



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

TESIS DOCTORAL

**Transformaciones Espectrales, Funciones de
Carathéodory y Polinomios Ortogonales en la
Circunferencia Unidad**

AUTOR:

Luis Enrique Garza Gaona

DIRECTOR:

Francisco Marcellán Español

Leganés, Febrero de 2009

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TRANSFORMACIONES ESPECTRALES, FUNCIONES DE
CARATHÉODORY Y POLINOMIOS ORTOGONALES EN LA
CIRCUNFERENCIA UNIDAD

Autor: **Luis Enrique Garza Gaona**
Ingeniero en Electrónica

Memoria presentada para optar al grado de doctor en Ingeniería Matemática.
Realizada bajo la dirección de **Dr. Francisco Marcellán Español**.

Febrero, 2009.

TESIS DOCTORAL

Transformaciones Espectrales, Funciones de Carathéodory y Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad

Autor: Luis Enrique Garza Gaona

Director: Francisco Marcellán Español

Tribunal Calificador

Firma

Presidente: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Calificación:

Leganés, de de 200

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Agradecimientos. | 3 |
| Introducción. | 3 |
| 1. Polinomios ortogonales. | 9 |
| 1.1. Polinomios ortogonales en la recta real. | 9 |
| 1.1.1. Definiciones y propiedades generales. | 9 |
| 1.1.2. Transformaciones espectrales lineales en la recta real. | 14 |
| 1.1.3. Transformaciones espectrales racionales en la recta real. | 15 |
| 1.1.4. Polinomios ortogonales clásicos. | 17 |
| 1.2. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad. | 20 |
| 1.2.1. Definiciones y propiedades generales. | 20 |
| 1.2.2. Matrices de Hessenberg. | 26 |
| 1.2.3. Transformaciones espectrales en la circunferencia unidad. | 34 |
| 2. Transformaciones espectrales lineales I. | 39 |
| 2.1. La transformación de Christoffel. | 40 |
| 2.1.1. Matrices de Hessenberg. | 41 |
| 2.1.2. Funciones de Carathéodory. | 48 |
| 2.1.3. Coeficientes de Verblunsky | 50 |
| 2.2. Transformaciones $\mathcal{L}_R = \Re[P_n(z)]\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_I = \Im[P_n(z)]\mathcal{L}$ | 55 |
| 2.2.1. Matrices de Hessenberg. | 58 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 2.2.2. | Funciones de Carathéodory. | 59 |
| 2.2.3. | Coeficientes de Verblunsky. | 62 |
| 2.2.4. | Ejemplos. | 64 |
| 3. | Transformaciones espectrales lineales II. | 71 |
| 3.1. | La transformación de Geronimus. | 71 |
| 3.1.1. | Matrices de Hessenberg. | 76 |
| 3.1.2. | Funciones de Carathéodory. | 84 |
| 3.2. | Transformación de Uvarov con una masa. | 86 |
| 3.2.1. | Matrices de Hessenberg. | 88 |
| 3.2.2. | Coeficientes de Verblunsky. | 90 |
| 3.3. | Transformación de Uvarov con dos masas. | 94 |
| 3.3.1. | Matrices de Hessenberg | 97 |
| 3.3.2. | Funciones de Carathéodory. | 100 |
| 3.3.3. | Coeficientes de Verblunsky. | 101 |
| 4. | La transformación de Szegő. | 111 |
| 4.1. | La transformación de Szegő y la factorización LU. | 112 |
| 4.2. | Transformaciones espectrales lineales. | 114 |
| 4.2.1. | La transformación de Christoffel. | 114 |
| 4.2.2. | La transformación de Uvarov. | 116 |
| 4.2.3. | La transformación de Geronimus. | 118 |
| 4.2.4. | Ejemplos. | 119 |
| 4.3. | Transformaciones espectrales racionales. | 127 |
| 4.3.1. | La transformación de Szegő y los polinomios asociados de primera especie en la recta real. | 127 |
| 4.3.2. | La transformación de Szegő y los polinomios antiasociados de primera especie en la recta real. | 130 |
| 4.3.3. | La antitransformación de Szegő y los polinomios asociados de segunda especie en la circunferencia unidad. | 134 |
| 4.3.4. | La antitransformación de Szegő y los polinomios asociados de orden N en la circunferencia unidad. | 136 |
| 4.3.5. | La antitransformación de Szegő y los polinomios antiasociados de orden N en la circunferencia unidad. | 142 |
| | Problemas abiertos. | 149 |

Antecedentes.

La teoría de polinomios ortogonales respecto a medidas cuyo soporte se encuentra en la recta real tiene un amplio espectro de aplicaciones, tales como integración numérica, sistemas integrables, métodos espectrales para el tratamiento de problemas de valores en la frontera, teoría de grafos, etc. En los últimos años, se han estudiado las propiedades espectrales de las matrices de Jacobi asociadas a dichos polinomios ortogonales que representan, en forma matricial, el operador de multiplicación respecto a una base de polinomios ortogonales. A este respecto, en [94] y [103] se pone de manifiesto una conexión entre perturbaciones de medidas y la factorización LU de las matrices de Jacobi correspondientes, así como la relación entre las funciones de Stieltjes asociadas, de gran importancia en el estudio de los polinomios ortogonales, que actúan como funciones generadoras de la sucesión de momentos asociada con la medida.

Dichas perturbaciones han sido estudiadas en el marco de las llamadas transformaciones de Darboux, que tienen su origen en el problema biespectral ([56]). En su formulación original, dicho problema consiste en obtener una descripción de todas las situaciones en las que un par de operadores diferenciales en dos variables distintas tienen una autofunción diferencial común. El uso de la transformación de Darboux para convertir un operador diferencial de segundo orden en otro fué llevado a cabo en [26]. Dicha transformación consiste en factorizar el

operador diferencial de segundo orden como un producto de dos operadores diferenciales de primer orden, y luego cambiar el orden de los factores, obteniendo un nuevo operador diferencial de segundo orden. Una conexión con los polinomios ortogonales surgió más tarde en [53], donde se muestra que todos los operadores diferenciales con soporte en $[-1, 1]$ y los operadores diferenciales de segundo orden que satisfacen el problema espectral resultan de un cambio en la variable n en la relación de recurrencia que satisfacen los polinomios ortogonales clásicos. Casi al mismo tiempo, en [54], [55] se consideró la matriz de Jacobi mónica correspondiente a la transformación de Uvarov, en el contexto del análisis espectral de ecuaciones diferenciales lineales de cuarto orden con coeficientes polinómicos. Las soluciones polinómicas de dichas ecuaciones diferenciales son los llamados polinomios ortogonales de Krall, que obtuvieron a partir de los polinomios ortogonales clásicos por medio de una combinación de dos procesos llamados transformación de Darboux y transformación de Darboux sin parámetro. Más recientemente, el estudio de las transformaciones espectrales en dicho marco fué desarrollado tanto desde un punto de vista teórico ([13], [14], [102]) como numérico ([11], [12]).

Las transformaciones espectrales también encuentran aplicación en la teoría de sistemas integrables. Como ejemplo, en [99] se considera una familia de polinomios ortogonales simétricos con respecto a una función peso par $\omega(x, t)$, que satisfacen una relación de recurrencia de la forma

$$xP_n(x, t) = P_{n+1}(x, t) + d_n(t)P_{n-1}(x, t),$$

i.e., los coeficientes son, además, funciones dependientes del tiempo t . En este caso, se tiene un desarrollo de la forma

$$\dot{P}_n(x, t) := \frac{\partial P_n(x, t)}{\partial t} = C_{n-2}^{(n)}(t)P_{n-2}(x, t) + \dots + C_{n-2k}^{(n)}(t)P_{n-2k}(x, t) + \dots$$

Resulta de interés determinar los casos integrables de tales sistemas y determinar dichos coeficientes de manera que sean válidos para todo valor de t . Este problema es conocido en la literatura física-matemática como el "problema de jerarquía de Volterra". En el caso más simple,

$$\dot{P}_n(x, t) = C_{n-2}(t)P_{n-2}(x, t),$$

tenemos $C_{n-2} = -d_n(t)d_{n-1}(t)$ y, por tanto, $\dot{d}_n = d_n(d_{n+1} - d_{n-1})$. En este caso, la función peso está dada por $\omega(x, t) = \omega(x, 0)e^{x^2 t}$.

Para un caso más general, en [99] se presenta un sistema cuya función peso asociada resulta ser

$$\omega(x, t) = [1 - M(t)]\omega(x, t_0) + M(t)\delta(x),$$

donde $M(t) = 1 - \exp(-\int_{t_0}^t \frac{dz}{d_1(z)})$, y t_0 es un valor de tiempo tal que $\omega(x, t_0) \neq 0$. En otras palabras, $\omega(x, t)$ es un caso de la denominada transformación de Uvarov de $\omega(x, t_0)$, que consiste en la adición de una masa dependiente del parámetro temporal.

Por otro lado, el estudio de los polinomios ortogonales con respecto a una medida de probabilidad no trivial, soportada en la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ fué iniciado por G. Szegő en una serie de artículos publicados entre 1915 y 1925 (ver [96]). Posteriormente, Ya. L. Geronimus ([43], [44] y [45]) extendió esta teoría en un contexto más general de ortogonalidad respecto a funcionales, basado en la teoría clásica de funciones de variable compleja. Un eje importante de actividad investigadora en la década de los cincuenta fué el estudio de la conexión con el problema trigonométrico de momentos y la teoría de procesos estocásticos estacionarios dicretos ([52]). Más tarde, en los años ochenta, se analiza el problema desde una perspectiva algebraica ligada al problema de factorización de matrices de Hessenberg (la representación matricial del operador de multiplicación respecto a la base de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad) de dimensión finita ([51]). De la misma manera, aparece una abundante bibliografía en teoría de sistemas lineales relacionados con polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, en el marco de los generadores de espacio de estado (ver, por ejemplo, [63] y referencias contenidas ahí).

Posteriormente, en la década de los noventa, se desarrolla una teoría constructiva de familias de polinomios ortogonales asociados a perturbaciones de medidas soportadas en la circunferencia unidad (ver [8], [46], [47], [60], [67], [69], [74], [75], [83], entre otros), así como una interpretación basada en la representación matricial del operador de multiplicación respecto a una base ortonormal en relación a medidas soportadas en un arco de la circunferencia unidad ([49], [50]).

Sin embargo, el estudio de las transformaciones espectrales en la circunferencia unidad no ha tenido aún la atención que ha alcanzado en el caso de la recta real. El trabajo de esta memoria está enfocado en dicha dirección. Por analogía

con el caso real, estudiamos las transformaciones espectrales desde distintos enfoques, como son las funciones de Carathéodory (el análogo de las funciones de Stieltjes en la recta real), las matrices de Hessenberg y las familias de coeficientes de Verblunsky (es decir, las evaluaciones en el punto $z = 0$ de los polinomios ortogonales) asociadas a una medida de probabilidad soportada en la circunferencia unidad.

El inicio del siglo XXI está marcado con la aparición de los dos volúmenes de la monografía de B. Simon ([92]) que constituyen la descripción más exhaustiva del estado del arte en la teoría de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad hasta la fecha. Uno de los resultados más importantes es el tratamiento de la representación matricial del operador de multiplicación respecto a bases ortonormales en el espacio de los polinomios de Laurent $\Lambda = \text{span}\{z^k : k \in \mathbb{Z}\}$ construidas a partir del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt de las familias $S = \{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots\}$ y $T = \{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \dots\}$. La matriz resultante, conocida como matriz CMV, es pentadiagonal y admite una factorización en términos de dos matrices diagonales por bloques de dimensión 2×2 la primera y de un único bloque de dimensión 1×1 y los restantes de dimensión 2×2 la segunda, cuyos elementos pueden ser expresados en términos de los coeficientes de Verblunsky.

Finalmente, es posible establecer una conexión entre medidas soportadas en el intervalo $[-1, 1]$ de la recta real y medidas soportadas en la circunferencia unidad, conocida en la literatura como transformación de Szegő. En [96] se muestra no solamente cómo están relacionadas dichas medidas, sino también la relación existente entre las familias de polinomios ortogonales correspondientes, así como la relación entre las familias de parámetros de la relación de recurrencia de los polinomios ortogonales en la recta real y la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a la medida soportada en la circunferencia unidad. Abordamos de igual manera las transformaciones espectrales desde esta perspectiva, centrándonos en el estudio de la relación entre las funciones de Stieltjes correspondientes a medidas en la recta real y las funciones de Carathéodory correspondientes a medidas en la circunferencia unidad.

El interés de la transformación de Szegő no es solamente desde una perspectiva teórica, sino que desde el punto de vista computacional ha sido usada de manera sistemática en el estudio de fórmulas de cuadratura de Szegő en la circunferencia unidad y su aplicación a fórmulas de cuadratura en intervalos de la recta real ([6], [16], [24]).

Contribuciones originales de la Memoria.

En el capítulo 2, se obtiene una expresión explícita para la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a la transformación de Christoffel en términos de la familia de los coeficientes de Verblunsky asociados con la medida original, y se lleva a cabo un análisis del comportamiento asintótico de los mismos. En el mismo capítulo, con respecto a la transformación consistente en la multiplicación de la medida por la parte real de un polinomio, se obtiene la relación entre las correspondientes funciones de Carathéodory, utilizando la representación integral de Riesz-Herglotz de la función de Carathéodory original. Dicha relación fué obtenida en [17] utilizando un método distinto. Además, se obtiene una relación entre las correspondientes matrices de Hessenberg y un análisis asintótico de la familia de coeficientes de Verblunsky asociada a la medida perturbada.

En el capítulo 3, se estudia la transformación de Geronimus. Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para que el funcional lineal asociado a dicha transformación sea cuasi-definido asumiendo que el funcional lineal original es definido positivo. También se obtiene la expresión explícita para la nueva familia de polinomios ortogonales en términos de la sucesión de polinomios ortogonales asociados con el funcional lineal original, así como la relación entre las correspondientes matrices de Hessenberg. También se estudia el comportamiento asintótico de las familias de coeficientes de Verblunsky asociadas a las transformaciones de Uvarov con una y dos masas, respectivamente.

Finalmente, en el capítulo 4 se estudia la conexión entre medidas soportadas en el intervalo $[-1, 1]$ de la recta real y medidas soportadas en la circunferencia unidad, a través de la transformación de Szegő. En primer lugar, se obtiene una relación entre los parámetros de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios ortogonales en la recta real y la familia de coeficientes de Verblunsky en la circunferencia unidad, tomando como base la factorización LU de la matriz de Jacobi correspondiente. Luego, se estudia dicha conexión en el marco de las transformaciones espectrales. Se aplican transformaciones espectrales, tanto lineales como racionales, a funciones de Stieltjes asociadas a medidas en el intervalo $[-1, 1]$ y se describe la transformación resultante en las funciones de Carathéodory asociadas a las correspondientes medidas en la circunferencia unidad. El mismo análisis se lleva a cabo en la dirección contraria, es decir, aplicando transformaciones espectrales a funciones de Carathéodory y describiendo las transformaciones resultantes en las funciones de Stieltjes correspondientes.

Publicaciones resultado de la Memoria.

En relación al capítulo 2, los resultados correspondientes a la transformación de Christoffel pueden encontrarse en [37], mientras que los correspondientes a la transformación resultado de multiplicar la medida por la parte real de un polinomio se encuentran en [38].

Los resultados relativos a la transformación de Geronimus en el capítulo 3 han aparecido en [33], mientras que las transformaciones de Uvarov del mismo capítulo han sido estudiadas en [37].

Por último, los resultados del capítulo 4 se encuentran en [34], [35], y [36].

CAPÍTULO 1

Polinomios ortogonales.

En este capítulo se presentan conceptos básicos sobre polinomios ortogonales en la recta real partiendo de funcionales lineales. Se enuncian algunas de sus propiedades básicas, y se introducen las transformaciones espectrales que serán estudiadas a lo largo de la Memoria, enfatizando dichas transformaciones en términos de la función de Stieltjes.

De manera análoga, se presentan conceptos básicos sobre polinomios ortogonales en la circunferencia unidad, enunciando sus propiedades básicas e introduciendo transformaciones espectrales análogas a las del caso real, haciendo énfasis en las funciones de Carathéodory.

1.1. Polinomios ortogonales en la recta real.

1.1.1. Definiciones y propiedades generales.

Sea $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de números complejos y \mathcal{L} un funcional lineal definido en el espacio \mathbb{P} de los polinomios con coeficientes complejos tal que

$$\langle \mathcal{L}, x^n \rangle = \mu_n, \quad n \geq 0. \quad (1.1)$$

μ_n se denomina *n-ésimo* momento asociado al funcional lineal \mathcal{L} . Dado un funcional lineal \mathcal{L} , una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ se denomina sucesión de

polinomios ortogonales con respecto a \mathcal{L} si

- (i) El grado de $P_n(x)$ es n ,
- (ii) $\langle \mathcal{L}, P_n(x)P_m(x) \rangle = 0$, si $n \neq m$,
- (iii) $\langle \mathcal{L}, P_n^2(x) \rangle \neq 0$, si $n \geq 0$.

Si $P_n(x)$ tiene coeficiente principal 1 para todo n , entonces $\{P_n\}_{n \geq 0}$ se denomina sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados al funcional lineal \mathcal{L} . En lo sucesivo, denotaremos por $P_n(x)$ al n -ésimo polinomio ortogonal mónico. El funcional \mathcal{L} se dice cuasi-definido.

La matriz de Gram del funcional \mathcal{L} respecto a la base canónica $\{x^n\}_{n \geq 0}$ de \mathbb{P} está definida mediante

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n & \cdots \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Las matrices de este tipo, con valores constantes a lo largo de las antidiagonales, son conocidas en la literatura como matrices de Hankel.

La existencia de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos está caracterizada por

Teorema 1 *Sea \mathcal{L} un funcional lineal. Una condición necesaria y suficiente para la existencia de $\{P_n\}_{n \geq 0}$, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L} , es*

$$\Delta_n \neq 0, \quad n \geq 0,$$

donde $\Delta_n = \det(\mathbf{G}_n)$ es el determinante de orden $n + 1$ de la submatriz principal de Hankel \mathbf{G}_n de orden $n + 1$.

La sucesión $\{P_n\}_{n \geq 0}$ satisface la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$P_{n+1}(x) = (x - b_n)P_n(x) - d_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.2)$$

con

$$d_n = \frac{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]}, \quad n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{\mathcal{L}[xP_n^2(x)]}{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}, \quad n \geq 0,$$

y condiciones iniciales $P_0(x) = 1$ y $P_{-1}(x) = 0$. Es un hecho bien conocido que dadas dos sucesiones arbitrarias de números complejos $\{b_j\}_{j \geq 0}$ y $\{d_j\}_{j \geq 1}$, con $d_j \neq 0$, la familia de polinomios generada por (1.2) es ortogonal con respecto a un único funcional cuasi-definido \mathcal{L} . Este resultado se conoce en la literatura como Teorema de Favard (ver [22]).

La representación matricial de (1.2) es

$$xP(x) = \tilde{\mathbf{J}}P(x),$$

donde $P(x) = [P_0(x), P_1(x), \dots]^t$ y $\tilde{\mathbf{J}}$ es la matriz tridiagonal

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ d_1 & b_1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & b_2 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & d_3 & b_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

que denominaremos matriz de Jacobi mónica.

Por otra parte, si el funcional lineal \mathcal{L} es definido positivo, es decir, $\Delta_n > 0$ para todo $n \geq 0$, entonces existe una única sucesión de polinomios

$$p_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \dots, \quad \gamma_n > 0, \quad n \geq 0$$

que satisfacen

$$\langle \mathcal{L}, p_n(x)p_m(x) \rangle = \delta_{n,m}.$$

La sucesión $\{p_n\}_{n \geq 0}$ se dice ortonormal. En este caso, el funcional lineal \mathcal{L} tiene una representación integral (no necesariamente única)

$$\langle \mathcal{L}, x^n \rangle = \int_E x^n d\mu(x),$$

donde μ es una medida positiva de Borel, no trivial, cuyo soporte es un subconjunto infinito de puntos E en la recta real.

Obsérvese que ambas sucesiones de polinomios están relacionadas mediante

$$P_n(x) = \frac{p_n(x)}{\gamma_n}.$$

El n -ésimo polinomio ortonormal, $p_n(x)$, admite la siguiente representación determinantal

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix},$$

y el coeficiente principal de $p_n(x)$, con $n \geq 0$, es el cociente de los determinantes

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}, \quad n \geq 0.$$

Utilizaremos el convenio $\Delta_{-1} = 1$.

Existe una expresión similar a (1.2) utilizando los polinomios ortonormales.

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0. \quad (1.3)$$

En este caso,

$$a_n = \int_E xp_{n-1}(x)p_n(x)d\mu(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} > 0, \quad n \geq 1,$$

y

$$b_n = \int_E xp_n^2(x)d\mu(x) = \frac{\delta_n}{\gamma_n} - \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Obsérvese que, de (1.2), en un caso definido positivo se tiene $d_n = a_n^2 > 0$. La representación matricial de (1.3) es

$$xp(x) = \mathbf{J}p(x),$$

donde $p(x) = [p_0(x), p_1(x), \dots]^t$ y \mathbf{J} es la matriz tridiagonal simétrica

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \ddots \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

que es conocida en la literatura como matriz de Jacobi [22].

Los ceros de los polinomios ortogonales en la recta real asociados a una medida positiva no trivial tienen las siguientes propiedades

Teorema 2 *Los ceros de $P_n(x)$ son reales, simples y se encuentran en el interior de la envoltura convexa del soporte de μ .*

Teorema 3 (*Propiedad de entrelazamiento*). *Supongamos que $x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n}$ son los ceros de $P_n(x)$. Entonces*

$$x_{j,n} < x_{j,n-1} < x_{j+1,n}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Por otra parte, las funciones

$$S_n(x) = \int_E \frac{p_n(t) d\mu(t)}{x-t} \quad (1.4)$$

constituyen una segunda solución independiente de la ecuación en diferencias

$$xy_n = a_{n+1}y_{n+1} + b_ny_n + a_ny_{n-1}, \quad n \geq 0,$$

y se denominan funciones de segunda especie asociadas a μ . La función de Stieltjes

$$S(x) = S_0(x) = \int_E \frac{d\mu(t)}{x-t}$$

tiene una gran importancia en la teoría de polinomios ortogonales y en teoría de aproximación racional (aproximantes de Padé), y admite el siguiente desarrollo en serie en el infinito

$$S(x) = \frac{\mu_0}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{x^{k+1}},$$

donde μ_k son los momentos asociados a μ dados en (1.1). En lo sucesivo, supondremos que $\mu_0 = 1$.

1.1.2. Transformaciones espectrales lineales en la recta real.

Dada una medida μ soportada en la recta real, algunos ejemplos de perturbaciones de dicha medida han sido estudiados en la literatura (ver [13],[103]). En particular, se han considerado tres modelos canónicos

- (i) La perturbación $d\tilde{\mu} = (x - \beta)d\mu$, $\beta \notin \text{supp}(\mu)$, es la llamada transformación canónica de Christoffel.
- (ii) La perturbación $d\tilde{\mu} = d\mu + M_r\delta(x - \beta)$, $\beta \notin \text{supp}(\mu)$, $M_r \in \mathbb{R}$, es la llamada transformación canónica de Uvarov.
- (iii) La perturbación $d\tilde{\mu} = \frac{d\mu}{x-\beta} + M_r\delta(x - \beta)$, $\beta \notin \text{supp}(\mu)$, $M_r \in \mathbb{R}$, es la llamada transformación canónica de Geronimus.

Llamaremos transformación espectral racional de una función de Stieltjes $S(x)$, a una transformación

$$\tilde{S}(x) = \frac{A(x)S(x) + B(x)}{C(x)S(x) + D(x)},$$

donde $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ y $D(x)$ son polinomios en la variable x , y $AD - BC \neq 0$. Si $C(x) = 0$, la transformación racional se dice lineal. Las tres perturbaciones canónicas mencionadas anteriormente corresponden a transformaciones espectrales lineales de las correspondientes funciones de Stieltjes. Las denotaremos mediante $\mathcal{R}_C(\beta)$, $\mathcal{R}_U(\beta, M_r)$ y $\mathcal{R}_G(\beta, M_r)$, respectivamente.

De hecho, las funciones de Stieltjes normalizadas correspondientes a las anteriores perturbaciones están dadas por

- (i) Transformación canónica de Christoffel.

$$S_C(z) = \mathcal{R}_C(\beta)[S(x)] = \frac{(x - \beta)S(x) - 1}{\mu_1 - \beta}. \quad (1.5)$$

- (ii) Transformación canónica de Uvarov.

$$S_U(z) = \mathcal{R}_U(\beta, M_r)[S(x)] = \frac{S(x) + M_r(x - \beta)^{-1}}{1 + M_r}. \quad (1.6)$$

(iii) Transformación canónica de Geronimus.

$$S_G(z) = \mathcal{R}_G(\beta, M_r)[S(x)] = \frac{S(\beta) + M_r - S(x)}{(x - \beta)(M_r + S(\beta))}. \quad (1.7)$$

En [103] se muestra que el grupo de las transformaciones espectrales lineales de la forma

$$\tilde{S}(x) = \frac{A(x)S(x) + B(x)}{D(x)}$$

es un grupo no conmutativo generado a partir de las transformaciones de Christoffel y Geronimus descritas anteriormente. Además,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_C(\beta) \circ \mathcal{R}_G(\beta, M_r)[S(x)] &= S(x) \quad (\text{transformación identidad}), \\ \mathcal{R}_G(\beta, M_r) \circ \mathcal{R}_C(\beta)[S(x)] &= \mathcal{R}_U(\beta, M_r)[S(x)]. \end{aligned}$$

1.1.3. Transformaciones espectrales racionales en la recta real.

1.1.3.1. Polinomios asociados de primera especie en la recta real.

A partir de una familia de polinomios ortogonales mónicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$, podemos definir la sucesión de polinomios asociados mónicos de orden k , $\{P_n^{(k)}\}_{n \geq 0}$, por medio de la relación de recurrencia desplazada [22]

$$P_{n+1}^{(k)}(x) = (x - b_{n+k})P_n^{(k)}(x) - d_{n+k}P_{n-1}^{(k)}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.8)$$

con $P_{-1}^{(k)}(x) = 0$, $P_0^{(k)}(x) = 1$. La relación de recurrencia (1.8) puede también ser escrita en forma matricial

$$xP^{(k)}(x) = J^{(k)}P^{(k)}(x),$$

donde $P^{(k)}(x) = [P_0^{(k)}(x), P_1^{(k)}(x), \dots]^t$ y $J^{(k)}$ es la matriz tridiagonal

$$J^{(k)} = \begin{pmatrix} b_k & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ d_{k+1} & b_{k+1} & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & d_{k+2} & b_{k+2} & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & d_{k+3} & b_{k+3} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

esto es, hemos eliminado en la matriz mónica de Jacobi J , las primeras k filas y columnas.

