} f(x)s(x)w_0(x)$ existe y pertenece a $D(w_0, a)$, tenemos (3.5) con $\phi_n := \phi$, donde $\phi$ es una función con $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}\phi(x)s(x)w_0(x) = d$, ya que $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)-\phi(x)|w_0(x) \le m^{-1}\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)s(x)w_0(x) - \phi(x)s(x)w_0(x)| = 0$. Si $d \notin D(w_0, a)$, entonces $D(w_0, a)$ es $\{0\}$, y consecuentemente $d \neq 0$; por tanto, $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|f(x) - \phi(x)|w_0(x) \ge |d|/M > 0$, para cualquier $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$. Si el límite $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a} f(x)s(x)w_0(x)$ no existe, por un argumento similar podemos deducir que existe una constante $c = c(f, M) > 0$ tal que
$\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|f(x) - \phi(x)|w_0(x) \ge c > 0$, para cualquier $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$.

■

DEFINICION 3.2.8 *Diremos que un peso $w$ tiene* **crecimiento potencial** *en $a$, si* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x - a|^m w_0(x) < \infty$, *para algún número natural $m$. Si $w$ tiene* **crecimiento potencial** *en $a$, diremos que el* **grado** *de $w$ en $a$ es $m$, si $m$ es el menor número natural para el cual* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x - a|^m w_0(x) < \infty$.

PROPOSICION 3.2.4 *Consideremos $a \in [\alpha, \beta]$ y un peso $w_0$ en $[\alpha, \beta]$ con* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x - a|w_0(x) = \infty$ *y crecimiento potencial en $a$. Denotemos por $m$ el grado de $w$ en $a$.*

*(1) Si* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|x - a|^m w_0(x) = 0$, *entonces (3.5) es equivalente a* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)|w_0(x) = 0$.

*(2) Si* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|^m w_0(x) > 0$ *y* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|^{m-1} w_1(x) < \infty$, *entonces podemos sustituir (3.5) por la siguiente condición: $l_m(f, a) :=$* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a,|x-a|^m w_0(x)\ge\eta} f(x)/(x - a)^m$ *existe para $\eta$ suficientemente pequeño, y* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x) - l_m(f, a)(x - a)^m|w_0(x) = 0$.

*(3) Si $w_0(x)$ es comparable con $|x - a|^{-m}$, para algún entero positivo $m$, entonces (3.5) es equivalente a la existencia de* $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a} f(x)/(x - a)^m$.

**Demostración.**

(1) Fijemos $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ con $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x)|w_0(x) = 0$; entonces (3.5) se verifica con $\phi_n := 0$.

Para ver la otra implicación, fijemos $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ satisfaciendo (3.5). Consideremos $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$. La condición $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|^{m-1}w_0(x) = \infty$ implica que $\phi(a) = \phi'(a) = \cdots = \phi^{(m-1)}(a) = 0$; entonces $\phi(x) \approx \phi^{(m)}(a)/m!(x-a)^m$, y de la condición $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|x-a|^m w_0(x) = 0$ obtenemos $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}\phi(x)w_0(x) = 0$ para cualquier $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(w_0, w_1)$. Por tanto, $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|f(x)|w_0(x) = \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|f(x) - \phi_n(x)|w_0(x) < 1/n$ para cualquier $n$.

(2) Fijemos $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ satisfaciendo (3.5). Un argumento similar al del inciso (a) de la proposición 3.2.1 implica que existe $l_m(f,a)$ para $0 < \eta < \operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a}|x-a|^m w_0(x)$, y que $\phi_n^{(m)}(a)/m! \longrightarrow l_m(f,a)$ cuando $n \to \infty$. Para finalizar la prueba de esta implicación, es suficiente seguir el argumento en la demostración de la primera parte del teorema 3.2.4, tomando la función $l_m(f,a)(x-a)^m$ en vez de $l(f,a)(x-a)$.

Trataremos ahora con la otra implicación. Consideremos $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ tal que $l_m(f,a)$ existe para $\eta$ suficientemente pequeño, y $\operatorname{ess\,lim}_{x\to a}|f(x) - l_m(f,a)(x-a)^m|w_0(x) = 0$. Para verificar (3.5), es suficiente tomar como $\phi_n = \phi$ la función $l_m(f,a)(x-a)^m$ multiplicada por una función meseta apropiada ($\phi$ pertenece a $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ por hipótesis).

(3) Es suficiente aplicar la proposición 3.2.3 con $s(x) := \operatorname{sgn}(x-a)^m$.

■

Finalizaremos este capítulo con un resultado de aproximación polinomial. Este teorema puede ser generalizado, como veremos en el próximo capítulo; sin embargo, resulta conveniente dar aquí la demostración, ya que en este caso menos sofisticado pueden apreciarse con mayor claridad las ideas que subyacen en el método de prueba. Además, la demostración hace explícita la construcción de los aproximantes para $m \le 4$.

Teorema 3.2.9 *Consideremos dos pesos $w_0, w_1$ en $[\alpha,\beta]$, tales que se verifica $\int_\alpha^\beta 1/w_1 < \infty$, $w_0 \in L^\infty_{loc}([\alpha,\beta] \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\})$ y $w_0(x)\left|\int_{\alpha_j}^x 1/w_1\right| \le c$ para casi todo $x$ en algún entorno abierto de $a_j$ para cualquier $1 \le j \le m$. Si existe algún polinomio no trivial en $L^\infty(w_1)$, entonces la clausura del espacio de los polinomios en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ es*

$$H_8 := \left\{ f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1) : \quad f' \in \overline{\mathbb{P} \cap L^\infty(w_1)}^{L^\infty(w_1)} \right\},$$

*donde $\mathbb{P}$ denota al conjunto de los polinomios.*

Observacion 3.2.13 *La hipótesis* $w_0 \in L^\infty_{loc}([\alpha,\beta] \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\})$ *no supone ninguna restricción: Si tenemos que* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_0(x) = \infty$ *para una cantidad infinita de* $a \in \mathbb{R}$*, entonces* $0$ *es el único polinomio en* $L^\infty(w_0)$*.*

**Demostración.**

Si $f$ pertenece a la clausura del espacio de los polinomios en $W^{1,\infty}(w_0, w_1)$, es inmediato que $f \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ y $f'$ pertenece a la clausura del espacio de los polinomios en $L^\infty(w_1)$. Entonces $f \in H_8$.

Consideremos ahora $f \in H_8$ y una sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$ la cual converge a $f'$ en norma $L^\infty(w_1)$. Asumimos que $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_j} w_0(x) = \infty$ para todo $1 \le j \le m$, ya que $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_j} w_0(x) < \infty$ para algún $j$, es suficiente remover de la lista $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ a este punto $a_j$.

Primero, notemos que cualquier función $g \in W^{1,\infty}(w_0, w_1)$ satisface $g(a_1) = \cdots = g(a_m) = 0$: la condición $\int_\alpha^\beta 1/w_1 < \infty$ implica que $g \in AC([\alpha,\beta])$, y $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_j} w_0(x) = \infty$ y $g \in L^\infty(w_0)$ implican que $g(a_j) = 0$. Ya que $g \in AC([\alpha,\beta])$, también tenemos que $\int_{a_1}^{a_2} g' = \cdots = \int_{a_{m-1}}^{a_m} g' = 0$.

Usando $\{p_n\}_n$ construiremos una sucesión de polinomios $\{q_n\}_n$ convergente a $f'$ en norma $L^\infty(w_1)$, con la propiedad adicional de que $\int_{a_1}^{a_2} q_n = \cdots = \int_{a_{m-1}}^{a_m} q_n = 0$.

Consecuentemente, nos gustaría encontrar constantes $c_1^n, c_2^n, \dots, c_{m-1}^n$, y polinomios $h_2, \dots, h_{m-1}$ (no idénticamente nulos) tales que $q_n := p_n - c_1^n p_{w_1}^2 - c_2^n p_{w_1}^2 h_2 - \cdots - c_{m-1}^n p_{w_1}^2 h_{m-1} \in \mathbb{P} \cap L^\infty(w_1)$ satisfaga

$$0 = \int_{a_j}^{a_{j+1}} q_n = \int_{a_j}^{a_{j+1}} p_n - c_1^n \int_{a_j}^{a_{j+1}} p_{w_1}^2 - c_2^n \int_{a_j}^{a_{j+1}} p_{w_1}^2 h_2 - \cdots - c_{m-1}^n \int_{a_j}^{a_{j+1}} p_{w_1}^2 h_{m-1}, \tag{3.6}$$

para $1 \le j < m$, donde $p_{w_1}$ es el polinomio minimal para $w_1$ (ver definición 2.2.12); $p_{w_1}$ es no trivial por hipótesis. Probaremos ahora por inducción sobre $m$ que podemos encontrar polinomios tales que el determinante $\Delta_m$ de la matriz de coeficientes de este sistema lineal sobre $c_j^n$ sea no nulo. El caso $m = 2$ es inmediato, ya que $\int_{a_1}^{a_2} p_{w_1}^2 \ne 0$. Si $m = 3$, sólo necesitamos mostrar que existe un polinomio $h_2$ tal que

$$\Delta_3 \;:=\; \begin{vmatrix} \int_{a_1}^{a_2} p_{w_1}^2 & \int_{a_1}^{a_2} p_{w_1}^2 h_2 \\ \int_{a_2}^{a_3} p_{w_1}^2 & \int_{a_2}^{a_3} p_{w_1}^2 h_2 \end{vmatrix} \ne 0\,,$$

es decir, $\Delta_3 = \int_{a_1}^{a_2} p_{w_1}^2 \int_{a_2}^{a_3} p_{w_1}^2 h_2 - \int_{a_2}^{a_3} p_{w_1}^2 \int_{a_1}^{a_2} p_{w_1}^2 h_2 \ne 0$. Definimos

$$u_3(x) \;:=\; \begin{cases} -p_{w_1}^2(x) \int_{a_2}^{a_3} p_{w_1}^2\,, & \text{si } \; x \in [a_1, a_2]\,, \\ p_{w_1}^2(x) \int_{a_1}^{a_2} p_{w_1}^2\,, & \text{si } \; x \in (a_2, a_3]\,, \end{cases}$$

y $\Lambda_3(F) := \int_{a_1}^{a_3} F u_3$ para cualquier $F \in L^2([a_1,a_3])$. Note que $\Lambda_3$ no es idéticamente cero en $L^2([a_1,a_3])$. Como los polinomios son densos en $L^2([a_1,a_3])$, existe un polinomio $h_2$ con $\Delta_3 = \Lambda_3(h_2) \neq 0$.

Asumamos que $\Delta_{m-1} \neq 0$, para algunos polinomios $h_2,\dots,h_{m-2}$. Del desarrollo de Laplace de $\Delta_m$ por la última columna obtenemos que $\Delta_m = (-1)^m A_1 \int_{a_1}^{a_2} p_{w_1}^2 h_{m-1} + \cdots + A_{m-1}\int_{a_{m-1}}^{a_m} p_{w_1}^2 h_{m-1}$, con $A_{m-1} = \Delta_{m-1} \neq 0$. Entonces la función

$$u_m(x) \;:=\; \begin{cases} (-1)^m A_1 p_{w_1}^2(x)\,, & \text{si} \;\; x \in [a_1,a_2]\,, \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ A_{m-1} p_{w_1}^2(x)\,, & \text{si} \;\; x \in (a_{m-1},a_m]\,, \end{cases}$$

no es idénticamente cero. Definimos el funcional no trivial $\Lambda_m(F) := \int_{a_1}^{a_m} F u_m$ para cualquier $F \in L^2([a_1,a_m])$. Como los polinomios son densos en $L^2([a_1,a_m])$, existe un polinomio $h_{m-1}$ con $\Delta_m = \Lambda_m(h_{m-1}) \neq 0$.

Por lo tanto, podemos encontrar constantes $c_1^n, c_2^n, \dots, c_{m-1}^n$, tales que $q_n$ verifique (3.6).

Observe que cada $c_j^n$ es una combinación lineal (con constantes que no dependen de $n$, pues las funciones $p_{w_1}, h_2, \dots, h_{m-1}$ no dependen de $n$) de $\int_{a_1}^{a_2} p_n, \dots, \int_{a_{m-1}}^{a_m} p_n$ (usando la regla de Cramer). Como $\{p_n\}_n$ converge a $f'$ en norma $L^\infty(w_1)$ y $\int_\alpha^\beta 1/w_1 < \infty$, también converge a $f'$ en norma $L^1([\alpha,\beta])$:

$$\int_\alpha^\beta |f' - p_n| = \int_\alpha^\beta |f' - p_n| \frac{w_1}{w_1} \leq \|f' - p_n\|_{L^\infty(w_1)} \int_\alpha^\beta \frac{1}{w_1}\,.$$

Este hecho e $\int_{a_1}^{a_2} f' = \cdots = \int_{a_{m-1}}^{a_m} f' = 0$, implican $\int_{a_1}^{a_2} p_n, \dots, \int_{a_{m-1}}^{a_m} p_n$ (y consecuentemente $c_j^n$) tiende 0 cuando $n \to \infty$. Esto implica que $\{q_n\}_n$ converge a $f'$ en norma $L^\infty(w_1)$.

Consideremos ahora los polinomios $Q_n(x) := \int_{a_1}^x q_n$. Note que $Q_n(x) = \int_{a_j}^x q_n$ para todo $1 \leq j \leq m$, pues $\int_{a_j}^{a_{j+1}} q_n = 0$ para todo $1 \leq j < m$; por tanto, $Q_n(a_j) = 0$ para todo $1 \leq j \leq m$. Elegimos una partición de $[\alpha,\beta]$ por $m$ intervalos compactos $I_1,\dots,I_m$, tales que $a_j$ pertenezca al interior de $I_j$ para cada $1 \leq j \leq m$.

