Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas

Cálculo I – Examen Final

Grado de Ingeniería Mecánica

Grupos: 11–12–13–14–15–16–17

Curso 2009/2010 - 22 de enero de 2010

Soluciones

Problema 1 (1 puntos) Dada la sucesión

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}+1}{2}, \\ u_0 = 0 \quad . \end{cases}$$

a) Estudiar su monotonía.

b) Analizar si es acotada o no.

c) En caso de ser convergente hallar su límite.

R/:

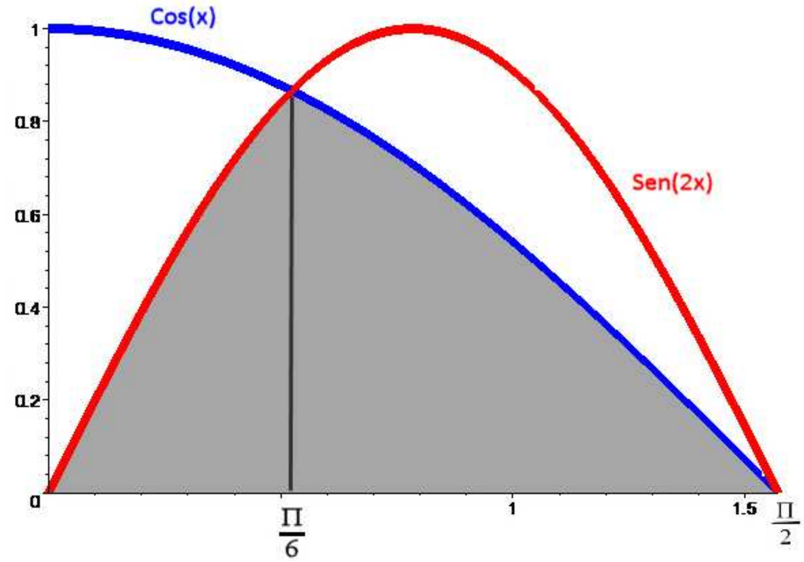
a) La sucesión es monótona creciente. La prueba se realiza por inducción. Sea n=0, tenemos que $u_0 < u_1$. Supongamos la propiedad cierta para $n = k$. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_{k-1} < u_k$, aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad, sumando uno y dividiendo entre dos tendremos que $u_k < u_{k+1}$, luego la propiedad es valida para $n = k+1$. Por tanto la sucesión es monótona creciente.

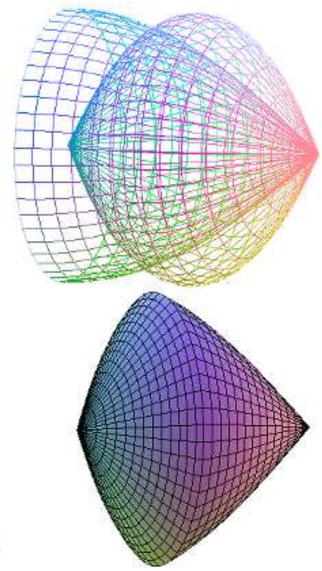
b) Hallemos los puntos l tales que $l = \dfrac{\sqrt{l}+1}{2}$. Esta expresión es equivalente a $4l^2 - 4l + 1 = 0$ o $(4l-1)(l-1) = 0$ lo cual nos da, $l = \dfrac{1}{4}, \quad l = 1$. Probemos que $u_n < 1$. Aplicando el principio de inducción tenemos que $u_0 < 1$. Supongamos la propiedad cierta para $n = k$. Por hipótesis de inducción tenemos que $u_{k-1} < 1$, aplicando raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad, sumando uno y dividiendo entre dos tendremos que $u_k < 1$, luego la propiedad es valida para $n = k+1$. Por tanto la sucesión es acotada superiormente.

c) De a) y b) tenemos que la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, por el teorema de Weierstrass tenemos que la sucesión es convergente y su limite es 1.

Problema 2 (1 puntos) Calcula el volumen generado al girar alrededor del eje X el área encerrada por las curvas $y = \operatorname{sen}(2x)$, $y = \cos(x)$ e $y = 0$ cuando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

R/: Veamos el gráfico de la región limitada por la curvas y el sólido resultante de la rotación





Punto de intercepción $\operatorname{sen}(2x) = \cos(x) \quad \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

$$
\begin{aligned}
V(S) &= \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^2(2x)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx\right) \\
&= \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(4x)}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\right) dx\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos(4x))\, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x))\, dx\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\right) \\
&= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\sqrt{3}\pi}{16}.
\end{aligned}
$$

Volumen $\boxed{\frac{\pi^2}{4} - \frac{3\sqrt{3}\pi}{16}\ u^2.}$

Problema 3 (2 puntos) Dada la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\log(t+1)-t}{t^2}dt$:

3.1.- Desarrollar $f(x)$ en serie de potencias de x.