La función de Stieltjes correspondiente a los polinomios asociados de orden k , $S^{(k)}(x)$, se obtiene mediante la fórmula (ver [98], [103])

$$S^{(k)}(x) = \frac{S_k(x)}{d_1 S_{k-1}(x)}, \quad (1.9)$$

donde $S_k(x)$ está dada por (1.4). También podemos expresar

$$S_k(x) = S(x)P_k(x) - P_{k-1}^{(1)}(x). \quad (1.10)$$

1.1.3.2. Polinomios antiasociados de primera especie en la recta real.

Consideremos una nueva familia de polinomios ortogonales, $\{P_n^{(-k)}\}_{n \geq 0}$, que se obtiene desplazando hacia abajo k filas y columnas en la matriz mónica de Jacobi asociada con la medida μ , e introduciendo en la esquina superior izquierda nuevos coeficientes b_{-i} ($i = k, k-1, \dots, 1$) en la diagonal, y d_{-i} ($i = k-1, k-2, \dots, 0$) en la subdiagonal inferior.

La matriz mónica de Jacobi para los nuevos polinomios es

$$J^{(-k)} = \left(\begin{array}{cccc|c} b_{-k} & 1 & & & \\ d_{-k+1} & b_{-k+1} & 1 & & \\ & d_{-k+2} & b_{-k+2} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \hline & & & & d_0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 1 \\ J \end{array} \right).$$

Estos polinomios son llamados polinomios antiasociados de orden k , y fueron analizados en [89]. Las familias de los parámetros de la relación de recurrencia para estos polinomios están dadas por $\{\tilde{b}_i\}_{i \geq 0} = \{b_{-i}\}_{i=k}^1 \cup \{b_i\}_{i \geq 0}$ and $\{\tilde{d}_i\}_{i \geq 1} = \{d_{-i}\}_{i=k-1}^0 \cup \{d_i\}_{i \geq 1}$.

Su correspondiente función de Stieltjes se obtiene a partir de [103]

$$S^{(-k)}(x) = \frac{\tilde{d}_k P_{k-2}^{(-k)}(x)S(x) - P_{k-1}^{(-k+1)}(x)}{\tilde{d}_k P_{k-1}^{(-k)}(x)S(x) - P_k^{(-k+1)}(x)}. \quad (1.11)$$

Si $k = 1$, tenemos los polinomios antiasociados de primer especie, y su correspondiente función de Stieltjes $S^{(-1)}(x)$, dada por (1.11), es

$$S^{(-1)}(x) = \frac{1}{x - \tilde{b}_0 - \tilde{d}_1 S(x)}, \quad (1.12)$$

donde $S(x)$ es la función de Stieltjes asociada con \mathcal{L} y \tilde{d}_1, \tilde{b}_0 son parámetros libres. Denotaremos $\mathcal{R}^{(-1)}[S(x)] = S^{(-1)}(x)$.

En [103] se muestra que el grupo de las transformaciones espectrales racionales de la forma

$$\tilde{S}(x) = \frac{A(x)S(x) + B(x)}{C(x)S(x) + D(x)}$$

es un grupo no conmutativo generado a partir de las transformaciones espectrales lineales de Christoffel y Geronimus, y de las transformaciones espectrales racionales correspondientes a los polinomios asociados y antiasociados.

1.1.4. Polinomios ortogonales clásicos.

Las familias de polinomios ortogonales en la recta real más extensamente estudiadas y con mayor campo de aplicación son las denominadas clásicas. Aquí están incluidos los conocidos polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi asociados a funcionales definidos positivos. Las características más importantes que distinguen a estas familias de polinomios ortogonales de las demás familias son sus propiedades diferenciales, siendo las más relevantes (véase [71])

(i) Son soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden del tipo

$$\phi(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0,$$

donde $\phi(x)$ y $\tau(x)$ son polinomios determinados para cada familia, que no dependen de n y de grado a lo más dos y uno, respectivamente (ver [7], [90]).

(ii) Pueden ser generados por una fórmula que contiene derivadas de orden n , conocida como fórmula de Rodrigues, dada por

$$P_n(x) = \frac{1}{\kappa_n \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) \rho^n(x)],$$

donde κ_n no depende de x , $\omega(x)$ es no negativa e integrable en un intervalo de la recta real y $\phi(x)$ es un polinomio que no depende de n , de grado no mayor que dos, y todos ellos están prefijados para cada familia de polinomios (ver [23]).

1.1.4.1. Polinomios de Jacobi.

Los polinomios de Jacobi cumplen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)d\mu(x) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!(2n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \delta_{n,m},$$

donde $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $x \in [-1, 1]$, $\alpha > -1, \beta > -1$ y Γ es la *función gamma*.

Los polinomios de Jacobi se pueden obtener de modo explícito a partir de la fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{(-2)^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}],$$

de donde podemos deducir la representación hipergeométrica

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2^n (\alpha+1)_n}{(n+\alpha+\beta+1)_n} {}_2F_1 \left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2} \right).$$

Además, el n -ésimo polinomio de Jacobi es la única solución polinómica de la ecuación diferencial

$$(x^2 - 1)y''(x) + [(2 + \alpha + \beta)x + \alpha - \beta]y'(x) - n(n + 1 + \alpha + \beta)y(x) = 0.$$

Dependiendo de los valores de α y β , existen algunos casos de polinomios de Jacobi que merecen especial atención

- (i) Cuando $\alpha = \beta$, los polinomios resultantes se denominan polinomios de Gegenbauer (*polinomios ultrasféricos*).
- (ii) Cuando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, (polinomios de Chebyshev de primera especie).
- (iii) Cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, (polinomios de Chebyshev de segunda especie).
- (iv) Cuando $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$, (polinomios de Chebyshev de tercera especie).

(v) Cuando $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$, (polinomios de Chebyshev de cuarta especie).

(vi) Cuando $\alpha = \beta = 0$, (polinomios de Legendre).

1.1.4.2. Polinomios de Laguerre.

Esta familia de polinomios satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_0^{\infty} L_n^{\alpha}(x)L_m^{\alpha}(x)d\mu(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}\delta_{n,m},$$

donde $d\mu(x) = x^{\alpha}e^{-x}dx$, $x \in \mathbb{R}_+$ y $\alpha > -1$.

Pueden obtenerse a partir de la fórmula de Rodrigues

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{e^x}{n!x^{\alpha}} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x}x^{n+\alpha}],$$

de donde deducimos la expresión explícita en forma hipergeométrica

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_1F_1(-n, \alpha + 1, x),$$

El n -ésimo polinomio de Laguerre satisface la ecuación diferencial

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0.$$

1.1.4.3. Polinomios de Hermite.

Los polinomios de Hermite satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)d\mu(x) = \sqrt{\pi}2^n n! \delta_{n,m},$$

donde $d\mu(x) = e^{-x^2}dx$ y $x \in \mathbb{R}$.

La fórmula de Rodrigues correspondiente es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}],$$

y de aquí podemos deducir la fórmula explícita en términos de funciones hipergeométricas

$$\begin{aligned}
H_{2n}(x) &= (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n {}_1F_1\left(\frac{-n}{\frac{1}{2}} \middle| x^2\right), \\
H_{2n+1}(x) &= (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)_n x {}_1F_1\left(\frac{-n}{\frac{3}{2}} \middle| x^2\right),
\end{aligned}$$

El n -ésimo polinomio ortogonal de Hermite es solución de la ecuación diferencial

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0.$$

1.2. Polinomios ortogonales en la circunferencia unidad.

1.2.1. Definiciones y propiedades generales.

Si \mathcal{L} es un funcional lineal en el espacio Λ de los polinomios de Laurent ($\Lambda = \text{span}\{z^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$) tal que \mathcal{L} es Hermitiano, es decir, $c_n = \langle \mathcal{L}, z^n \rangle = \overline{\langle \mathcal{L}, z^{-n} \rangle} = \bar{c}_{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces se puede introducir un funcional bilineal asociado con \mathcal{L} en el espacio \mathbb{P} de los polinomios con coeficientes complejos como sigue

$$\langle p(z), q(z) \rangle_{\mathcal{L}} = \langle \mathcal{L}, p(z)\bar{q}(z^{-1}) \rangle, \quad (1.13)$$

donde $p, q \in \mathbb{P}$. Denotaremos mediante \mathbb{P}_n el subespacio de los polinomios de grado a lo más n .

La matriz de Gram asociada a este funcional bilineal en términos de la base canónica $\{z^n\}_{n \geq 0}$ de \mathbb{P} es

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{-n} & \cdots \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_{-(n-1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

conocida en la literatura como matriz de Toeplitz [52].

Se dice que el funcional lineal es cuasi-definido si las submatrices principales $(\mathbf{T}_n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{T} son no singulares. En este caso, se puede introducir una única sucesión de polinomios mónicos $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ con $\text{grad } \Phi_n = n$ tal que

$$\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle_{\mathcal{L}} = \mathbf{k}_n \delta_{n,m}, \quad (1.15)$$

donde $\mathbf{k}_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$. Esta sucesión se denomina sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a \mathcal{L} .

Además, tenemos

$$\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}} = \|\Phi_n\|^2 = \mathbf{k}_n.$$

La sucesión de polinomios ortogonales mónicos satisface dos relaciones de recurrencia equivalentes debidas a G. Szegő (ver [45], [52], [92], [96])

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z), \quad (1.16)$$

$$\Phi_{n+1}(z) = \left(1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2\right)z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z), \quad (1.17)$$

las denominadas relaciones de recurrencia ascendente y descendente, respectivamente, donde $\Phi_n^*(z) = z^n \bar{\Phi}_n(z^{-1})$ es el llamado polinomio recíproco. Obsérvese que de (1.16) se tiene

$$\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) + \overline{\Phi_{n+1}(0)}z\Phi_n(z). \quad (1.18)$$

Los números complejos $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ se denominan coeficientes de reflexión (o coeficientes de Verblunsky) y tienen suma importancia en el estudio de los polinomios ortogonales en la circunferencia unidad. En el caso cuasi-definido, tenemos $|\Phi_n(0)| \neq 1$ para todo $n \geq 1$.

Por otro lado, si las submatrices principales $(\mathbf{T}_n)_{n \geq 0}$ de \mathbf{T} tienen determinante positivo, entonces el funcional lineal se dice definido positivo. Todo funcional definido positivo tiene una representación integral

$$\langle \mathcal{L}, p(z) \rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) d\sigma(z), \quad (1.19)$$

donde σ es una medida de Borel positiva, no trivial, soportada en la circunferencia unidad (ver [45], [52], [62], [92]).

En este último caso, podemos garantizar que existe una única sucesión de polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ respecto a \mathcal{L} que satisface

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{\mathcal{L}} = \delta_{n,m}. \quad (1.20)$$

El n -ésimo polinomio ortonormal está dado por

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{T}_n \det \mathbf{T}_{n-1}}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ c_{-(n-1)} & c_{-(n-2)} & c_{-(n-3)} & \dots & c_1 \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix}.$$

Ambas sucesiones de polinomios están relacionadas por

$$\Phi_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n},$$

donde κ_n es el coeficiente principal de $\varphi_n(z)$, que está dado por

$$\kappa_n = \sqrt{\frac{\det \mathbf{T}_{n-1}}{\det \mathbf{T}_n}}.$$

Además, tenemos

$$\mathbf{k}_n = \frac{1}{\kappa_n^2}.$$

Es importante notar que, en este caso, $|\Phi_n(0)| < 1$, para todo $n \geq 1$. De hecho,

Teorema 4 *Para cualquier medida de probabilidad no trivial σ , soportada en la circunferencia unidad, podemos definir una sucesión de números complejos $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ con $|\Phi_n(0)| < 1$, $n \geq 1$, tal que se cumplen las relaciones de recurrencia (1.16) y (1.17), donde $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ es la familia de polinomios ortogonales con respecto a σ .*

Además,

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n+1}\|^2 &= (1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2) \|\Phi_n\|^2 \\ &= \prod_{j=0}^n (1 - |\Phi_{j+1}(0)|^2). \end{aligned}$$

Es bien conocido que para cada medida de probabilidad σ soportada en la circunferencia unidad, existe una única sucesión de coeficientes de Verblunsky $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ asociada con σ . El recíproco también se cumple, es decir, dada una sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n \geq 1}$, con $|a_n| < 1$, existe una única medida de probabilidad no trivial soportada en la circunferencia unidad tal que dichos números son los coeficientes de Verblunsky asociados. Este es el análogo del teorema de Favard en el caso real (ver [2], [27]).

La familia de coeficientes de Verblunsky proporciona información acerca de la medida y su correspondiente sucesión de polinomios ortogonales.

La medida σ puede descomponerse en una parte que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue normalizada $\frac{d\theta}{2\pi}$ y una medida singular.

Denotamos mediante $\omega = \sigma'$ la derivada de Radon-Nikodyn de σ respecto a la medida de Lebesgue y por σ_s la medida singular. Entonces

$$d\sigma(\theta) = \omega(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + d\sigma_s(\theta).$$

Definición 5 [96] Supongamos que se satisface la condición de Szegő,

$$\int_0^{2\pi} \log(\omega(\theta)) \frac{d\theta}{2\pi} > -\infty. \quad (1.21)$$

Entonces, la función de Szegő, $D(z)$, se define en $|z| < 1$ mediante

$$D(z) = \exp\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log(\omega(\theta)) d\theta\right). \quad (1.22)$$

Además, $D(z)$ es analítica y no se anula en \mathbb{D} .

La condición de Szegő (1.21) es equivalente a que $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$.

Decimos que la medida σ es de variación acotada si se cumple

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty.$$

La función de Christoffel asociada con una medida de probabilidad no trivial σ , soportada en la circunferencia unidad, está definida del modo siguiente. Sea

$$\lambda_n(\zeta) = \min \left\{ \int_0^{2\pi} |\pi(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta), \quad \deg \pi \leq n, \pi(\zeta) = 1 \right\}.$$

Fijado $\zeta \in \mathbb{C}$, λ_n es una función positiva y decreciente en n , de manera que

$$\begin{aligned} \lambda_\infty(\zeta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\zeta) \\ &= \inf \left\{ \int_0^{2\pi} |\pi(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta), \quad \pi \in \mathbb{P}, \quad \pi(\zeta) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

λ_∞ se conoce en la literatura como función de Christoffel ([80], [91]).

Existe una relación entre la función de Christoffel y la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a una medida de probabilidad σ dada.

Teorema 6 Sea σ una medida de probabilidad no trivial soportada en la circunferencia unidad, y sea $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ la correspondiente familia de coeficientes de Verblunsky. Entonces,

(i) Si $|\zeta| > 1$, $\lambda_\infty(\zeta) = 0$.

(ii) Si $|\zeta| = 1$, $\lambda_\infty(\zeta) = \sigma(\{\zeta\})$.

(iii) Si $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 = \infty$, entonces $\lambda_\infty(\zeta) = 0$ para todo ζ con $|\zeta| < 1$.

(iv) Si $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$, entonces $\lambda_\infty(\zeta) > 0$ para todo ζ con $|\zeta| < 1$.

Por otro lado,

$$\lambda_\infty(0) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - |\Phi_n(0)|^2).$$

También tenemos

$$\lambda_n(\zeta) = \frac{1}{K_n(\zeta, \zeta)},$$

donde $K_n(z, y)$ es el n -ésimo núcleo reproductor asociado con $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, que está definido por

$$K_n(z, y) = \sum_{j=0}^n \overline{\varphi_j(y)} \varphi_j(z) = \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(y)} \Phi_j(z)}{\mathbf{k}_j},$$

con $\mathbf{k}_j = \|\Phi_j\|^2 = \kappa_j(\sigma)^{-2}$. Existe una fórmula directa para calcular $K_n(z, y)$, en términos del $(n+1)$ -ésimo polinomio ortonormal.

Teorema 7 (Fórmula de Christoffel-Darboux) Para todo $n \geq 0$ y $z, y \in \mathbb{C}$ con $\bar{y}z \neq 1$,

$$K_n(z, y) = \sum_{j=0}^n \overline{\varphi_j(y)} \varphi_j(z) = \frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(y)} \varphi_{n+1}^*(z) - \overline{\varphi_{n+1}(y)} \varphi_{n+1}(z)}{1 - \bar{y}z}.$$

En el caso cuasi-definido, la fórmula anterior se convierte en

$$K_n(z, y) = \frac{\overline{\Phi_{n+1}^*(y)} \Phi_{n+1}^*(z) - \overline{\Phi_{n+1}(y)} \Phi_{n+1}(z)}{\mathbf{k}_{n+1}(1 - \bar{y}z)}.$$

El núcleo reproductor tiene, entre otras, las siguientes propiedades.

Teorema 8 Sean $y \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{P}_n$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(i)

$$\mathcal{L}(p(z), K_n(z, y)) = p(y), \quad (1.23)$$

(ii)

$$K_n(z, 0) = \sum_{j=0}^n \overline{\varphi_j(0)} \varphi_j(z) = \kappa_n(\sigma) \varphi_n^*(z), \quad (1.24)$$

(iii)

$$K_n(0, 0) = \sum_{j=0}^n |\varphi_j(0)|^2 = \kappa_n^2(\sigma) \quad (1.25)$$

Además, considerando el polinomio recíproco de $K_n(x, y)$ en la variable x , que denotaremos mediante $K_n^*(x, y)$, se tiene

$$K_n^*(x, y) = \frac{1}{\mathbf{k}_{n+1}} \frac{\Phi_{n+1}(x)\Phi_{n+1}^*(y) - \Phi_{n+1}^*(x)\Phi_{n+1}(y)}{x - y},$$

conocido en la literatura como el Bézoutiano de Φ_{n+1} y Φ_{n+1}^* (ver [21], [65], [66], [88]).

De la relación (1.25) se tiene

$$\kappa_n^2(\sigma) - \kappa_{n-1}^2(\sigma) = |\varphi_n(0)|^2 = \kappa_n^2(\sigma) |\Phi_n(0)|^2,$$

de donde se sigue que

$$\left(\frac{\kappa_{n-1}(\sigma)}{\kappa_n(\sigma)} \right)^2 = 1 - |\Phi_n(0)|^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.26)$$

Las funciones

$$q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\varphi_j(z)}}{t - z} d\sigma(z), \quad t \notin \mathbb{T}, \quad j \geq 0, \quad (1.27)$$

se denominan *funciones de segunda especie* asociadas con σ . También denotamos

$$Q_j(t) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\Phi_j(z)}}{t-z} d\sigma(z) = (\kappa_j(\sigma))^{-1} q_j(t).$$

Finalmente, en términos de los momentos $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ se puede considerar la siguiente función analítica en un entorno del origen

$$F(z) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n. \quad (1.28)$$

Si \mathcal{L} es un funcional lineal definido positivo, entonces F es analítica en \mathbb{D} y $\Re(F(z)) > 0$ en \mathbb{D} . En este caso, F se denomina función de Carathéodory y se puede representar mediante la transformación de Riesz-Herglotz de la medida positiva σ definida en (1.19) (ver [45], [62], [92])

$$F(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} d\sigma(w).$$

Por extensión, dado un funcional de momentos Hermitiano denominaremos función de Carathéodory asociada al funcional a la función analítica en el entorno del origen dada por (1.28).

1.2.2. Matrices de Hessenberg.

Si tenemos en cuenta que $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ es una base ortogonal en el espacio \mathbb{P} , de (1.16), (1.17) y la fórmula de Christoffel-Darboux, deducimos

$$z\Phi_n(z) = \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_{n,j} \Phi_j(z), \quad (1.29)$$

con

$$\lambda_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n+1, \\ -\frac{k_n}{k_j} \Phi_{n+1}(0) \overline{\Phi_j(0)} & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{si } j > n+1, \end{cases} \quad (1.30)$$

(ver [63], [92]). Entonces, la representación matricial del operador lineal $h : \mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}$, la multiplicación por z , en términos de la base $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, es

$$z\Phi(z) = \mathbf{H}_\Phi \Phi(z), \quad (1.31)$$

donde $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots, \Phi_n(z), \dots]^t$ y \mathbf{H}_Φ es una matriz de Hessenberg inferior

$$\mathbf{H}_\Phi = \begin{bmatrix} \lambda_{0,0} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

En lo sucesivo, diremos que \mathbf{H}_Φ es la *matriz de Hessenberg* asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$.

En el caso definido positivo, si $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ es la base de \mathbb{P} formada por los polinomios ortonormales, entonces, la relación matricial es

$$z\varphi(z) = \mathbf{H}_\varphi \varphi(z), \quad (1.32)$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z), \dots]^t$ y \mathbf{H}_φ es una matriz de Hessenberg inferior con elementos

$$h_{n,j} = \begin{cases} \frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}} & \text{si } j = n + 1, \\ -\frac{\kappa_j}{\kappa_n} \overline{\Phi_{n+1}(0)\Phi_j(0)} & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{si } j > n + 1. \end{cases} \quad (1.33)$$

Proposición 9 *Sea \mathcal{L} un funcional lineal definido positivo sobre la circunferencia unidad. Si $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortonormales correspondiente a \mathcal{L} y \mathbf{H}_φ es la matriz Hessenberg inferior tal que*

$$z\varphi(z) = \mathbf{H}_\varphi \varphi(z),$$

donde $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$, entonces

- (i) $\mathbf{H}_\varphi \mathbf{H}_\varphi^* = I$,
- (ii) $\mathbf{H}_\varphi^* \mathbf{H}_\varphi = I - \lambda_\infty(0)\varphi(0)\varphi(0)^*$,

donde I es la matriz identidad.

Prueba. (i) El funcional lineal \mathcal{L} satisface

$$\langle zp, zq \rangle_{\mathcal{L}} = \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}}, \quad \text{para todo } p, q \in \mathbb{P}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varphi \mathbf{H}_\varphi^* &= \mathbf{H}_\varphi \langle \varphi, \varphi^t \rangle_{\mathcal{L}} \mathbf{H}_\varphi^* \\ &= \langle \mathbf{H}_\varphi \varphi, \varphi^t \mathbf{H}_\varphi^t \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \langle z\varphi, z\varphi^t \rangle_{\mathcal{L}} = \langle \varphi, \varphi^t \rangle_{\mathcal{L}} = I. \end{aligned}$$

(ii) Para $n \geq 0$, tenemos

$$\left(\mathbf{H}_\varphi^*\right)_{(n)} \left(\mathbf{H}_\varphi\right)^{(n)} = \left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}\right)^2 + |\Phi_n(0)|^2 |\Phi_{n+1}(0)|^2 + \kappa_n^2 |\Phi_n(0)|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|\Phi_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2},$$

donde $\mathbf{H}_{(j)}$, $\mathbf{H}^{(j)}$ representan la j -ésima fila y la j -ésima columna de la matriz \mathbf{H} , respectivamente. Usando en forma reiterada la relación (1.26), se deduce

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{H}_\varphi^*\right)_{(n)} \left(\mathbf{H}_\varphi\right)^{(n)} &= 1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+1}}\right)^2 |\Phi_n(0)|^2 (1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2) + \kappa_n^2 |\Phi_n(0)|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{|\Phi_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2} \\ &= 1 - \left(\frac{\kappa_n}{\kappa_{n+2}}\right)^2 |\Phi_n(0)|^2 (1 - |\Phi_{n+2}(0)|^2) + \kappa_n^2 |\Phi_n(0)|^2 \sum_{j=n+2}^{\infty} \frac{|\Phi_{j+1}(0)|^2}{\kappa_j^2} \\ &\quad \vdots \\ &= 1 - \kappa_n^2 |\Phi_n(0)|^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_j^2} = 1 - |\varphi_n(0)|^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{K_j(0, 0)} \\ &= 1 - |\varphi_n(0)|^2 \lambda_\infty(0). \end{aligned}$$

Por otra parte, para $0 \leq j < n$,

$$\left(\mathbf{H}_\varphi^*\right)_{(n)} \left(\mathbf{H}_\varphi\right)^{(j)} = \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left(-\frac{1}{\kappa_n^2} + \sum_{l=n}^{\infty} \frac{|\Phi_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right).$$

Usando la relación (1.26),

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{H}_\varphi^*\right)_{(n)} \left(\mathbf{H}_\varphi\right)^{(j)} &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left(-\frac{1}{\kappa_{n+1}^2} + \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{|\Phi_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right) \\ &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \left(-\frac{1}{\kappa_{n+2}^2} + \sum_{l=n+2}^{\infty} \frac{|\Phi_{l+1}(0)|^2}{\kappa_l^2} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, si aplicamos reiteradamente (1.26), se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{H}_\varphi^*\right)_{(n)} \left(\mathbf{H}_\varphi\right)^{(j)} &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\kappa_l^2} = \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{K_l(0, 0)} \\ &= \varphi_n(0) \overline{\varphi_j(0)} \lambda_\infty(0). \end{aligned}$$

■

El análogo de la Proposición 9 para H_Φ , la matriz de Hessenberg asociada a la familia de polinomios ortogonales mónicos, se enuncia a continuación.

Proposición 10 *Sea \mathcal{L} un funcional lineal cuasi-definido sobre la circunferencia unidad. Si $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ es la sucesión de polinomios mónicos correspondiente a \mathcal{L} y \mathbf{H}_Φ es la matriz Hessenberg inferior tal que*

$$z\Phi(z) = \mathbf{H}_\Phi \Phi(z),$$

donde $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots]^t$, entonces

$$(i) \quad \mathbf{H}_\Phi \mathbf{D}_\Phi \mathbf{H}_\Phi^* = \mathbf{D}_\Phi,$$

$$(ii) \quad \mathbf{H}_\Phi^* \mathbf{D}_\Phi^{-1} \mathbf{H}_\Phi = \mathbf{D}_\Phi^{-1} - \lambda_\infty(0) \Phi(0) \Phi(0)^*,$$

donde \mathbf{D}_Φ es la matriz diagonal infinita $\text{diag}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \dots)$.

Corolario 11 *La matriz \mathbf{H}_φ es unitaria si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 = +\infty$, lo que se traduce en términos de la medida σ en que $\log \sigma' \notin L^1\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)$, esto es, la medida σ no pertenece a la clase de Szegő (ver [92]).*

Además, en este caso, los polinomios son densos en $L^2(\sigma)$. Las filas de la matriz de Hessenberg son finitas, pero sus columnas pueden tener un número infinito de elementos distintos de cero. Esto, junto con la restricción de que la medida σ no debe pertenecer a la clase de Szegő, representa un importante inconveniente en las aplicaciones.