Las hipótesis $\int_\alpha^\beta 1/w_1 < \infty$, $w_0 \in L^\infty_{loc}([\alpha,\beta] \setminus \{a_1,a_2,\dots,a_m\})$, y $w_0(x)\left|\int_{a_j}^x 1/w_1\right| \leq c$ para casi todo $x$ en algún entorno abierto de $a_j$ para todo $1 \leq j \leq m$, implican $w_0(x)\left|\int_{a_j}^x 1/w_1\right| \leq c_1$ en c.t.p. $x \in I_j$ para todo $1 \leq j \leq m$. Entonces del lema 3.2.1 y su observación se tiene que

$$\|h\|_{L^\infty(I_j,w_0)} \leq c_2 \|h'\|_{L^\infty(I_j,w_1)}$$

para cualquier $h \in W^{1,\infty}(I_j,w_0,w_1)$ (ya que $h(a_j) = 0$ para todo $1 \leq j \leq m$), luego

$$\|h\|_{W^{1,\infty}(w_0,w_1)} \leq (c_2+1)\|h'\|_{L^\infty(w_1)}$$

para cualquier $h \in W^{1,\infty}(w_0,w_1)$. Por tanto, los polinomios $\{Q_n\}_n$ convergen a $f$ en norma $W^{1,\infty}(w_0,w_1)$, pues $\{q_n\}_n$ converge a $f'$ en norma $L^\infty(w_1)$. ■

Observacion 3.2.14 *Para algunos casos particulares de* $m$ *es posible dar una expresión explícita de* $h_j$. *Si* $m = 3$, *podemos tomar* $h_2(x) = x - a_2$. *Si* $m = 4$, *podemos tomar* $h_2(x) = (x - a_2)^2(x - a_3)$ *y* $h_3(x) = (x - a_2)(x - a_3)^2$.

# Capítulo 4

# El teorema de Weierstrass con derivadas de orden $k$.

## 4.1 Preliminares.

Este capítulo cierra nuestro estudio del problema de aproximación por polinomios, funciones de clase $C^k$ o funciones de clase $C^\infty$ en espacios de Sobolev con peso vectorial. Dado un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ abordaremos el problema de aproximación simutánea con respecto a la norma Sobolev definida por

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(w)} := \sum_{j=0}^{k} \left\| f^{(j)} \right\|_{L^\infty(w_j)} . \tag{4.1}$$

Note que $W^{0,\infty}(w) = L^\infty(w)$.

De (4.1) se deduce que nuestros resultados de aproximación en $W^{k,\infty}(w)$ deben estar basados en resultados de aproximación en $L^\infty(w_j)$, para $0 \le j \le k$.

Los resultados fundamentales de este capítulo garantizan que una función $f$ pertenece a la clausura del espacio de los polinomios (o funciones suaves, respectivamente) con respecto a la norma (4.1), si y sólo si, $f^{(j)}$ pertenece a la clausura de las funciones suaves en norma $L^\infty(w_j)$, para todo $0 \le j \le k$. En la sección 4.2 aparecen las afirmaciones precisas de cada teorema.

También debemos mencionar que nuestros resultados son más valiosos gracias al teorema 4.2.8 (ver sección 4.2.3), el cual permite tratar con pesos que pueden obtenerse “pegando” otros pesos más simples.

El análogo del teorema de Weierstrass con normas $W^{k,p}(\mu)$ (con $1 \le p < \infty$ y $\mu$ una medida vectorial) puede ser encontrado en [34] y [37] sobre la recta real, y en [3] y [38] sobre curvas en el plano complejo.

Cabe observar que todos los teoremas que aquí presentaremos pueden ser aplicados a funciones $f$ a valores complejos, descomponiendo $f$ en sus partes real e imaginaria.

En la sección 4.2 se encuentran los resultados de aproximación en espacios de Sobolev con pesos vectoriales de más de dos componentes.

En 4.2.1 nos dedicamos a estudiar el problema de aproximación polinomial extendiendo los resultados del teorema 3.2.9 del capítulo precedente.

El problema de aproximación por funciones suves es tratado principalmente en la sección 4.2.2 (ver teoremas 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 y 4.2.5).

Finalmente, en la sección 4.2.3 mostramos algunos resultados complementarios, que aunque requieren más profundidad, nos permiten entregar otros dos resultados de aproximación en el caso de funciones suaves (ver teoremas 4.2.6 y 4.2.7).

Todos los resultados presentados en este capítulo aparecen en [32].

## 4.2 Aproximación en $W^{k,\infty}(w_0, \ldots, w_k)$.

Antes de ocuparnos de dar la definición correcta de lo que será el espacio de Sobolev con peso vectorial $W^{k,\infty}(w_0, \ldots, w_k)$ para $k \geq 1$, extenderemos la definición 2.2.3 al caso de funciones vectoriales como sigue

DEFINICION 4.2.1 *Dado un conjunto medible $A$, diremos que dos funciones vectoriales $u$ y $v$ son comparables si cada una de sus componentes es comparable.*

*También utilizaremos el símbolo $u \asymp v$ para denotar a un par de funciones vectoriales comparables sobre $A$.*

Como las medidas y las normas son funciones sobre conjuntos medibles y subconjuntos de espacios vectoriales, respectivamente, podemos hablar de medidas comparables y de normas comparables. Luego $W^{k,\infty}(w_0, \ldots, w_k)$ y $W^{k,\infty}(v_0, \ldots, v_k)$ coinciden y tienen normas comparables siempre que $(w_0, \ldots, w_k)$ y $(v_0, \ldots, v_k)$ sean comparables.

Dado un peso vectorial $w = (w_0, \ldots, w_k)$ se puede pensar que la definición natural de espacio de Sobolev con peso es "funciones $f$ cuyas $j$-ésimas derivadas débiles satisfagan $\|f^{(j)}\|_{L^\infty(w_j)} < \infty$ para $0 \leq j \leq k$"; aunque de la teoría clásica de espacios $L^p$ sabemos que

$$L^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega),$$

con la definición anterior no podemos garantizar que

$$L^{\infty}(\Omega, w_j) \subseteq L^1_{loc}(\Omega), \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq k, \tag{4.2}$$

(ver por ejemplo, [21] ó [33]).

Nos gustaría conseguir -al igual que en el capítulo anterior- alguna condición sobre los pesos componentes $w_j$ para obtener la inclusión (4.2) y así tener que las derivadas distribucionales de $f$ son localmente integrables (lo cual es imprescindible para la definición de derivada distribucional). Este hecho es el que garantiza que el espacio de Sobolev con pesos es un espacio de Banach (ver por ejemplo, [21] ó [33]).

Con estas ideas en mente, dado $w = (w_0, \dots, w_k)$ un peso vectorial, denotaremos por $\Omega_j$, para $0 < j \leq k$, al mayor conjunto (el cual es una unión de intervalos) tal que $1/w_j \in L^1_{loc}(\Omega_j)$. Siempre requeriremos que $\operatorname{supp} w_j = \overline{\Omega}_j$, para $0 < j \leq k$. Definimos **el espacio de Sobolev** $W^{k,\infty}(w)$, como el conjunto de todas las (clases de equivalencia de) funciones $f$ definidas en $\operatorname{supp} w_0 \cup \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$, tales que su $(j-1)$-ésima derivada débil $f^{(j-1)}$ sea localmente absolutamente continua en $\Omega_j$, es decir, $f^{(j-1)} \in AC_{loc}(\Omega_j)$, para $0 < j \leq k$, y $f^{(j)}$ pertenezca a $L^{\infty}(w_j)$, para $0 \leq j \leq k$.

Con esta definición, el espacio de Sobolev con peso $W^{k,\infty}(w)$ es un espacio de Banach (ver [21], Sección 3). En general, esto no es verdad sin nuestras hipótesis (vea algunos ejemplos en [21]).

Al igual que en el capítulo anterior utilizaremos el lema 3.2.1 para controlar la norma Sobolev de una función, usando sus derivadas distribucionales.

### 4.2.1 Aproximación por polinomios.

Comenzaremos con algunos lemas técnicos previos.

LEMA 4.2.1 *Sean $[\alpha, \beta]$ un intervalo, $s$ un entero positivo, $p_0$ una función en $L^{\infty}([\alpha, \beta])$ con $p_0 \neq 0$ en c.t.p. de $[\alpha, \beta]$, y $\{g_i\}_{i=1}^s$ un subconjunto de funciones de $L^2([\alpha, \beta]) \setminus \{0\}$, con la propiedad de que para cada $1 < i \leq s$, la función $g_i$ es linealmente independiente de $\{g_1, \dots, g_{i-1}\}$.*

*Sean $c^1, \dots, c^s$, números reales satisfaciendo el sistema de ecuaciones lineales en $\{c^m\}_{m=1}^s$*

$$\sum_{m=1}^{s} c^m \int_{\alpha}^{\beta} p_0 g_i h_m = 0, \quad \forall\ 1 \leq i \leq s, \tag{4.3}$$

*Entonces existen polinomios $h_1, \dots, h_s$, tales que el determinante $\Delta_s$ de la matriz de coeficientes del sistema lineal (4.3) sobre $c^1, \dots, c^s$ es no nulo.*

OBSERVACION 4.2.1

1. *Dado que $\Delta_s \neq 0$, ninguno de los polinomios $h_1, \ldots, h_s$ puede ser idénticamente nulo.*

2. *Al hablar de independencia lineal consideramos las funciones como clases de equivalencia en $L^2$, es decir, una función es linealmente dependiente de otras si es igual a una combinación lineal de esas otras en casi todo punto.*

**Demostración.**

Demostraremos el lema por inducción. Veremos que para cada $1 \leq m < s$, existe un polinomio $h_{m+1}$ tal que, junto con los polinomios $h_1, \ldots, h_m$ elegidos en los pasos anteriores, el menor $\Delta_{m+1}$ formado por las $m+1$ primeras filas y columnas de la matriz de coeficientes de (4.3), es no nulo.

Si $m = 1$, como $g_1 \in L^2([\alpha, \beta]) \setminus \{0\}$, y $p_0 \neq 0$ en c.t.p. de $[\alpha, \beta]$, el funcional $\Lambda_1(F) := \int_\alpha^\beta F\, p_0 g_1$ no es idénticamente nulo en $L^2([\alpha, \beta])$ ($\Lambda_1$ está bien definido en $L^2([\alpha, \beta])$ ya que $p_0 \in L^\infty([\alpha, \beta])$ y $g_1 \in L^2([\alpha, \beta])$); por tanto, como los polinomios son densos en $L^2([\alpha, \beta])$, existe un polinomio $h_1$ con $\Lambda_1(h_1) = \int_\alpha^\beta p_0 g_1 h_1 \neq 0$.

Si $m = 2$, necesitamos mostrar que existe un polinomio $h_2$ tal que

$$\Delta_2 := \begin{vmatrix} \int_\alpha^\beta p_0 g_1 h_1 & \int_\alpha^\beta p_0 g_1 h_2 \\ \int_\alpha^\beta p_0 g_2 h_1 & \int_\alpha^\beta p_0 g_2 h_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

es decir,

$$\Delta_2 = A_{12} \int_\alpha^\beta p_0 g_1 h_2 + A_{22} \int_\alpha^\beta p_0 g_2 h_2 \neq 0,$$

donde $A_{12} = -\int_\alpha^\beta p_0 g_2 h_1$ y $A_{22} = \int_\alpha^\beta p_0 g_1 h_1 \neq 0$.

Definamos la función

$$u_2(x) := A_{12} p_0(x) g_1(x) + A_{22} p_0(x) g_2(x), \qquad \forall x \in [\alpha, \beta],$$

que es distinta de 0 en un subconjunto de medida positiva de $[\alpha, \beta]$, porque $A_{22} \neq 0$, $g_2$ es linealmente independiente de $g_1$, y $p_0 \neq 0$ en c.t.p. de $[\alpha, \beta]$. Podemos definir también

$$\Lambda_2(F) := \int_\alpha^\beta F u_2, \qquad \forall\ F \in L^2([\alpha, \beta]),$$

ya que $p_0 \in L^\infty([\alpha, \beta])$ y $g_i \in L^2([\alpha, \beta])$ implican $u_2 \in L^2([\alpha, \beta])$. Como $\Lambda_2$ no es idénticamente nulo en $L^2([\alpha, \beta])$ y los polinomios son densos en $L^2([\alpha, \beta])$, existe un polinomio $h_2$ con $\Delta_2 = \Lambda_2(h_2) \neq 0$.

Supongamos que el resultado es cierto para $m$ y demostrémoslo para $m+1$. En esta situación se tiene que

$$\Delta_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} A_{i,m+1} \int_\alpha^\beta p_0 g_i h_{m+1},$$

donde $A_{i,m+1}$ $(1 \le i \le m+1)$ son los menores correspondientes al desarrollo de $\Delta_{m+1}$ por la última columna (con su signo apropiado). Destaquemos que $A_{m+1,m+1} \neq 0$, por hipótesis de inducción.

Ahora, procederemos a definir la función $u_{m+1}$ en el intervalo $[\alpha,\beta]$ y el funcional lineal $\Lambda_{m+1}$ sobre $L^2([\alpha,\beta])$ de manera análoga a los casos precedentes:

$$u_{m+1}(x) := \sum_{i=1}^{m+1} A_{i,m+1} p_0(x) g_i(x)$$

y

$$\Lambda_{m+1}(F) := \int_\alpha^\beta F u_{m+1}, \qquad \forall\ F \in L^2([\alpha,\beta]).$$

La función $u_{m+1}$ es distinta de 0 en un subconjunto de medida positiva de $[\alpha,\beta]$, pues $A_{m+1,m+1} \neq 0$, $g_{m+1}$ es linealmente independiente de $\{g_1,\dots,g_m\}$, y $p_0 \neq 0$ en c.t.p. de $[\alpha,\beta]$; entonces $\Lambda_{m+1}$ no es idénticamente nulo en $L^2([\alpha,\beta])$ y consecuentemente existe un polinomio $h_{m+1}$ tal que $\Delta_{m+1} = \Lambda_{m+1}(h_{m+1}) \neq 0$.

