Problemas de puntos del retículo en el toro sólido

Dulcinea Raboso

Instituto de Ciencias Matemáticas, Madrid

Universidad Carlos III

19 de mayo, 2015

Puntos del retículo

El problema: Estimar el número de puntos con coordenadas enteras en grandes dominios acotados.

En general, dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ consideramos el dominio expandido $\Omega_R = R\Omega$ con R una constante grande.

Bajo ciertas condiciones, el número de puntos enteros en Ω_R es **aproximadamente** el volumen de la región estudiada,

$$|\Omega_R \cap \mathbb{Z}^d| = |\Omega| R^d + O\big(R^\alpha\big)$$

La pregunta: ¿Cuál es el mejor valor (ínfimo) de α?

Fórmula de sumación de Poisson

$$|\Omega_R \cap \mathbb{Z}^d| = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \chi_{\Omega_R}(\vec{n}) \text{``=''} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d} \widehat{\chi}_{\Omega_R}(\vec{n})$$

donde χ_Ω es la función característica de Ω y

$$\widehat{\chi}_\Omega(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\Omega(\vec{x}) e^{-2\pi i \vec{\xi} \cdot \vec{x}} \, d\vec{x}$$

su transformada de Fourier.

$$\boxed{\widehat{\chi}_{\Omega_R}(\vec{n}) = R^d \widehat{\chi}_\Omega(R\vec{n})}$$

Fórmula de sumación de Poisson

$$|\Omega_R \cap \mathbb{Z}^d| = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \chi_{\Omega_R}(\vec{n}) \text{“}=\text{”} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\chi}_{\Omega_R}(\vec{n})$$

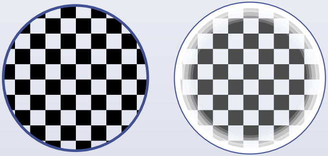
$$\vec{n} = \vec{0} \xrightarrow[\text{término principal}]{} \widehat{\chi}_{\Omega_R}(\vec{0}) = |\Omega| R^d$$

$$\vec{n} \neq \vec{0} \rightsquigarrow_{\text{términos que oscilan}} \sum_{\vec{0}\neq\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\chi}_{\Omega_R}(\vec{n})$$

La convergencia de la última suma no está asegurada. Para $d = 1, 2$ es condicionalmente convergente y para $d \geq 3$ ni siquiera parece converger.

Regularización

$$|\Omega_R \cap \mathbb{Z}^d| = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \chi_{\Omega_R}(\vec{n}) \text{“=”} \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\chi}_{\Omega_R}(\vec{n})$$



Principio de incertidumbre

frecuencias mayores que δ^{-1}

$\updownarrow$

detalles de tamaño δ

$$|\Omega_R \cap \mathbb{Z}^d| \underset{\text{aprox.}}{=} \sum_{\|\vec{n}\|<\delta^{-1}} \widehat{\chi}_{\Omega_R}(\vec{n}) + O\left(R^{d-1}\delta\right)$$

Estimación

$$|\Omega_R \cap \mathbb{Z}^d| \underset{\text{aprox.}}{=} |\Omega| R^d + \sum_{0 \neq \|\vec{n}\| < \delta^{-1}} \widehat{\chi}_{\Omega_R}\big(\vec{n}\big) + O\big(R^{d-1}\delta\big)$$

Si tomamos δ pequeño, el último término es pequeño pero entonces necesitaríamos una **buena** estimación de sumas trigonométricas para cuantificar la cancelación entre el resto de términos que oscilan.

Se llama *exponente trivial* al que proviene de olvidarse de la oscilación y usar $\widehat{\chi}(\vec{\xi}) = O\big(\|\vec{\xi}\|^{-(d+1)/2}\big)$.

Puntos del retículo en bolas

$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d \ : \ \|\vec{n}\| \leq R\} = \frac{\pi^{d/2} R^d}{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)} + O\left(R^{\alpha_d}\right)$$

con α_d el ínfimo de todos los valores válidos en la aproximación.

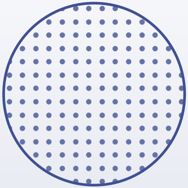
¿Qué ocurre en distintas dimensiones?

- $d = 1$ ⇢ $\alpha_1 = 0$
- $d \geq 4$ ⇢ $\alpha_d = d - 2$
- $d = 2, \ d = 3$ ⇢ Problema abierto.

Problema del círculo

Ω = círculo unidad, $d = 2$

$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \; : \; \|\vec{n}\| \leq R\} = \pi R^2 + O\big(R^{\alpha_2}\big)$$



α_2

$\frac{2}{3} = 0,6666\ldots \longleftarrow$ W. Sierpinski (1906)

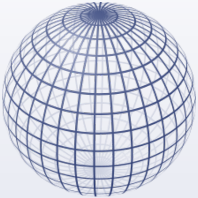
$\frac{131}{208} = 0,6298\ldots \longleftarrow$ M.N. Huxley (2003)

Exponente "trivial"

Problema de la esfera

Ω = esfera unidad, $d = 3$

$$\#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3 \ : \ \|\vec{n}\| \leq R\} = \frac{4\pi}{3} R^3 + O\big(R^{\alpha_3}\big)$$



α_3

$\frac{3}{2} = 1,5$ $\longleftarrow$ E. Landau (1912)

$\frac{21}{16} = 1,3125$ $\longleftarrow$ D.R. Heath-Brown (1999)

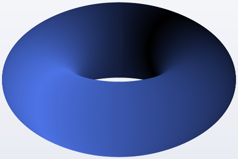
Exponente "trivial"

Puntos del retículo en el toro

Consideramos el toro sólido

$$\mathbb{T} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\rho' - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 \leq \rho^2\right\},$$

donde $0 < \rho < \rho'$ son constantes fijadas.