Nota 12 *Existe otra representación matricial que solventa esta dificultad, desarrollada por Cantero, Moral y Velázquez ([18]). Se denomina representación CMV, y se define de la siguiente manera.*

Sea $\Lambda_{(k,l)}$ el subespacio de los polinomios de Laurent generado por $\{z^j\}_{j=k}^l$, $k \leq l$, y $P_{(k,l)}$ la proyección ortogonal sobre $\Lambda_{(k,l)}$ respecto a la forma bilineal hermitiana (1.13). Definimos

$$\Lambda^{(n)} = \begin{cases} \Lambda_{(-k,k)} & n = 2k, \\ \Lambda_{(-k,k+1)} & n = 2k + 1, \end{cases}$$

y $P^{(n)}$ es la proyección ortogonal sobre $\Lambda^{(n)}$. Además, definimos

$$\chi_n^{(0)} = \begin{cases} z^{-k} & n = 2k, \\ z^{k+1} & n = 2k + 1, \end{cases}$$

y aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, obtenemos la base CMV mediante

$$\chi_n = (1 - P^{(n-1)})\chi_n^{(0)}.$$

En lugar de considerar la sucesión $\{1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots\}$, podríamos de igual manera considerar la sucesión $\{1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \dots\}$. En estas condiciones, sean

$$\tilde{\Lambda}^{(n)} = \begin{cases} \Lambda_{(-k,k)} & n = 2k, \\ \Lambda_{(-k-1,k)} & n = 2k + 1, \end{cases}$$

y $\tilde{P}^{(n)}$ la proyección ortogonal sobre $\tilde{\Lambda}^{(n)}$. Además, definimos

$$x_n^{(0)} = \begin{cases} z^{-k} & n = 2k, \\ z^{-k-1} & n = 2k + 1, \end{cases}$$

y la base CMV alternativa mediante

$$x_n = (1 - \tilde{P}^{(n-1)})x_n^{(0)}.$$

También definimos

$$\begin{aligned} \eta_n(z) &= \chi_{2n}(z), & n \geq 0, \\ \tau_n(z) &= \chi_{2n-1}(z), & n \geq 1, \\ s_n(z) &= x_{2n}(z), & n \geq 0, \\ t_n(z) &= x_{2n-1}(z), & n \geq 1. \end{aligned}$$

η_n, τ_n, s_n y t_n se pueden expresar en términos de los polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L}, Φ_n , de la siguiente manera.

Proposición 13 Se cumple

$$\begin{aligned} \eta_n(z) &= z^{-n}\Phi_{2n}^*(z), \\ \tau_n(z) &= z^{-n+1}\Phi_{2n-1}(z), \\ s_n(z) &= z^{-n}\Phi_{2n}(z), \\ t_n(z) &= z^{-n}\Phi_{2n-1}^*(z). \end{aligned}$$

Además,

$$x_n(z) = \overline{\chi_n(1/\bar{z})}.$$

Proposición 14 Las sucesiones $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{x_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} z\chi_0 &= -\Phi_1(0)\chi_0 + \rho_0\chi_1, \\ z \begin{pmatrix} \chi_{2n-1} \\ \chi_{2n} \end{pmatrix} &= \widehat{\Xi}_{2n-1}^T \begin{pmatrix} \chi_{2n-2} \\ \chi_{2n-1} \end{pmatrix} + \Xi_{2n} \begin{pmatrix} \chi_{2n} \\ \chi_{2n+1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \\ z \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\Phi_1(0) \\ \hat{\rho}_0 \end{pmatrix} x_0 + \Xi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ z \begin{pmatrix} x_{2n} \\ x_{2n+1} \end{pmatrix} &= \widehat{\Xi}_{2n}^T \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} + \Xi_{2n+1} \begin{pmatrix} x_{2n+1} \\ x_{2n+2} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \Xi_n &:= \begin{pmatrix} -\rho_{n-1}\Phi_{n+1}(0) & \rho_{n-1}\rho_n \\ -\Phi_n(0)\Phi_{n+1}(0) & \Phi_n(0)\rho_n \end{pmatrix}, \\ \widehat{\Xi}_n &:= \begin{pmatrix} -\hat{\rho}_{n-1}\Phi_{n+1}(0) & \hat{\rho}_{n-1}\hat{\rho}_n \\ -\Phi_n(0)\Phi_{n+1}(0) & \Phi_n(0)\hat{\rho}_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ son los parámetros de Verblunsky asociados al funcional \mathcal{L} , $\rho_n = |1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2|^{1/2}$ y $\hat{\rho}_n = \varsigma_n \rho_n$, con $\varsigma_n = \text{sign}(1 - |\Phi_n|^2)$.

Las anteriores relaciones de recurrencia proporcionan una representación matricial que juega un rol similar al de la matriz de Jacobi en la recta real. En este caso, la matriz pentadiagonal C de la representación CMV resulta ser

$$C_{i,j} = \langle \chi_i, z\chi_j \rangle_{\mathcal{L}},$$

donde $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$ es la base CMV. Por otro lado, utilizando la base CMV alternativa, $\{x_n\}_{n \geq 0}$, obtenemos la matriz \tilde{C} de la representación CMV alternativa,

$$\tilde{C}_{i,j} = \langle x_i, zx_j \rangle_{\mathcal{L}}.$$

Además, \tilde{C} es la transpuesta de C . Los elementos de C se pueden expresar en términos de los coeficientes de Verblunsky $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ asociados al funcional \mathcal{L} .

Proposición 15 Los elementos de la matriz C están dados por

$$\begin{aligned}
\langle \eta_{j-1}, z\eta_j \rangle_{\mathcal{L}} &= \hat{\rho}_{2j-1}\hat{\rho}_{2j-2}, \\
\langle \tau_j, z\eta_j \rangle_{\mathcal{L}} &= \overline{\Phi_{2j-1}(0)}\hat{\rho}_{2j-1}, \\
\langle \eta_{j-1}, z\tau_j \rangle_{\mathcal{L}} &= -\Phi_{2j}(0)\hat{\rho}_{2j-2}, \\
\langle \tau_j, z\tau_j \rangle_{\mathcal{L}} &= -\Phi_{2j}(0)\overline{\Phi_{2j-1}(0)}, \\
\langle \eta_j, z\eta_j \rangle_{\mathcal{L}} &= -\overline{\Phi_{2j}(0)}\Phi_{2j+1}(0), \\
\langle \tau_{j+1}, z\eta_j \rangle_{\mathcal{L}} &= \overline{\Phi_{2j}(0)}\rho_{2j}, \\
\langle \eta_j, z\tau_j \rangle_{\mathcal{L}} &= -\Phi_{2j+1}(0)\rho_{2j-1}, \\
\langle \tau_{j+1}, z\tau_j \rangle_{\mathcal{L}} &= \rho_{2j}\rho_{2j-1}.
\end{aligned}$$

Los restantes elementos de la matriz son nulos.

En otras palabras, C es una matriz pentadiagonal de la forma

$$C = \begin{pmatrix}
-\Phi_1(0) & -\Phi_2(0)\hat{\rho}_0 & \hat{\rho}_1\hat{\rho}_0 & 0 & 0 & \dots \\
\rho_0 & -\Phi_2(0)\overline{\Phi_1(0)} & \overline{\Phi_1(0)}\hat{\rho}_1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & -\Phi_3(0)\rho_1 & -\Phi_3(0)\overline{\Phi_2(0)} & -\Phi_4(0)\hat{\rho}_2 & \hat{\rho}_3\hat{\rho}_2 & \dots \\
0 & \rho_2\rho_1 & \overline{\Phi_2(0)}\rho_2 & -\Phi_4(0)\overline{\Phi_3(0)} & \overline{\Phi_3(0)}\hat{\rho}_3 & \dots \\
0 & 0 & 0 & -\Phi_5(0)\rho_3 & -\Phi_5(0)\overline{\Phi_4(0)} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}.$$

Se puede factorizar C mediante dos matrices tridiagonales \mathcal{M} y \mathcal{W} de la siguiente manera

Proposición 16 Si

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{i,j} &= \langle x_i, \chi_j \rangle_{\mathcal{L}}, \\
\mathcal{W}_{i,j} &= \langle \chi_i, z\chi_j \rangle_{\mathcal{L}},
\end{aligned}$$

entonces

(i) $C = \mathcal{W}\mathcal{M}$.

(ii) $\tilde{C} = \mathcal{M}\mathcal{W}$.

(iii) \mathcal{M} es una matriz diagonal por bloques, con un bloque de tamaño 1×1 seguido de bloques de tamaño 2×2 .

(iv) \mathcal{W} es una matriz diagonal por bloques, con bloques de tamaño 2×2 .

Además, C admite la siguiente factorización.

Proposición 17 Sea

$$\Theta_j = \begin{pmatrix} -\Phi_{j+1}(0) & \rho_j \\ \hat{\rho}_j & \Phi_{j+1}(0) \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \Theta_1 & & \\ & & \Theta_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \Theta_0 & & & \\ & \Theta_2 & & \\ & & \Theta_4 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

1.2.2.1. Ejemplo.

Si $d\sigma = \frac{1-|\beta|^2}{|z-\beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$, $|\beta| < 1$, tenemos $\Phi_1(0) = -\beta$ y $\Phi_k(0) = 0$, $k = 2, 3, \dots$ Luego,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & (1-|\beta|^2)^{\frac{1}{2}} \\ (1-|\beta|^2)^{\frac{1}{2}} & -\bar{\beta} \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix},$$

y, finalmente,

se denomina sucesión de polinomios de segunda especie asociados con el funcional \mathcal{L} . Nótese que el grado de Ω_n es n , y que $\Omega_n(z)$ es mónico.

Estos polinomios también satisfacen la relación de recurrencia

$$\Omega_{n+1}(z) = z\Omega_n(z) - \Phi_{n+1}(0)\Omega_n^*(z), \quad n \geq 0,$$

y, por tanto, $\{\Omega_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un funcional lineal Hermitiano cuasi-definido que denotaremos \mathcal{L}_Ω .

Proposición 18 [68] *Sea $\Phi_n(z)$ el polinomio ortogonal mónico de grado n asociado con el funcional lineal \mathcal{L} y sea $\Omega_n(z)$ tal y como se ha definido en (1.34). Entonces*

$$(i) \quad \Phi_n(z)F(z) + \Omega_n(z) = O(z^n), \quad |z| < 1,$$

$$(ii) \quad \Phi_n^*(z)F(z) - \Omega_n^*(z) = O(z^{n+1}), \quad |z| < 1,$$

$$(iii) \quad F_\Omega(z) = \frac{1}{F(z)},$$

donde $F(z)$ y $F_\Omega(z)$ son las funciones de Carathéodory asociadas a los funcionales lineales \mathcal{L} y \mathcal{L}_Ω , respectivamente.

Así, este es un caso especial de transformación espectral racional propia de $F(z)$, que en adelante se denotará por \mathcal{F}_Ω .

1.2.3.3. Transformación de Aleksandrov.

Consideremos la familia de parámetros de Verblunsky $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ y sea λ un número complejo con $|\lambda| = 1$. La transformación que resulta al considerar una nueva familia de parámetros de Verblunsky definidos por $\{\Phi_n^\lambda(0)\}_{n \geq 1}$, donde $\Phi_n^\lambda(0) = \lambda\Phi_n(0)$, se denomina transformación de Aleksandrov. En el caso especial $\lambda = -1$, los polinomios resultantes son los polinomios asociados de segunda especie definidos en el apartado anterior.

La correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos, $\{\Phi_n^\lambda\}_{n \geq 0}$, puede escribirse en términos de Φ_n y Ω_n como sigue

$$\begin{aligned} \Phi_n^\lambda(z) &= \frac{1}{2}(1 + \lambda)\Phi_n(z) + \frac{1}{2}(1 - \lambda)\Omega_n(z), \\ (\Phi_n^\lambda)^*(z) &= \frac{1}{2}(1 + \bar{\lambda})\Phi_n^*(z) + \frac{1}{2}(1 - \bar{\lambda})\Omega_n^*(z). \end{aligned}$$

Además, las correspondientes funciones de Carathéodory están relacionadas mediante

$$F^\lambda(z) = \frac{(\lambda + 1)F(z) + \lambda - 1}{(\lambda - 1)F(z) + \lambda + 1}. \quad (1.36)$$

Por otra parte, si denotamos por \mathbf{H}_Φ^λ la matriz de Hessenberg correspondiente a la sucesión de polinomios ortogonales $\{\Phi_n^\lambda\}_{n \geq 1}$, estudiamos a continuación la relación entre \mathbf{H}_Φ^λ y \mathbf{H}_Φ .

Dado que $\Phi_n^\lambda(0) = \lambda\Phi_n(0)$, con $|\lambda| = 1$, deducimos de (1.26) que $\frac{\mathbf{k}_{n+1}^\lambda}{\mathbf{k}_n^\lambda} = \frac{\mathbf{k}_{n+1}}{\mathbf{k}_n}$, $n \geq 0$, así como $\mathbf{k}_0^\lambda = \frac{(\lambda+1)\mathbf{k}_0 + \lambda - 1}{(\lambda-1)\mathbf{k}_0 + \lambda + 1}$. Es decir, $\mathbf{k}_n^\lambda = \frac{\mathbf{k}_0^\lambda}{\mathbf{k}_0} \mathbf{k}_n$.

Luego, de acuerdo con (1.30), los elementos de la matriz \mathbf{H}_Φ^λ son los mismos de la matriz \mathbf{H}_Φ , excepto los elementos de la primera columna, que están multiplicados por λ . Por tanto,

$$\mathbf{H}^\lambda = \mathbf{H}_\Phi \text{diag}(\lambda, 1, 1, \dots).$$

1.2.3.4. Polinomios asociados de orden N en la circunferencia unidad.

Sea $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un funcional lineal cuasi-definido \mathcal{L} . Denotamos por $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$ los polinomios asociados de orden N de $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, que están generados por la relación de recurrencia

$$\Phi_{n+1}^{(N)}(z) = z\Phi_n^{(N)}(z) + \Phi_{n+N+1}(0)(\Phi_n^{(N)})^*(z), \quad n \geq 0. \quad (1.37)$$

Obsérvese que $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$ es también una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un funcional lineal cuasi-definido \mathcal{L}_N . Denotaremos esta transformación por $\mathcal{F}^{(N)}$, esto es, $\mathcal{F}^{(N)}[F(z)] = F^{(N)}(z)$, donde $F(z)$ y $F^{(N)}(z)$ son las funciones de Carathéodory asociadas a los funcionales respecto a los que son ortogonales $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$, respectivamente.

La función de Carathéodory $F^{(N)}(z)$ se puede expresar como una transformación espectral racional de $F(z)$, como sigue (ver [83])

$$F^{(N)}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{C(z)F(z) + D(z)}, \quad (1.38)$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= \Phi_N(z) + \Phi_N^*(z), \\ B(z) &= \Omega_N(z) - \Omega_N^*(z), \\ C(z) &= \Phi_N(z) - \Phi_N^*(z), \\ D(z) &= \Omega_N(z) + \Omega_N^*(z). \end{aligned}$$

Por otro lado, si denotamos por \mathbf{H}_N la matriz de Hessenberg correspondiente a $\{\Phi_n^{(N)}\}_{n \geq 0}$, consideremos ahora la relación entre \mathbf{H}_N y \mathbf{H}_Φ . Observando que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{k}_{n+1}^N}{\mathbf{k}_n^N} &= 1 - |\Phi_{n+1}^N(0)|^2 \\ &= 1 - |\Phi_{n+N+1}^N(0)|^2 \\ &= \frac{\mathbf{k}_{n+N+1}}{\mathbf{k}_{n+N}}, \end{aligned}$$

de (1.30), se sigue que las entradas de la matriz \mathbf{H}_N están dadas por

$$h_{k,j}^N = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k + 1, \\ -\frac{\mathbf{k}_k^N}{\mathbf{k}_j^N} \Phi_{n+1}^N(0) \overline{\Phi_j^N(0)} & \text{si } j \leq k, \\ 0 & \text{si } j > k + 1, \end{cases}$$

a excepción de las entradas de la primera columna, que satisfacen $h_{k,0}^N = h_{k+N,0}$, $k \in \mathbb{N}$, las restantes entradas satisfacen

$$h_{k,j}^N = \begin{cases} h_{k+N,k+N+1} & \text{si } j = k + 1, \\ h_{k+N,j+N} & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ 0 & \text{si } j > k + 1. \end{cases}$$

Luego,

$$\mathbf{H}_N \text{diag}(\Phi_N(0), 1, 1, \dots) = (\mathbf{Z}^l)^N \mathbf{H}_\Phi \mathbf{Z}^N, \quad N \geq 1,$$

donde \mathbf{Z} es la matriz infinita con 1 en la subdiagonal principal inferior y las restantes entradas son nulas.

1.2.3.5. Los polinomios antiasociados de orden N en la circunferencia unidad.

Sea $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un funcional lineal cuasi-definido \mathcal{L}_{-N} . Sean $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ números complejos con

$|\nu_j| < 1$, $1 \leq j \leq N$. Denotamos los polinomios antiasociados de orden N de $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, $\{\Phi_n^{(-N)}\}_{n \geq 0}$, como los polinomios mónicos generados por los parámetros de Verblunsky $\{\hat{\Phi}_n(0)\}_{n \geq 1} = \{\nu_j\}_{j=1}^N \cup \{\Phi_j(0)\}_{j=1}^\infty$. Denotaremos esta transformación por $\mathcal{F}^{(-N)}$, esto es, $\mathcal{F}^{(-N)}[F(z)] = F^{(-N)}(z)$. $F^{(-N)}(z)$ es la función de Carathéodory asociada con el funcional de ortogonalidad de $\{\Phi_n^{(-N)}\}_{n \geq 0}$.

$F^{(-N)}(z)$ se puede expresar como una transformación espectral racional de $F(z)$ como sigue (ver [83])

$$F^{(-N)}(z) = \frac{\tilde{A}(z)F(z) + \tilde{B}(z)}{\tilde{C}(z)F(z) + \tilde{D}(z)}, \quad (1.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A}(z) &= \tilde{\Omega}_N(z) + \tilde{\Omega}_N^*(z), \\ \tilde{B}(z) &= \tilde{\Omega}_N^*(z) - \tilde{\Omega}_N(z), \\ \tilde{C}(z) &= \tilde{\Phi}_N^*(z) - \tilde{\Phi}_N(z), \\ \tilde{D}(z) &= \tilde{\Phi}_N(z) + \tilde{\Phi}_N^*(z), \end{aligned}$$

donde $\tilde{\Phi}_N(z)$ (respectivamente $\tilde{\Omega}_N(z)$) es el polinomio de grado N generado a partir de los números complejos $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ (respectivamente $-\nu_1, -\nu_2, \dots, -\nu_N$), a través de la relación de recurrencia. Es decir, $\tilde{\Omega}_N(z)$ es el polinomio de segunda especie asociado a $\tilde{\Phi}_N(z)$ respecto al funcional \mathcal{L}_{-N} .

Finalmente, obsérvese que $\mathcal{F}^{(N)} \circ \mathcal{F}^{(-N)}[F(z)] = F(z)$ (transformación identidad), mientras que el recíproco, en general, no se cumple, ya que depende de la elección de los parámetros libres en la transformación $\mathcal{F}^{(-N)}$.

CAPÍTULO 2

Transformaciones espectrales lineales I.

En el presente capítulo se estudian dos transformaciones espectrales lineales que resultan de la modificación polinómica de un funcional lineal cuasi-definido \mathcal{L} .

Por un lado, al multiplicar dicho funcional por un polinomio trigonométrico positivo de grado 1, obtenemos la llamada transformación de Christoffel. En el caso definido positivo, esta transformación corresponde a una multiplicación de la medida de ortogonalidad σ asociada a \mathcal{L} por un polinomio trigonométrico positivo de grado 1. En particular, analizamos la condición necesaria y suficiente para que el nuevo funcional lineal \mathcal{L}_C sea también cuasi-definido, la relación existente entre las familias de polinomios ortogonales mónicos correspondientes, la transformación obtenida en términos de las funciones de Carathéodory asociadas, la relación entre las matrices de Hessenberg asociadas al operador de multiplicación por z y, por último, la relación entre las correspondientes familias de parámetros de Verblunsky, así como algunas propiedades relacionadas con su comportamiento asintótico.

Por otra parte, realizamos un estudio análogo para el funcional lineal \mathcal{L}_R (\mathcal{L}_I) obtenido mediante la multiplicación del funcional lineal \mathcal{L} por un polinomio trigonométrico de grado 1, no necesariamente positivo. Finalmente, se muestran ejemplos de ambas transformaciones espectrales.

2.1. La transformación de Christoffel.

Consideremos el funcional bilineal

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_C} := \langle (z - \alpha)p, (z - \alpha)q \rangle_{\mathcal{L}}, \quad p, q \in \mathbb{P}, \quad (2.1)$$

de tal manera que el funcional lineal asociado \mathcal{L}_C es hermitiano. Parece natural preguntar qué condiciones se requieren para que (2.1) sea cuasi-definido, supuesto que \mathcal{L} también lo sea. La respuesta a esta pregunta es

Teorema 19 [25] *El funcional lineal \mathcal{L}_C , cuya forma bilineal asociada es (2.1), es cuasi-definido si y sólo si $K_n(\alpha, \alpha) \neq 0$, para todo $n \geq 0$.*

\mathcal{L}_C se denomina transformada canónica de Christoffel del funcional lineal \mathcal{L} . Si $K_n(\alpha, \alpha) \neq 0$, para todo $n \geq 0$, existe una sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a \mathcal{L}_C , que denotaremos $\{R_n\}_{n \geq 0}$. En estas condiciones es posible determinar la relación entre $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados a \mathcal{L} , y $\{R_n\}_{n \geq 0}$.

Proposición 20 *Sea $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociados al funcional lineal \mathcal{L} . Entonces, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{R_n\}_{n \geq 0}$ asociados al funcional lineal \mathcal{L}_C está dada por*

$$R_n(z) = \frac{1}{z - \alpha} \left(\Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)} K_n(z, \alpha) \right), \quad n \geq 0. \quad (2.2)$$

La representación matricial de (2.2) es

$$(z - \alpha)R(z) = \mathbf{N}\Phi(z), \quad (2.3)$$

donde $R(z) = [R_0(z), R_1(z), \dots]^t$, $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots]^t$ y \mathbf{N} es una matriz de Hessenberg inferior con entradas

$$n_{i,j} = \begin{cases} -\frac{\Phi_{i+1}(\alpha)\overline{\Phi_j(\alpha)}}{K_i(\alpha, \alpha)}, & \text{si } j \leq i, \\ 1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0, & \text{si } j > i + 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Supongamos ahora que el funcional lineal \mathcal{L} es definido positivo, y sea $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a \mathcal{L} , dada por

$$\varphi_n(z) = \kappa_n \Phi_n(z).$$

Estudiaremos la perturbación \mathcal{L}_C del funcional lineal \mathcal{L} introducida en (2.1). Notemos que el nuevo funcional lineal \mathcal{L}_C es también hermitiano y definido positivo, y entonces podemos considerar la familia $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios ortonormales asociada al funcional \mathcal{L}_C .

Procedamos ahora a mostrar la relación entre las matrices de Hessenberg \mathbf{H}_φ y \mathbf{H}_ψ asociadas al operador de multiplicación por z en términos de las bases $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$, respectivamente. En primer lugar, deduciremos una expresión que relaciona los polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a \mathcal{L} y \mathcal{L}_C , respectivamente.

A partir de (2.2) mediante la correspondiente normalización obtenemos

$$(z - \alpha)\psi_n(z) = \sqrt{\frac{K_n(\alpha, \alpha)}{K_{n+1}(\alpha, \alpha)}}\varphi_{n+1}(z) - \sum_{j=0}^n \frac{\varphi_{n+1}(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{n+1}(\alpha, \alpha)K_n(\alpha, \alpha)}}\varphi_j(z). \quad (2.5)$$

2.1.1. Matrices de Hessenberg.

Si consideramos

$$\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z), \dots]^t \quad \text{y} \quad \psi(z) = [\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_n(z), \dots]^t,$$

entonces, en forma matricial, la expresión (2.5) resulta ser

$$(z - \alpha)\psi(z) = \mathbf{M}_C\varphi(z), \quad (2.6)$$

donde \mathbf{M}_C es una matriz Hessenberg inferior cuyas entradas $m_{i,j}$ están dadas por

$$m_{i,j} = \begin{cases} -\frac{\varphi_{i+1}(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_{i+1}(\alpha, \alpha)K_i(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j \leq i, \\ \sqrt{\frac{K_i(\alpha, \alpha)}{K_{i+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j = i + 1, \\ 0, & \text{si } j > i + 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Proposición 21 ([73]) *La matriz \mathbf{M}_C satisface*

(i) $\mathbf{M}_C\mathbf{M}_C^* = \mathbf{I}$.

(ii) $\mathbf{M}_C^*\mathbf{M}_C = \mathbf{I} - \lambda_\infty(\alpha)\varphi(\alpha)\varphi(\alpha)^*$.

Prueba. Debido al carácter ortonormal de $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ respecto a \mathcal{L} y \mathcal{L}_C , respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \langle \psi(z), \psi(z)^t \rangle_{\mathcal{L}_C} = \langle (z - \alpha)\psi(z), (z - \alpha)\psi^t(z) \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \langle \mathbf{M}_C \varphi(z), \varphi(z)^t \mathbf{M}_C^t \rangle_{\mathcal{L}} = \mathbf{M}_C \langle \varphi(z), \varphi(z)^t \rangle_{\mathcal{L}} \mathbf{M}_C^* = \mathbf{M}_C \mathbf{M}_C^*. \end{aligned}$$

(ii) Para $j = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{C(j)}^* \mathbf{M}_C^{(j)} &= \frac{K_{j-1}(\alpha, \alpha)}{K_j(\alpha, \alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\ &= \frac{K_{j-1}(\alpha, \alpha)}{K_j(\alpha, \alpha)} + |\varphi_j(\alpha)|^2 \sum_{l=j}^{\infty} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \\ &= 1 - \frac{|\varphi_j(\alpha)|^2}{K_{\infty}(\alpha, \alpha)} \\ &= 1 - \lambda_{\infty}(\alpha) |\varphi_j(\alpha)|^2. \end{aligned}$$

Para $k < j$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{C(k)}^* \mathbf{M}_C^{(j)} &= -\frac{1}{K_j(\alpha, \alpha)} \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} + \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\ &= \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \left(-\frac{1}{K_j(\alpha, \alpha)} + \sum_{l=j}^{\infty} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \right) \\ &= \frac{\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_{\infty}(\alpha, \alpha)} \\ &= -\lambda_{\infty}(\alpha) \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}. \end{aligned}$$

■

Nota 22 De acuerdo con el Teorema 6, la matriz \mathbf{M}_C es unitaria si $|\alpha| > 1$. Si $|\alpha| = 1$ entonces $\lambda_{\infty}(\alpha) = 0$ siempre y cuando $\sigma(\{\alpha\}) = 0$.

Si $|\alpha| < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 = \infty$, esto es, si la medida σ no pertenece a la clase de Szegő, entonces \mathbf{M}_C es unitaria.

A continuación, mostramos el resultado análogo a la proposición anterior para las submatrices principales (ver [73])

Proposición 23 Sea \mathbf{M}_{C_n} la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de \mathbf{M}_C .

(i) Consideremos el vector columna $e_n = [0, \dots, 0, 1]^t \in \mathbb{C}^{(n,1)}$, entonces

$$\mathbf{M}_{C_n} \mathbf{M}_{C_n}^* = \mathbf{I}_n - \frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)} e_n e_n^*,$$

donde \mathbf{I}_n denota la matriz unidad de dimensión $n \times n$.