■

Lema 4.2.2 *Sean $a, b, u_1, \dots, u_r \in [\alpha,\beta]$ y $f \in L^1([\alpha,\beta])$. Se tiene que*

$$\int_a^b \int_{u_1}^{x_1} \cdots \int_{u_r}^{x_r} f(x_{r+1}) \quad dx_{r+1} \cdots dx_2\, dx_1 = \int_a^b f(x)\, \frac{(b-x)^r}{r!}\, dx$$
$$+ \sum_h k_h^{r-1}(r) \int_{J_h^{r-1}(r)} f(x)\, x^{r-1}\, dx + \cdots + \sum_h k_h^0(r) \int_{J_h^0(r)} f(x)\, dx\,,$$

*donde todas las sumas son finitas, $k_h^j(r)$ son números reales, y $J_h^j(r)$ son subintervalos de $[\alpha,\beta]$, cuyos extremos pertencen al conjunto $\{a, u_1, \dots, u_r\}$.*

**Demostración.**

Probaremos el resultado por inducción en $r$. Veamos que es cierto para $r = 1$. Cambiando el orden de integración se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{u_1}^{x_1} f(x_2)\, dx_2\, dx_1 &= \int_a^b \int_a^{x_1} f(x_2)\, dx_2\, dx_1 + \int_a^b \int_{u_1}^a f(x_2)\, dx_2\, dx_1 \\
&= \int_a^b f(x_2) \int_{x_2}^b dx_1\, dx_2 + (b-a) \int_{u_1}^a f(x)\, dx \\
&= \int_a^b f(x)(b-x)\, dx + (b-a) \int_{u_1}^a f(x)\, dx\,.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que el lema es cierto para $r$ y probémoslo para $r+1$. Aplicando la hipótesis de inducción a la función $\int_{u_{r+1}}^{x_{r+1}} f(x_{r+2})\, dx_{r+2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{u_1}^{x_1} \cdots \int_{u_r}^{x_r} \int_{u_{r+1}}^{x_{r+1}} f(x_{r+1}) \quad & dx_{r+2}\, dx_{r+1} \cdots dx_2\, dx_1 \\
= & \int_a^b \int_{u_{r+1}}^{x_{r+1}} f(x_{r+2})\, dx_{r+2} \, \frac{(b-x_{r+1})^r}{r!}\, dx_{r+1} \\
+ & \sum_h k_h^{r-1}(r) \int_{J_h^{r-1}(r)} \int_{u_{r+1}}^{x_{r+1}} f(x_{r+2})\, dx_{r+2}\, x_{r+1}^{r-1}\, dx_{r+1} \\
+ & \cdots + \sum_h k_h^0(r) \int_{J_h^0(r)} \int_{u_{r+1}}^{x_{r+1}} f(x_{r+2})\, dx_{r+2}\, dx_{r+1}\,.
\end{aligned}$$

Tratemos separadamente cada sumando. En primer lugar,

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_{u_{r+1}}^{x_{r+1}} f(x_{r+2})\, dx_{r+2} \, \frac{(b-x_{r+1})^r}{r!}\, dx_{r+1} \\
= & \int_a^b \int_a^{x_{r+1}} f(x_{r+2})\, dx_{r+2} \, \frac{(b-x_{r+1})^r}{r!}\, dx_{r+1} + \int_a^b \int_{u_{r+1}}^{a} f(x_{r+2})\, dx_{r+2} \, \frac{(b-x_{r+1})^r}{r!}\, dx_{r+1} \\
= & \int_a^b f(x_{r+2}) \int_{x_{r+2}}^b \frac{(b-x_{r+1})^r}{r!}\, dx_{r+1}\, dx_{r+2} + \frac{(b-a)^{r+1}}{(r+1)!} \int_{u_{r+1}}^a f(x)\, dx \\
= & \int_a^b f(x) \frac{(b-x)^{r+1}}{(r+1)!}\, dx + \frac{(b-a)^{r+1}}{(r+1)!} \int_{u_{r+1}}^a f(x)\, dx\,.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $J_h^j(r) = [A,B]$, con $0 \le j \le r-1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{J_h^j(r)} \int_{u_{r+1}}^{x_{r+1}} f(x_{r+2}) \quad & dx_{r+2}\, x_{r+1}^j\, dx_{r+1} \\
= & \int_A^B \int_A^{x_{r+1}} f(x_{r+2})\, dx_{r+2}\, x_{r+1}^j\, dx_{r+1} + \int_A^B \int_{u_{r+1}}^{A} f(x_{r+2})\, dx_{r+2}\, x_{r+1}^j\, dx_{r+1} \\
= & \int_A^B f(x_{r+2}) \int_{x_{r+2}}^B x_{r+1}^j\, dx_{r+1}\, dx_{r+2} + \frac{B^{j+1}-A^{j+1}}{j+1} \int_{u_{r+1}}^A f(x)\, dx \\
= & \frac{B^{j+1}}{j+1} \int_A^B f(x)\, dx - \int_A^B f(x) \frac{x^{j+1}}{j+1}\, dx + \frac{B^{j+1}-A^{j+1}}{j+1} \int_{u_{r+1}}^A f(x)\, dx\,.
\end{aligned}$$

Esto termina la prueba del lema, ya que $j+1 \le r$.

■

Haciendo uso de los lemas anteriores y del lema 3.2.1, mostraremos en lo que sigue un resultado análogo al teorema 3.2.9 del capítulo anterior para pesos vectoriales de más de dos componentes.

TEOREMA 4.2.1 *Consideremos un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ en $[\alpha, \beta]$ que satisface:*

(*i*) $\int_\alpha^\beta 1/w_k < \infty$.

*(ii)* $w_j \in L^\infty_{loc}([\alpha,\beta] \setminus \{a_1^j,\dots,a_{m_j}^j\})$, *para todo* $0 \le j < k$.

*(iii)* $w_j(x)\left|\int_{a_i^j}^x 1/(1+w_{j+1})\right| \le c$, *para c.t.p. en algún entorno de* $a_i^j$, *para todo* $1 \le i \le m_j$, $0 \le j \le k-2$, *y* $w_{k-1}(x)\left|\int_{a_i^{k-1}}^x 1/w_k\right| \le c$, *para c.t.p. en algún entorno de* $a_i^{k-1}$, *para todo* $1 \le i \le m_{k-1}$.

*Entonces la clausura del espacio de los polinomios en* $W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k)$ *es*

$$H_9 := \left\{ f \in W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k) : \ f^{(k)} \in \overline{\mathbb{P} \cap L^\infty(w_k)}^{L^\infty(w_k)} \right\}.$$

Observacion 4.2.2

1. *La hipótesis (ii) no supone ninguna restricción, pues si se tiene* $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a} w_j(x) = \infty$ *(para algún* $0 \le j < k$*) para una cantidad infinita de puntos* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* $0$ *es el único polinomio en* $L^\infty(w_j)$, *y es trivial encontrar la clausura de los polinomios en* $W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k)$.

2. *Conviene destacar que la hipótesis (iii) es mucho más débil que* $w_j(x)\left|\int_{a_i^j}^x 1/w_{j+1}\right| \le c$, *que aparece en el lema 3.2.1, ya que se permite, por ejemplo, que algunos* $w_{j+1}$ *sean iguales a* $0$.

3. *Por supuesto, admitimos la posibilidad de que* $w_j$ *esté acotado para algún* $j$, *es decir, de que* $\{a_1^j,\dots,a_{m_j}^j\}$ *sea el conjunto vacío.*

**Demostración.**

Si 0 es el único polinomio en $L^\infty(w_k)$, el resultado es evidente (si $f^{(k)} = 0$, entonces $f$ es un polinomio). Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe algún polinomio no trivial en $L^\infty(w_k)$.

Es inmediato que la clausura del espacio de los polinomios en $W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k)$ está contenida en $H_9$.

Así que nuestro problema se reduce a mostrar que toda función en $H_9$ puede ser aproximada por polinomios en norma $W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k)$. Consideremos pues, $f \in H_9$ y $\{p_n\}_n$ una sucesión de polinomios que converja a $f^{(k)}$ en norma $L^\infty(w_k)$. Construiremos a partir de la sucesión $\{p_n\}_n$ una sucesión de polinomios que converja a $f$ en norma $W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k)$.

La idea clave para realizar tal construcción es encontrar, a partir de $p_n$, un polinomio $q_{n,k}$ en $M$, donde $M$ es el espacio de los polinomios que admiten una primitiva de orden $k$ en $W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k)$. Si $\mathbb{P}$ fuese un espacio de Hilbert y $M$ un subespacio cerrado, bastaría con tomar como $q_{n,k}$ la proyección ortogonal de $p_n$ sobre $M$. Como nuestras normas no provienen de un producto escalar, el problema es mucho más complicado; afortunadamente, gracias a los dos lemas anteriores encontraremos un conjunto finito de polinomios $B$ en $L^\infty(w_k)$, de forma que $q_{n,k}$ pueda expresarse como combinación lineal de $p_n$ y elementos de $B$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_i^j} w_j(x)=\infty$, para todos los índices $1\le i\le m_j$, $0\le j<k$, pues si $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_i^j} w_j(x)<\infty$, para algún $a_i^j$, es suficiente removerlo de la lista $\{a_i^j : 1\le i\le m_j,\ 0\le j<k\}$. De igual forma podemos suponer que dichos puntos están ordenados, es decir, que $a_1^j<\cdots<a_{m_j}^j$, para todo $0\le j<k$ con $m_j\ge 2$.

Como $1/w_k\in L^1([\alpha,\beta])$, para toda función $g\in W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k)$ se tiene que

$$\int_\alpha^\beta |g^{(k)}| = \int_\alpha^\beta |g^{(k)}|\frac{w_k}{w_k} \le \|g^{(k)}\|_{L^\infty(w_k)}\int_\alpha^\beta \frac{1}{w_k}<\infty,$$

de donde se deduce que $g^{(k-1)}\in AC([\alpha,\beta])$, y $g\in C^{k-1}([\alpha,\beta])$.

Por otro lado, $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{x\to a_i^j} w_j(x)=\infty$, para cualquier $1\le i\le m_j$, $0\le j<k$ y $g^{(j)}\in L^\infty(w_j)$, implican que $g^{(j)}(a_i^j)=0$, para todo $1\le i\le m_j$, $0\le j<k$ (tiene sentido hablar del valor de $g^{(j)}$ en $a_i^j$ ya que $g^{(j)}$ es una función continua). Como consecuencia de las observaciones anteriores tenemos que $\int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j} g^{(j+1)} = g^{(j)}(a_{i+1}^j)-g^{(j)}(a_i^j)=0$, para cada $1\le i<m_j$, $0\le j<k$, con $m_j\ge 2$ y toda $g\in W^{k,\infty}(w_0,\dots,w_k)$.

Si $w_j\in L^\infty([\alpha,\beta])$, para algún $0\le j<k$, definimos $a_1^j:=\alpha$. Primero, construiremos (a partir de $\{p_n\}_n$) una sucesión de polinomios $\{q_{n,k}\}_n$ que converja a $f^{(k)}$ en norma $L^\infty(w_k)$, con la propiedad adicional de que

$$\int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j} q_{n,j+1}=0, \qquad \forall\ 1\le i<m_j, 0\le j<k, \tag{4.4}$$

donde

$$q_{n,j}(x):=f^{(j)}(a_1^j)+\int_{a_1^j}^x q_{n,j+1}, \qquad \forall\ 0\le j<k.$$

Más adelante probaremos que la sucesión de polinomios $\{q_{n,j}\}_n$ converge a $f^{(j)}$ en norma $L^\infty(w_j)$; la propiedad (4.4) precisamente garantizará que $q_{n,j}$ está en $L^\infty(w_j)$. Esta será la gran ventaja de $q_{n,k}$ sobre $p_n$.

Evidentemente, en (4.4) sólo tenemos en cuenta las ecuaciones correspondientes a los $j$ con $m_j\ge 2$. Estas ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$\int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j}\int_{a_1^{j+1}}^{x_{j+1}}\cdots\int_{a_1^{k-1}}^{x_{k-1}} q_{n,k}(x_k)\,dx_k\cdots dx_{j+2}\,dx_{j+1}+H_j(f)=0, \tag{4.5}$$

donde $H_j$ es un operador lineal de la forma $H_j(f)=\sum_{i=j}^{k-1}\alpha_i^j f^{(i)}(a_1^i)$, con $\alpha_i^j$ números reales que sólo dependen de $\{a_i^j, a_{i+1}^j, a_1^{j+1},\dots,a_1^{k-1}\}$.

Ahora usaremos los lemas 4.2.1 y 4.2.2 para demostrar que es posible construir la sucesión $\{q_{n,k}\}_k$ verificando (4.4). Consideremos $p_0 := p_{w_k}$, el polinomio minimal de $L^\infty(w_k)$ ($p_{w_k}$ no es idénticamente cero, pues $L^\infty(w_k)$ contiene polinomios no triviales), los intervalos $I_i^j := [a_i^j, a_{i+1}^j]$ cuando $m_j \ge 2$, y $s := \sum_{j=0}^{k-1} m_j - k$ (si $w_j \in L^\infty([\alpha,\beta])$, definimos $m_j := 1$, para que $s$ sea el número total de intervalos $I_i^j$ considerados). Como $a_1^j < \cdots < a_{m_j}^j$, para todo $0 \le j < k$ con $m_j \ge 2$, se tiene que los intervalos $I_1^j, \dots, I_{m_j-1}^j$, tienen interiores disjuntos, para todo $0 \le j < k$ con $m_j \ge 2$.

Definamos ahora funciones $g_i^j$ si $m_j \ge 2$. El lema 4.2.2 asegura que

$$\begin{aligned}\int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j} \int_{a_1^{j+1}}^{x_1} \cdots \int_{a_1^{k-1}}^{x_{k-j-1}} F(x_{k-j}) \quad dx_{k-j} \cdots dx_2\, dx_1 &= \int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j} F(t)\, \frac{(a_{i+1}^j - t)^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\, dt \\ &+ \sum_h k_h^{k-j-2}(i,j) \int_{J_h^{k-j-2}(i,j)} F(t)\, t^{k-j-2}\, dt + \cdots \\ &+ \sum_h k_h^0(i,j) \int_{J_h^0(i,j)} F(t)\, dt,\end{aligned}$$

para toda $F \in L^1([\alpha,\beta])$, donde todas las sumas son finitas. Para cada $1 \le i < m_j$, $0 \le j < k$, con $m_j \ge 2$, sea

$$\begin{aligned} g_i^j(t) \;&:=\; \frac{(a_{i+1}^j - t)^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\, \chi_{I_i^j}(t) \\ &+\; \sum_h k_h^{k-j-2}(i,j)\, t^{k-j-1}\, \chi_{J_h^{k-j-2}(i,j)}(t) + \cdots + \sum_h k_h^0(i,j) \chi_{J_h^0(i,j)}(t).\end{aligned}$$

Entonces se tiene para toda $F \in L^1([\alpha,\beta])$,

$$\int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j} \int_{a_1^{j+1}}^{x_1} \cdots \int_{a_1^{k-1}}^{x_{k-j-1}} F(x_{k-j})\, dx_{k-j} \cdots dx_2\, dx_1 = \int_\alpha^\beta F g_i^j. \tag{4.6}$$

Si sustituimos en esta igualdad $F$ por $q_{n,k}$, obtenemos que (4.5) (y por lo tanto (4.4)) puede escribirse de forma equivalente como

$$\int_\alpha^\beta q_{n,k}\, g_i^j + H_j(f) = 0. \tag{4.7}$$

Definamos las funciones $\{g_1, \dots, g_s\}$ como las funciones de la lista

$$\{g_1^{k-1}, g_2^{k-1}, \dots, g_{m_{k-1}-1}^{k-1}, \dots, g_1^1, g_2^1, \dots, g_{m_1-1}^1, g_1^0, g_2^0, \dots, g_{m_0-1}^0\},$$

en ese mismo orden.