Teorema (F. Chamizo, D.R.)

$$|\mathbb{T}_R \cap \mathbb{Z}^3| = |\mathbb{T}| R^3 + M(R) R^{3/2} + O\left(R^\alpha\right) \text{ para cualquier } \alpha > 4/3,$$

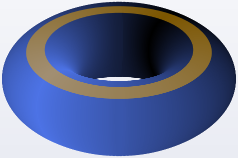
donde $M(R)$ es cierta función periódica explícita.

Puntos del retículo en el toro

Consideramos el toro sólido

$$\mathbb{T} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \big(\rho' - \sqrt{x^2+y^2}\big)^2 + z^2 \le \rho^2\Big\},$$

donde $0 < \rho < \rho'$ son constantes fijadas.



Teorema (F. Chamizo, D.R.)

$$|\mathbb{T}_R \cap \mathbb{Z}^3| = |\mathbb{T}|R^3 + M(R)R^{3/2} + O\big(R^{\alpha}\big) \text{ para cualquier } \alpha > 4/3,$$

donde $M(R)$ es cierta función periódica explícita.

El término principal secundario proviene de los puntos donde la curvatura (gaussiana) es nula.

$$|\mathbb{T}_R \cap \mathbb{Z}^3| \underset{\text{aprox.}}{=} |\mathbb{T}|R^3 + \sum_{0 \neq \|\vec{n}\| < \delta^{-1}} \widehat{\chi}_{\mathbb{T}_R}(\vec{n}) + O\big(R^2\delta\big)$$

Tomando $\delta = R^{-2/3}$, se tiene $O\big(R^2\delta\big) = O\big(R^{4/3}\big)$.

$$\sum_{0 \neq \|\vec{n}\| < R^{2/3}} \widehat{\chi}_{\mathbb{T}_R}(\vec{n})$$

$\vec{n} = (0, 0, n)$ $\xrightarrow[\text{término principal secundario}]{}$ $M(R)R^{3/2}$

otro caso $\xrightarrow[\text{término de error}]{}$ $O\big(R^{4/3}\big)$

Nuestro método

1 Utilizar el principio de fase estacionaria para conseguir una nueva suma trigonométrica.

Su uso colapsa cuando $\vec{n}$ es paralelo al vector normal en algún punto de curvatura cero de $\mathbb{T}_R$.

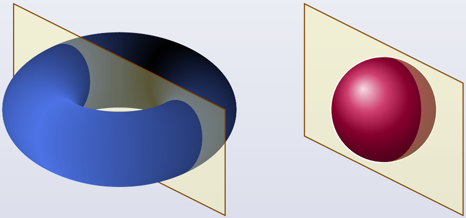
En nuestro caso, debemos separar los vectores verticales:

$$\boxed{\sum_{0<n<R^{2/3}} \widehat{\chi}_{\mathbb{T}_R}(0,0,n) \longrightarrow 4\pi\rho\rho' R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(2\pi\rho R n)}{n}}$$

El término principal secundario tiene una carácter oscilatorio y se aproxima por $R^{3/2}$ veces una función ρ^{-1}-periódica.

Nuestro método

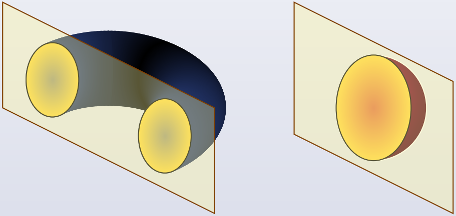
Para acotar el resto de la suma, adaptamos un truco introducido para el problema de la esfera.



Geométricamente, las secciones de un toro y una esfera son parecidas y se diferencian en una traslación.

Nuestro método

Para acotar el resto de la suma, adaptamos un truco introducido para el problema de la esfera.



Geométricamente, las secciones de un toro y una esfera son parecidas y se diferencian en una traslación.

Nuestro método

2 Usar las simetrías para "pegar" las variables.

En principio, $\widehat{\chi}_{\mathbb{T}}$ viene dada por una integral triple pero el toro tiene una simetría cilíndrica que se conserva en el lado de la trasformada de Fourier.

$$\sum_m \sum_n \sum_l f\left(\sqrt{n^2+m^2}, l\right)$$

$$\Big\downarrow \; k = n^2 + m^2$$

$$\sum_k \sum_l r(k) f\left(\sqrt{k}, l\right)$$

donde $r(k)$ es el número de representaciones de k como suma de dos cuadrados.

Nuestro método

3 Después de algunas manipulaciones, la suma es como la que aparece en el problema de la esfera.

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\Big|\sum_{k\le K}\sum_{l} r(k) f\big(\sqrt{k}, l\big)\Big|^2 \underset{\text{aprox.}}{\le} K\sum_{k\le K}\Big|\sum_{l} f\big(\sqrt{k}, l\big)\Big|^2$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{l_1}\sum_{l_1}\sum_{k} f\big(\sqrt{k}, l_1\big)\bar{f}\big(\sqrt{k}, l_2\big)$$

y la suma interior es más fácil de estudiar por el control en la oscilación.

F. Chamizo, D. Raboso *Lattice points in the 3-dimensional torus*.
J. Math. Anal. Appl. 429 (2015), 733 - 743.