(ii) Sea $\varphi^{(n)}(\alpha) = [\varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_{n-1}(\alpha)]^t$, entonces

$$\mathbf{M}_{C_n}^* \mathbf{M}_{C_n} = \mathbf{I}_n - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)} \varphi^{(n)}(\alpha) \varphi^{(n)*}(\alpha).$$

Prueba. Para $0 \leq k \leq n-2$, deducimos

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{C_n})_{(k)} (\mathbf{M}_{C_n}^*)^{(k)} &= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha, \alpha) K_k(\alpha, \alpha)} \sum_{l=0}^k |\varphi_l(\alpha)|^2 + \frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)} \\ &= \frac{|\varphi_{k+1}(\alpha)|^2}{K_{k+1}(\alpha, \alpha) K_k(\alpha, \alpha)} K_k(\alpha, \alpha) + \frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)} = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{C_n})_{(n-1)} (\mathbf{M}_{C_n}^*)^{(n-1)} &= \frac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha) K_{n-1}(\alpha, \alpha)} \sum_{l=0}^{n-1} |\varphi_l(\alpha)|^2 \\ &= \frac{|\varphi_n(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha)} = 1 - \frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para $k < j$, obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{C_n})_{(k)} (\mathbf{M}_{C_n}^*)^{(j)} &= \sum_{l=0}^k \frac{\varphi_{k+1}(\alpha) \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)} |\varphi_l(\alpha)|^2}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha, \alpha) K_k(\alpha, \alpha)} \sqrt{K_{j+1}(\alpha, \alpha) K_j(\alpha, \alpha)}} \\ &\quad - \frac{\varphi_{k+1}(\alpha) \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{j+1}(\alpha, \alpha) K_j(\alpha, \alpha)}} \sqrt{\frac{K_k(\alpha, \alpha)}{K_{k+1}(\alpha, \alpha)}} \\ &= \frac{\varphi_{k+1}(\alpha) \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)}}{\sqrt{K_{k+1}(\alpha, \alpha) K_k(\alpha, \alpha) K_{j+1}(\alpha, \alpha) K_j(\alpha, \alpha)}} \left(\sum_{l=0}^k |\varphi_l(\alpha)|^2 - K_i(\alpha, \alpha) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Para $1 \leq k \leq n-1$,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_{C_n^*})_{(k)}(\mathbf{M}_{C_n})^{(k)} &= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + \sum_{l=k}^{n-1} \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2 |\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\
&= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \sum_{l=k}^{n-1} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \\
&= \frac{K_{k-1}(\alpha, \alpha)}{K_k(\alpha, \alpha)} + |\varphi_k(\alpha)|^2 \left(\frac{1}{K_k(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)} \right) \\
&= 1 - \frac{|\varphi_k(\alpha)|^2}{K_n(\alpha, \alpha)},
\end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_{C_n^*})_{(0)}(\mathbf{M}_{C_n})^{(0)} &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|\varphi_0(\alpha)|^2 |\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\
&= |\varphi_0(\alpha)|^2 \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $k < j$,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_{C_n^*})_{(k)}(\mathbf{M}_{C_n})^{(j)} &= -\frac{\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{K_j(\alpha, \alpha) K_{j-1}(\alpha, \alpha)}} \sqrt{\frac{K_{j-1}(\alpha, \alpha)}{K_j(\alpha, \alpha)}} \\
&+ \sum_{l=k}^{n-1} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2 \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_j(\alpha, \alpha)} + \varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \sum_{l=j}^{n-1} \frac{|\varphi_{l+1}(\alpha)|^2}{K_{l+1}(\alpha, \alpha) K_l(\alpha, \alpha)} \\
&= -\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)} \left(\frac{1}{K_j(\alpha, \alpha)} - \sum_{l=j}^{n-1} \left(\frac{1}{K_l(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)} \right) \right) \\
&= -\frac{\varphi_k(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{K_n(\alpha, \alpha)}.
\end{aligned}$$

■

En la literatura, la matriz \mathbf{M}_{C_n} se denomina *casi-unitaria* (ver [63], [92]) en el sentido de que las primeras $n - 1$ filas constituyen un conjunto ortonormal, y la última fila es ortogonal con respecto a ese conjunto, pero no está normalizada.

Para obtener una relación entre las matrices de Hessenberg \mathbf{H}_φ y \mathbf{H}_ψ , introducimos la matriz de cambio de base $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$ tal que $\varphi(z) = \mathbf{L}_{\varphi\psi}\psi(z)$. Esta matriz puede expresarse en términos de las matrices \mathbf{H}_φ y \mathbf{M}_C de la siguiente manera

Proposición 24

$$\mathbf{L}_{\varphi\psi} = (\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})\mathbf{M}_C^*. \quad (2.8)$$

Prueba. Sea $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$ la matriz de cambio de base tal que $\varphi(z) = \mathbf{L}_{\varphi\psi}\psi(z)$. Entonces

$$(z - \alpha)\psi(z) = (z - \alpha)\mathbf{L}_{\varphi\psi}^{-1}\varphi(z).$$

De la relación (2.6) obtenemos

$$\mathbf{M}_C\varphi(z) = \mathbf{L}_{\varphi\psi}^{-1}(\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})\varphi(z).$$

De esta forma,

$$\mathbf{L}_{\varphi\psi}\mathbf{M}_C = \mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I},$$

y dado que $\mathbf{M}_C\mathbf{M}_C^* = \mathbf{I}$ (Proposición 21), se sigue el enunciado. ■

De la proposición anterior, se deduce

Proposición 25

$$\mathbf{H}_\psi - \alpha\mathbf{I} = \mathbf{M}_C\mathbf{L}_{\varphi\psi}.$$

Prueba. De la expresión (2.6),

$$(z - \alpha)\psi(z) = \mathbf{M}_C\varphi(z).$$

Por tanto,

$$(\mathbf{H}_\psi - \alpha\mathbf{I})\psi(z) = \mathbf{M}_C\mathbf{L}_{\varphi\psi}\psi(z),$$

y, en consecuencia, deducimos el enunciado. ■

Para calcular \mathbf{H}_ψ partiendo de \mathbf{H}_φ , primero necesitamos encontrar la matriz triangular inferior $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$. De las expresiones (2.7) y (2.8), mediante cálculos sencillos deducimos

Proposición 26 Las entradas $l_{n,j}$ de la matriz $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$ son

$$l_{n,j} = \begin{cases} \frac{\mathbf{k}_n}{\mathbf{k}_{n+1}} \sqrt{\frac{K_{n+1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}}, & j = n, \\ \frac{\varphi_n(\alpha) \left(\frac{\Phi_{n+1}(0)}{\mathbf{k}_n} \mathbf{k}_{n-1} \varphi_{n-1}^*(\alpha) \right)}{\sqrt{K_n(\alpha, \alpha) K_{n-1}(\alpha, \alpha)}} - \left(\Phi_{n+1}(0) \overline{\Phi_n(0)} + \alpha \right) \sqrt{\frac{K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)}}, & j = n-1, \\ \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\mathbf{k}_n \sqrt{K_j(\alpha, \alpha) K_{j+1}(\alpha, \alpha)}} \left(\mathbf{k}_j \overline{\varphi_{j+1}(\alpha)} \varphi_j^*(\alpha) - \overline{\varphi_{j+1}(0)} K_j(\alpha, \alpha) \right), & j \leq n-2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Obsérvese que, para sucesiones de polinomios ortogonales mónicos, teniendo en cuenta que $\varphi_n(z) = \kappa_n \Phi_n(z)$, la matriz de cambio de base $\mathbf{L}_{\Phi R}$, tal que $\Phi(z) = \mathbf{L}_{\Phi R} R(z)$, puede expresarse en términos de $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$ como

$$\mathbf{L}_{\Phi R} = \mathbf{D}_{\Phi}^{-1} \mathbf{L}_{\varphi\psi} \mathbf{D}_R, \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{D}_{\Phi} = \text{diag}(\kappa_0, \kappa_1, \dots)$, $\mathbf{D}_R = \text{diag}(r_0, r_1, \dots)$ y r_j es el coeficiente principal de $\psi_j(z)$.

2.1.1.1. Ejemplo

Consideremos ahora los funcionales bilineales

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} \frac{1}{|e^{i\theta} - \beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi},$$

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_C} = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) \overline{q(e^{i\theta})} \frac{|e^{i\theta} - \alpha|^2}{|e^{i\theta} - \beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| < 1$ y $|\alpha| = 1$ (ver [47]). En este caso, es bien conocido que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ está dada por

$$\varphi_0(z) = (1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(z) = z^{n-1}(z - \beta), \quad \text{para } n \geq 1.$$

De esta manera,

$$\mathbf{H}_{\varphi} - \alpha \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \beta - \alpha & (1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

y el n -ésimo núcleo reproductor $K_n(z, \alpha)$ correspondiente a \mathcal{L} es

$$K_n(z, \alpha) = 1 - |\beta|^2 + \sum_{j=1}^n (z - \beta) \overline{(\alpha - \beta)} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{j-1}.$$

En consecuencia, tenemos

$$K_n(\alpha, \alpha) = 1 - |\beta|^2 + n|\alpha - \beta|^2.$$

Las entradas $m_{l,j}$ de \mathbf{M}_C son

$$m_{l,j} = \begin{cases} -\frac{\alpha^l(\alpha - \beta)(1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{K_l(\alpha, \alpha)K_{l+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j = 0, \\ -\frac{|\alpha - \beta|^2 \alpha^{l-j+1}}{\sqrt{K_l(\alpha, \alpha)K_{l+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } 1 \leq j \leq l, \\ \sqrt{\frac{K_l(\alpha, \alpha)}{K_{l+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j = l + 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.10)$$

De (2.8), deducimos que $\mathbf{L}_{\varphi\psi} = (\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})\mathbf{M}_C^*$. De ahí, obtenemos las entradas $l_{r,j}$ de la matriz $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$

$$l_{r,j} = \begin{cases} \sqrt{K_1(\alpha, \alpha)}, & j = r = 0, \\ -\alpha \sqrt{\frac{K_{r-1}(\alpha, \alpha)}{K_r(\alpha, \alpha)}}, & j = r - 1, \\ \sqrt{\frac{K_{r+1}(\alpha, \alpha)}{K_r(\alpha, \alpha)}}, & j = r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.11)$$

De acuerdo con la Proposición 25 las entradas $\tilde{h}_{r,j}$ de la matriz $\mathbf{H}_\psi - \alpha\mathbf{I}$ son

$$\tilde{h}_{r,j} = \begin{cases} -\left(\alpha - \beta + \alpha \frac{K_0(\alpha, \alpha)}{K_1(\alpha, \alpha)}\right), & \text{si } r = j = 0, \\ \frac{\alpha^{r-1}(1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha - \beta)^2}{\sqrt{K_1(\alpha, \alpha)K_r(\alpha, \alpha)K_{r+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } j = 0, r \geq 1, \\ \frac{\sqrt{K_r(\alpha, \alpha)K_{r+2}(\alpha, \alpha)}}{K_{r+1}(\alpha, \alpha)}, & \text{si } j = r + 1, \\ -\alpha \left(\frac{|\alpha - \beta|^2}{K_r(\alpha, \alpha)} - \frac{K_r(\alpha, \alpha)}{K_{r+1}(\alpha, \alpha)} \right), & \text{si } 1 \leq j = r, \\ \frac{|\alpha - \beta|^4 \alpha^{r-j+1}}{\sqrt{K_r(\alpha, \alpha)K_{r+1}(\alpha, \alpha)K_j(\alpha, \alpha)K_{j+1}(\alpha, \alpha)}}, & \text{si } 1 \leq j < r, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2.1.2. Funciones de Carathéodory.

Sea \mathcal{L} un funcional lineal definido positivo en Λ y sea $F(z)$ la correspondiente función de Carathéodory. Consideremos ahora una transformación espectral racional lineal \tilde{F} de F , de la siguiente manera

$$\tilde{F}(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)}, \quad (2.12)$$

donde $A(z)$, $B(z)$ y $D(z)$ son polinomios en z . La función \tilde{F} es analítica en un entorno de $z = 0$, es decir,

$$\tilde{F}(z) = \tilde{c}_0 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_{-n} z^n,$$

donde $\tilde{c}_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{c}_{-k} \in \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$, y $\limsup |\tilde{c}_k|^{\frac{1}{k}} < \infty$, y puede ser asociada con el funcional lineal $\tilde{\mathcal{L}}$ en Λ definido por

$$\langle \tilde{\mathcal{L}}, z^n \rangle = \tilde{c}_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

con el convenio $\tilde{c}_n = \overline{\tilde{c}_{-n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\tilde{\mathcal{L}}$ un funcional lineal tal que el funcional bilineal asociado satisfice

$$\langle p, q \rangle_{\tilde{\mathcal{L}}} = \langle (z - \alpha)p, (z - \alpha)q \rangle_{\mathcal{L}}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.13)$$

Es decir, $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_C$, la transformación canónica de Christoffel de \mathcal{L} definida en (2.1).

Si

$$F_C(z) = \tilde{c}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{-n} z^n,$$

con $\tilde{c}_{-k} = \langle 1, z^k \rangle_{\mathcal{L}_C}$, probaremos que es una transformación espectral lineal de F . Dado que

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{-k} &= \langle 1, z^k \rangle_{\mathcal{L}_C} \\ &= \langle (z - \alpha, (z - \alpha)z^k) \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \langle z - \alpha, z^{k+1} - \alpha z^k \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= c_{-k} - \alpha c_{-(k+1)} - \bar{\alpha} c_{-(k-1)} + |\alpha|^2 c_{-k} \\ &= (1 + |\alpha|^2) c_{-k} - \alpha c_{-(k+1)} - \bar{\alpha} c_{-(k-1)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} F_C(z) &= \tilde{c}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_{-n} z^n \\ &= (1 + |\alpha|^2) c_0 - \alpha c_{-1} - \bar{\alpha} c_1 - 2\bar{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-(n-1)} z^n - 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_{-(n+1)} z^n \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\alpha|^2) c_k z^k \\ &= (1 + |\alpha|^2) F(z) - \bar{\alpha} \left(c_1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} z^{k+1} \right) - \alpha \left(c_{-1} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{-k} z^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} F_C(z) &= (1 + |\alpha|^2) F(z) - \bar{\alpha} (c_1 + z(F(z) + c_0)) - \alpha \left(c_{-1} + \frac{1}{z} (F(z) - c_0 - 2c_{-1}z) \right) \\ &= \frac{-\bar{\alpha} z^2 + (1 + |\alpha|^2) z - \alpha}{z} F(z) + \frac{-\bar{\alpha} c_0 z^2 + (\alpha c_{-1} - \bar{\alpha} c_1) z + \alpha c_0}{z}. \end{aligned}$$

Así pues,

Proposición 27

$$F_C(z) = \frac{A(z)F(z) + B(z)}{D(z)}, \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} A(z) &= (1 - \bar{\alpha}z)(z - \alpha), \\ B(z) &= -\bar{\alpha}c_0z^2 + (\alpha c_{-1} - \bar{\alpha}c_1)z + \alpha c_0, \\ D(z) &= z. \end{aligned}$$

2.1.3. Coeficientes de Verblunsky

Ahora encontraremos la relación entre $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$, la familia de coeficientes de Verblunsky asociados a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, respecto al funcional lineal \mathcal{L} , y la familia de coeficientes de Verblunsky $\{R_n(0)\}_{n \geq 1}$ correspondientes a $\{R_n\}_{n \geq 0}$, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a \mathcal{L}_C .

Proposición 28 *Sea $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ la familia de coeficientes de Verblunsky correspondientes a $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al funcional lineal \mathcal{L} . Entonces, la familia de coeficientes de Verblunsky correspondientes a $\{R_n\}_{n \geq 0}$, resulta ser*

$$R_n(0) = \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\alpha \mathbf{k}_n K_n(\alpha, \alpha)} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha}, \quad n \geq 1. \quad (2.15)$$

Prueba. Usando (2.2) y evaluando en $z = 0$, obtenemos

$$R_n(0) = -\alpha^{-1} \left(\Phi_{n+1}(0) - \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha, \alpha)} K_n(0, \alpha) \right).$$

Aplicando la fórmula de Christoffel-Darboux,

$$R_n(0) = -\alpha^{-1} \left(\Phi_{n+1}(0) - \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)}{\mathbf{k}_n K_n(\alpha, \alpha)} \Phi_n^*(0) \overline{\Phi_n^*(\alpha)} \right) \quad (2.16)$$

$$= \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\alpha \mathbf{k}_n K_n(\alpha, \alpha)} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha}, \quad (2.17)$$

dato que $\Phi_n^*(0) = 1$.

Otra manera de expresar (2.17) es

$$\begin{aligned} R_n(0) &= \frac{[\alpha\Phi_n(\alpha) + \Phi_{n+1}(0)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}]\overline{\Phi_n^*(\alpha)} - \Phi_{n+1}(0)}{\alpha\mathbf{k}_n K_n(\alpha, \alpha)} \\ &= \left[\frac{|\Phi_n^*(\alpha)|^2}{\mathbf{k}_n K_n(\alpha, \alpha)} - 1 \right] \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha} + \frac{\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\mathbf{k}_n K_n(\alpha, \alpha)}, \end{aligned}$$

es decir, existe una dependencia lineal entre ambas familias de coeficientes de Verblunsky.

Notemos que, si $|\alpha| \neq 1$, la expresión para los coeficientes de Verblunsky $\{R_n(0)\}_{n \geq 1}$ en términos de $\Phi_n(\alpha)$ y $\Phi_n^*(\alpha)$ es

$$\begin{aligned} R_n(0) &= \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1 - |\alpha|^2) - \Phi_{n+1}(0)}{\alpha[|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2]} \\ &= \frac{[\alpha\Phi_n(\alpha) + \Phi_{n+1}(0)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}]\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1 - |\alpha|^2) - \Phi_{n+1}(0)}{\alpha[|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2]} \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{(\alpha\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)} + \Phi_{n+1}(0)|\Phi_n^*(\alpha)|^2)(1 - |\alpha|^2)}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_{n+1}(0)|\Phi_n^*(\alpha)|^2 + |\alpha|^2\Phi_{n+1}(0)|\Phi_n(\alpha)|^2}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2}. \end{aligned}$$

Así pues

$$R_n(0) = \frac{\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1 - |\alpha|^2) + \bar{\alpha}\Phi_{n+1}(0)[|\Phi_n(\alpha)|^2 - |\Phi_n^*(\alpha)|^2]}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2},$$

Es decir, $R_n(0)$ se puede expresar mediante

$$R_n(0) = A(\alpha; n)\Phi_{n+1}(0) + B(\alpha; n),$$

con

$$\begin{aligned} A(\alpha; n) &= \frac{\bar{\alpha}[|\Phi_n(\alpha)|^2 - |\Phi_n^*(\alpha)|^2]}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2}, \\ B(\alpha; n) &= \frac{\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1 - |\alpha|^2)}{|\Phi_n^*(\alpha)|^2 - |\alpha|^2|\Phi_n(\alpha)|^2}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si $|\alpha| = 1$,

$$\begin{aligned} K_n(z, \alpha) &= \frac{\overline{\Phi_{n+1}^*(\alpha)}\Phi_{n+1}^*(z) - \overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}(z)}{\mathbf{k}_{n+1}(1 - \bar{\alpha}z)} \\ &= \frac{\alpha\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}(z) - \bar{\alpha}^n\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}^*(z)}{\mathbf{k}_{n+1}(z - \alpha)}, \end{aligned}$$

y aplicando la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\begin{aligned} K_n(\alpha, \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} K_n(z, \alpha) &= \frac{\alpha\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}'(\alpha) - \bar{\alpha}^n\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}'^*(\alpha)}{\mathbf{k}_{n+1}} \\ &= \frac{\alpha\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}'(\alpha) - \bar{\alpha}^n\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}'^*(\alpha)}{\mathbf{k}_{n+1}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R_n(0) &= \frac{\mathbf{k}_{n+1}\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_n^*(\alpha)}{\alpha\mathbf{k}_n[\alpha\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}'(\alpha) - \bar{\alpha}^n\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}'^*(\alpha)]} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha} \\ &= \frac{\Phi_{n+1}(\alpha)\overline{\Phi_n^*(\alpha)}(1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2)}{\alpha[\alpha\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}'(\alpha) - \bar{\alpha}^n\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}'^*(\alpha)]} - \frac{\Phi_{n+1}(0)}{\alpha}. \end{aligned}$$

■

Teorema 29 ([80], [82]) Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$. Entonces, para todo $\delta > 0$,

$$\sup_{n; \delta < \arg(z) < 2\pi - \delta} |\Phi_n^*(z)| < \infty.$$

Además, fuera de $z = 1$, tenemos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^*(z)$, es continuo e igual a $D(0)D(z)^{-1}$, donde $D(z)$ es la función de Szegő definida en (1.22). Por otra parte, $d\mu_s = 0$ o si no, es a lo más una medida discreta consistente en un punto con masa en $|z| = 1$.

Proposición 30 Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$. Entonces, para $|\alpha| \leq 1$, $\alpha \neq 1$,

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} |R_n(0)|^2 < \infty.$$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |R_{n+1}(0) - R_n(0)| < \infty$.

Prueba.

(i) Llamamos

$$t_{n+1} = \frac{\Phi_{n+1}(\alpha) \overline{\Phi_n^*(\alpha)}}{\alpha \mathbf{k}_n K_n(\alpha, \alpha)}.$$

Sea $|\alpha| = 1$. Obsérvese que $\overline{\Phi_{n+1}(\alpha)} = \overline{\alpha^{n+1} \Phi_{n+1}^*(\alpha)}$ y, por el Teorema 29, sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^*(\alpha) = D(0)D(\alpha)^{-1}$, donde D es la función de Szegő. Esto también implica que $1/K_n(\alpha, \alpha) = O(1/n)$.

Para $|\alpha| < 1$, obsérvese que $\Phi_n(\alpha)$ y $\Phi_n^*(\alpha)$ son $O(\alpha^n)$ y $1/K_n(\alpha, \alpha) = \lambda_n(\alpha) > 0$, donde λ_n es la función de Christoffel asociada a σ .

Entonces t_{n+1} es $O(1/n)$. Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$ y t_{n+1} es $O(1/n)$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} |R_n(0)|^2 < \infty$.

(ii) Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$, solo necesitamos probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| < \infty.$$

Nótese que, de la relación de recurrencia se tiene

$$\Phi_{n+1}^*(\alpha) - \Phi_n^*(\alpha) = \overline{\Phi_{n+1}(0)} \alpha \Phi_n(\alpha).$$

Entonces $|\Phi_{n+1}^*(\alpha) - \Phi_n^*(\alpha)| = O(|\Phi_{n+1}(0)|)$ y, por tanto,

$$\left| \frac{(\Phi_{n+1}^*(\alpha) - \Phi_n^*(\alpha)) \Phi_{n+1}^*(\alpha)}{\mathbf{k}_n K_n(\alpha, \alpha)} \right| = O\left(\frac{|\Phi_{n+1}(0)|}{n}\right). \quad (2.18)$$

Por otro lado,

$$\left| \left(\frac{1}{K_{n+1}(\alpha, \alpha)} - \frac{1}{K_n(\alpha, \alpha)} \right) \frac{\Phi_n(\alpha) \overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)}}{\mathbf{k}_n} \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (2.19)$$

Entonces, usando (2.18) y (2.19) tenemos

$$|t_{n+1} - t_n| = O\left(\frac{|\Phi_{n+1}(0)|}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

y, por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{n+1} - t_n| < \infty.$$

■

Por último, consideremos el ejemplo mostrado en la Sección 2.1.1.1. Para este caso, tenemos

$$\begin{aligned} K_n(z, \alpha) &= \frac{\overline{\Phi_{n+1}^*(\alpha)}\Phi_{n+1}^*(z) - \overline{\Phi_{n+1}(\alpha)}\Phi_{n+1}(z)}{(1 - \bar{\alpha}z)\mathbf{k}_{n+1}}, \\ &= \frac{(1 - \beta\bar{\alpha})(1 - \bar{\beta}z) - (\bar{\alpha}z)^n(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(z - \beta)}{1 - \bar{\alpha}z}, \end{aligned}$$

dado que $\mathbf{k}_n = 1$, $n \geq 1$, y $\mathbf{k}_0 = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} K_n(\alpha, \alpha) &= \sum_{m=0}^n \frac{\overline{\Phi_m(\alpha)}\Phi_m(\alpha)}{\mathbf{k}_m}, \\ &= 1 - |\alpha|^2 + \sum_{m=1}^n \bar{\alpha}^{m-1}(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\alpha^{m-1}(\alpha - \beta), \\ &= 1 - |\alpha|^2 + n|\alpha - \beta|^2, \end{aligned}$$

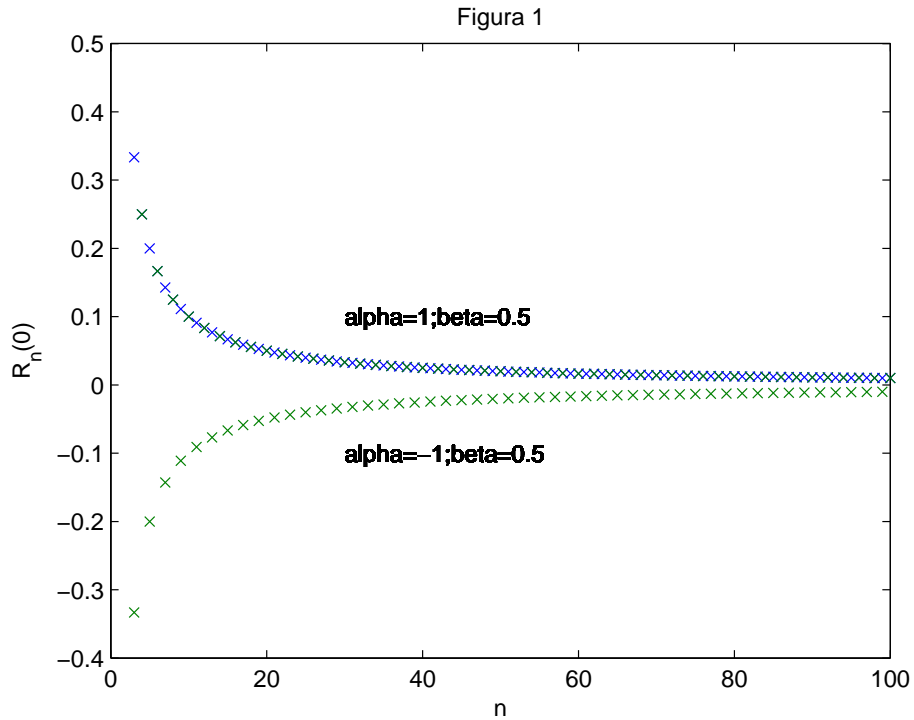
y por tanto, la familia de polinomios ortogonales mónicos $\{R_n\}_{n \geq 0}$ está dada por (ver (2.2))

$$R_n(z) = \frac{1}{z - \alpha} \left[z^n(z - \beta) - \frac{\alpha^n(\alpha - \beta)(1 - \beta\bar{\alpha})(1 - \bar{\beta}z) - z^n|\alpha - \beta|^2(z - \beta)}{[1 - |\alpha|^2 + n|\alpha - \beta|^2](1 - \bar{\alpha}z)} \right].$$

Por tanto, los coeficientes de Verblunsky son

$$\begin{aligned} R_1(0) &= \frac{(\alpha - \beta)(1 - \beta\bar{\alpha}) - \alpha^{-1}\beta|\alpha - \beta|^2}{1 - |\alpha|^2 + n|\alpha - \beta|^2}, \\ R_n(0) &= \frac{\alpha^{n-1}(\alpha - \beta)(1 - \beta\bar{\alpha})}{1 - |\alpha|^2 + n|\alpha - \beta|^2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

La figura a continuación muestra el comportamiento de $R_n(0)$ para algunos valores específicos de α y β .