Está claro que estas funciones satisfacen las hipótesis del lema 4.2.1: $g_i^j \in L^2([\alpha,\beta]) \setminus \{0\}$; además, para cada par $i_0, j_0$, la función $g_{i_0}^{j_0}$ es linealmente independiente de

$$\{g_1^{k-1}, g_2^{k-1}, \dots, g_{m_{k-1}-1}^{k-1}, \dots, g_1^{j_0+1}, g_2^{j_0+1}, \dots, g_{m_{j_0+1}-1}^{j_0+1}, g_1^{j_0}, g_2^{j_0}, \dots, g_{i_0-1}^{j_0}\},$$

ya que $g_{i_0}^{j_0}$ es igual a $\chi_{I_{i_0}^{j_0}}$ por un polinomio de grado $k-j_0-1$ más un número finito de funciones indicadoras por polinomios de grado estrictamente menor que $k-j_0-1$, $g_i^j$ (con $j_0 < j < k$) es una combinación lineal finita de funciones indicatrices por polinomios de grado menor o igual que $k-j-1 < k-j_0-1$, y cualquier intervalo $I_i^{j_0}$ con $i \neq i_0$ interseca con $I_{i_0}^{j_0}$ a lo sumo en un punto.

El lema 4.2.1 implica entonces que existen polinomios $h_1, \dots, h_s$, tales que el determinante $\Delta_s$ de la matriz de coeficientes del siguiente sistema lineal sobre $c^1, \dots, c^s$ es no nulo:

$$\sum_{m=1}^{s} c^m \int_\alpha^\beta p_{w_k} h_m g_i^j = 0, \qquad \forall\ 1 \le i < m_j,\ 0 \le j < k. \tag{4.8}$$

Definamos ahora

$$q_{n,k} := p_n - c_n^1\, p_{w_k} h_1 - c_n^2\, p_{w_k} h_2 - \cdots - c_n^s\, p_{w_k} h_s,$$

con constantes $c_n^1, c_n^2, \dots, c_n^s$, de forma que se verifique (4.7): Estos coeficientes pueden elegirse como la única solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{m=1}^{s} c_n^m \int_\alpha^\beta p_{w_k} h_m g_i^j = \int_\alpha^\beta p_n g_i^j + H_j(f), \qquad \forall\ 1 \le i < m_j,\ 0 \le j < k,$$

ya que tiene la misma matriz de coeficientes que el sistema (4.8). Por tanto, los $q_{n,k}$ así definidos verifican (4.4).

Es destacable que nuestro argumento permite construir $q_{n,k}$ como combinación lineal de $p_n, p_{w_k}h_1, \dots, p_{w_k}h_s$, de forma que la dependencia en $n$ de $q_{n,k}$ sólo se manifiesta a través de $p_n$ y de los coeficientes de $p_{w_k}h_1, \dots, p_{w_k}h_s$. Por tanto, las funciones $p_{w_k}h_1, \dots, p_{w_k}h_s$, juegan el mismo papel en nuestro espacio normado que jugaría una base del espacio ortogonal a $M$ en un espacio de Hilbert. Esta es la razón de fondo por la que ha merecido la pena el esfuerzo que nos ha costado garantizar su existencia.

En vista de $(iii)$, resulta natural definir los pesos $v_j := 1 + w_j$ para $0 \le j < k$ y $v_k := w_k$. Estos pesos tienen la ventaja sobre los $w_j$ de verificar:

$(i')$ $\int_\alpha^\beta 1/v_j < \infty$, para todo $0 \le j \le k$.

$(iii')$ $v_j(x) \left| \int_{a_i^j}^x 1/v_{j+1} \right| \le c'$, para c.t.p. en algún entorno de $a_i^j$, para todo $1 \le i \le m_j$, $0 \le j < k$.

Vamos a probar que los polinomios $\{q_{n,0}\}_n$ convergen a $f$ en norma $W^{k,\infty}(v_0, \dots, v_k)$, lo cual implica que convergen a $f$ en norma $W^{k,\infty}(w_0, \dots, w_k)$.

Definamos $E_{n,j} := f^{(j)} - q_{n,j}$ para todo $0 \le j \le k$. Entonces

$$E_{n,j}(x) = f^{(j)}(x) - q_{n,j}(x) = \int_{a_1^j}^x (f^{(j+1)} - q_{n,j+1}) = \int_{a_1^j}^x E_{n,j+1}, \qquad \forall\ 0 \le j < k. \tag{4.9}$$

Dado que $\int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j} f^{(j+1)} = f^{(j)}(a_{i+1}^j) - f^{(j)}(a_i^j) = 0$, e $\int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j} q_{n,j+1} = 0$ por la definición de $q_{n,k}$, se tiene que

$$\int_{a_i^j}^{a_{i+1}^j} E_{n,j+1} = 0. \tag{4.10}$$

En particular se tiene que $E_{n,j}(a_i^j) = 0$, para todo $1 \le i < m_j$, $0 \le j < k$, ya que $E_{n,j}(a_1^j) = 0$.

Las igualdades (4.6), (4.9) y (4.10) permiten deducir $\int_\alpha^\beta E_{n,k} g_i^j = 0$, para todo $1 \le i < m_j$, $0 \le j < k$, y entonces los coeficientes $\{c_n^1, \dots, c_n^s\}$ también son la única solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{m=1}^{s} c_n^m \int_\alpha^\beta p_{w_k} h_m g_i^j = \int_\alpha^\beta (p_n - f^{(k)}) g_i^j, \qquad \forall\ 1 \le i < m_j,\ 0 \le j < k.$$

Como los términos independientes de este sistema verifican

$$\left| \int_\alpha^\beta (p_n - f^{(k)}) g_i^j \right| \le \left\| g_i^j \right\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \left\| p_n - f^{(k)} \right\|_{L^1([\alpha,\beta])} \le \left\| g_i^j \right\|_{L^\infty([\alpha,\beta])} \left\| p_n - f^{(k)} \right\|_{L^\infty(w_k)} \int_\alpha^\beta \frac{1}{w_k} \longrightarrow 0,$$

cuando $n$ tiende a infinito, y la matriz de coeficientes es independiente de $n$, la regla de Kramer permite deducir que $\lim_{n\to\infty} c_n^m = 0$, para todo $1 \le m \le s$. Por consiguiente,

$$\|E_{n,k}\|_{L^\infty(w_k)} = \left\| f^{(k)} - q_{n,k} \right\|_{L^\infty(w_k)} \le \left\| f^{(k)} - p_n \right\|_{L^\infty(w_k)} + \sum_{m=1}^{s} |c_n^m| \, \|p_{w_k} h_m\|_{L^\infty(w_k)} \longrightarrow 0, \tag{4.11}$$

cuando $n$ tiende a infinito. Por tanto, $\{q_{n,k}\}_n$ converge a $f^{(k)}$ en $L^\infty(v_k)$. Veamos ahora que $\{q_{n,0}\}_n$ converge a $f$ en $W^{k,\infty}(v_0, \dots, v_k)$.

Probemos ahora que

$$\|E_{n,j}\|_{L^\infty(v_j)} \le c_j \, \|E_{n,j+1}\|_{L^\infty(v_{j+1})}, \qquad \forall\ 0 \le j < k.$$

Esta desigualdad y (4.11) dan que $\{q_{n,0}\}_n$ converge a $f$ en $W^{k,\infty}(v_0, \dots, v_k)$, concluyendo la demostración del teorema.

Asumamos en primer lugar que $w_j \notin L^\infty([\alpha,\beta])$. Elijamos una partición de $[\alpha,\beta]$ mediante $m_j$ intervalos compactos $H_1^j, \dots, H_{m_j}^j$, tales que $a_i^j$ sólo pertenece a $H_i^j$, para $1 \le i \le m_j$. Las hipótesis $(i')$, $(ii)$ y $(iii')$ garantizan que $v_j(x) |\int_{a_i^j}^x 1/v_{j+1}| \le c_j^1$ en c.t. $x \in H_i^j$, para todo $1 \le i \le m_j$.

Si $w_j \in L^\infty([\alpha,\beta])$, definimos $H_1^j := [\alpha,\beta]$ (recordemos que $a_1^j := \alpha$). La hipótesis $(i')$ y $w_j \in L^\infty([\alpha,\beta])$ también garantizan que $v_j(x) |\int_{a_1^j}^x 1/v_{j+1}| \le c_j^1$ en c.t. $x \in H_1^j$.

Por tanto, independientemente de si $w_j$ está acotado o no, el lema 3.2.1 implica que

$$\|E_{n,j}\|_{L^\infty(H_i^j, v_j)} \le c_j \|E_{n,j+1}\|_{L^\infty(H_i^j, v_{j+1})},$$

ya que $E_{n,j}(a_i^j) = 0$ para todo $1 \le i \le m_j$. Entonces

$$\|E_{n,j}\|_{L^\infty(v_j)} \le c_j \|E_{n,j+1}\|_{L^\infty(v_{j+1})}, \quad \forall\, 0 \le j < k.$$

Esto termina la prueba.

■

### 4.2.2 Aproximación por funciones suaves.

Comenzaremos con dos definiciones.

DEFINICION 4.2.2 *Diremos que un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ en $[a,b]$ es de tipo 1 si $1/w_k \in L^1([a,b])$ y $w_0, \dots, w_{k-1} \in L^\infty([a,b])$.*

DEFINICION 4.2.3 *Diremos que un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ en $[a,b]$ es de tipo 2 si existen números reales $a \le a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \le b$ tales que*

1. *$1/w_k \in L^1([a_1,a_4])$, y $w_0, \dots, w_{k-1} \in L^\infty([a,b])$,*
2. *si $a < a_1$, entonces $w_j$ es comparable con un peso no decreciente y finito en $[a,a_2]$, para $0 \le j \le k$,*
3. *si $a_4 < b$, entonces $w_j$ es comparable con un peso no creciente y finito en $[a_3,b]$, para $0 \le j \le k$.*

Observe que los pesos de tipo 1 también son de tipo 2.

En los teoremas siguientes mostraremos resultados que describen la clausura de las funciones suaves en espacios de Sobolev con pesos de tipo 1 y 2 en intervalos compactos.

TEOREMA 4.2.2 *Consideremos un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ de tipo 1 en un intervalo compacto $I = [a,b]$. Entonces la clausura de $\mathbb{P} \cap W^{k,\infty}(I,w)$, $C^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I,w)$ y $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I,w)$ en $W^{k,\infty}(I,w)$ es, respectivamente,*

$$\begin{aligned}
H_{10} &:= \left\{ f \in W^{k,\infty}(I,w) : f^{(k)} \in \overline{\mathbb{P} \cap L^\infty(I,w_k)}^{L^\infty(I,w_k)} \right\}, \\
H_{11} &:= \left\{ f \in W^{k,\infty}(I,w) : f^{(k)} \in \overline{C^\infty(I) \cap L^\infty(I,w_k)}^{L^\infty(I,w_k)} \right\}, \\
H_{12} &:= \left\{ f \in W^{k,\infty}(I,w) : f^{(k)} \in \overline{C(I) \cap L^\infty(I,w_k)}^{L^\infty(I,w_k)} \right\}.
\end{aligned}$$

OBSERVACION 4.2.3

1. *Observe que el teorema 4.2.2 caracteriza la clausura de $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I,w)$, $C^\infty(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I,w)$ y $\mathbb{P} \cap W^{k,\infty}(I,w)$ en $W^{k,\infty}(I,w)$, en términos del problema similar de aproximación en $L^\infty(I,w_k)$. Este problema está completamente solucionado para la clausura de $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(I,w_k)$ y $\mathbb{P} \cap L^\infty(I,w_k)$ por los teoremas 2.2.1 y 2.2.2 del capítulo 2. El teorema 2.2.3 del capítulo 2 también caracteriza la clausura de $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^\infty(I,w_k)$, para muchos pesos $w_k$.*

2. *Si $w_k \in L^\infty(I)$, entonces la clausura de $C^k(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}$ y $C^\infty(\mathbb{R})$ es la misma. Esto es un consecuencia de la prueba de Bernstein para el teorema de Weierstrass (ver por ejemplo [8], p.113), dado que los polinomios de Bernstein convergen uniformemente hasta la $k$-ésima derivada para cualquier función en $C^k(I)$.*

**Demostración.**

Primero probaremos que $H_{12} = \overline{C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I,w)}^{W^{k,\infty}(I,w)}$. La inclusión

$$\overline{C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I,w)}^{W^{k,\infty}(I,w)} \subseteq H_{12}$$

es inmediata. Consideremos ahora una función $f \in H_{12}$, y veamos que puede ser aproximada por funciones en $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I,w)$ con la norma de $W^{k,\infty}(I,w)$.