R/:

$$
\begin{aligned}
\log(t+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n \\
\frac{\log(t+1)-t}{t^2} &= \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n - t}{t^2} = \frac{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n}{t^2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} t^n \\
f(x) = \int_0^x \frac{\log(t+1)-t}{t^2}dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \left(\int_0^x t^n dt \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{(n+1)n} .
\end{aligned}
$$

Entonces $\boxed{f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n(n+1)}.}$

3.2.- Hallar el dominio de convergencia absoluta de la serie obtenida en el apartado anterior.

R/:

$$
\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right|}{\left|\frac{(-1)^n\, x^n}{n(n+1)}\right|} = \left|\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right| |x| = \left|\frac{n}{n+2}\right| |x| < 1
$$

$$
|x| < \frac{n+2}{n} \quad \therefore \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1
$$

La serie es absolutamente convergente en el intervalo $[-1, 1]$.

3.2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\, f(x)}{1-\cos(x)}$.

R/: Infinitésimos equivalentes:

$$
\begin{aligned}
1-\cos(x) &\approx \frac{x^2}{2} \\
f(x) &\approx -\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

Entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\, f(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(-\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}} = -1.$

Problema 4 (2 puntos) Dada la función $g(x) = \sqrt[3]{x}\ e^{-x^2}$:

4.1.- (0,2 puntos) Hallar el dominio de definición.

R/: El dominio de definición de $g(x)$ es $\mathbb{R}$.

4.2.- (0,5 puntos) Hallar los intervalos de monotonía y extremos relativos.

R/: $g'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}}\right)\ e^{-x^2}$,

$$g'(x) = 0 \implies \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}}\right)\ e^{-x^2} = 0$$

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}} = 0 \implies 1 - 6x^2 = 0 \implies x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Puntos críticos: $x = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $x = 0$ y $x = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty\right)$
Signo de $g'(x)$	-	0	$+$	No def.	$+$	0	-
Monot. y Extr.	Decrec.	Pto. Mín.	Crec.	///	Crec.	Pto. Máx.	Decrec.
$g(x)$		$-(6\,e)^{-1/6}$				$(6\,e)^{-1/6}$	

Extremos: un mínimo en $(-6^{-1/2}, -(6\,e)^{-1/6})$ y un máximo en $(6^{-1/2}, (6\,e)^{-1/6})$.

4.3.- (0,5 puntos) Hallar los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión.

R/: $g''(x) = \left(-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{10}{3}x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{7}{3}}\right)\ e^{-x^2}$,

$$g''(x) = 0 \implies \left(-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{10}{3}x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{7}{3}}\right)\ e^{-x^2} = 0$$

$$-\frac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{7}{3}} = 0 \implies 18x^4 - 15x^2 - 1 = 0 \text{ ecuación bicuadrada}$$

$$18y^2 - 15y - 1 = 0 \implies y = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{33}}{12}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{33}}{12}}$$

Puntos críticos de $g''(x)$ $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{33}}{12}}$, $x_2 = 0$ y $x_3 = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{33}}{12}}$.

	$(-\infty, x_1)$	x_1	$(x_1, 0)$	0	$(0, x_3)$	x_3	(x_3, ∞)
Signo de $g''(x)$	-	0	$+$	No def.	-	0	$+$
Curvat. e Inflex.	Cóncava	Pto. Infl.	Convexa	Pto. Infl.	Cóncava	Pto. Infl.	Convexa
$g(x)$	$\bigcap$	y_1	$\bigcup$	0	$\bigcap$	y_3	$\bigcup$

donde $y_1 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{33}}{12}\right)^{1/6} e^{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}}$ e $y_3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{33}}{12}\right)^{1/6} e^{\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{33}}{12}}$.

4.4.- (0,3 puntos) Hallar las asíntotas.

Asíntota Vertical	No existen		
Asíntota Oblicua ($x \to \infty$)	$y = 0$	$m_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{xe^{x^2}} = 0$	$b_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{e^{x^2}} = 0$
Asíntota Oblicua ($x \to -\infty$)	$y = 0$	$m_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{xe^{x^2}} = 0$	$b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{e^{x^2}} = 0$

4.5.- (0,5 puntos) Construir el gráfico de $g(x)$.