Por otra parte, la existencia de $\{R_n\}_{n \geq 0}$ está garantizada dado que $K_n(\alpha, \alpha) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Transformaciones $\mathcal{L}_R = \Re[P_n(z)]\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_I = \Im[P_n(z)]\mathcal{L}$.

Consideremos las siguientes transformaciones de un funcional lineal hermitiano \mathcal{L} .

Definición 31 Dado un funcional lineal hermitiano \mathcal{L} y un polinomio mónico $P_n(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i z^i$, $\alpha_n = 1$, denotaremos por \mathcal{L}_R y \mathcal{L}_I los funcionales lineales tales que

$$(i) \quad \langle \mathcal{L}_R, q \rangle = \left\langle \mathcal{L}, \frac{1}{2}(P_n(z) + \bar{P}_n(z^{-1}))q \right\rangle,$$

$$(ii) \quad \langle \mathcal{L}_I, q \rangle = \left\langle \mathcal{L}, \frac{1}{2i}(P_n(z) - \bar{P}_n(z^{-1}))q \right\rangle.$$

Obsérvese que \mathcal{L}_R y \mathcal{L}_I son también hermitianos. Si \mathcal{L} es cuasi-definido, las condiciones necesarias y suficientes para que \mathcal{L}_R y \mathcal{L}_I sean también cuasi-definidos han sido estudiadas en [17] y [95], principalmente en el caso en que

$P_1(z) = z - \alpha$, es decir, un polinomio mónico de grado 1. Adicionalmente, se muestran expresiones explícitas para las sucesiones de polinomios mónicos ortogonales con respecto a \mathcal{L}_R y \mathcal{L}_I , respectivamente, en términos de $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$. En particular,

Proposición 32 [95]

- (i) Si $|\Re\alpha| \neq 1$ y b_1, b_2 son los ceros del polinomio $z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + 1$, entonces \mathcal{L}_R es cuasi-definido si y sólo si $K_n^*(b_1, b_2) \neq 0$, $n \geq 0$. Además, si denotamos por $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a \mathcal{L}_R , entonces

$$Y_{n-1}(z) = \frac{\Phi_n(z)K_{n-1}^*(b_1, b_2) - K_{n-1}^*(z, b_2)\Phi_n(b_1)}{K_{n-1}^*(b_1, b_2)(z - b_1)}, \quad n \geq 1, \quad (2.20)$$

y

$$Y_{n-1}(0) = \frac{\Phi_n(b_1)\Phi_{n-1}(b_2) - \Phi_n(b_2)\Phi_{n-1}(b_1)}{K_{n-1}^*(b_1, b_2)(b_1 - b_2)\mathbf{k}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.21)$$

- (ii) Si $|\Re\alpha| = 1$ y b es el cero doble del polinomio $z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + 1$, entonces \mathcal{L}_R es cuasi-definido si y sólo si $K_n^*(b, b) \neq 0$, $n \geq 0$. Además,

$$Y_{n-1}(z) = \frac{\Phi_n(z)K_{n-1}^*(b, b) - K_{n-1}^*(z, b)\Phi_n(b)}{K_{n-1}^*(b, b)(z - b)}, \quad n \geq 1, \quad (2.22)$$

y

$$Y_{n-1}(0) = -b \frac{\Phi_n(0)K_{n-1}^*(b, b)\mathbf{k}_{n-1} - \Phi_{n-1}(b)\Phi_n(b)}{K_{n-1}^*(b, b)\mathbf{k}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.23)$$

Proposición 33 [95]

- (i) Si $|\Im\alpha| \neq 1$ y \tilde{b}_1, \tilde{b}_2 son los ceros del polinomio $z^2 + (\bar{\alpha} - \alpha)z - 1$, entonces \mathcal{L}_I es cuasi-definido si y sólo si $K_n^*(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \neq 0$, $n \geq 0$. Además, si denotamos por $\{y_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a \mathcal{L}_I , entonces

$$y_{n-1}(z) = \frac{\Phi_n(z)K_{n-1}^*(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) - K_{n-1}^*(z, \tilde{b}_2)\Phi_n(\tilde{b}_1)}{K_{n-1}^*(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)(z - \tilde{b}_1)}, \quad n \geq 1, \quad (2.24)$$

y

$$y_{n-1}(0) = \frac{\Phi_n(\tilde{b}_1)\Phi_{n-1}(\tilde{b}_2) - \Phi_n(\tilde{b}_2)\Phi_{n-1}(\tilde{b}_1)}{K_{n-1}^*(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)(\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)\mathbf{k}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.25)$$

(ii) Si $|\Im\alpha| = 1$ y \tilde{b} es el cero doble del polinomio $z^2 + (\bar{\alpha} - \alpha)z - 1$, \mathcal{L}_I es cuasi-definido si y sólo si $K_n^*(\tilde{b}, \tilde{b}) \neq 0$, $n \geq 0$. Además,

$$y_{n-1}(z) = \frac{\Phi_n(z)K_{n-1}^*(\tilde{b}, \tilde{b}) - K_{n-1}^*(z, \tilde{b})\Phi_n(\tilde{b})}{K_{n-1}^*(\tilde{b}, \tilde{b})(z - \tilde{b})}, \quad n \geq 1, \quad (2.26)$$

y

$$y_{n-1}(0) = \tilde{b} \frac{\Phi_n(0)K_{n-1}^*(\tilde{b}, \tilde{b})\mathbf{k}_{n-1} - \Phi_{n-1}(\tilde{b})\Phi_n(\tilde{b})}{K_{n-1}^*(\tilde{b}, \tilde{b})\mathbf{k}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.27)$$

Obsérvese que, si $\alpha = a + ci$, entonces $b_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}$ y $b_2 = b_1^{-1} = a - \sqrt{a^2 - 1}$, así como $\tilde{b}_1 = \sqrt{1 - c^2 + ci}$ y $\tilde{b}_2 = -\tilde{b}_1^{-1}$. Existe otra condición equivalente para que \mathcal{L}_R y \mathcal{L}_I sean cuasi-definidos, así como una expresión adicional para las familias de parámetros de Verblunsky asociados con ellos, como se muestra a continuación.

Proposición 34 [17] *Los funcionales lineales \mathcal{L}_R y \mathcal{L}_I son cuasi-definidos si y sólo si $\Pi_n(b_1) \neq 0$, $\Pi_n(\tilde{b}_1) \neq 0$, $n \geq 0$, respectivamente, donde*

$$\Pi_n(x) = \begin{vmatrix} x\Phi_n(x) & \Phi_n^*(x) \\ x^{-1}\Phi_n(x^{-1}) & \Phi_n^*(x^{-1}) \end{vmatrix}.$$

Además, las familias de los parámetros de Verblunsky $\{Y_n(0)\}_{n \geq 1}$, $\{y_n(0)\}_{n \geq 1}$, asociadas a \mathcal{L}_R y \mathcal{L}_I , respectivamente, están dadas por

$$Y_n(0) = (b_1 - b_1^{-1}) \frac{\Phi_n(b_1)\Phi_n(b_1^{-1})}{\Pi_n(b_1)}, \quad n \geq 1, \quad (2.28)$$

$$y_n(0) = (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1^{-1}) \frac{\Phi_n(\tilde{b}_1)\Phi_n(-\tilde{b}_1^{-1})}{\Pi_n(\tilde{b}_1)}, \quad n \geq 1. \quad (2.29)$$

Observación 35 *Si $|\Re(\alpha)| \geq 1$, la transformación resultante es de tipo Christoffel (ver Sección anterior).*

2.2.1. Matrices de Hessenberg.

Ahora procedemos a estudiar la matriz de Hessenberg asociada al funcional \mathcal{L}_R . Asumimos que $|\alpha| \neq 1$. De (2.20),

$$\begin{aligned}
(z - b_1)Y_n(z) &= \Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{K_n^*(b_1, b_2)} K_n^*(z, b_2) \\
&= \Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{K_n^*(b_1, b_2)} \left[\frac{1}{\mathbf{k}_n} \frac{z\Phi_n(z)\Phi_n^*(b_2) - b_2\Phi_n^*(z)\Phi_n(b_2)}{z - b_2} \right] \\
&= \Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{\mathbf{k}_n K_n^*(b_1, b_2)} \left[\frac{\Phi_{n+1}(z)\Phi_n^*(b_2) - \Phi_{n+1}(b_2)\Phi_n^*(z)}{z - b_2} \right].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(z - b_1)(z - b_2)Y_n(z) &= (z - b_2)\Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_2)}{\mathbf{k}_n K_n^*(b_1, b_2)} \Phi_{n+1}(z) \\
&+ \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_{n+1}(b_2)}{K_n^*(b_1, b_2)} \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z)}{\mathbf{k}_j} \\
&= z\Phi_{n+1}(z) - b_2\Phi_{n+1}(z) - \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_2)}{\mathbf{k}_n K_n^*(b_1, b_2)} \Phi_{n+1}(z) \\
&+ \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_{n+1}(b_2)}{K_n^*(b_1, b_2)} \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z)}{\mathbf{k}_j} \\
&= \Phi_{n+2}(z) - \Phi_{n+2}(0)\Phi_{n+1}^*(z) - b_2\Phi_{n+1}(z) \\
&- \frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{\mathbf{k}_n K_n^*(b_1, b_2)} \left(\Phi_n^*(b_2)\Phi_{n+1}(z) - \Phi_{n+1}(b_2) \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z)}{\mathbf{k}_j} \right) \\
&= \Phi_{n+2}(z) - \left(b_2 + \overline{\Phi_{n+2}(0)\Phi_{n+1}(0)} + \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_2)}{\mathbf{k}_n K_n^*(b_1, b_2)} \right) \Phi_{n+1}(z) \\
&+ \left(\frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_{n+1}(b_2)}{K_n^*(b_1, b_2)} - \Phi_{n+2}(0)\mathbf{k}_{n+1} \right) \sum_{j=0}^n \frac{\overline{\Phi_j(0)}\Phi_j(z)}{\mathbf{k}_j}.
\end{aligned}$$

En forma matricial, la expresión anterior se convierte en

$$(z - b_1)(z - b_2)Y(z) = \mathbf{M}_R \Phi(z), \quad (2.30)$$

donde \mathbf{M}_R es una matriz cuyos elementos son

$$\tilde{m}_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n + 2, \\ b_2 + \Phi_{n+2}(0)\overline{\Phi_{n+1}(0)} + \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_2)}{\mathbf{k}_n K_n^*(b_1, b_2)} & \text{si } j = n + 1, \\ \left(\frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_{n+1}(b_2)}{K_n^*(b_1, b_2)} - \Phi_{n+2}(0)\mathbf{k}_{n+1} \right) \overline{\Phi_j(0)} & \text{si } j \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.31)$$

y $Y(z) = [Y_0(z), Y_1(z), \dots]^t$, $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots]^t$. Obsérvese que (2.30) también puede escribirse como

$$z[\Re\{P_1(z)\}Y(z)] = \mathbf{M}_R\Phi(z). \quad (2.32)$$

Por otro lado, si denotamos por \mathbf{H}_Y la matriz de Hessenberg asociada a $\{Y_n\}_{n \geq 0}$, es decir, la matriz que satisface $zY(z) = \mathbf{H}_Y Y(z)$, entonces de (2.30) obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_Y - b_1\mathbf{I})(\mathbf{H}_Y - b_2\mathbf{I})Y(z) &= \mathbf{M}_R\Phi(z) \\ &= \mathbf{M}_R\mathbf{L}_{Y\Phi}Y(z), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{L}_{Y\Phi}$ es una matriz triangular inferior que satisface $\Phi(z) = \mathbf{L}_{Y\Phi}Y(z)$, esto es, una matriz de cambio de base. Por lo tanto,

$$(\mathbf{H}_Y - b_1\mathbf{I})(\mathbf{H}_Y - b_2\mathbf{I}) = \mathbf{M}_R\mathbf{L}_{Y\Phi}.$$

No es muy difícil mostrar que los elementos de $\mathbf{L}_{Y\Phi}$ son

$$l_{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n, \\ -\frac{\mathbf{k}_n}{\mathbf{k}_{n-1}}(\Phi_{n+1}(0)\overline{Y_j(0)} - 1) & \text{si } j = n - 1, \\ -\frac{\mathbf{k}_n}{\mathbf{k}_j}\overline{\Phi_{n+1}(0)Y_j(0)} & \text{si } j \leq n - 2, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.33)$$

donde $Y_k(0)$ puede calcularse utilizando (2.28) y $\tilde{\mathbf{k}}_{n-1} = -\frac{\mathbf{k}_n K_n^*(b_1, b_2)}{2K_{n-1}^*(b_1, b_2)}$.

2.2.2. Funciones de Carathéodory.

Sea σ una medida de probabilidad no trivial, soportada en la circunferencia unidad, y consideremos la transformación $d\tilde{\sigma} = \Re(P_n)d\sigma$, donde P_n es un polinomio en z de grado n . Si $F(z)$ es la función de Carathéodory asociada a σ , queremos encontrar $F_R(z)$, la función de Carathéodory asociada a $\tilde{\sigma}$.

Empecemos con $n = 1$, es decir, $P_1(z) = z - \alpha$. De la representación integral de Riesz-Herglotz para $F_R(z)$, tenemos

$$\begin{aligned} F_R(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\tilde{\sigma} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \frac{P_1(e^{i\theta}) + \overline{P_1(e^{i\theta})}}{2} d\sigma. \end{aligned}$$

Llamamos

$$\begin{aligned} F_{R_1}(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} P_1(e^{i\theta}) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} (e^{i\theta} - \alpha) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} (e^{i\theta} - z + z - \alpha) d\sigma \\ &= (z - \alpha) \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\sigma + \int_0^{2\pi} (e^{i\theta} + z) d\sigma. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$F_{R_1}(z) = (z - \alpha)F(z) + z c_0 + c_1.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F_{R_2}(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \overline{P_1(e^{i\theta})} d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} (e^{-i\theta} - \bar{\alpha}) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{z^{-1} + e^{-i\theta}}{z^{-1} - e^{-i\theta}} (e^{-i\theta} - z^{-1} + z^{-1} - \bar{\alpha}) d\sigma \\ &= (z^{-1} - \bar{\alpha})F(z) - \int_0^{2\pi} (z^{-1} + e^{-i\theta}) d\sigma \\ &= (z^{-1} - \bar{\alpha})F(z) - z^{-1} c_0 - \bar{c}_1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} F_R(z) &= \frac{F_{R_1}(z) + F_{R_2}(z)}{2} \\ &= \frac{[z - \alpha - \bar{\alpha} + z^{-1}]F(z) + c_0 z + c_1 - c_{-1} - c_0 z^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Esto es, $F_R(z)$ puede expresarse como una transformación espectral lineal de $F(z)$ de la siguiente manera

$$F_R(z) = M(z)F(z) + N(z),$$

donde

$$\begin{aligned} M(z) &= \Re[P_1(z)], \\ N(z) &= \frac{c_0}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}(c_1 - \bar{c}_1). \end{aligned}$$

Obsérvese que si $c_0 = 1$, entonces $N(z) = \frac{1}{2}[\Omega_1(z) - z^{-1}\Omega_1^*(z)]$, donde $\Omega_1(z)$ es el polinomio de segunda especie de grado 1 asociado a σ .

Generalizando para un polinomio P_n de grado n , obtenemos

Proposición 36 *Sea σ una medida de probabilidad no trivial soportada en la circunferencia unidad. Consideremos una perturbación de σ definida mediante $d\tilde{\sigma} = (\Re P_n)d\sigma$, donde P_n es un polinomio en z de grado n , es decir, $P_n(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \dots + \alpha_n$. Sea $F(z)$ la función de Carathéodory asociada a σ . Entonces, $F_R(z)$, la función de Carathéodory asociada a $\tilde{\sigma}$, es una transformación espectral lineal de $F(z)$ dada por*

$$F_R(z) = \frac{[P_n(z) + \bar{P}_n(1/z)]F(z) + Q_n(z) - \bar{Q}_n(1/z)}{2},$$

donde $Q_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} [P_n(e^{i\theta}) - P_n(z)] d\sigma$.

Prueba. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} P_n(e^{i\theta}) d\sigma &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} [P_n(e^{i\theta}) - P_n(z)] d\sigma + P_n(z)F(z) \\ &= P_n(z)F(z) + Q_n(z), \end{aligned}$$

donde

$$Q_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} [P_n(e^{i\theta}) - P_n(z)] d\sigma.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \overline{P_n(e^{i\theta})} d\sigma &= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{z} + e^{-i\theta}}{\frac{1}{z} - e^{-i\theta}} [\bar{P}_n(e^{-i\theta}) - \bar{P}_n(1/z)] d\sigma + \bar{P}_n(1/z)F(z) \\ &= \bar{P}_n(1/z)F(z) - \bar{Q}_n(1/z). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_R(z) = \frac{[P_n(z) + \bar{P}_n(1/z)]F(z) + Q_n(z) - \bar{Q}_n(1/z)}{2}.$$

■

2.2.3. Coeficientes de Verblunsky.

En el resto del capítulo, supondremos que σ pertenece a la clase de Szegő, es decir, satisface (1.21) y, además, es una medida de variación acotada. Asumiremos también que \mathcal{L}_R es cuasi-definido.

Proposición 37 *La familia de parámetros de Verblunsky $\{Y_n(0)\}_{n \geq 1}$ puede ser expresada en términos de la familia $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ mediante*

$$Y_n(0) = A_n(b_1)\Phi_{n+1}(0) + B_n(b_1), \quad (2.34)$$

con

$$A_n(b_1) = \frac{\Phi_n(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1) - \Phi_n(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1})}{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1)}, \quad (2.35)$$

$$B_n(b_1) = \frac{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n(b_1)}{\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1)}. \quad (2.36)$$

Prueba. De la relación de recurrencia y (2.28), tenemos

$$Y_n(0) = \frac{[\Phi_{n+1}(b_1) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(b_1)]\Phi_n(b_1^{-1}) - [\Phi_{n+1}(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(b_1^{-1})]\Phi_n(b_1)}{[\Phi_{n+1}(b_1) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(b_1)]\Phi_n^*(b_1^{-1}) - [\Phi_{n+1}(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(b_1^{-1})]\Phi_n^*(b_1)},$$

y el resultado se obtiene mediante una reordenación de los términos. ■

Ahora, estudiamos el comportamiento de $A_n(b_1)$ y $B_n(b_1)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para $|b_1| < 1$, dividiendo por $\Phi_{n+1}(b_1^{-1})$ en el numerador y denominador de $A_n(b_1)$, tenemos

$$A_n(b_1) = \frac{[\Phi_n(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1) - \Phi_n(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1})] \frac{1}{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})}}{[\Phi_{n+1}(b_1)\Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1})\Phi_n^*(b_1)] \frac{1}{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})}}.$$

Por otra parte, tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(b_1) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1 \Phi_n^*(b_1)}{\Phi_n^*(b_1)} = -b_1,$$

ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n+1}(z)}{\Phi_n(z)} = z$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, y si $|b_1| < 1$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_n(b_1) \Phi_n^*(b_1^{-1})}{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_n(b_1) b_1^{-n} \overline{\Phi_n(\bar{b}_1)}}{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})} = 0.$$

De manera similar, para $|b_1| > 1$, dividiendo por $\Phi_{n+1}(b_1)$ en el numerador y denominador de $A_n(b_1)$, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(b_1) = -b_1^{-1}$.

Por otro lado, para $B_n(b_1)$, cuando $|b_1| < 1$,

$$B_n(b_1) = \frac{[\Phi_{n+1}(b_1) \Phi_n(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1}) \Phi_n(b_1)] / \Phi_n(b_1^{-1})}{[\Phi_{n+1}(b_1) \Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1}) \Phi_n^*(b_1)] / \Phi_n(b_1^{-1})}.$$

Obsérvese que $\Phi_n(b_1^{-1})$ nunca se anula si $|b_1| < 1$ y, por tanto, el denominador solamente se anula en $b_1 = \pm 1$. Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en el numerador de $B_n(b_1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n+1}(b_1) \Phi_n(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1}) \Phi_n(b_1)}{\Phi_n(b_1^{-1})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(b_1) \left[\frac{\Phi_{n+1}(b_1)}{\Phi_n(b_1)} - \frac{\Phi_{n+1}(b_1^{-1})}{\Phi_n(b_1^{-1})} \right] \\ &= (b_1 - b_1^{-1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(b_1) = 0, \end{aligned}$$

Para el denominador, tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{n+1}(b_1) \Phi_n^*(b_1^{-1}) - \Phi_{n+1}(b_1^{-1}) \Phi_n^*(b_1)}{\Phi_n(b_1^{-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} [-b_1^{-1} \Phi_n^*(b_1)] = -b_1^{-1}.$$

De manera similar, cuando $|b_1| > 1$, dividiendo el numerador y denominador de $B_n(b_1)$ por $\Phi_n(b_1)$ y calculando el límite, obtenemos el mismo resultado.

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(b_1) = 0$ para todo $b_1 \in \mathbb{R} \setminus 0$, salvo si $b_1 = \pm 1$. En consecuencia,

Proposición 38 *Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$. Entonces, para $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$,*

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} |Y_n(0)|^2 < \infty.$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} |Y_{n+1}(0) - Y_n(0)| < \infty.$$

Observación 39 Si $b_1 = \pm 1$, obtenemos el resultado probado en la Sección (2.1.3).

2.2.4. Ejemplos.

2.2.4.1. El caso Bernstein-Szegő.

Estudiamos una transformación de la medida de Bernstein-Szegő definida mediante $d\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(z - \alpha + z^{-1} - \bar{\alpha}) \frac{1-|\beta|^2}{|z-\beta|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$ y $|\beta| < 1$. Es bien conocido que en este caso,

$$\Phi_n(z) = z^n - \beta z^{n-1} \quad \text{y} \quad \Phi_n^*(z) = 1 - \bar{\beta}z, \quad n \geq 1.$$

La condición para la existencia de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ es

$$\begin{aligned} 0 &\neq b_1 \Phi_n(b_1) \Phi_n^*(b_1^{-1}) - b_1^{-1} \Phi_n(b_1^{-1}) \Phi_n^*(b_1) \\ &= b_1^n (b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1}) - b_1^{-n} (b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1). \end{aligned}$$

En otras palabras

$$\begin{aligned} b_1^{2n} &\neq \frac{(b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1)}{(b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1})} \\ &= \frac{\Phi_1(b_1^{-1}) \Phi_1^*(b_1)}{\Phi_1(b_1) \Phi_1^*(b_1^{-1})}. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos un caso cuasi-definido si y sólo si

$$\frac{\ln \frac{\Phi_1(b_1^{-1}) \Phi_1^*(b_1)}{\Phi_1(b_1) \Phi_1^*(b_1^{-1})}}{2 \ln b_1} \notin \mathbb{N}.$$

Si $\beta = 0$, es decir, una transformación de la medida de Lebesgue, entonces la condición se convierte en

$$b_1^{2n} \neq \frac{1}{b_1^2},$$

es decir,

$$b_1 \neq e^{\frac{k\pi i}{n+1}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

A continuación, obtenemos una expresión para la nueva familia de parámetros de Verblunsky. De (2.35),

$$\begin{aligned} A_n(b_1) &= \frac{b_1^{-n+1}(b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1) - b_1^{n-1}(b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1})}{b_1^n(b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1}) - b_1^{-n}(b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1)} \\ &= \frac{b_1^{-n+1}\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1) - b_1^{n-1}\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1})}{b_1^n\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1}) - b_1^{-n}\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)} \\ &= \frac{b_1\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1) - b_1^{2n-1}\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1})}{b_1^{2n}\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1}) - \Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)}. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(b_1) &= -b_1, \quad |b_1| < 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(b_1) &= -b_1^{-1}, \quad |b_1| > 1. \end{aligned}$$

Por otra parte, de (2.36),

$$\begin{aligned} B_n(b_1) &= \frac{b_1^n(b_1 - \beta)b_1^{-n+1}(b_1^{-1} - \beta) - b_1^{-n}(b_1^{-1} - \beta)b_1^{n-1}(b_1 - \beta)}{b_1^n(b_1 - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1^{-1}) - b_1^{-n}(b_1^{-1} - \beta)(1 - \bar{\beta}b_1)} \\ &= \frac{b_1\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1}) - b_1^{-1}\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1})}{b_1^n\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1}) - b_1^{-n}\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)} \\ &= \frac{b_1^n(b_1 - b_1^{-1})\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1})}{b_1^{2n}\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^{-1}) - \Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para n suficientemente grande, si $|b_1| < 1$, entonces

$$\begin{aligned} Y_n(0) &= A_n(b_1)\Phi_{n+1}(0) + B_n(b_1) \\ &\sim N_1(b_1)b_1^n, \end{aligned}$$

$$\text{con } N_1(b_1) = -\frac{(b_1 - b_1^{-1})\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1})}{\Phi_1(b_1^{-1})\Phi_1^*(b_1)}.$$

Si $|b_1| > 1$, entonces

$$Y_n(0) \sim N_2(b_1)b_1^{-n},$$

con $N_2(b_1) = \frac{(b_1 - b_1^{-1})\Phi_1(b_1)\Phi_1(b_1^{-1})}{\Phi_1(b_1)\Phi_1^*(b_1^1)}$.