Dada $g \in C(\mathbb{R})$ una función que aproxima a $f^{(k)}$ en norma $L^\infty(I,w_k)$. Consideremos la función

$$h(x) := \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(a) \frac{(x-a)^j}{j!} + \int_a^x g(t) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, dt\,.$$

Tenemos que

$$f^{(j)}(x) - h^{(j)}(x) = \int_a^x \left(f^{(k)}(t) - g(t)\right) \frac{(x-t)^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\, dt, \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, k-1.$$

De donde

$$\begin{aligned} \left|f^{(j)}(x) - h^{(j)}(x)\right| &\leq \int_a^x \left|f^{(k)}(t) - g(t)\right| \frac{|x-t|^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\, dt \\ &\leq c_1 \int_a^b \left|f^{(k)}(t) - g(t)\right| \frac{w_k(t)}{w_k(t)}\, dt \leq c_1 \|1/w_k\|_{L^1(I)} \left\|f^{(k)} - g\right\|_{L^\infty(I,w_k)}, \end{aligned}$$

para $j = 0, \ldots, k-1$, pues $1/w_k \in L^1(I)$.

Consecuentemente,

$$\|f - h\|_{W^{k,\infty}(I,w)} \leq c_2 \left\|f^{(k)} - g\right\|_{L^\infty(I,w_k)}, \qquad \text{con } h \in C^k(\mathbb{R})\,.$$

En los otros casos la prueba es similar. Observe que la naturaleza de la función $h$ depende de la elección de la función $g$, es decir, si $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ (respectivamente, $g \in \mathbb{P}$) aproxima a $f$ en $L^\infty(I, w_k)$, entonces $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ (respectivamente, $h \in \mathbb{P}$).

■

Cortar y pegar funciones es un método muy útil para descomponer funciones en otras más simples. Para hacer esto las particiones de la unidad se vuelven herramientas naturales. Los siguientes resultados garantizan que este instrumento técnico preserva el espacio de Sobolev. Establecer este resultado de manera independiente y abstracta nos permitirá simplificar las pruebas de los teoremas 4.2.3, 4.2.4 y 4.2.6.

Proposicion 4.2.1 *Consideremos un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$. Asumamos que $K$ es una unión finita de intervalos compactos $J_1, \dots, J_n$ y que para cualquier $J_m$ existe un entero $0 \le k_m \le k$ verificando $1/w_{k_m} \in L^1(J_m)$, si $k_m > 0$, y $w_j = 0$ en c.t.p. de $J_m$ para $k_m < j \le k$, si $k_m < k$.*

*(a) Si $w_1, \dots, w_k \in L^\infty(K)$, entonces $fg \in W^{k,\infty}(w)$ para cualquier $f \in W^{k,\infty}(w)$ y $g \in C^k(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} g' \subseteq K$.*

*(b) Si además $w_{k_m}$ es admisible en $J_m$ y $f^{(k_m)}$ pertenece a la clausura de $C(J_m) \cap L^\infty(J_m, w_{k_m})$ en $L^\infty(J_m, w_{k_m})$ para algún $1 \le m \le n$, entonces $(fg)^{(j)}$ pertenece a la clausura de $C(J_m) \cap L^\infty(J_m, w_j)$ en $L^\infty(J_m, w_j)$ para cualquier $0 \le j \le k_m$.*

**Demostración.**

Fijemos $f \in W^{k,\infty}(w)$ y $g \in C^k(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} g' \subseteq K$.

Primero, mostraremos que $fg$ pertenece a $W^{k,\infty}(w)$. Es claro que $fg$ pertenece a $L^\infty(w_0)$, ya que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$: $fg$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{R} \setminus K$ y está acotada en el conjunto compacto $K$. El mismo argumento permite deducir que $fg$ pertenece a $W^{k,\infty}(I, w)$ para cada componente conexa $I$ de $\mathbb{R} \setminus K$. Entonces sólo necesitamos probar que $fg$ pertenece a $W^{k,\infty}(J_m, w)$ para cada $m$. Si $k_m = 0$, tenemos el resultado, ya que $W^{k,\infty}(J_m, w) = L^\infty(J_m, w_0)$.

Fijemos ahora $m$ con $k_m > 0$. Entonces $1/w_{k_m} \in L^1(J_m)$, y $w_j = 0$ en c.t.p. de $J_m$ para $k_m < j \le k$, si $k_m < k$. Ya que $f \in W^{k,\infty}(J_m, w) = W^{k_m,\infty}(J_m, w_0, \dots, w_{k_m})$, la definición de espacio de Sobolev con peso permite concluir que $f$ y $fg$ pertenecen a $C^{k_m - 1}(J_m)$. Consecuentemente, para cada $0 < j \le k_m$, tenemos que $(fg)^{(j)}$ es la suma de una función continua y $f^{(j)} g$ en $J_m$. Entonces, concluimos que $(fg)^{(j)}$ pertenece a $L^\infty(J_m, w_j)$, ya que $w_j, g \in L^\infty(J_m)$. Esto finaliza la prueba de $(a)$.

Asumamos ahora que $w_{k_m}$ es admisible en $J_m$ y $f^{(k_m)}$ pertenece a la clausura de $C(J_m)\cap L^\infty(J_m, w_{k_m})$ en $L^\infty(J_m, w_{k_m})$ para algún $1 \le m \le n$. Probaremos ahora que $(fg)^{(j)}$ pertenece a la clausura de $C(J_m) \cap L^\infty(J_m, w_j)$ en $L^\infty(J_m, w_j)$ para cualquier $0 \le j \le k_m$.

El resultado es directo si $k_m = 0$, usando el teorema 2.2.1. Fijemos ahora $m$ con $k_m > 0$.

Como hemos visto, $(fg)^{(j)}$ es continua en $J_m$ si $0 \le j < k_m$. También tenemos que $(fg)^{(k_m)}$ es la suma de una función continua y $f^{(k_m)}g$ en $J_m$. Usando el teorema 2.2.1, es fácil chequear que $(fg)^{(k_m)}$ verifica las propiedades que garantizan que pertenece a la clausura de $C(J_m) \cap L^\infty(J_m, w_{k_m})$ en $L^\infty(J_m, w_{k_m})$: las propiedades de continuidad se cumplen directamente, y los límites son 0 ya que $w_{k_m}, g \in L^\infty(J_m)$. Esto finaliza la prueba.

■

TEOREMA 4.2.3 *Consideremos un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ de tipo 2 en un intervalo compacto $I = [a, b]$, con $w_k$ admisible. Entonces la clausura de $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ en $W^{k,\infty}(I, w)$ es*

$$H_{13} \quad := \quad \left\{ f \in W^{k,\infty}(I, w) : \, f^{(j)} \in \overline{C(I) \cap L^\infty(I, w_j)}^{L^\infty(I,w_j)} \;\; \textit{para} \;\; 0 \le j \le k \right\} .$$

**Demostración.**

Es claro que la clausura de $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ en $W^{k,\infty}(I, w)$ está contenida en $H_{13}$. Consideremos ahora una función $f \in H_{13}$; nos gustaría ver que puede ser aproximada por funciones en $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ con la norma de $W^{k,\infty}(I, w)$.

Consideremos una partición de la unidad $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R})$ en $I$ que satisfaga: $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 1$ en $I$, $\psi_1|_{[a,a_1]} \equiv 1$, $\psi_2|_{[a_4,b]} \equiv 1$, $\psi_3|_{[a_2,a_3]} \equiv 1$, $\operatorname{supp}\psi_1 \subseteq [a, a_2-\delta]$, $\operatorname{supp}\psi_2 \subseteq [a_3+\delta, b]$, $\operatorname{supp}\psi_3 \subseteq [a_1+\delta, a_4-\delta]$, para algún $\delta > 0$. Consideremos también las funciones $f_i = f\psi_i$ para $i = 1, 2, 3$. Si $a = a_1$ y $a_4 < b$ (o $a_4 = b$ y $a < a_1$), consideramos una partición de la unidad con sólo dos funciones. Si $a = a_1$ y $a_4 = b$, entonces $w$ es un peso de tipo 1 en $I$, y podemos aplicar el teorema 4.2.2. Entonces sólo consideraremos el caso $a < a_1$ y $a_4 < b$, ya que los otros casos son más fáciles.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $w_j$ es un peso finito no decreciente en $[a, a_2]$, y un peso finito no creciente en $[a_3, b]$, para $0 \le j \le k$.

Observe que cada $f_i$ pertenece a $W^{k,\infty}(I, w)$ por la proposición 4.2.1, ya que $1/w_k \in L^1([a_1, a_4])$, $\operatorname{supp}\psi_i' \subseteq [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]$, y $w_1, \dots, w_k \in L^\infty([a_1, a_2] \cup [a_3, a_4])$, porque los pesos $w_j$ son monótonos.

Ya que $w_k$ es admisible y $f^{(k)}$ pertenece a la clausura de $C([a_1, a_2]\cup[a_3, a_4])\cap L^\infty([a_1, a_2]\cup[a_3, a_4], w_k)$ en $L^\infty([a_1, a_2]\cup[a_3, a_4], w_k)$, entonces la proposición 4.2.1 también implica que $f_i^{(j)}$ pertenece a la clausura de $C([a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]) \cap L^\infty([a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], w_j)$ en $L^\infty([a_1, a_2] \cup [a_3, a_4], w_j)$ para cualquier $0 \le j \le k$.

Observemos que $f_i^{(j)}$ es igual a $f^{(j)}$ o a 0 en cada intervalo $[a, a_1], [a_2, a_3], [a_4, b]$, para cualquier $0 \le j \le k$. Entonces el corolario 2.2.2 permite deducir que $f_i^{(j)}$ pertenece a la clausura de $C(I) \cap L^\infty(I, w_j)$ en $L^\infty(I, w_j)$ para cualquier $0 \le j \le k$.

Es suficiente mostrar que cada $f_i$ puede ser aproximada en $W^{k,\infty}(I, w)$ por funciones que pertenezcan a $C^k(I)$, ya que $f = f_1 + f_2 + f_3$ en $I$.

(1) Aproximación de $f_1$.

Fijado $0 \le j \le k$, consideremos las funciones $g_\lambda(x) := f_1^{(j)}(x + \lambda)$ con $0 < \lambda < \delta$. Es claro que $g_\lambda$ también pertenece a $L^\infty([a, b], w_j)$, ya que $w_j|_{[a,a_2]}$ es no decreciente para $0 \le j \le k$ y $\operatorname{supp} f_1^{(j)} \subseteq [a, a_2 - \delta]$.

Ahora, mostraremos que $g_\lambda$ tiende a $f_1^{(j)}$ en $L^\infty(I, w_j)$ cuando $\lambda \to 0^+$. Necesitamos estimar

$$J(\lambda) := \left\| f_1^{(j)} - g_\lambda \right\|_{L^\infty(I, w_j)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in [a, a_2]} \left| f_1^{(j)}(x) - g_\lambda(x) \right| w_j(x),$$

ya que $f_1^{(j)}(x) = g_\lambda(x) = 0$ para $x \ge a_2$ y $0 < \lambda < \delta$.

Definimos $\alpha_j := \max\{x \in [a, b] : \ w_j(t) = 0 \ \text{ para casi todo } \ t \in [a, x]\}$.

Si $\alpha_j \ge a_2$, obtenemos $J(\lambda) = 0$. Trataremos ahora con el caso $\alpha_j < a_2$.

El teorema 2.2.1 garantiza que $f^{(j)} \in C((\alpha_j, a_2])$ y entonces $f_1^{(j)} \in C((\alpha_j, b])$.

Asumamos que $\lim_{x \to \alpha_j^+} w_j(x) > 0$. Por lo tanto, el teorema 2.2.1 implica que $f_1^{(j)} \in C([\alpha_j, b])$ y consecuentemente $\lim_{\lambda \to 0^+} J(\lambda) = 0$, ya que $f_1^{(j)}$ es uniformemente continua en $C([\alpha_j, b])$ y $w_j \le w_j(a_2)\chi_{[\alpha_j, a_2]}$ en $[a, a_2]$. Si no tenemos $\lim_{x \to \alpha_j^+} w_j(x) > 0$, entonces $\lim_{x \to \alpha_j^+} w_j(x) = 0$, ya que $w_j$ es un peso no decreciente en $[a, a_2]$.

Ya que $f_1^{(j)}$ pertenece a la clausura de $C(I) \cap L^\infty(I, w_j)$ en $L^\infty(I, w_j)$ y $\lim_{x \to \alpha_j^+} w_j(x) = 0$, el corolario 2.2.1 implica que $\operatorname{ess\,lim}_{x \to \alpha_j^+} f_1^{(j)}(x) w_j(x) = 0$. De hecho, podemos deducir que $\lim_{x \to \alpha_j^+} f_1^{(j)}(x) w_j(x) = 0$, ya que $w_j$ es un peso finito no decreciente en $[a, a_2]$ y $f_1^{(j)} \in C((\alpha_j, b])$. Consecuentemente existe $0 < \delta_1 \le \delta$ tal que $\left| f_1^{(j)}(x) \right| w_j(x) < \varepsilon/3$, siempre que $x \in (\alpha_j, \alpha_j + 2\delta_1]$. Entonces

$$\left| f_1^{(j)}(x) - g_\lambda(x) \right| w_j(x) \le \left| f_1^{(j)}(x) w_j(x) - g_\lambda(x) w_j(x + \lambda) \right| + \left| g_\lambda(x) w_j(x + \lambda) - g_\lambda(x) w_j(x) \right| < \varepsilon,$$

para cualquier $x \in (\alpha_j, \alpha_j + \delta_1]$ y $0 < \lambda < \delta_1$, ya que

$$\left| f_1^{(j)}(x) w_j(x) - g_\lambda(x) w_j(x + \lambda) \right| \le \left| f_1^{(j)}(x) \right| w_j(x) + |g_\lambda(x)| \, w_j(x + \lambda) < \frac{2\varepsilon}{3},$$

y

$$|g_\lambda(x) w_j(x + \lambda) - g_\lambda(x) w_j(x)| \le |g_\lambda(x)| \, w_j(x + \lambda) < \frac{\varepsilon}{3},$$

porque el peso $w_j$ es no decreciente.

Usando la continuidad uniforme de $f_1^{(j)}$ en $[\alpha_j+\delta_1, a_2]$, tenemos que existe $0<\delta_2\le\delta_1$ tal que

$$\left|f_1^{(j)}(x)-g_\lambda(x)\right| w_j(x) \le w_j(a_2)\left|f_1^{(j)}(x)-g_\lambda(x)\right| < \varepsilon,$$

para cualquier $x\in[\alpha_j+\delta_1, a_2]$ si $0<\lambda<\delta_2$; es decir, $J(\lambda)=\left\|f_1^{(j)}-g_\lambda\right\|_{L^\infty([\alpha_j,a_2],w_j)} \le \varepsilon$.