Finalmente, para $\beta = 0$,

$$A_n(b_1) = \frac{1 - b_1^{2n}}{b_1^{2n+1} - b_1^{-1}},$$

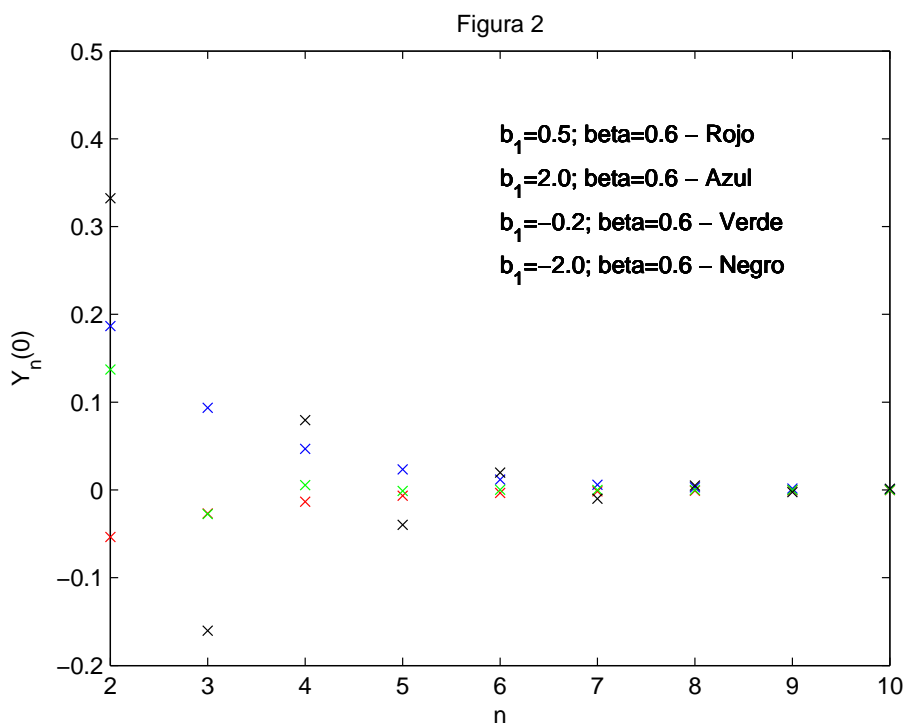
$$B_n(b_1) = \frac{b_1^n(b_1 - b_1^{-1})}{b_1^{2n+1} - b_1^{-1}}.$$

Por tanto, en este caso obtenemos el siguiente comportamiento asintótico para los parámetros de Verblunsky

$$Y_n(0) \sim b_1^n, \quad |b_1| < 1,$$

$$Y_n(0) \sim b_1^{-n}, \quad |b_1| > 1.$$

La siguiente figura muestra dicho comportamiento para algunos valores específicos de b_1 .



2.2.4.2. El caso $\frac{1}{2}d\tilde{\sigma} = (z - \alpha + z^{-1} - \bar{\alpha})|z - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$.

Ahora estudiamos una transformación de $d\sigma = |z - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$, es decir, una transformación de Christoffel de la medida de Lebesgue con parámetro 1 (ver [73]). Es bien conocido que si denotamos por $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios mónicos ortogonales con respecto a σ , entonces

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{z - 1} \left(z^{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n z^j \right), \quad n \geq 1, \quad (2.37)$$

$$\Phi_n^*(z) = \frac{1}{1 - z} \left(1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n z^{j+1} \right), \quad n \geq 1, \quad (2.38)$$

así como

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (2.39)$$

Entonces, la condición para la existencia de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ es

$$\begin{aligned} & b_1 \frac{1}{b_1 - 1} \left(b_1^{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^j \right) \frac{1}{1 - b_1^{-1}} \left(1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} \right) \\ & - b_1^{-1} \frac{1}{b_1^{-1} - 1} \left(b_1^{-n-1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j} \right) \frac{1}{1 - b_1} \left(1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} \right) \neq 0, \\ & b_1^{n+2} - b_1^{-n-2} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} - \frac{b_1^{n+2}}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} + \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} + \frac{b_1^{-n-2}}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} \neq 0, \\ & b_1^{n+2} - b_1^{-n-2} - \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} + \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} \neq 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} & b_1^{2n+4} - 1 - \frac{2b_1^{n+2} - 2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} \neq 0, \\ & b_1^{n+2} + 1 - \frac{2b_1}{n+1} \frac{b_1^{n+1} - 1}{b_1 - 1} \neq 0, \\ & (n+1)(b_1 - 1)(b_1^{n+2} + 1) - 2b_1(b_1^{n+1} - 1) \neq 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para los parámetros de Verblunsky, de (2.28) tenemos

$$\begin{aligned}
Y_n(0) &= \frac{(b_1 - b_1^{-1}) \frac{1}{b_1-1} \left(b_1^{n+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^j \right) \frac{1}{b_1^{-1}-1} \left(b_1^{-n-1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j} \right)}{\frac{1}{(b_1-1)(1-b_1^{-1})} \left(b_1^{n+2} - b_1^{-n-2} - \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} + \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} \right)} \\
&= \frac{(b_1^{-1} - b_1) \left(1 - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1} + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=0}^n b_1^j \sum_{j=0}^n b_1^{-j} \right)}{b_1^{n+2} - b_1^{-n-2} - \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{j+1} + \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n b_1^{-j-1}} \\
&= \frac{(b_1^{-1} - b_1) \left[b_1^{n+2} - \frac{b_1(b_1^{n+2}+1)}{n+1} \frac{b_1^{n+1}-1}{b_1-1} + \frac{b_1^2}{(n+1)^2} \left(\frac{b_1^{n+1}-1}{b_1-1} \right)^2 \right]}{b_1^{2n+4} - 1 - \frac{2b_1(b_1^{n+2}-1)}{n+1} \frac{b_1^{n+1}-1}{b_1-1}}.
\end{aligned}$$

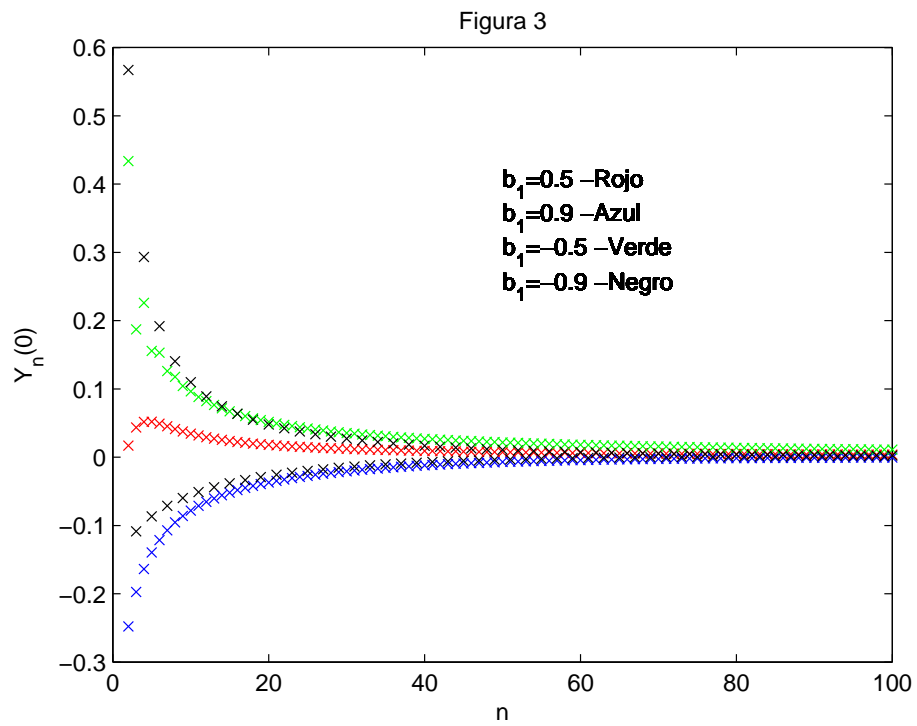
Por tanto, para n suficientemente grande, si $|b_1| < 1$,

$$\begin{aligned}
Y_n(0) &\sim \frac{(b_1^{-1} - b_1) \left[\frac{b_1}{(n+1)(b_1-1)} + \frac{b_1^2}{(n+1)^2(b_1-1)^2} \right]}{-1 - \frac{2b_1}{(n+1)(b_1-1)}} \\
&\sim (b_1 - b_1^{-1}) \frac{b_1}{(n+1)(b_1-1)} \\
&\sim \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $|b_1| > 1$,

$$\begin{aligned}
Y_n(0) &= \frac{(b_1^{-1} - b_1) \left[-\frac{1}{(n+1)(b_1-1)} + \frac{1}{(n+1)^2(b_1-1)^2} \right]}{1 - \frac{2}{(n+1)(b_1-1)}} \\
&\sim (b_1 - b_1^{-1}) \frac{1}{(n+1)(b_1-1)} \\
&\sim \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

El comportamiento de $Y_n(0)$ para valores específicos de b_1 se muestra a continuación



CAPÍTULO 3

Transformaciones espectrales lineales II.

A manera de continuación del capítulo precedente, el presente se enfoca en el análisis de otros dos modelos de transformaciones espectrales lineales. Primero, se estudia un caso más general de la transformación de Geronimus analizada en [72], que consiste en la adición de dos masas colocadas de tal manera que el nuevo funcional lineal \mathcal{L}_G preserve el carácter hermitiano. Se analizan para el nuevo funcional las mismas propiedades estudiadas en el capítulo anterior.

Luego, se estudian dos casos de la llamada transformación de Uvarov. Por una parte, se considera una modificación de un funcional lineal por medio de la adición de una masa real en un punto localizado en la circunferencia unidad. Posteriormente, se aborda una transformación de Uvarov más general consistente en la adición de dos masas complejas conjugadas en puntos localizados fuera de la circunferencia unidad, que son inversos en relación a \mathbb{T} , de tal forma que el nuevo funcional conserve el carácter hermitiano.

Se muestran ejemplos representativos en cada caso.

3.1. La transformación de Geronimus.

Consideramos el funcional lineal \mathcal{L}_G tal que

$$\langle \mathcal{L}_G, p \rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) \frac{d\sigma}{|z - \alpha|^2} + mp(\alpha) + \bar{m}p(\bar{\alpha}^{-1}), \quad p \in \mathbb{P},$$

donde $|\alpha| > 1$, así como el funcional bilineal asociado

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_G} := \int_{\mathbb{T}} p(z) \overline{q(z)} \frac{d\sigma}{|z - \alpha|^2} + \mathbf{m} p(\alpha) \overline{q(\bar{\alpha}^{-1})} + \overline{\mathbf{m}} p(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{q(\alpha)}.$$

En este caso, la medida compleja asociada a \mathcal{L}_G está dada mediante

$$d\sigma_G = \frac{d\sigma}{|z - \alpha|^2} + \mathbf{m} \delta(z - \alpha) + \overline{\mathbf{m}} \delta(z - \bar{\alpha}^{-1}), \quad \mathbf{m} \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

σ_G se denomina transformación canónica de Geronimus de σ .

Proposición 40 *El funcional lineal \mathcal{L}_G tal que $\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_G} = \int p(z) \overline{q(z)} \frac{d\mu}{|z - \alpha|^2} + \mathbf{m} p(\alpha) \overline{q(\bar{\alpha}^{-1})} + \overline{\mathbf{m}} p(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{q(\alpha)}$ es cuasi-definido si y solo si*

$$\varepsilon_n(\alpha) := \|\sigma_G\| - \sum_{j=0}^n \left| q_j(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{q_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 \neq 0, \text{ para todo } n \geq 0,$$

$$\text{donde } \|\sigma_G\| = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\sigma}{|z - \alpha|^2} + \mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}}.$$

Prueba. Consideremos la base $\{1, (z - \alpha), z(z - \alpha), \dots, z^n(z - \alpha), \dots\}$ del espacio vectorial \mathbb{P} . Entonces los momentos $\tilde{c}_{k,j}$ asociados con σ_G correspondientes a la base anterior son

$$\tilde{c}_{k-j} = \left\langle z^{k-1}(z - \alpha), z^{j-1}(z - \alpha) \right\rangle_{\sigma_G} = \left\langle z^{k-1}, z^{j-1} \right\rangle_{\sigma} = c_{k-j}, \quad k, j = 1, 2, \dots$$

Así, la matriz de Gram $\tilde{\mathbf{T}}$ asociada con σ_G tiene como submatriz principal de orden $(n + 1) \times (n + 1)$

$$\tilde{\mathbf{T}}_n = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 & \tilde{c}_{-1} & \cdots & \tilde{c}_{-n+1} & \tilde{c}_{-n} \\ \tilde{c}_1 & & & & c_{-n+1} \\ \vdots & & \mathbf{T}_{n-2} & & \vdots \\ \tilde{c}_{n-1} & & & & c_{-1} \\ \tilde{c}_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

con

$$\tilde{c}_{-j} = \left\langle 1, z^{j-1}(z - \alpha) \right\rangle_{\sigma_G} = \left\langle \frac{1}{z - \alpha}, z^{j-1} \right\rangle_{\sigma} + \overline{\mathbf{m}(\bar{\alpha}^{-1} - \alpha)} \alpha^{-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\tilde{c}_0 = \langle 1, 1 \rangle_{\sigma_G} = \left\langle \frac{1}{z - \alpha}, \frac{1}{z - \alpha} \right\rangle_{\sigma} + \mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}}.$$

Usando la identidad de Sylvester (ver [58], pag. 22) obtenemos, para $n \geq 2$,

$$\det \tilde{\mathbf{T}}_n \det \mathbf{T}_{n-2} = \det \tilde{\mathbf{T}}_{n-1} \det \mathbf{T}_{n-1} - D_{n-1} \overline{D}_{n-1},$$

donde

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} \tilde{c}_{-1} & \tilde{c}_{-2} & \cdots & \tilde{c}_{-n} \\ c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_{-1} \end{vmatrix}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{-j} &= \langle 1, z^{j-1}(z - \alpha) \rangle_{\sigma_G} = \left\langle \frac{1}{z - \alpha}, z^{j-1} \right\rangle_{\sigma} + \overline{\mathbf{m}(\bar{\alpha}^{-1} - \alpha)} \alpha^{-j+1} \\ &= Q_{n-1}(\alpha) - \overline{\Phi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})} \mathbf{m}(\bar{\alpha}^{-1} - \alpha), \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} D_{n-1} &= (-1)^n \det \mathbf{T}_{n-2} Q_{n-1}(\alpha) + (-1)^{n-1} \det \mathbf{T}_{n-2} \overline{\Phi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})} \mathbf{m}(\alpha^{-1} - \bar{\alpha}) \\ &= (-1)^n \det \mathbf{T}_{n-2} \left(Q_{n-1}(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\Phi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \det \tilde{\mathbf{T}}_n \det \mathbf{T}_{n-2} &= \det \tilde{\mathbf{T}}_{n-1} \det \mathbf{T}_{n-1} \\ &\quad - \det \mathbf{T}_{n-2} \det \mathbf{T}_{n-1} \left| q_{n-1}(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\varphi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2, \end{aligned}$$

luego, tenemos

$$\frac{\det \tilde{\mathbf{T}}_n}{\det \mathbf{T}_{n-1}} = \frac{\det \tilde{\mathbf{T}}_{n-1}}{\det \mathbf{T}_{n-2}} - \left| q_{n-1}(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\varphi_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2, \quad n \geq 2.$$

Para $n = 1$ tenemos

$$\frac{\det \tilde{\mathbf{T}}_1}{\det \mathbf{T}_0} = \tilde{c}_0 - \frac{|\tilde{c}_{-1}|^2}{c_0} = \|\sigma_G\| - \left| q_0(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\varphi_0(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2.$$

Así pues, podemos deducir de manera recursiva

$$\frac{\det \tilde{\mathbf{T}}_n}{\det \mathbf{T}_{n-1}} = \|\sigma_G\| - \sum_{j=0}^{n-1} \left| q_j(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 = \varepsilon_{n-1}(\alpha). \quad (3.3)$$

■

Como una consecuencia, asumiendo que el funcional lineal asociado con σ_G es cuasi-definido, obtenemos

Corolario 41 Para $n \geq 0$

$$\frac{\tilde{\mathbf{k}}_{n+1}}{\mathbf{k}_n} = \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)},$$

con el convenio $\varepsilon_{-1}(\alpha) = \|\sigma_G\|$.

Prueba. Tenemos

$$\frac{\tilde{\mathbf{k}}_{n+1}}{\mathbf{k}_n} = \frac{\det \tilde{\mathbf{T}}_{n+1} \det \mathbf{T}_{n-1}}{\det \tilde{\mathbf{T}}_n \det \mathbf{T}_n},$$

y de aquí se sigue el resultado. ■

Obsérvese que $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión decreciente. De acuerdo con el clásico teorema de los cosenos, tenemos

$$\left| q_j(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 < 2 \left(|q_j(\alpha)|^2 + |\mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1})|^2 |\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})|^2 \right).$$

Entonces,

$$\varepsilon_n(\alpha) > \|\sigma_G\| - 2 \sum_{j=0}^n |q_j(\alpha)|^2 - 2 |\mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1})|^2 K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}),$$

pero, teniendo en cuenta que las funciones $q_j(\alpha)$ son los coeficientes de Fourier de $\frac{1}{z-\alpha}$ con respecto a la familia de polinomios ortonormales $\{\varphi_j\}_{n \geq 0}$, tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(\alpha) &> \left\| \frac{1}{z-\alpha} \right\|_{\sigma}^2 + \mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}} - 2 \sum_{j=0}^n |q_j(\alpha)|^2 - 2 |\mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1})|^2 K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) \\ &> \frac{1}{\|z-\alpha\|^2} + \mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}} - 2 |\mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1})|^2 K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}). \end{aligned}$$

Luego, si definimos $\varepsilon_{\infty}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\alpha)$, para tener $\varepsilon_{\infty}(\alpha) > -\infty$, necesitamos

$\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})|^2 < \infty$ o, de manera equivalente, que σ pertenezca a la clase de Szegő (ver [92], pag. 170).

Ahora, suponemos que \mathcal{L}_G es cuasi-definido o, equivalentemente, $\varepsilon_n(\alpha) \neq 0$, $n \geq 0$. Entonces existe una sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{G_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}_G}$.

Presentamos, a continuación, una expresión explícita para la sucesión de polinomios ortogonales $\{G_n\}_{n \geq 0}$. Dado que $\{(z-\alpha)\Phi_n(z)\}_{n \geq 0}$ es una base en $(z-\alpha)\mathbb{P}$,

que es ortogonal respecto al funcional bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}_G}$, entonces podemos expresar $G_{n+1}(z) - G_{n+1}(\alpha) \in (z - \alpha)\mathbb{P}$, $n \geq 1$, en términos de la base anterior, es decir

$$G_{n+1}(z) - G_{n+1}(\alpha) = (z - \alpha)\Phi_n(z) + (z - \alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n+1,j} \Phi_j(z),$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1,j} &= \frac{\langle G_{n+1}(z) - G_{n+1}(\alpha), (z - \alpha)\Phi_j(z) \rangle_{\mathcal{L}_G}}{\mathbf{k}_j} \\ &= -\frac{G_{n+1}(\alpha)}{\mathbf{k}_j} \langle 1, (z - \alpha)\Phi_j(z) \rangle_{\mathcal{L}_G} \\ &= -\frac{G_{n+1}(\alpha)}{\mathbf{k}_j} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\Phi_j(z)}}{z - \alpha} d\sigma(z) + m \overline{(\bar{\alpha}^{-1} - \alpha)\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right) \\ &= \frac{G_{n+1}(\alpha)}{\mathbf{k}_j} \left(Q_j(\alpha) + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} G_{n+1}(z) &= (z - \alpha)\Phi_n(z) + G_{n+1}(\alpha) \left(1 + (z - \alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j(\alpha) + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})}}{\mathbf{k}_j} \Phi_j(z) \right) \\ &= (z - \alpha)\Phi_n(z) + G_{n+1}(\alpha) \left(1 + (z - \alpha) \left[\int_{\mathbb{T}} \frac{K_{n-1}(z, t)}{\alpha - t} d\sigma(t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) \right] \right). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{k}}_{n+1} &= \langle G_{n+1}(z), z^n(z - \alpha) \rangle_{\mathcal{L}_G} \\
&= \langle \Phi_n(z), z^n \rangle_{\sigma} + G_{n+1}(\alpha) \left(\langle 1, z^n(z - \alpha) \rangle_{\mathcal{L}_G} + \int_{\mathbb{T}} \frac{\langle K_{n-1}(z, t), z^n \rangle_{\sigma}}{\alpha - t} d\sigma(t) + \right. \\
&\quad \left. + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \langle K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), z^n \rangle_{\sigma} \right) \\
&= \mathbf{k}_n + G_{n+1}(\alpha) \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\bar{z}^n}{z - \alpha} d\sigma(z) + m\alpha^{-n-1} (1 - |\alpha|^2) + \int_{\mathbb{T}} \frac{\bar{t}^n}{\alpha - t} d\sigma(t) \right. \\
&\quad \left. - Q_n(\alpha) + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \left(\langle K_n(z, \bar{\alpha}^{-1}), z^n \rangle_{\sigma} - \overline{\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})} \right) \right) \\
&= \mathbf{k}_n - G_{n+1}(\alpha) \left(Q_n(\alpha) + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})} \right).
\end{aligned}$$

Del Corolario 41, se sigue que

$$\kappa_n(\sigma) \left(q_n(\alpha) + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})} \right) G_{n+1}(\alpha) = \frac{\left| q_n(\alpha) + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\varphi_n(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}.$$

Entonces, para $n \geq 1$,

$$G_{n+1}(z) = (z - \alpha)\Phi_n(z) + \frac{\bar{A}_n}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \left(1 + (z - \alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j}{\mathbf{k}_j} \Phi_j(z) \right), \quad (3.4)$$

donde $A_j = Q_j(\alpha) + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Obsérvese que $G_1(z) - G_1(\alpha) = z - \alpha$ y (3.4) también se cumple para $n = 0$, con el convenio $\sum_{j=0}^{-1} \frac{A_j}{\mathbf{k}_j} \Phi_j(z) = 0$.

3.1.1. Matrices de Hessenberg.

Proposición 42 Las sucesiones $\{G_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen

$$(z - \alpha)\Phi(z) = \mathbf{M}_G G(z), \quad (3.5)$$

donde $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots]^t$, $G(z) = [G_0(z), G_1(z), \dots]^t$, y \mathbf{M}_G es una matriz de Hessenberg inferior con elementos

$$m_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k + 1, \\ -\frac{\kappa_{j-1}(\sigma)^2 \bar{A}_k A_{j-1}}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)} & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ -\frac{\bar{A}_k}{\|\bar{\sigma}\|} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Prueba. Tomamos

$$G_{n+1}(z) = (z - \alpha)\Phi_n(z) + B_n \left[1 + (z - \alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{A_j}{\mathbf{k}_j} \Phi_j(z) \right],$$

donde $B_n = \frac{\bar{A}_n}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)}$, para $n \geq 0$. Por tanto, para $n = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} G_1(z) &= (z - \alpha)\Phi_0(z) + B_0, \\ G_1(z) - B_0 G_0(z) &= (z - \alpha)\Phi_0(z), \end{aligned}$$

Para $n \geq 1$, restamos $B_n G_n(z)$ de $B_{n-1} G_{n+1}(z)$ y obtenemos

$$\begin{aligned} B_{n-1} G_{n+1}(z) - B_n G_n(z) &= (z - \alpha) [B_{n-1} \Phi_n(z) - B_n \Phi_{n-1}(z)] \\ &+ (z - \alpha) B_n B_{n-1} \frac{A_{n-1}}{\mathbf{k}_{n-1}} \Phi_{n-1}(z) \\ &= (z - \alpha) \left[B_{n-1} \Phi_n(z) + \left(B_n B_{n-1} \frac{A_{n-1}}{\mathbf{k}_{n-1}} - B_n \right) \Phi_{n-1}(z) \right]. \end{aligned}$$

Dividiendo por B_{n-1} , finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} G_{n+1}(z) - \frac{B_n}{B_{n-1}} G_n(z) &= (z - \alpha) \left[\Phi_n(z) - \left(B_n \frac{A_{n-1}}{\mathbf{k}_{n-1}} + \frac{B_n}{B_{n-1}} \right) \Phi_{n-1}(z) \right] \\ &= (z - \alpha) \left[\Phi_n(z) - \frac{\bar{A}_n}{A_{n-1}} \Phi_{n-1}(z) \right]. \end{aligned}$$

En forma matricial

$$(z - \alpha) \widehat{\mathbf{M}}_G \Phi(z) = \widehat{\mathbf{M}}_G G(z), \quad (3.6)$$

donde $\widetilde{\mathbf{M}}_G$ y $\widehat{\mathbf{M}}_G$ son matrices bidiagonales superior e inferior, respectivamente, con los siguientes elementos

$$\widetilde{m}_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k + 1, \\ -B_0 & \text{si } j = k = 0, \\ -\frac{B_k}{B_{k-1}} & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \widehat{m}_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ -\frac{\bar{A}_k}{A_{k-1}} & \text{si } j = k - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que $\widehat{\mathbf{M}}_G$ es no singular, podemos escribir

$$(z - \alpha)\Phi(z) = \widehat{\mathbf{M}}_G^{-1} \widetilde{\mathbf{M}}_G G(z),$$

y, por tanto,

$$\mathbf{M}_G = \widehat{\mathbf{M}}_G^{-1} \widetilde{\mathbf{M}}_G.$$

Por otro lado, los elementos de $\widehat{\mathbf{M}}_G^{-1}$ son

$$\widehat{m}_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ \frac{\bar{A}_k}{A_j} & \text{si } j \leq k - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Multiplicando $\widehat{\mathbf{M}}_G^{-1} \widetilde{\mathbf{M}}_G$ obtenemos el resultado. ■

Proposición 43 *La matriz \mathbf{M}_G satisface*

(i) $\mathbf{M}_G \widetilde{\mathbf{D}} \mathbf{M}_G^* = \mathbf{D}$.

(ii) $\mathbf{M}_G^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_G = \widetilde{\mathbf{D}}^{-1} - \varepsilon_\infty(\alpha) \mathbf{b} \mathbf{b}^*$.

con $\mathbf{D} = \langle \Phi, \Phi^T \rangle_\sigma$, $\widetilde{\mathbf{D}} = \langle G, G^T \rangle_{\mathcal{L}_G}$, $\varepsilon_\infty(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\alpha)$, $\mathbf{b} = \left[\frac{1}{\|\bar{\sigma}\|}, \frac{\kappa_0(\sigma)a_0}{\varepsilon_0(\alpha)}, \frac{\kappa_1(\sigma)a_1}{\varepsilon_1(\alpha)}, \dots \right]^t$, $a_j = \kappa_j(\sigma)A_j$, y el convenio $\mathbf{k}_{-1}(\sigma) = A_{-1} = 1$.

Prueba.

(i) Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G \widetilde{\mathbf{D}} \mathbf{M}_G^* &= \mathbf{M}_G \langle G, G^T \rangle_{\mathcal{L}_G} \mathbf{M}_G^* \\ &= \langle \mathbf{M}_G G, (\mathbf{M}_G G)^T \rangle_{\mathcal{L}_G} \\ &= \langle (z - \alpha)\Phi, (z - \alpha)\Phi^T \rangle_{\mathcal{L}_G} \\ &= \langle \Phi, \Phi^T \rangle_\sigma \\ &= \mathbf{D}. \end{aligned}$$

(ii) De la computación directa de $\mathbf{M}_G^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_G$ se sigue

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_G^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_G)_{0,0} &= \frac{\|\mathbf{B}_0\|^2}{\mathbf{k}_0} + \frac{1}{\|\sigma_G\|^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|A_l|^2}{\mathbf{k}_l} \\ &= \frac{|a_0|^2}{\|\sigma_G\|^2} + \frac{1}{\|\sigma_G\|^2} \sum_{l=1}^{\infty} |a_l|^2. \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{k}}_0} - \varepsilon_{\infty}(\alpha) \frac{1}{(\varepsilon_{-1}(\alpha))^2}. \end{aligned}$$

Para los restantes elementos diagonales,

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_G^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_G)_{j,j} &= \frac{1}{\mathbf{k}_{j-1}} + \frac{\kappa_{j-1}(\sigma)^4 |A_{j-1}|^2}{\varepsilon_{j-1}^2(\alpha)} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|A_l|^2}{\mathbf{k}_l} \\ &= \frac{1}{\mathbf{k}_{j-1}} \left(1 + \frac{|a_{j-1}|^2}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)} \right) - \varepsilon_{\infty}(\alpha) \frac{\kappa_{j-1}(\sigma)^2 |a_{j-1}|^2}{\varepsilon_{j-1}^2(\alpha)} \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{k}}_j} - \varepsilon_{\infty}(\alpha) \frac{\kappa_{j-1}(\sigma)^2 |a_{j-1}|^2}{\varepsilon_{j-1}^2(\alpha)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para los elementos no diagonales tenemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_G^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}_G)_{k,j} &= -\frac{\kappa_{k-1}(\sigma)^2 \bar{A}_{k-1} A_{j-1}}{\mathbf{k}_{j-1} \varepsilon_{k-1}(\alpha)} + \frac{\kappa_{k-1}(\sigma)^2 \kappa_{j-1}(\sigma)^2 \bar{A}_{k-1} A_{j-1}}{\varepsilon_{k-1}(\alpha) \varepsilon_{j-1}(\alpha)} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{|A_l|^2}{\mathbf{k}_l} \\ &= \kappa_{k-1}(\sigma) \kappa_{j-1}(\sigma) \bar{a}_{k-1} a_{j-1} \left(-\frac{1}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)} + \frac{\varepsilon_{j-1}(\alpha) - \varepsilon_{\infty}(\alpha)}{\varepsilon_{k-1}(\alpha) \varepsilon_{j-1}(\alpha)} \right) \\ &= -\varepsilon_{\infty}(\alpha) \frac{\kappa_{k-1}(\sigma) \kappa_{j-1}(\sigma) \bar{a}_{k-1} a_{j-1}}{\varepsilon_{k-1}(\alpha) \varepsilon_{j-1}(\alpha)}. \end{aligned}$$

■

Proposición 44 Sean \mathbf{M}_{G_n} , $\mathbf{M}_{G_n}^*$, \mathbf{D}_n y $\tilde{\mathbf{D}}_n$ las submatrices principales de orden $(n+1) \times (n+1)$ de \mathbf{M}_G , \mathbf{M}_G^* , \mathbf{D} y $\tilde{\mathbf{D}}$, respectivamente, y consideremos $\mathbf{b}_n = \left[\frac{1}{\|\tilde{\sigma}\|}, \frac{\kappa_0(\sigma)a_0}{\varepsilon_0(\alpha)}, \dots, \frac{\kappa_{n-1}(\sigma)a_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \right]^t$. Entonces

(i) $\mathbf{M}_{G_n} \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{M}_{G_n}^* = \mathbf{D}_n - \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \mathbf{k}_n e_{n+1} e_{n+1}^t$, donde $e_{n+1} = [0, \dots, 0, 1] \in \mathbb{R}^{n+1}$ es el vector canónico de orden $(n+1)$.

$$(ii) \mathbf{M}_{G_n}^* \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{M}_{G_n} = \tilde{\mathbf{D}}_n^{-1} - \varepsilon_n(\alpha) \mathbf{b}_n \mathbf{b}_n^*.$$

Prueba.

(i) Para $k = 0, j \geq 1$, tenemos

$$\left(\mathbf{M}_{G_n} \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{M}_{G_n}^* \right)_{0,j} = \frac{B_0 A_j \tilde{\mathbf{k}}_0}{\|\sigma_G\|} - \frac{\kappa_0(\sigma)^2 A_j \bar{A}_0 \tilde{\mathbf{k}}_1}{\varepsilon_0(\alpha)}.$$

Teniendo en cuenta el Corolario 41, obtenemos

$$\left(\mathbf{M}_{G_n} \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{M}_{G_n}^* \right)_{0,j} = A_j \bar{A}_0 \left(\frac{1}{\|\sigma_G\|} - \frac{\kappa_0(\sigma)^2 \varepsilon_0(\alpha) \mathbf{k}_0}{\varepsilon_0(\alpha) \varepsilon_{-1}(\alpha)} \right) = 0.$$

Para los restantes elementos no diagonales, $k \neq j$,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M}_{G_n} \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{M}_{G_n}^* \right)_{k,j} &= \frac{\bar{A}_k A_j \tilde{\mathbf{k}}_0}{\|\sigma_G\|^2} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\kappa_l(\sigma)^4 A_k \bar{A}_j |A_l|^2 \tilde{\mathbf{k}}_{l+1}}{\varepsilon_l(\alpha)^2} - \frac{\kappa_k(\sigma)^2 \bar{A}_k A_j}{\varepsilon_k(\alpha)} \\ &= \bar{A}_k A_j \left(\frac{1}{\|\sigma_G\|} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{|a_l|^2}{\varepsilon_l(\alpha) \varepsilon_{l-1}(\alpha)} - \frac{1}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)} \right) \\ &= \bar{A}_k A_j \left(\frac{1}{\|\sigma_G\|} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\varepsilon_{l-1}(\alpha) - \varepsilon_l(\alpha)}{\varepsilon_l(\alpha) \varepsilon_{l-1}(\alpha)} - \frac{1}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)} \right) \\ &= \bar{A}_k A_j \left(\frac{1}{\|\sigma_G\|} + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_l(\alpha)} - \frac{1}{\varepsilon_{l-1}(\alpha)} \right) - \frac{1}{\varepsilon_{k-1}(\alpha)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Para los elementos diagonales, $0 \leq j \leq n-1$,

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{M}_{G_n} \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{M}_{G_n}^* \right)_{j,j} &= \frac{|A_j|^2 \tilde{\mathbf{k}}_0}{\|\sigma_G\|^2} + \sum_{l=0}^{j-1} \frac{\kappa_l(\sigma)^4 |A_j|^2 |A_l|^2 \tilde{\mathbf{k}}_{l+1}}{\varepsilon_l(\alpha)^2} + \tilde{\mathbf{k}}_{k+1} \quad (3.7) \\ &= |A_j|^2 \left(\frac{1}{\|\sigma_G\|} + \sum_{l=0}^{j-1} \frac{|a_l|^2}{\varepsilon_l(\alpha) \varepsilon_{l-1}(\alpha)} \right) + \frac{\mathbf{k}_j \varepsilon_j(\alpha)}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)} \\ &= |A_j|^2 \left(\frac{1}{\|\sigma_G\|} + \sum_{l=0}^{j-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_l(\alpha)} - \frac{1}{\varepsilon_{l-1}(\alpha)} \right) \right) + \frac{\mathbf{k}_j \varepsilon_j(\alpha)}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)} \\ &= |A_j|^2 \frac{1}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)} + \frac{\mathbf{k}_j \varepsilon_j(\alpha)}{\varepsilon_{j-1}(\alpha)} = \mathbf{k}_j. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Finalmente, para el último elemento diagonal, $k = n$, obsérvese que obtenemos el mismo resultado que (3.7), salvo por el término $\tilde{\mathbf{k}}_{n+1}$, que ya no es un elemento de \mathbf{M}_{G_n} . Por lo tanto,

$$\left(\mathbf{M}_{G_n} \tilde{\mathbf{D}}_n \mathbf{M}_{G_n}^*\right)_{n,n} = \mathbf{k}_n - \tilde{\mathbf{k}}_{n+1} = \mathbf{k}_n - \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_{n-1}(\alpha)} \mathbf{k}_n.$$

- (ii) En este caso, necesitamos los mismos cálculos que en la demostración de la Proposición 43(ii), excepto que la suma es finita. Entonces, reemplazamos $\varepsilon_\infty(\alpha)$ por $\varepsilon_n(\alpha)$ en dichos cálculos para obtener el resultado. ■

Denotaremos por \mathbf{H}_Φ la matriz Hessenberg inferior tal que $z\Phi(z) = \mathbf{H}_\Phi\Phi(z)$, es decir, \mathbf{H}_Φ es la matriz asociada con $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ para el operador de multiplicación $(hp)(z) = zp(z)$, $p \in \mathbb{P}$. Ahora estableceremos la relación entre las matrices \mathbf{H}_Φ y \mathbf{H}_G .

Proposición 45 *Sea \mathbf{L}_G la matriz triangular inferior con 1 en los elementos de la diagonal tal que $G(z) = \mathbf{L}_G\Phi(z)$. Entonces*

$$\mathbf{H}_\Phi - \alpha\mathbf{I} = \mathbf{M}_G\mathbf{L}_G \quad (3.9)$$

y

$$\mathbf{H}_G - \alpha\mathbf{I} = \mathbf{L}_G\mathbf{M}_G. \quad (3.10)$$

Prueba. De (3.5), tenemos

$$(\mathbf{H}_\Phi - \alpha\mathbf{I})\Phi(z) = (z - \alpha)\Phi(z) = \mathbf{M}_G G(z) = \mathbf{M}_G \mathbf{L}_G \Phi(z).$$

De manera similar, obtenemos

$$(\mathbf{H}_G - \alpha\mathbf{I})G(z) = (z - \alpha)G(z) = (z - \alpha)\mathbf{L}_G\Phi(z) = \mathbf{L}_G\mathbf{M}_G G(z). \quad \blacksquare$$

De (3.6),

$$\widehat{\mathbf{M}}_G (\mathbf{H}_\Phi - \alpha\mathbf{I}) = \widetilde{\mathbf{M}}_G \mathbf{L}_G. \quad (3.11)$$

En consecuencia, los elementos $l_{k,j}$, $0 \leq j \leq k$, $k = 1, 2, \dots$ de \mathbf{L}_G están dados por

$$l_{k,j} = B_k \sum_{r=j-1}^k \frac{\hat{h}_{r,j}}{B_j}, \quad (3.12)$$

donde $\hat{h}_{r,j}$ son los elementos de la matriz $\hat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{M}}_G (\mathbf{H}_\Phi - \alpha\mathbf{I})$. Ver también [51] donde se estudia el algoritmo *QR* para matrices Hessenberg unitarias.

3.1.1.1. Ejemplo.

A continuación analizaremos la transformación de Geronimus σ_G de la medida de Lebesgue, es decir, el funcional bilineal

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_G} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}}{|e^{i\theta} - \alpha|^2} d\theta + \mathbf{m}p(\alpha)\overline{q(\bar{\alpha}^{-1})} + \overline{\mathbf{m}}p(\bar{\alpha}^{-1})\overline{q(\alpha)}, |\alpha| > 1, \mathbf{m} \in \mathbb{C},$$

y determinaremos la condición para que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}_G}$ sea cuasi-definido (respectivamente, definido positivo).

En el caso definido positivo, necesitamos

$$\|\sigma_G\| - \sum_{n=0}^{n-1} \left| q_j(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1})\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 > 0,$$

$$\text{es decir, } \|\sigma_G\| > \sum_{n=0}^{n-1} \left| q_j(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1})\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2.$$

Pero

$$\begin{aligned} \|\sigma_G\| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|z - \alpha|^2} + \mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}} = \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + \mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}}. \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z|z - \alpha|^2} + \mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{(z - \alpha)(1 - z\bar{\alpha})} + \mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}}. \end{aligned}$$

Luego, el funcional lineal \mathcal{L}_G es definido positivo si y solo si $\frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + \mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}} > \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^2$ para todo $n \geq 1$ o, equivalentemente, $\varepsilon_\infty(\alpha) \geq 0$. Esto significa

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + \mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}} &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \left| q_j(\alpha) + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1})\overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha^{n+1}} + \mathbf{m}(\bar{\alpha} - \alpha^{-1})\frac{1}{\alpha^n} \right|^2 \\ &\geq |1 + \mathbf{m}(|\alpha|^2 - 1)|^2 \frac{1}{|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|^{2n}} \\ &\geq (1 + (\mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}})(|\alpha|^2 - 1) + |\mathbf{m}|^2 (|\alpha|^2 - 1)^2) \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} \\ 0 &\geq |\mathbf{m}|^2 (|\alpha|^2 - 1). \end{aligned}$$

Luego,

$$0 \geq |m|^2 (|\alpha|^2 - 1),$$

y entonces tenemos un caso definido positivo si y sólo si $m = 0$.

A continuación, consideramos el caso cuasi-definido. Necesitamos $\varepsilon_{n-1}(\alpha) \neq 0$ o, de manera equivalente,

$$\|\sigma_G\| \neq \sum_{n=0}^{n-1} \left| q_j(\alpha) + m(\bar{\alpha} - \alpha^{-1}) \overline{\varphi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \right|^2 \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Por otra parte, si

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + m + \bar{m} &= \left| 1 + m(|\alpha|^2 - 1) \right|^2 \frac{1}{|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{|\alpha|^{2n}} \\ &= \left| 1 + m(|\alpha|^2 - 1) \right|^2 \frac{|\alpha|^{2n} - 1}{|\alpha|^{2n} (|\alpha|^2 - 1)} \\ &= \left(\frac{1}{|\alpha|^2 - 1} m + \bar{m} + |m|^2 (|\alpha|^2 - 1)^2 \right) \frac{|\alpha|^{2n} - 1}{|\alpha|^{2n}}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\alpha|^2 - 1} + m + \bar{m} &= |m|^2 (|\alpha|^2 - 1)(|\alpha|^{2n} - 1), \\ \left| 1 + m(|\alpha|^2 - 1) \right| &= |m| (|\alpha|^2 - 1) |\alpha|^n, \quad \text{para todo } n \geq 1. \end{aligned}$$

Luego, para un α fijo con $|\alpha| > 1$, tendremos un caso cuasi-definido si m satisface

$$\frac{\ln \frac{|1+m(|\alpha|^2-1)|}{|m|(|\alpha|^2-1)}}{\ln |\alpha|} \notin \mathbb{N}.$$

En particular, si $m \in \mathbb{R}_+$ y $|\alpha|^2 = 2$ la condición anterior es, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1+m}{m} \right) &\neq n \ln(2^{1/2}), \\ \frac{1+m}{m} &\neq 2^{n/2}, \\ m &\neq \frac{1}{2^{n/2} - 1}. \end{aligned}$$

Es decir, para un α fijo, existe un número infinito de valores de m para los cuales el funcional \mathcal{L}_G es cuasi-definido.

3.1.2. Funciones de Carathéodory.

Ahora determinaremos la función de Carathéodory asociada a la transformación de Geronimus. Tenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \langle z^k, 1 \rangle_{\mathcal{L}} = \langle z^k(z - \alpha), z - \alpha \rangle_{\mathcal{L}_G} \\ &= \tilde{c}_k(1 + |\alpha|^2) - \bar{\alpha}\tilde{c}_{k+1} - \alpha\tilde{c}_{k-1}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si $s_k = \frac{c_k}{\alpha^k}$ y $q_k = \frac{\tilde{c}_k}{\alpha^k} - \frac{\tilde{c}_{k-1}}{\alpha^{k-1}}$, entonces de la expresión anterior obtenemos

$$s_k = q_k - |\alpha|^2 q_{k+1}, \quad k \geq 0,$$

y, en consecuencia,

$$q_k = \frac{q_0 - c_0 - \bar{\alpha}c_1 - \dots - \bar{\alpha}^{k-1}c_{k-1}}{|\alpha|^{2k}}, \quad k \geq 1, \quad (3.14)$$

así como

$$\begin{aligned} q_0 &= \tilde{c}_0 - \alpha\bar{\tilde{c}}_1 \\ q_1 &= \frac{q_0 - c_0}{|\alpha|^2} = \frac{\tilde{c}_1}{\alpha} - \tilde{c}_0. \end{aligned}$$

Luego, q_0 es un parámetro libre. Por tanto

$$\begin{aligned} \tilde{c}_0 - \bar{\alpha}\tilde{c}_1 &= \bar{q}_0, \\ \tilde{c}_0 - \frac{\tilde{c}_{-1}}{\alpha} &= \frac{c_0 - q_0}{|\alpha|^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

y

$$(1 - |\alpha|^2)\tilde{c}_0 = 2\Re(q_0) - c_0,$$

es decir, $\tilde{c}_0 \in \mathbb{R}$. Si asumimos $|\alpha| > 1$, de (3.15) obtenemos \tilde{c}_1 . Por otra parte, de (3.14),

$$\frac{\tilde{c}_k}{\alpha^k} = \tilde{c}_0 + \sum_{j=1}^k q_j, \quad k \geq 2.$$

Por lo tanto, tenemos un grado de libertad que es la elección de q_0 . Por otro lado, si multiplicamos (3.13) por z^k , $k \geq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
F(z) &= \tilde{c}_0(1 + |\alpha|^2) - \bar{\alpha}\tilde{c}_1 - \alpha\bar{\tilde{c}}_1 + 2(1 + |\alpha|^2) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_{-k}z^k - 2\bar{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_{-k+1}z^k \\
&\quad - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_{-k-1}z^k \\
&= (1 + |\alpha|^2)F_G(z) - \bar{\alpha} \left(\tilde{c}_1 + 2z \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_{-k}z^k \right) - \alpha \left(\bar{\tilde{c}}_1 + \frac{2}{z} \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{c}_{-k}z^k \right) \\
&= (1 + |\alpha|^2)F_G(z) - a \left(\tilde{c}_1 + \frac{1}{z} (F_G(z) - \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1z) \right) - \bar{a} (\bar{\tilde{c}}_1 + z(\tilde{c}_0 + F_G(z))) \\
&= (1 + |\alpha|^2)F_G(z) + a \left(\tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_0}{z} \right) - \frac{a}{z}F_G(z) - \bar{a} (\bar{\tilde{c}}_1 + \tilde{c}_0z) - \bar{a}zF_G(z) \\
&= \left(1 + |\alpha|^2 - \frac{a}{z} - \bar{a}z \right) F_G(z) + a\tilde{c}_1 - \bar{a}\bar{\tilde{c}}_1 + \tilde{c}_0 \left(\frac{a}{z} - \bar{a}z \right) \\
&= \left(1 + |\alpha|^2 - \frac{\alpha}{z} - \bar{\alpha}z \right) F_G(z) + \tilde{c}_0 - q_0 - \tilde{c}_0 + \bar{q}_0 + \tilde{c}_0 \left(\frac{\alpha}{z} - \bar{\alpha}z \right).
\end{aligned}$$

Entonces,

Proposición 46

$$F_G(z) = \frac{A_G(z)F(z) + B_G(z)}{D_G(z)},$$

donde

$$\begin{aligned}
A_G(z) &= z, \\
B_G(z) &= \bar{\alpha}\tilde{c}_0z^2 + 2i\Im(q_0)z - \alpha\tilde{c}_0, \\
D_G(z) &= (1 - \bar{\alpha}z)(z - \alpha).
\end{aligned}$$

Del resultado anterior, es sencillo verificar que

$$F_G(z) = \frac{A_G(z)}{D_G(z)}F(z) + m \frac{\alpha + z}{\alpha - z} + \bar{m} \frac{1 + \bar{\alpha}z}{1 - \bar{\alpha}z},$$

$$\text{donde } m = \frac{1}{2} \frac{2q_0 - c_0}{1 - |\alpha|^2}.$$

3.2. Transformación de Uvarov con una masa.

Consideremos nuevamente un funcional lineal hermitiano cuasi-definido \mathcal{L} y sea \mathcal{L}_U una perturbación de \mathcal{L} tal que el funcional bilineal asociado satisface

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_U} = \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} + mp(\alpha)\overline{q(\alpha)}, \quad p, q \in \mathbb{P}, \quad (3.16)$$

donde $m \in \mathbb{R}$ y $|\alpha| = 1$. Puesto que $m \in \mathbb{R}$, el funcional lineal \mathcal{L}_U es también hermitiano.

Esta transformación del funcional lineal \mathcal{L} es un caso particular de la transformación de Uvarov (ver [64], [94] y [103]).

Proposición 47 *El funcional lineal \mathcal{L}_U es cuasi-definido si y sólo si*

$$1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0,$$

para todo $n \geq 1$.

Prueba. Supongamos que \mathcal{L}_U es cuasi-definido y sea $\{U_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L}_U .

A continuación obtenemos una relación entre las familias de polinomios ortogonales mónicos $\{U_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$. Podemos escribir

$$U_n(z) = \Phi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} \Phi_j(z), \quad (3.17)$$

donde $\{\lambda_{n,j}\}_{j=0}^{n-1}$ son los coeficientes de Fourier de U_n respecto a la familia $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, esto es

$$\lambda_{n,j} = \frac{\langle U_n, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}}}{\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}}}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

De la expresión (3.16) y la condición de ortogonalidad de U_n con respecto a \mathcal{L}_U , se tiene

$$\lambda_{n,j} = \frac{\langle U_n, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}_U} - mU_n(\alpha)\overline{\Phi_j(\alpha)}}{\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}}} = -\frac{mU_n(\alpha)\overline{\Phi_j(\alpha)}}{\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}}}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

De esta manera,

$$U_n(z) = \Phi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} \Phi_j(z) = \Phi_n(z) - mU_n(\alpha)K_{n-1}(z, \alpha).$$

Si hacemos $z = \alpha$ en la expresión anterior, entonces obtenemos

$$\Phi_n(\alpha) = U_n(\alpha)(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)).$$

Si $1 + mK_{n_0-1}(\alpha, \alpha) = 0$ para algún n_0 , entonces $\Phi_{n_0}(\alpha) = 0$.

Por otro lado, si tenemos en cuenta que $|\alpha| = 1$, se tiene que $\Phi_{n_0}^*(\alpha) = 0$. Aplicando la relación de recurrencia descendente (1.17), se obtiene $\Phi_{n_0-1}(\alpha) = 0$, y si usamos dicha relación reiteradamente, llegamos a $\Phi_1(\alpha) = 0$. Así pues $\Phi_1(z) = z - \alpha$ y entonces $|\Phi_1(0)| = 1$, lo que contradice el carácter cuasi-definido de \mathcal{L} . Luego,

$$1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0,$$

para todo $n \geq 1$.

Supongamos ahora que $1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha) \neq 0$ para todo $n \geq 1$ y sea la familia de polinomios mónicos $\{U_n\}_{n \geq 0}$ definida por

$$U_n(z) = \Phi_n(z) - \frac{m\Phi_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}K_{n-1}(z, \alpha). \quad (3.18)$$

Entonces, para $0 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \langle U_n(z), (z - \alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_U} &= \langle \Phi_n(z), (z - \alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}} - \frac{m\Phi_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \langle K_{n-1}(z, \alpha), (z - \alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \mathbf{k}_n \delta_{n,k} - \frac{m\Phi_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \left\langle K_n(z, \alpha) - \frac{\overline{\Phi_n(\alpha)}}{\mathbf{k}_n} \Phi_n(z), (z - \alpha)^k \right\rangle_{\mathcal{L}} \\ &= \mathbf{k}_n \delta_{n,k} + m \frac{\Phi_n(\alpha) \overline{\Phi_n(\alpha)}}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\langle U_n(z), (z - \alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_U} = \mathbf{k}_n \frac{1 + mK_n(\alpha, \alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)} \delta_{n,k}. \quad (3.19)$$

Así pues, $\{U_n\}_{n \geq 0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L}_U . ■

Si el funcional \mathcal{L} es definido positivo y $m > 0$, entonces $1 + mK_n(\alpha, \alpha) > 0$ para todo $n \geq 0$. En consecuencia \mathcal{L}_U es también definido positivo.

En este caso, sea $\{v_n\}_{n \geq 0}$ la familia de polinomios ortonormales con respecto a \mathcal{L}_U . Para encontrar una expresión de los elementos de la familia $\{v_n\}_{n \geq 0}$ en términos de $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$, debemos obtener la norma de U_n respecto a \mathcal{L}_U . Así, de (3.19)

$$\|U_n\|_{\mathcal{L}_U}^2 = \langle U_n, U_n \rangle_{\mathcal{L}_U} = \frac{1}{\mathbf{k}_n^2} \frac{1 + mK_n(\alpha, \alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} v_n(z) &= \left(\frac{1}{\kappa_n \|U_n\|_{\mathcal{L}U}} \right) \varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\Phi_n(\alpha)}{\|U_n\|_{\mathcal{L}U} (1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha))} \overline{\varphi_j(\alpha)} \varphi_j(z) \\ &= \left(\sqrt{\frac{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}{1+mK_n(\alpha, \alpha)}} \right) \varphi_n(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_n(\alpha, \alpha))(1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha))}} \varphi_j(z). \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2.1. Matrices de Hessenberg.

De acuerdo con (3.20) se tiene

Proposición 48 *Sea $\mathbf{L}_{v\varphi}$ una matriz triangular inferior tal que $\Upsilon(z) = \mathbf{L}_{v\varphi}\varphi(z)$, donde $\Upsilon(z) = [v_0(z), v_1(z), \dots]^t$ y $\varphi(z) = [\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots]^t$. Entonces las entradas de $\mathbf{L}_{v\varphi}$ están dadas por*

$$(\mathbf{L}_{v\varphi})_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}{1+mK_n(\alpha, \alpha)}}, & n = j, \\ -\frac{m\varphi_n(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_n(\alpha, \alpha))(1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha))}}, & n > j, \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Para calcular $\mathbf{L}_{v\varphi}^{-1}$, hacemos

$$\Phi_n(z) = U_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n,j} U_j(z),$$

donde $\gamma_{n,j}$, $0 \leq j \leq n-1$, son los coeficientes de Fourier dados por

$$\gamma_{n,j} = \frac{\langle \Phi_n, U_j \rangle_{\mathcal{L}U}}{\langle U_j, U_j \rangle_{\mathcal{L}U}} = \frac{\langle \Phi_n, U_j \rangle_{\mathcal{L}} + mP_n(\alpha) \overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|_{\mathcal{L}U}^2} = \frac{m\Phi_n(\alpha) \overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|_{\mathcal{L}U}^2}.$$

Así pues, para las familias correspondientes de polinomios ortonormales se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= \kappa_n \|U_n\|_{\mathcal{L}U} v_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha) \overline{U_j(\alpha)}}{\|U_j\|_{\mathcal{L}U}} v_j(z) \\ &= \sqrt{\frac{1+mK_n(\alpha, \alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}} v_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m\varphi_n(\alpha) \overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_j(\alpha, \alpha))(1+mK_{j-1}(\alpha, \alpha))}} v_j(z). \end{aligned}$$

En consecuencia,

Proposición 49 Las entradas de la matriz $\mathbf{L}_{v\varphi}^{-1}$ están dadas por

$$\left(\mathbf{L}_{v\varphi}^{-1}\right)_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+mK_n(\alpha,\alpha)}{1+mK_{n-1}(\alpha,\alpha)}}, & n = j, \\ \frac{m\varphi_n(\alpha)\overline{\varphi_j(\alpha)}}{\sqrt{(1+mK_j(\alpha,\alpha))(1+mK_{j-1}(\alpha,\alpha))}}, & n > j, \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Ahora, suponiendo que tenemos un caso definido positivo, queremos establecer una relación entre las matrices de Hessenberg \mathbf{H}_φ y \mathbf{H}_v asociadas a \mathcal{L} y \mathcal{L}_U , respectivamente. Para ello podemos usar los resultados presentados en la Sección 2.1.1 del Capítulo 2, observando lo siguiente.