Entonces, es suficiente aproximar $(f_1)_\lambda(x) := f_1(x+\lambda)$ en $W^{k,\infty}(I,w)$ para $\lambda>0$ suficientemente pequeño.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a=\min_j \alpha_j$, ya que en otro caso podemos considerar el intervalo $[\min_j \alpha_j, b]$ en vez de $[a,b]$. Entonces, $f$ es continua en $(a,a_2]$ y, consecuentemente, $f_1$ es continua en $(a,b]$.

Sea $\{\phi_t\}_{t>0}$ una aproximación de la identidad usual: $\phi_t(x)=t^{-1}\phi(t^{-1}x)$ para todo $x\in\mathbb{R}, t>0$, con $\phi\in C_c^\infty((-1,1))$ verificando $\phi\ge 0$ e $\int\phi=1$. Tomemos $u_t$ la convolución $u_t:=(f_1)_\lambda * \phi_t$, con $0<t<\lambda/2<\delta/2$. Entonces $u_t\in C^\infty(I)$, ya que $(f_1)_\lambda\in C([a-\lambda/2,b])\subset L^1([a-\lambda/2,b])$. Usaremos $(f_1)_\lambda$ en vez de $f_1$ por esta buena propiedad. Definimos $v_t := u_t^{(j)} = g_\lambda * \phi_t$ para algún $0\le j\le k$ fijado. Sólo necesitamos chequear que $v_t$ se aproxima a $g_\lambda$ en $L^\infty(I,w_j)$ cuando $t\to 0^+$. Pero

$$\begin{aligned}
\|v_t - g_\lambda\|_{L^\infty(I,w_j)} &= \operatorname{ess\,sup}_{x\in I}\left|\int_{-t}^{t} g_\lambda(x-y)\phi_t(y)\,dy - \int_{-t}^{t} g_\lambda(x)\phi_t(y)\,dy\right| w_j(x)\\
&\le \int_{-t}^{t} \operatorname{ess\,sup}_{x\in I}|g_\lambda(x-y)-g_\lambda(x)|\, w_j(x)\phi_t(y)\,dy\\
&\le \sup_{|y|\le t}\left\{\operatorname{ess\,sup}_{x\in I}\left|f_1^{(j)}(x)-g_\lambda(x-y)\right| w_j(x) + \operatorname{ess\,sup}_{x\in I}\left|f_1^{(j)}(x)-g_\lambda(x)\right| w_j(x)\right\}\int_{-t}^{t}\phi_t(y)\,dy\\
&= \sup_{|y|\le t}\{J(\lambda-y)+J(\lambda)\} \le 2\sup_{0<s<2\lambda} J(s),
\end{aligned}$$

y este último término tiende a cero ya que $J(\lambda)\to 0$ cuando $\lambda\to 0^+$. Por lo tanto, dado $\epsilon>0$, existe una función $f_{1,\epsilon}\in C^\infty(I)$ tal que $\|f_1-f_{1,\epsilon}\|_{W^{k,\infty}(I,w)}<\epsilon$.

(2) Aproximación de $f_2$.

Obtenemos el resultado aplicando un argumento simétrico al empleado en (1).

(3) Aproximación de $f_3$.

Es una consecuencia del teorema 4.2.2:

Definimos $w_k^* := w_k + \chi_{[a,a_1+\delta]\cup[a_4-\delta,b]}$ y $w^* := (w_0,\dots,w_{k-1},w_k^*)$; ya que $1/w_k^*\in L^1(I)$, tenemos que $w^*$ es un peso de tipo 1 en $I$. Observemos que $f_3\in W^{k,\infty}(I,w^*)$, ya que $\operatorname{supp} f_3\subseteq[a_1+\delta, a_4-\delta]$. Podemos deducir que $w_k^*$ es admisible, ya que $S(w_k^*)\subseteq S(w_k)\cap[a_1+\delta,a_4-\delta]\subseteq S(w_k)$. Entonces $f_3^{(k)}$ pertenece a la clausura de $C(I)\cap L^\infty(w_k^*)$ en $L^\infty(w_k^*)$ por el corolario 2.2.2: hemos visto que $f_3^{(k)}$ pertenece a la clausura de $C([a_1+\delta,a_4-\delta])\cap L^\infty([a_1+\delta,a_4-\delta],w_k^*)$ en $L^\infty([a_1+\delta,a_4-\delta],w_k^*)=L^\infty([a_1+\delta,a_4-\delta],w_k)$, y $f_3^{(k)}=0$ en $[a,a_1+\delta]\cup[a_4-\delta,b]$.

Por lo tanto, el teorema 4.2.2 implica que $f_3$ puede ser aproximada por funciones en $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I, w^*)$ con la norma de $W^{k,\infty}(I, w^*)$. Por lo tanto, $f_3$ puede ser aproximada por funciones en $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ con la norma de $W^{k,\infty}(I, w)$, ya que $w_j \leq w_j^*$ para cualquier $0 \leq j \leq k$.

■

El próximo resultado permite tratar con pesos que pueden obtenerse "pegando" otros pesos más simples.

TEOREMA 4.2.4 *Consideremos sucesiones de números reales estrictamente crecientes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($n$ perteneciente a un conjunto finito, a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ ó $\mathbb{Z}^-$) con $b_{n-1} < a_{n+1} < b_n$ para cualquier $n$. Sea $w = (w_0, \dots, w_k)$ un peso vectorial en el intervalo $I := \cup_n [a_n, b_n]$, con $w_k$ admisible. Asumamos que para cada $n$ existe un intervalo $I_n \subset [a_{n+1}, b_n]$ con $w_1, \dots, w_k \in L^\infty(I_n)$. Asumamos también que para cada $n$ tenemos que $w$ es de tipo 1 en $[a_n, b_n]$, ó $1/w_k \in L^\infty([a_n, b_n])$. Entonces la clausura de $C^k(I) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ en $W^{k,\infty}(I, w)$ es*

$$H_{14} \quad := \quad \left\{ f \in W^{k,\infty}(I, w) : \, f^{(k)} \in \overline{C(I) \cap L^\infty(I, w_k)}^{L^\infty(I, w_k)} \right\} .$$

OBSERVACION 4.2.4 *La hipótesis "$1/w_k \in L^\infty([a_n, b_n])$" es más fuerte que "$1/w_k \in L^1([a_n, b_n])$"; sin embargo, aquí no necesitamos la hipótesis "$w_0, \dots, w_{k-1} \in L^\infty([a_n, b_n])$" que se requiere para pesos de tipo* 1.

**Demostración.**

Probaremos la implicación no trivial. Consideremos $f \in H_{14}$. Fijemos una partición de la unidad $\{\theta_n\}_n \subset C^\infty(\mathbb{R})$ con $0 \leq \theta_n \leq 1$ en $\mathbb{R}$, $\theta_n = 1$ entre $I_{n-1}$ e $I_n$, y $\theta_n = 0$ en el complemento de la cápsula convexa de $I_{n-1} \cup I_n$; por lo tanto, el soporte de $\theta_n'$ está contenido en $I_{n-1} \cup I_n$. Es claro que si $\theta_n f$ puede ser aproximada por funciones en $C_c^k([a_n, b_n]) \cap W^{k,\infty}([a_n, b_n], w)$ en la norma de $W^{k,\infty}([a_n, b_n], w)$, entonces $f$ puede ser aproximada por funciones en $C^k(I) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ en la norma de $W^{k,\infty}(I, w)$. Se verifica este hecho ya que el soporte de las funciones aproximantes en $W^{k,\infty}([a_n, b_n], w)$ está contenido en $[a_n, b_n]$.

Observemos primero que cada $\theta_n f$ pertenece a $W^{k,\infty}(I, w)$ por la proposición 4.2.1, ya que $\operatorname{supp} \theta_n' \subseteq I_{n-1} \cup I_n$, $1/w_k \in L^1(I_{n-1} \cup I_n)$, y $w_1, \dots, w_k \in L^\infty(I_{n-1} \cup I_n)$.

Como $w_k$ es admisible y $f^{(k)}$ pertenece a la clausura de $C(I) \cap L^\infty(I, w_k)$ en $L^\infty(I, w_k)$, entonces la proposición 4.2.1 y el corolario 2.2.2 implican que $(\theta_n f)^{(k)}$ pertenece a la clausura de $C([a_n, b_n]) \cap L^\infty([a_n, b_n], w_k)$ en $L^\infty([a_n, b_n], w_k)$.

Fijemos $n$ con $1/w_k \in L^\infty([a_n, b_n])$. Entonces, no existe ninguna singularidad de $w_k$ en $I_n$; consecuentemente, $f^{(k)} \in C([a_n, b_n])$ por el teorema 2.2.1, y por lo tanto $f, \theta_n f \in C^k([a_n, b_n])$.

Por tanto, sólo necesitamos probar que $\theta_n f$ puede ser aproximada por funciones en $C_c^k([a_n, b_n]) \cap W^{k,\infty}([a_n, b_n], w)$ en la norma de $W^{k,\infty}([a_n, b_n], w)$, si $w$ es de tipo 1 en $[a_n, b_n]$.

Ya que $(\theta_n f)^{(k)}$ pertenece a la clausura de $C([a_n, b_n]) \cap L^\infty([a_n, b_n], w_k)$ en $L^\infty([a_n, b_n], w_k)$, podemos considerar una sucesión $\{f_l\}_l \subset C([a_n, b_n]) \cap L^\infty([a_n, b_n], w_k)$ convergiendo a $(\theta_n f)^{(k)}$ en $L^\infty([a_n, b_n], w_k)$.

Observemos que el conjunto $R(w_k)$ es denso en $I_n$, ya que $w_k$ es admisible y $w_k \in L^\infty(I_n)$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\cup_n \partial I_n \subseteq R(w_k)$, ya que en otro caso podemos tomar un subintervalo de $I_n$. Entonces, el teorema 2.2.1 implica que $(\theta_n f)^{(k)}$ es continua en algún entorno abierto de $\alpha_n$ y de $\beta_n$, donde $[\alpha_n, \beta_n]$ es la cápsula convexa de $I_{n-1} \cup I_n$ (recordemos que $R(w_k)$ es un conjunto abierto). Consecuentemente, $(\theta_n f)^{(k)}$ es continua en algún entorno abierto de $a_n$ y de $b_n$, ya que $\operatorname{supp}(\theta_n f)^{(k)} \subseteq [\alpha_n, \beta_n] \subseteq [a_n, b_n]$. La observación 2 del teorema 2.2.1 permite deducir que las funciones aproximantes $\{f_l\}_l$ pueden ser elegidas tales que $f_l = (\theta_n f)^{(k)}$ en algún entorno abierto de $a_n$ y de $b_n$. Por tanto, podemos asumir que $f_l = (\theta_n f)^{(k)} = 0$ en $(-\infty, a_n] \cup [b_n, \infty)$.

Elegimos una función $p_0 \in C_c(I_n)$ tal que $p_0 \geq 0$ y $\emptyset \neq \operatorname{supp} p_0 = [\alpha, \beta] \subseteq I_n$. Ya que $w_k \in L^\infty(I_n)$, deducimos que $p_0 \in L^\infty(w_k)$. Definimos

$$v_l := f_l - c_l^1 p_0 h_1 - \cdots - c_l^k p_0 h_k \,,$$

donde las funciones $h_1, \ldots, h_k$, y las constantes $c_l^1, \ldots, c_l^k$, son elegidas como sigue: Si $g_i(t) := (b_n - t)^{i-1}$ para $1 \leq i \leq k$, el lema 4.2.1 garantiza que existen polinomios $h_1, \ldots, h_k$, tales que el determinante de la matriz de coeficientes del siguiente sistema lineal sobre $\{c_l^m\}_{1 \leq m \leq k}$ es no nulo:

$$\sum_{m=1}^{k} c_l^m \int_\alpha^\beta p_0 g_i h_m = \int_{a_n}^{b_n} f_l g_i \,, \qquad \forall\, 1 \leq i \leq k \,. \tag{4.12}$$

Por tanto, podemos calcular $\{c_l^m\}_{1 \leq m \leq k}$ verificando este sitema lineal usando, la regla de Kramer. Consideremos las funciones $\{v_l\}_l$ con esta elección de $h_1, \ldots, h_k$, y $c_l^1, \ldots, c_l^k$. Es claro que $\{v_l\}_l \subseteq C_c([a_n, b_n]) \cap L^\infty([a_n, b_n], w_k)$, ya que $p_0 \in C_c([a_n, b_n]) \cap L^\infty([a_n, b_n], w_k)$.

Por lo tanto, $\int_{a_n}^{b_n} v_l g_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, ya que $\operatorname{supp} p_0 = [\alpha, \beta] \subseteq I_n \subseteq [a_n, b_n]$. Definimos

$$V_l(x) := \int_{a_n}^{x} v_l(t) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \, dt \,.$$

Es claro que $V_l^{(j)}(a_n) = 0$, para todo $0 \leq j \leq k$, ya que $V_l^{(k)}(a_n) = v_l(a_n) = 0$. Obtenemos

$$V_l^{(j)}(b_n) = \int_{a_n}^{b_n} v_l(t) \frac{(b_n - t)^{k-j-1}}{(k-j-1)!} \, dt = 0 \,, \qquad \forall\, 0 \leq j < k \,.$$

Consecuentemente, tenemos que $V_l^{(j)}(b_n) = 0$, para todo $0 \le j \le k$, ya que $V_l^{(k)}(b_n) = v_l(b_n) = 0$. Entonces concluimos que $V_l \in C_c^k([a_n, b_n])$. También tenemos que $(\theta_n f)^{(j)}(a_n) = (\theta_n f)^{(j)}(b_n) = 0$, para todo $0 \le j < k$, ya que $\theta_n f \in C_c^{k-1}([a_n, b_n])$. Por tanto,

$$(\theta_n f)^{(j)}(b_n) = \int_{a_n}^{b_n} (\theta_n f)^{(k)}(t) \frac{(b_n - t)^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\, dt = 0\,, \qquad \forall\, 0 \le j < k\,,$$

y por lo tanto, $\int_{a_n}^{b_n} (\theta_n f)^{(k)} g_i = 0$ para todo $1 \le i \le k$.

Para ver que $V_l$ converge a $\theta_n f$ en $W^{k,\infty}([a_n, b_n], w)$, probaremos primero que $v_l$ converge a $\theta_n f$ en $L^\infty([a_n, b_n], w_k)$ y en $L^1([a_n, b_n])$. Tenemos que

$$\left\| (\theta_n f)^{(k)} - f_l \right\|_{L^1([a_n,b_n])} = \int_{a_n}^{b_n} \left| (\theta_n f)^{(k)} - f_l \right| \frac{w_k}{w_k} \le \left\| (\theta_n f)^{(k)} - f_l \right\|_{L^\infty([a_n,b_n],w_k)} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{w_k} \longrightarrow 0\,,$$

cuando $l$ tiende a infinito. Ya que $f_l$ converge a $(\theta_n f)^{(k)}$ en $L^1([a_n, b_n])$, deducimos que los términos de la derecha del sistema lineal (4.12) tienden a cero cuando $l$ tiende a infinito. Ya que la matriz de coeficientes de (4.12) no depende de $l$, este hecho implica que $\lim_{l\to\infty} c_l^m = 0$, para todo $1 \le m \le k$. Consecuentemente, $v_l$ converge a $(\theta_n f)^{(k)}$ en $L^\infty([a_n, b_n], w_k)$. El argumento estándar muestra que $v_l$ también converge a $(\theta_n f)^{(k)}$ en $L^1([a_n, b_n])$.

Entonces, para cualquier $0 \le j < k$ y $x \in [a_n, b_n]$, deducimos

$$\begin{aligned}
\left| (\theta_n f)^{(j)}(x) - V_l^{(j)}(x) \right| &= \left| \int_{a_n}^{x} \Big( (\theta_n f)^{(k)}(t) - v_l(t) \Big) \frac{(x-t)^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\, dt \right| \\
&\le \int_{a_n}^{b_n} \left| (\theta_n f)^{(k)}(t) - v_l(t) \right| \frac{|x-t|^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\, dt \\
&\le c_1 \left\| (\theta_n f)^{(k)} - v_l \right\|_{L^1([a_n,b_n])} \le c_2 \left\| (\theta_n f)^{(k)} - v_l \right\|_{L^\infty([a_n,b_n],w_k)} .
\end{aligned}$$

Ya que $w_0, \dots, w_{k-1} \in L^\infty([a_n, b_n])$, este hecho finaliza la prueba.

■

Podemos deducir la siguiente consecuencia.

TEOREMA 4.2.5 *Consideremos un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ en el intervalo $I$, con $w \in L^\infty_{loc}(I)$, $1/w_k \in L^1_{loc}(I)$ y $w_k$ admisible. Entonces la clausura de $C^k(I) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ en $W^{k,\infty}(I, w)$ es*

$$H_{15} \;:=\; \left\{ f \in W^{k,\infty}(I, w) : \, f^{(k)} \in \overline{C(I) \cap L^\infty(I, w_k)}^{L^\infty(I,w_k)} \right\} .$$

**Demostración.**

Este teorema es una consecuencia directa del teorema 4.2.4. Es suficiente escribir $I$ como unión de intervalos compactos $[a_n, b_n]$ ($n$ perteneciente a un conjunto finito, a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ ó $\mathbb{Z}^-$), con

$b_{n-1} < a_{n+1} < b_n$ para todo $n$. Tenemos que $w$ es de tipo 1 en cada $[a_n, b_n]$, ya que $w \in L^\infty([a_n, b_n])$ y $1/w_k \in L^1([a_n, b_n])$ para todo $n$. Si elegimos $I_n := [a_{n+1}, b_n]$, entonces podemos aplicar el teorema 4.2.4.

■

### 4.2.3 Resultados técnicos adicionales.

En esta sección recogemos algunos resultados complementarios que necesitan mayores requisitos técnicos. Referimos a [35] para las definiciones precisas que necesitaremos; no explicamos estas definiciones de manera completamente rigurosa ya que ello requeriría varias páginas llenas de detalles técnicos, y los resultados en esta sección no son los teoremas centrales de este trabajo. Sin embargo, presentamos aquí una explicación heurística de los conceptos más importantes que necesitaremos.

Un punto $a \in I$ es $m$-regular por la derecha (respectivamente, por la izquierda) si cualquier función $f$ en $W^{k,\infty}(I, w)$ verifica que $f^{(m)}$ es absolutamente continua en un entorno a la derecha (respectivamente, a la izquierda) de $a$ (esto puede garantizarse por el uso iterado de la desigualdad de Muckenhoupt (ver lema 3.2.1)). Un punto es $m$-regular si es $m$-regular por la derecha y $m$-regular por la izquierda. Denotemos por $\Omega^{(m)}$ el conjunto de puntos (o semi-puntos) $m$-regulares. (Si $[a, b] \subseteq \Omega^{(m)}$, entonces $f^{(m)} \in AC([a, b])$ para cualquier función $f \in W^{k,\infty}(I, w)$.) Es claro que $\Omega_{m+1} \cup \cdots \cup \Omega_k \subseteq \Omega^{(m)}$ (ver la definición de $\Omega_j$ antes del comienzo de la sección 4.2.1).

Denotamos por $K(I, w)$ el conjunto de funciones $f$ en $W^{k,\infty}(I, w)$ con $\|f\|_{W^{k,\infty}(I,w)} = 0$. Es conveniente que $K(I, w) = \{0\}$, pero existen pesos vectoriales, como $(w_0, w_1) = (0, 1)$, que no satisfacen esta propiedad. La condición $(I, w) \in C_0$ es un requerimiento técnico un poco más fuerte que $K(I, w) = \{0\}$; es satisfecha si, por ejemplo, $K(I, w) = \{0\}$ y $\Omega^{(0)} \setminus (\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k)$ tiene sólo un número finito de puntos en cada componente conexa de $\Omega^{(0)}$ (ver la observación 1 a la definición 3.10 en [35], o la prueba de [33], teorema 4.3). Esta es una condición débil, ya que $\Omega_{m+1} \cup \cdots \cup \Omega_k \subseteq \Omega^{(m)} \subseteq \overline{\Omega_{m+1} \cup \cdots \cup \Omega_k}$ (ver la observación antes de la definición 3.7 en [35] o la observación antes de la definición 7 en [33]).

Si $(I, w_m, \dots, w_k) \in C_0$ y $J$ es un intervalo compacto contenido en $\Omega^{(m-1)}$, tenemos que existe una constante $c = c(J, w_m, \dots, w_k)$ con

$$\|f^{(m)}\|_{L^1(J)} \le c\,\|f^{(m)}\|_{W^{k-m,\infty}(I,w_m,\dots,w_k)}\,,$$

para cualquier $f \in W^{k-m,\infty}(I, w_m, \dots, w_k)$ que sea aproximable por funciones en $C^{k-m}(I) \cap W^{k-m,\infty}(I, w_m, \dots, w_k)$ con la norma de $W^{k-m,\infty}(I, w_m, \dots, w_k)$ (ver corolario B en [35] o corolario 4.3 en [33]). De hecho, dichos corolarios tienen un enunciado más fuerte que lo que acabamos de exponer, pero esto resultará suficiente para las aplicaciones que desarrollaremos en esta sección.

Necesitamos ahora una definición más específica.

DEFINICION 4.2.4 *Diremos que un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ en $[a, b]$ es de tipo 3 si existen números reales $a \le a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \le b$ y enteros $k_1, k_2 \ge 0$ tales que*

1. *$1/w_k \in L^1([a_1, a_4])$, y $w_0, \dots, w_{k-1} \in L^\infty([a, b])$,*

2. *si $a < a_1$, entonces $w_j$ es comparable con un peso finito no decreciente en $[a, a_2]$, para $k_1 \le j \le k$, y $a$ es $(k_1 - 1)$-regular por la derecha si $k_1 > 0$,*

3. *si $a_4 < b$, entonces $w_j$ es comparable con un peso finito no creciente en $[a_3, b]$, para $k_2 \le j \le k$, y $b$ es $(k_2 - 1)$-regular por la izquierda si $k_2 > 0$.*

Observe que los pesos de tipo 1 ó 2 también son de tipo 3.

TEOREMA 4.2.6 *Consideremos un peso vectorial $w = (w_0, \dots, w_k)$ de tipo 3 en un intervalo compacto $I = [a, b]$, con $w_k$ admisible. Entonces la clausura de $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ en $W^{k,\infty}(I, w)$ es*

$$H_{16} \quad := \quad \left\{ f \in W^{k,\infty}(I, w) : \, f^{(j)} \in \overline{C(I) \cap L^\infty(I, w_j)}^{L^\infty(I, w_j)} \;\; \textit{para} \;\; 0 \le j \le k \right\}.$$

**Demostración.**

Consideremos $f \in H_{16}$ y $f_i = f\psi_i$ para $i = 1, 2, 3$, como en la prueba del teorema 4.2.3. Es suficiente mostrar que cada $f_i$ puede ser aproximada por funciones en $C^k(\mathbb{R}) \cap W^{k,\infty}(I, w)$ con la norma de $W^{k,\infty}(I, w)$.

(1) Aproximación de $f_1$.

Si $k_1 = 0$, podemos aproximar $f_1$ como en el caso de los pesos de tipo 2. Asumamos ahora que $k_1 > 0$.

Definimos $\tilde{w}_j := w_j + \chi_{[a_2, b]}$ para $0 \le j \le k$, y $\tilde{w} := (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k)$, que también es un peso de tipo 3. Entonces $f_1$ pertenece a $W^{k,\infty}(I, \tilde{w})$, ya que $f_1 = 0$ en $[a_2, b]$. Es obvio que es más complicado aproximar $f_1$ en $W^{k,\infty}(I, \tilde{w})$ que en $W^{k,\infty}(I, w)$. Observemos que $K(I, \tilde{w}_{k_1}, \dots, \tilde{w}_k) = \{0\}$. Tenemos que $[a, a_1] \subset \operatorname{supp} w_{k_1} \cup \cdots \cup \operatorname{supp} w_k$, ya que $w_j$ es comparable con un peso finito no decreciente en $[a, a_2]$, para $k_1 \le j \le k$, y $a$ es $(k_1 - 1)$-regular por la derecha. Entonces concluimos que $(a, b] \subseteq \Omega_{k_1} \cup \cdots \cup \Omega_k$. Esto implica que $(a, b] \subseteq \Omega^{(k_1 - 1)} = [a, b] = I$, ya que $a$ es $(k_1 - 1)$-regular por la derecha; consecuentemente, $\Omega^{(k_1 - 1)} \setminus (\Omega_{k_1} \cup \cdots \cup \Omega_k) \subseteq \{a\}$. Este hecho y $K(I, \tilde{w}_{k_1}, \dots, \tilde{w}_k) = \{0\}$ permiten deducir que $(I, \tilde{w}_{k_1}, \dots, \tilde{w}_k) \in C_0$.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $(I, w_{k_1}, \dots, w_k) \in C_0$ para aproximar $f_1$ por funciones en $C^k(I)$.

Por el teorema 4.2.3, es posible aproximar $f_1^{(k_1)}$ por funciones en $C^{k-k_1}(\mathbb{R})$ con la norma de $W^{k-k_1,\infty}(I,w_{k_1},\dots,w_k)$.

Si $g\in C^{k-k_1}(\mathbb{R})$ aproxima a $f_1^{(k_1)}$ en $W^{k-k_1,\infty}(I,w_{k_1},\dots,w_k)$, podemos considerar la función

$$h(x):=\sum_{j=0}^{k_1-1} f_1^{(j)}(a)\frac{(x-a)^j}{j!}+\int_a^x g(t)\frac{(x-t)^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\,dt\,,$$

ya que existe $f_1^{(k_1-1)}(a)$, porque $a$ es $(k_1-1)$-regular por la derecha. Entonces tenemos

$$f_1^{(j)}(x)-h^{(j)}(x)=\int_a^x \Big(f_1^{(k_1)}(t)-g(t)\Big)\frac{(x-t)^{k_1-j-1}}{(k_1-j-1)!}\,dt, \quad \text{para} \quad 0\le j<k_1\,.$$

Ahora, por el corolario B en [35], tenemos para $0\le j<k_1$,

$$\left\|f_1^{(j)}-h^{(j)}\right\|_{L^\infty(I)}\le c\left\|f_1^{(k_1)}-g\right\|_{L^1(I)}\le c\left\|f^{(k_1)}-g\right\|_{W^{k-k_1,\infty}(I,w_{k_1},\dots,w_k)}\,,$$

ya que $(I,w_{k_1},\dots,w_k)\in C_0$ e $I=\Omega^{(k_1-1)}$. Por tanto, tenemos para $0\le j<k_1$,

$$\left\|f_1^{(j)}-h^{(j)}\right\|_{L^\infty(I,w_j)}\le c\left\|f^{(k_1)}-g\right\|_{W^{k-k_1,\infty}(I,w_{k_1},\dots,w_k)}\,,$$

ya que $w_0,\dots,w_{k_1-1}\in L^\infty(I)$.

(2) Aproximación de $f_2$.

Usamos la misma prueba con la simetría apropiada.

(3) Aproximación de $f_3$.

Procedemos como en la prueba del teorema 4.2.3.

Esto finaliza la prueba del teorema 4.2.6.

■

Las ideas en la prueba del teorema 4.2.6 pueden ser generalizadas para obtener el siguiente resultado, el cual es muy útil, ya que en el capítulo anterior se han expuesto teoremas que caracterizan la clausura de $C^1(\mathbb{R})$ en $W^{1,\infty}(I,w_0,w_1)$, para pesos $w_0,w_1$ muy generales.

Teorema 4.2.7 *Consideremos un peso vectorial $w=(w_0,\dots,w_k)$ en un intervalo compacto $I=[a,b]$, verificando $I=\Omega^{(m-1)}$ y $w_0,\dots,w_{m-1}\in L^\infty(I)$, para algún $0<m\le k$. Supongamos que $(I,w_m,\dots,w_k)\in \mathrm{C}_0$. Si la clausura de $C^{k-m}(\mathbb{R})\cap W^{k-m,\infty}(I,w_m,\dots,w_k)$ en $W^{k-m,\infty}(I,w_m,\dots,w_k)$ es $H$, entonces la clausura de $C^k(\mathbb{R})\cap W^{k,\infty}(I,w)$ en $W^{k,\infty}(I,w)$ es*

$$H_{17}:=\Big\{f\in W^{k,\infty}(I,w):\ f^{(m)}\in H\Big\}\,.$$

**Demostración.**

Si $g \in C^{k-m}(\mathbb{R})$ aproxima a $f^{(m)}$ en $W^{k-m,\infty}(I, w_m, \ldots, w_k)$, podemos considerar la función

$$h(x) := \sum_{j=0}^{m-1} f^{(j)}(a)\frac{(x-a)^j}{j!} + \int_a^x g(t)\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, dt\,,$$

ya que existe $f^{(m-1)}(a)$, porque $a \in I = \Omega^{(m-1)}$. Tenemos que

$$f^{(j)}(x) - h^{(j)}(x) = \int_a^x \left(f^{(m)}(t) - g(t)\right) \frac{(x-t)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\, dt, \quad \text{para} \quad 0 \le j < m\,.$$

Ahora, por el corolario B en [35], tenemos para $0 \le j < m$,

$$\left\| f^{(j)} - h^{(j)} \right\|_{L^\infty(I)} \le c \left\| f^{(m)} - g \right\|_{L^1(I)} \le c \left\| f^{(m)} - g \right\|_{W^{k-m,\infty}(I, w_m, \ldots, w_k)}\,,$$

ya que $I = \Omega^{(m-1)}$, e $(I, w_m, \ldots, w_k) \in C_0$. Por lo tanto, tenemos para $0 \le j < m$,

$$\left\| f^{(j)} - h^{(j)} \right\|_{L^\infty(I, w_j)} \le c \left\| f^{(m)} - g \right\|_{W^{k-m,\infty}(I, w_m, \ldots, w_k)}\,,$$

ya que $w_0, \ldots, w_{m-1} \in L^\infty(I)$.

■

Finalmente, debemos decir que los resultados de este capítulo son más valiosos gracias al siguiente teorema. Este teorema permite tratar con pesos que pueden obtenerse "pegando" otros pesos más simples. Por consiguiente, pueden usarse los teoremas de este capítulo junto con los resultados en el capítulo anterior y en [35].

Teorema 4.2.8 *([35], Theorem 5.2).*
*Consideremos sucesiones de números reales estrictamente crecientes $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($n$ perteneciente a un conjunto finito, a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ ó $\mathbb{Z}^-$) con $a_{n+1} < b_n$ para cualquier $n$. Sea $w = (w_0, \ldots, w_k)$ un peso vectorial en el intervalo $I := \cup_n [a_n, b_n]$. Asumamos que para cada $n$ existe un intervalo $I_n \subset [a_{n+1}, b_n]$ con $w \in L^\infty(I_n)$ e $(I_n, w) \in C_0$. Entonces $f$ puede ser aproximada por funciones de $C^\infty(I)$ en $W^{k,\infty}(I, w)$ si y sólo puede ser aproximada por funciones de $C^\infty([a_n, b_n])$ en $W^{k,\infty}([a_n, b_n], w)$ para cada $n$. El mismo resultado es cierto si reemplazamos $C^\infty$ por $C^k$ en ambos casos.*

# Capítulo 5

# Conclusiones y recomendaciones.

En este último capítulo mencionaremos los resultados fundamentales de nuestro trabajo y expondremos problemas abiertos y futuras líneas de investigación relativos a la Teoría de Aproximación en espacios de Sobolev.

## 5.1 Conclusiones.

Considerar normas con peso $L^\infty(w)$ es interesante por dos razones: por un lado, con ellas obtenemos un conjunto de funciones aproximables más extenso (ya que las funciones en $L^\infty(w)$ pueden tener singularidades donde el peso tiende a cero); y, por otro lado, es posible encontrar funciones que aproximen a $f$ y cuyo comportamiento cualitativo sea similar al de $f$ en aquellos puntos donde el peso tiende a infinito.

Podemos decir que los resultados más importantes de este trabajo permiten generalizar y mejorar muchos de los resultados de aproximación por funciones continuas, polinomios, funciones de clase $C^k$ o funciones de clase $C^\infty$ en [35], tanto para $k = 0$, $k = 1$ ó $k$ arbitrario.

Las ideas y los métodos utilizados en este trabajo permiten continuar una línea fructífera de investigación. La siguiente sección la dedicaremos a problemas abiertos y otros en vías de posible solución.

## 5.2 Problemas abiertos y futuras líneas de investigación.

**Problema 1.** Estudiar la localización de ceros de polinomios ortogonales de Sobolev en el caso en que el operador de multiplicación por la variable independiente no esté acotado.

**Problema 2.** Consideremos el siguiente producto interno de Sobolev en el espacio de los polinomios $\mathbb{P}$

$$\langle p,q\rangle_S=\int p(x)q(x)d\mu(x)+\lambda\int p'(x)q'(x)d\mu(x)+\eta\int(p'(x)q(x)+p(x)q'(x))d\mu(x), \tag{5.1}$$

con la condición $\lambda-\eta^2>0$.

Este producto interno puede ser escrito en forma matricial como

$$\langle p,q\rangle_S=\int \begin{pmatrix} p & p' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \eta \\ \eta & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ q' \end{pmatrix} d\mu(x),$$

y es conocido como producto interno de Sobolev no diagonal. El caso $\eta=0$ suele llamarse "caso diagonal" y ha sido el más estudiado.

Un problema interesante es entender la estructura de los espacios de Sobolev con un producto interno de Sobolev no diagonal y estudiar la acotación del operador multiplicación por la variable independiente, con el objetivo de localizar los ceros de los polinomios ortogonales con respecto al producto (5.1), para así determinar el comportamiento asintótico de dichos polinomios.

**Problema 3.** La desigualdad de Bernstein dice que

*Para cualquier polinomio trigonométrico $S$ de grado $\leq n$,*

$$\max_{-\pi\leq\theta\leq\pi}|S'(\theta)|\leq n\max_{-\pi\leq\theta\leq\pi}|S(\theta)|.$$

Por otra parte, la desigualdad de Markov establece que

*Para cualquier polinomio $P$ de grado $\leq n$,*

$$\max_{-1\leq x\leq 1}|P'(x)|\leq n^2\max_{-1\leq x\leq 1}|P(x)|.$$

Resultaría muy interesante encontrar condiciones para establecer desigualdades análogas a las anteriores con la norma $W^{1,\infty}(I,w_0,w_1)$ o con la norma $W^{k,\infty}(I,w_0,\ldots,w_k)$, para $I$ intervalo compacto, es decir, obtener desigualdades de Bernstein y Markov con pesos.

**Problema 4.** Investigar el espacio dual de $W^{k,p}(w_0,\ldots,w_k)$, para $1\leq p<\infty$.

**Problema 5.** Estudiar las propiedades algebraicas y analíticas de los polinomios ortogonales respecto a productos internos de Sobolev del tipo

$$\langle p,q\rangle_S=\int_I p(x)q(x)d\mu_1(x)+\lambda\int_J p'(x)q'(x)d\mu_2(x),$$

donde los intervalos $I$ y $J$ son esencialmente distintos (por ejemplo, disjuntos).

En [14] los autores usando métodos de Teoría del Potencial estudian la distribución de los ceros de los polinomios ortogonales con respecto al producto interno anterior bajo ciertas restricciones sobre los soportes de las medidas $\mu_1$ y $\mu_2$.

Finalmente, podemos mencionar un problema que nos llevaría a considerar el enfoque cuantitativo de la Teoría de Aproximación, el cual mencionamos al inicio de este trabajo.

**Problema 6.** ¿Con qué tipo de norma Sobolev debe dotarse a un espacio de funciones para obtener funciones polinomiales a trozos (splines) que sean "buenos" aproximantes desde el punto de vista númerico?

Hemos expuesto algunos problemas de la Teoría de Aproximación en espacios de Sobolev que están actualmente en vías de estudio o como futuras líneas de investigación. Sin embargo, como ya ha ocurrido a lo largo de los últimos años, muy probablemente nuevos e interesantes aspectos de esta teoría surgirán en un futuro próximo.

# Bibliografía

[1] R. A. Adams, "Sobolev Spaces", Academic Press Inc., San Diego, 1978.

[2] N. I. Achieser, "Theory of Approximation", traducido por C. J. Hyman, Dover, New York, 1992.

[3] V. Alvarez, D. Pestana, J. M. Rodríguez, E. Romera, Weighted Sobolev spaces on curves, *J. Approx. Theory* **119** (2002), 41-85.

[4] R. C. Brown, B. Opic, Embeddings of weighted Sobolev spaces into spaces of continuous functions, *Proc. R. Soc. Lond. A* **439** (1992), 279-296.

[5] A. Branquinho, A. Foulquié, F. Marcellán, Asymptotic behavior of Sobolev type orthogonal polynomials on a rectifiable Jordan curve or arc, *Constr. Approx.* **18** (2002), 161-182.

[6] A. Cachafeiro, F. Marcellán, Orthogonal polynomials of Sobolev type on the unit circle, *J. Approx. Theory* **78** (1994), 127-146.

[7] E. W. Cheney "Introduction to Approximation Theory", McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[8] P. J. Davis, "Interpolation and Approximation", Dover, New York, 1975.

[9] B. Della Vecchia, G. Mastroianni, J. Szabados, Approximation with exponential weights in $[-1, 1]$, *J. Math. Anal. Appl.* **272** (2002), 1-18.

[10] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn, The density of polynomials in a weighted Sobolev space, *Rendiconti di Matematica*, Serie VII, **10** (1990), 835-852.

[11] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn, S. C. Williams, "Orthogonal polynomials in weighted Sobolev spaces", pp. 53-72, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 117, Marcel Dekker, 1989.

[12] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn, S. C. Williams, Orthogonal polynomials and approximation in Sobolev spaces, *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993), 69-90.

[13] A. Foulquié, F. Marcellán, K. Pan, Asymptotic behavior of Sobolev-type orthogonal polynomials on the unit circle, *J. Approx. Theory* **100** (1999), 345-363.

[14] W. Gautschi, A. B. J. Kuijlaars, Zeros and critical points of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **91** (1997), 117-137.

[15] M. de Guzmán, "Real Variable Methods in Fourier Analysis", North-Holland (Mathematics Studies), Amsterdam, 1981.

[16] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, "Nonlinear Potential Theory of degenerate elliptic equations", Oxford Science Publ., Clarendon Press, 1993.

[17] A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett, J. M. Sanz-Serna, "Orthogonality and approximation in a Sobolev space" in "Algorithms for Approximation". J. C. Mason and M. G. Cox, Chapman & Hall, London, 1990.

[18] A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett, J. M. Sanz-Serna, Weighted Sobolev spaces and capacity, *J. Approx. Theory* **65** (1991), 151-175.

[19] T. Kilpeläinen, Weighted Sobolev spaces and capacity, *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Series A. I. Math. **19** (1994), 95-113.

[20] A. Kufner, "Weighted Sobolev Spaces", Teubner Verlagsgesellschaft, Teubner-Texte zur Mathematik (Band 31), 1980. Publicado también por John Wiley & Sons, 1985.

[21] A. Kufner, B. Opic, How to define reasonably Weighted Sobolev Spaces, *Commentationes Mathematicae Universitatis Caroline* **25**(3) (1984), 537-554.

[22] A. Kufner, A. M. Sändig, "Some Applications of Weighted Sobolev Spaces", Teubner Verlagsgesellschaft, Teubner-Texte zur Mathematik (Band 100), 1987.

[23] D. S. Lubinsky, Weierstrass' Theorem in the twentieth century: a selection, *Quaestiones Mathematicae 18* (1995), 91-130.

[24] G. López Lagomasino, H. Pijeira, Zero location and $n$-th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **99** (1999), 30-43.

[25] G. López Lagomasino, H. Pijeira, I. Pérez, Sobolev orthogonal polynomials in the complex plane, *J. Comp. Appl. Math.* **127** (2001), 219-230.

[26] V. G. Maz'ja, "Sobolev spaces", Springer-Verlag, 1985.

[27] B. Muckenhoupt, Hardy's inequality with weights, *Studia Math.* **44** (1972), 31-38.

[28] L. Nachbin, "Elements of Approximation Theory", ediciones del I.M.P.A. Río de Janeiro, Brasil, 1965.

[29] A. Pinkus, Weierstrass and Approximation Theory, *J. Approx. Theory* **107** (2000), 1-66.

[30] A. Portilla, Y. Quintana, J. M. Rodríguez, E. Tourís, Weighted Weierstrass' Theorem. Aceptado para su publicación en *J. Approx. Theory.*

[31] A. Portilla, Y. Quintana, J. M. Rodríguez, E. Tourís, Weighted Weierstrass' Theorem with first derivatives. Preprint.

[32] A. Portilla, Y. Quintana, J. M. Rodríguez, E. Tourís, Weierstrass' Theorem in weighted Sobolev spaces with $k$ derivatives. Preprint.

[33] J. M. Rodríguez, V. Alvarez, E. Romera, D. Pestana, Generalized weighted Sobolev spaces and applications to Sobolev orthogonal polynomials I. Aceptado para su publicación en *Acta. Appl. Math.*

[34] J. M. Rodríguez, V. Alvarez, E. Romera, D. Pestana, Generalized weighted Sobolev spaces and applications to Sobolev orthogonal polynomials II, *Approx. Theory and its Appl.* **18:2** (2002), 1-32.

[35] J. M. Rodríguez, Weierstrass' Theorem in weighted Sobolev spaces, *J. Approx. Theory* **108** (2001), 119-160.

[36] J. M. Rodríguez, The multiplication operator in weighted Sobolev spaces with respect to measures, *J. Approx. Theory* **109** (2001), 157-197.

[37] J. M. Rodríguez, Approximation by polynomials and smooth functions in Sobolev spaces with respect to measures, *J. Approx. Theory* **120** (2003), 185-216.

[38] J. M. Rodríguez, V. A. Yakubovich, Completeness of polynomials in Sobolev spaces. Aceptado para su publicación en *Illinois J. Math.*

[39] W. Rudin, “Real and Complex Analysis” (Second Edition), McGraw-Hill, 1974.

[40] G. Szegö, “Orthogonal Polynomials”, Coll. Publ. Amer. Math. Soc., Vol. 23, (4th ed.), Providence, R.I., 1975.