Si al funcional lineal \mathcal{L}_U le aplicamos la transformación definida en (2.1), se tiene

$$|z - \alpha|^2 \mathcal{L}_U = |z - \alpha|^2 \mathcal{L} = \mathcal{L}_C, \quad (3.21)$$

donde $|z - \alpha|^2 \mathcal{L}$ denota el funcional lineal tal que

$$\langle |z - \alpha|^2 \mathcal{L}, p(z) \rangle = \langle \mathcal{L}, (z - \alpha)(z^{-1} - \bar{\alpha})p(z) \rangle.$$

Sabemos, por la Proposición 25, que

$$\mathbf{H}_\psi - \alpha \mathbf{I} = \mathbf{M} \mathbf{L}_{\varphi\psi},$$

donde \mathbf{M} es la matriz cuasi-unitaria dada por (2.6) y $\mathbf{L}_{\varphi\psi}$ es una matriz triangular inferior tal que $\varphi(z) = \mathbf{L}_{\varphi\psi} \psi(z)$.

Teniendo en cuenta (4.40), podemos entonces aplicar el mismo proceso con el funcional lineal \mathcal{L}_U . De esta forma, para las familias de polinomios ortonormales $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 0}$ asociadas a \mathcal{L}_U y \mathcal{L}_C , respectivamente, tenemos las relaciones siguientes

$$(z - \alpha)\psi(z) = \mathbf{M}_U \Upsilon(z) \quad \text{y} \quad \Upsilon(z) = \mathbf{L}_{\varphi\nu} \psi(z).$$

Entonces, por la Proposición 25, $\mathbf{H}_\psi - \alpha \mathbf{I} = \mathbf{M}_U \mathbf{L}_{\varphi\nu}$.

Proposición 50

$$\mathbf{L}_U = \mathbf{L}_{v\varphi} \mathbf{L}_{\varphi\psi} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_U = \mathbf{M} \mathbf{L}_{v\varphi}^{-1}. \quad (3.22)$$

Prueba. Dado que $\Upsilon(z) = \mathbf{L}_{\nu\varphi}\varphi(z)$ y $\varphi(z) = \mathbf{L}_{\varphi\psi}\psi(z)$, entonces se tiene $\Upsilon(z) = \mathbf{L}_{\nu\varphi}\mathbf{L}\psi(z)$.

Por otra parte, como $\Upsilon(z) = \mathbf{L}_U\psi(z)$, obtenemos $\mathbf{L}_U = \mathbf{L}_{\nu\varphi}\mathbf{L}_{\varphi\psi}$.

Ahora bien, dado que $\mathbf{H}_\psi - \alpha\mathbf{I} = \mathbf{M}\mathbf{L}_{\varphi\psi} = \mathbf{M}_U\mathbf{L}_U$, se tiene

$$\mathbf{M}_U = \mathbf{M}\mathbf{L}_{\varphi\psi}\mathbf{L}_U^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{L}_{\varphi\psi}(\mathbf{L}_{\varphi\psi}^{-1}\mathbf{L}_{\nu\varphi}^{-1}) = \mathbf{M}\mathbf{L}_{\nu\varphi}^{-1}.$$

■

De esta manera, para calcular $\mathbf{H}_\nu - \alpha\mathbf{I}$ partiendo de $\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I}$, necesitamos obtener las matrices \mathbf{M} y \mathbf{L} definidas en (2.7) y (2.8), respectivamente. Luego, calculamos \mathbf{M}_U y \mathbf{L}_U mediante las expresiones (50) y, finalmente, hacemos $\mathbf{H}_\nu - \alpha\mathbf{I} = \mathbf{L}_U\mathbf{M}_U$.

El resultado análogo para las submatrices principales es el siguiente

Proposición 51 *Sea $(\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})_n$ la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de $\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I}$ y consideremos la factorización $(\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})_n = R_n Q_n$ donde R_n es una matriz triangular inferior y Q_n es una matriz unitaria, tal que $(\mathbf{H}_\varphi - \alpha\mathbf{I})_n^* = Q_n^* R_n^*$. Entonces*

$$(\mathbf{H}_\nu - \alpha\mathbf{I})_{n-1} = (\hat{\mathbf{L}}_{11} R_n Q_n \hat{\mathbf{L}}_{11}^{-1})_{n-1},$$

donde $\hat{\mathbf{L}}_{11}$ es la submatriz principal de dimensión $n \times n$ de la matriz $\mathbf{L}_{\nu\varphi}$, que satisface $\Upsilon(z) = \mathbf{L}_{\nu\varphi}\varphi(z)$.

3.2.2. Coeficientes de Verblunsky.

De (3.18), obtenemos

Proposición 52 *Sea $\{\Phi_n(0)\}_{n \geq 1}$ la familia de coeficientes de Verblunsky correspondientes a $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L} . Entonces, los coeficientes de Verblunsky correspondientes a $\{U_n\}_{n \geq 0}$, están dados por*

$$U_n(0) = \Phi_n(0) - \frac{m\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n-1}(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha))}. \quad (3.23)$$

Prueba. De (3.18), evaluando en $z = 0$, obtenemos

$$U_n(0) = \Phi_n(0) - \frac{m\Phi_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}K_{n-1}(0, \alpha) \quad (3.24)$$

$$= \Phi_n(0) - \frac{m\Phi_n(\alpha)}{1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha)}\overline{\varphi_{n-1}^*(\alpha)}\varphi_{n-1}^*(0) \quad (3.25)$$

$$= \Phi_n(0) - \frac{m\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n-1}(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha))}. \quad (3.26)$$

■

De manera alternativa, podemos utilizar una expresión para los coeficientes de Verblunsky correspondientes a σ_U , la medida asociada al funcional \mathcal{L}_U que aparece en Simon [92] (este resultado también fué probado en [101]) de la siguiente manera,

Teorema 53 *Supongamos que σ es una medida de probabilidad no trivial en la circunferencia unidad y que $0 < \gamma < 1$. Sea $\tilde{\sigma}$ la medida de probabilidad resultante de la adición a σ de un punto de masa $\zeta = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ de la siguiente manera*

$$d\tilde{\sigma} = (1 - \gamma)d\sigma + \gamma\delta(z - \zeta).$$

Entonces los coeficientes de Verblunsky asociados con $\tilde{\sigma}$ son

$$U_n(0) = \Phi_n(0) + \frac{(1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2)^{1/2}}{(1 - \gamma)\gamma^{-1} + K_n(\zeta, \zeta)}\overline{\varphi_{n+1}(\zeta)}\varphi_n^*(\zeta). \quad (3.27)$$

Notemos que $\mathbf{k}_n/\mathbf{k}_{n-1} = 1 - |\Phi_n(0)|^2$ y, por tanto, (3.23) es equivalente a la expresión (3.27). También existe un análogo de la Proposición 30 para la transformación de Uvarov en [101], que ha sido probado en un caso más general con un número finito de m masas.

Por otra parte, obsérvese que (3.26) también puede expresarse como

$$U_n(0) = \Phi_n(0) - \frac{m[\alpha\Phi_{n-1}(\alpha) + \Phi_n(0)\overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)}]\overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n-1}(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha))},$$

o, en otras palabras,

$$U_n(0) = A_U(\alpha; n)\Phi_n(0) + B_U(\alpha; n),$$

con

$$A_U(\alpha; n) = 1 - \frac{m|\Phi_{n-1}^*(\alpha)|^2}{\mathbf{k}_{n-1}(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha))},$$

$$B_U(\alpha; n) = -\frac{m\alpha\Phi_{n-1}(\alpha)\overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n-1}(1 + mK_{n-1}(\alpha, \alpha))}.$$

3.2.2.1. Ejemplo.

Sea $d\tilde{\sigma} = \frac{1-|\alpha|^2}{|z-\alpha|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + m\delta(z-\beta)$, con $|\alpha| < 1$, $|\beta| = 1$, $m \in \mathbb{R}$. Es bien conocido que $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a $d\sigma = \frac{1-|\alpha|^2}{|z-\alpha|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$, está dada por

$$\Phi_n(z) = z^n - \alpha z^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Además, $\Phi_n^*(z) = 1 - \bar{\alpha}z$. Obsérvese también que $d\sigma$ es una medida no trivial de probabilidad y, que en este caso tenemos $\mathbf{k}_0 = 1$, y $\mathbf{k}_n = 1 - |\alpha|^2$, $n \geq 1$. Entonces, de (3.18) obtenemos

$$U_n(z) = z^n - \alpha z^{n-1} - \frac{m\Phi_n(\beta)}{1 + mK_{n-1}(\beta, \beta)} K_{n-1}(z, \beta). \quad (3.28)$$

Pero, de la fórmula de Christoffel-Darboux

$$\begin{aligned} K_{n-1}(z, \beta) &= \frac{\overline{\Phi_n^*(\beta)\Phi_n^*(z)} - \overline{\Phi_n(\beta)\Phi_n(z)}}{(1 - \bar{\beta}z)(1 - |\alpha|^2)} \\ &= \frac{(1 - \alpha\bar{\beta})(1 - \bar{\alpha}z) - (\bar{\beta}z)^{n-1}(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(z - \alpha)}{(1 - \bar{\beta}z)(1 - |\alpha|^2)}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K_{n-1}(\beta, \beta) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{\Phi_k(\beta)\Phi_k(\beta)}}{1 - |\alpha|^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta^n - \alpha\beta^{n-1})(\beta^n - \alpha\beta^{n-1})}{1 - |\alpha|^2} \\ &= n \frac{|\beta - \alpha|^2}{1 - |\alpha|^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Luego, (3.28) se convierte en

$$\begin{aligned}
U_n(z) &= z^n - \alpha z^{n-1} - \frac{m\beta^{n-1}(\beta - \alpha)(1 - \alpha\bar{\beta})(1 - \bar{\alpha}z) - (\bar{\beta}z)^{n-1}(\bar{\beta} - \bar{\alpha})(z - \alpha)}{1 + nm\frac{|\beta - \alpha|^2}{1 - |\alpha|^2}} \frac{(1 - \bar{\beta}z)(1 - |\alpha|^2)}{(1 - \bar{\beta}z)(1 - |\alpha|^2)} \\
&= z^n - z^{n-1} \left(\alpha - \frac{m|\beta - \alpha|^2(z - \alpha)}{(1 - |\alpha|^2 + nm|\beta - \alpha|^2)(1 - \bar{\beta}z)} \right) \\
&\quad - \frac{m\beta^{n-1}(\beta - \alpha)(1 - \alpha\bar{\beta})(1 - \bar{\alpha}z)}{(1 - |\alpha|^2 + nm|\beta - \alpha|^2)(1 - \bar{\beta}z)}.
\end{aligned}$$

Evaluando en $z = 0$, obtenemos los coeficientes de Verblunsky correspondientes a la medida $d\bar{\sigma}$

$$U_1(0) = -\alpha \left(1 + \frac{m|\beta - \alpha|^2}{1 - |\alpha|^2 + nm|\beta - \alpha|^2} \right) - \frac{m(\beta - \alpha)(1 - \alpha\bar{\beta})}{1 - |\alpha|^2 + nm|\beta - \alpha|^2},$$

$$U_n(0) = -\frac{m\beta^{n-1}(\beta - \alpha)(1 - \alpha\bar{\beta})}{1 - |\alpha|^2 + nm|\beta - \alpha|^2}, \quad n \geq 2.$$

Es fácil ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(0) = 0$, como se muestra en la Figura 4.

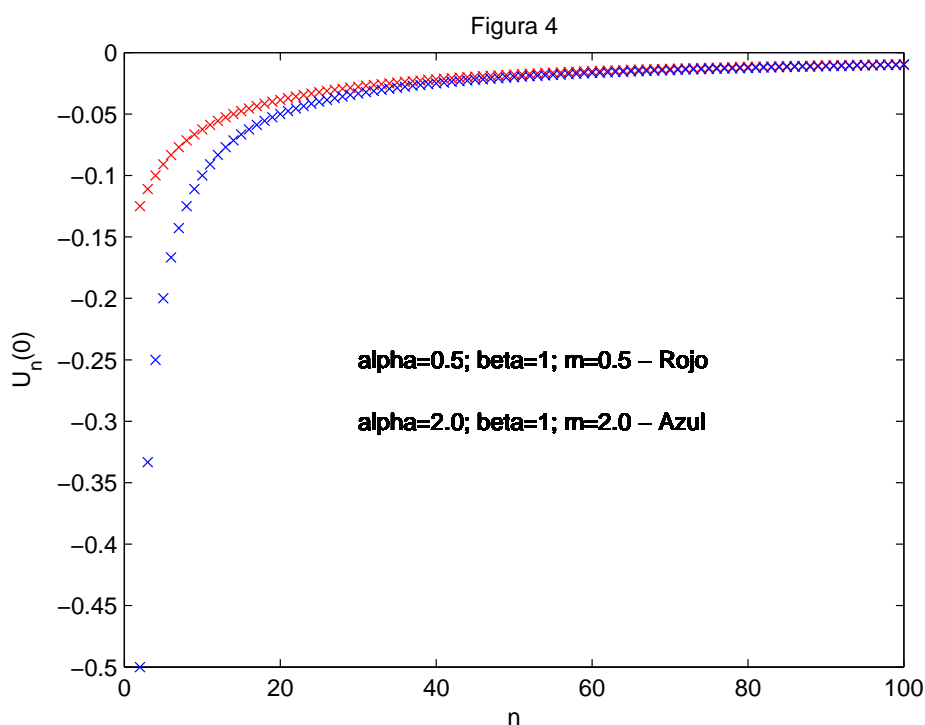
Por otra parte, la existencia de $\{U_n\}_{n \geq 0}$ está determinada por

$$1 + nm\frac{|\beta - \alpha|^2}{1 - |\alpha|^2} \neq 0, \quad n \geq 0,$$

o, equivalentemente,

$$m \neq -\frac{1 - |\alpha|^2}{n|\beta - \alpha|^2}.$$

Es decir, fijado α , existe una familia infinita de números reales m tales que el funcional \mathcal{L}_U es cuasi-definido.



3.3. Transformación de Uvarov con dos masas.

Consideremos ahora la transformación \mathcal{L}_V del funcional lineal cuasi-definido \mathcal{L} tal que la forma bilineal asociada es

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_V} = \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} + \mathbf{m}p(\alpha)\bar{q}(\alpha^{-1}) + \bar{\mathbf{m}}p(\bar{\alpha}^{-1})\overline{q(\alpha)}, \quad (3.29)$$

con $|\alpha| < 1$ y $\mathbf{m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. El funcional lineal \mathcal{L}_V es también hermitiano.

Proposición 54 *El funcional lineal \mathcal{L}_V es cuasi-definido si y sólo si*

$$\Lambda_n := \begin{vmatrix} 1 + \mathbf{m}K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{\mathbf{m}}K_n(\alpha, \alpha) \\ \mathbf{m}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{\mathbf{m}}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} \neq 0,$$

para todo $n \geq 0$ o, equivalentemente,

$$\begin{vmatrix} K_n(\alpha, \alpha) & \frac{1}{\mathbf{m}} + K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) \\ \frac{1}{\bar{\mathbf{m}}} + K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) & K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Prueba. Supongamos que \mathcal{L}_U es cuasi-definido, y sea $\{V_n\}_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a \mathcal{L}_V . Entonces

$$V_n(z) = \Phi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{n,j} \Phi_j(z),$$

donde

$$\lambda_{n,j} = \frac{\langle V_n, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}}}{\langle \Phi_j, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}}} = -\frac{\mathbf{m}V_n(\alpha)\overline{\Phi_j(\alpha^{-1})} + \bar{\mathbf{m}}V_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\Phi_j(\alpha)}}{\mathbf{k}_j}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V_n(z) &= \Phi_n(z) - \mathbf{m}V_n(\alpha) \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{k}_j^{-1} \overline{\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})} \Phi_j(z) - \bar{\mathbf{m}}V_n(\bar{\alpha}^{-1}) \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{k}_j^{-1} \overline{\Phi_j(\alpha)} \Phi_j(z) \\ &= \Phi_n(z) - \mathbf{m}V_n(\alpha) K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) - \bar{\mathbf{m}}V_n(\bar{\alpha}^{-1}) K_{n-1}(z, \alpha). \end{aligned}$$

Ahora, si evaluamos la expresión anterior en $z = \alpha$ y $z = \bar{\alpha}^{-1}$, se tiene

$$\begin{aligned} -\Phi_n(\alpha) + (1 + \mathbf{m}K_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}))V_n(\alpha) + \bar{\mathbf{m}}K_{n-1}(\alpha, \alpha)V_n(\bar{\alpha}^{-1}) &= 0, \\ -\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) + \mathbf{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})V_n(\alpha) + (1 + \bar{\mathbf{m}}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha))V_n(\bar{\alpha}^{-1}) &= 0. \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} 1 + \mathbf{m}K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{\mathbf{m}}K_n(\alpha, \alpha) \\ \mathbf{m}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{\mathbf{m}}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n(\alpha) \\ V_n(\bar{\alpha}^{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_n(\alpha) \\ \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta la unicidad de los valores $V_n(\alpha)$ y $V_n(\bar{\alpha}^{-1})$, entonces, la matriz del sistema lineal anterior

$$B_{n-1} := \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{m}K_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \mathbf{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ \mathbf{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{\mathbf{m}}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{bmatrix}$$

debe ser no singular. En consecuencia $\Lambda_n = \det B_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.

Supongamos que $\Lambda_n \neq 0$, para todo $n \geq 0$, y consideremos el polinomio mónico

$$V_n(z) = \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \Phi_n(z) & \mathbf{m}K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{\mathbf{m}}K_{n-1}(z, \alpha) \\ \Phi_n(\alpha) & 1 + \mathbf{m}K_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{\mathbf{m}}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) & \mathbf{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{\mathbf{m}}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (3.30)$$

Para $0 \leq k \leq n-1$ obtenemos

$$\langle V_n(z), (z-\alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_V} = \frac{\begin{vmatrix} \langle \Phi_n(z), (z-\alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_V} & m \langle K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), (z-\alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_V} & \bar{m} \langle K_{n-1}(z, \alpha), (z-\alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_V} \\ \Phi_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix}}{\Lambda_{n-1}}.$$

Por otro lado, para $0 \leq k \leq n-1$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n(z), (z-\alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_V} &= m\Phi_n(\alpha)(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k, \\ \langle K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), (z-\alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_V} &= (\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k (1 + mK_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})), \\ \langle K_{n-1}(z, \alpha), (z-\alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_V} &= mK_{n-1}(\alpha, \alpha)(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \langle V_n(z), (z-\alpha)^k \rangle_{\mathcal{L}_V} &= \\ &= \frac{m(\alpha^{-1} - \bar{\alpha})^k}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \Phi_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ \Phi_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \langle V_n, V_n \rangle_{\mathcal{L}_V} &= \langle V_n, \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}_V} = \\ &= \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}_V} & m \langle K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}_V} & \bar{m} \langle K_{n-1}(z, \alpha), \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}_V} \\ \Phi_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}_V} &= \mathbf{k}_n + m\Phi_n(\alpha)\overline{\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \bar{m}\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\Phi_n(\alpha)}, \\ \langle K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}), \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}_V} &= mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})\overline{\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})\overline{\Phi_n(\alpha)}, \\ \langle K_{n-1}(z, \alpha), \Phi_n \rangle_{\mathcal{L}_V} &= mK_{n-1}(\alpha, \alpha)\overline{\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha)\overline{\Phi_n(\alpha)}. \end{aligned}$$

de esta manera tenemos,

$$\begin{aligned}
 \langle V_n, V_n \rangle_{\mathcal{L}_V} &= \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \mathbf{k}_n & -\overline{m\Phi_n(\alpha^{-1})} & -\overline{\bar{m}\Phi_n(\alpha)} \\ \Phi_n(\alpha) & 1 + mK_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_{n-1}(\alpha, \alpha) \\ \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) & mK_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{\Lambda_{n-1}} \begin{vmatrix} \mathbf{k}_n & -\overline{m\Phi_n(\alpha^{-1})} & -\overline{\bar{m}\Phi_n(\alpha)} \\ 0 & 1 + mK_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) & \bar{m}K_n(\alpha, \alpha) \\ 0 & mK_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) & 1 + \bar{m}K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) \end{vmatrix} \\
 &= \mathbf{k}_n \frac{\Lambda_n}{\Lambda_{n-1}} \neq 0.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

■

Como consecuencia inmediata se tiene

Corolario 55 Si \mathcal{L} es un funcional lineal definido positivo, entonces, el funcional lineal \mathcal{L}_V es definido positivo si y sólo si $\Lambda_{n+1}\Lambda_n > 0$, para todo $n \geq 0$.

Además, obsérvese que

$$\|V_n\| = \|\Phi_n\| \sqrt{\frac{\Lambda_n}{\Lambda_{n-1}}}. \tag{3.32}$$

En lo sucesivo vamos a suponer que $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.3.1. Matrices de Hessenberg

Proposición 56 Sea $\mathbf{L}_{V\Phi}$ la matriz triangular inferior tal que $V(z) = \mathbf{L}_{V\Phi}\Phi(z)$, donde $V(z) = [V_0(z), V_1(z), \dots]^t$ y $\Phi(z) = [\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots]^t$. Entonces, las entradas de $\mathbf{L}_{V\Phi}$ están dadas por

$$(\mathbf{L}_{V\Phi})_{n,j} = \begin{cases} 1, & n = j, \\ -\frac{m}{\Lambda_{n-1}\mathbf{k}_j} \left(A_n(\alpha)\overline{\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + A_n(\bar{\alpha}^{-1})\overline{\Phi_j(\alpha)} \right), & n > j, \\ 0, & n < j, \end{cases}$$

donde $A_n(z) := \Phi_n(z) + m\Phi_n(z)K_{n-1}(\bar{z}^{-1}, z) - m\Phi_n(\bar{z}^{-1})K_{n-1}(z, z)$. Las entradas de la matriz $\mathbf{L}_{V\Phi}^{-1}$ son

$$(\mathbf{L}_{V\Phi}^{-1})_{n,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}} + \frac{m}{\mathbf{k}_n \Lambda_n} \left(\Phi_n(\alpha) \overline{A_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{A_n(\alpha)} \right), & n = j, \\ \frac{m}{\mathbf{k}_j \Lambda_n} \left(\Phi_n(\alpha) \overline{A_j(\bar{\alpha}^{-1})} + \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{A_j(\alpha)} \right), & n > j, \\ 0, & n < j. \end{cases}$$

Prueba. Podemos expresar $V_n(z)$ en términos de su desarrollo en serie de Fourier respecto a $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$

$$V_n(z) = \Phi_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n,j} \Phi_j(z), \quad (3.33)$$

donde $\gamma_{n,j} = \frac{\langle V_n, \Phi_j \rangle_{\mathcal{L}}}{\|\Phi_j\|^2}$, $0 \leq j \leq n-1$. Por (3.29) y la condición de ortogonalidad de V_n con respecto a \mathcal{L}_V

$$\gamma_{n,j} = -\frac{m}{\|\Phi_j\|^2} \left(V_n(\alpha) \overline{\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + V_n(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{\Phi_j(\alpha)} \right).$$

Por otra parte, de (3.30)

$$V_n(\alpha) = \frac{1}{\Lambda_{n-1}} A_n(\alpha) \quad \text{y} \quad V_n(\bar{\alpha}^{-1}) = \frac{1}{\Lambda_{n-1}} A_n(\bar{\alpha}^{-1}).$$

Así, si $n > j$ se tiene

$$(\mathbf{L}_{V\Phi})_{n,j} = \gamma_{n,j} = -\frac{m}{\Lambda_{n-1} \mathbf{k}_j} \left(A_n(\alpha) \overline{\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})} + A_n(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{\Phi_j(\alpha)} \right).$$

De (3.33), obtenemos $(\mathbf{L}_{V\Phi})_{n,n} = 1$.

Por otra parte

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=0}^n \beta_{n,j} V_j(z),$$

con $\beta_{n,j} = \frac{\langle \Phi_n, V_j \rangle_{\mathcal{L}_V}}{\|V_j\|^2}$.

Así,

$$\beta_{n,j} = \frac{1}{\|V_j\|^2} \left[\langle \Phi_n, V_j \rangle_{\mathcal{L}} + m\Phi_n(\alpha) \overline{V_j(\bar{\alpha}^{-1})} + m\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{V_j(\alpha)} \right].$$

Por tanto, si $n > j$,

$$\tilde{l}_{n,j}^{(-1)} = \beta_{n,j} = \frac{m}{\mathbf{k}_j \Lambda_n} \left(\Phi_n(\alpha) \overline{A_j(\bar{\alpha}^{-1})} + \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{A_j(\alpha)} \right),$$

y, si $n = j$,

$$\tilde{l}_{n,n}^{(-1)} = \beta_{n,n} = \sqrt{\frac{\Lambda_{n-1}}{\Lambda_n}} + \frac{m}{\mathbf{k}_n \Lambda_n} \left(\Phi_n(\alpha) \overline{A_n(\bar{\alpha}^{-1})} + \Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{A_n(\alpha)} \right).$$

■

Notemos que, al igual que la sección anterior, si aplicamos a \mathcal{L}_V la transformación descrita en (2.1), es decir, si hacemos $|z - \alpha|^2 \mathcal{L}_V$, resulta

$$|z - \alpha|^2 \mathcal{L}_V = |z - \alpha|^2 \mathcal{L} = \mathcal{L}_C. \quad (3.34)$$

De la Proposición 24, para el caso cuasi-definido, se sigue

$$\mathbf{H}_\Phi - \alpha \mathbf{I} = \mathbf{L}_{\Phi R} \mathbf{N},$$

donde \mathbf{N} es la matriz de Hessenberg dada en (2.4) y $\mathbf{L}_{\Phi R}$ es la matriz triangular inferior tal que $\Phi(z) = \mathbf{L}_{\Phi R} R(z)$. Además, de la Proposición 25, también en el caso cuasi-definido, se tiene $\mathbf{H}_R - \alpha \mathbf{I} = \mathbf{N} \mathbf{L}_{\Phi R}$.

Por tanto, teniendo en cuenta (3.34), podemos aplicar el mismo procedimiento al funcional lineal \mathcal{L}_V . De esta manera, las familias de polinomios ortogonales $\{V_n\}_{n \geq 0}$ y $\{R_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a \mathcal{L}_V y \mathcal{L}_C , respectivamente, satisfacen

$$(z - \alpha)R(z) = \mathbf{M}_V V(z) \quad \text{y} \quad V(z) = \mathbf{L}_{VR} R(z).$$

Finalmente, de la Proposición 25 deducimos

$$\mathbf{H}_R - \alpha \mathbf{I} = \mathbf{M}_V \mathbf{L}_{VR}.$$

Proposición 57

$$\mathbf{L}_{VR} = \mathbf{L}_{V\Phi} \mathbf{L}_{\Phi R} \quad \text{y} \quad \mathbf{M}_V = \mathbf{N} \mathbf{L}_{V\Phi}^{-1}, \quad (3.35)$$

donde \mathbf{M} está dada por (2.4) y $\mathbf{L}_{\Phi R}$ es la matriz triangular inferior definida en (2.9).

3.3.2. Funciones de Carathéodory.

Ahora, consideremos \mathcal{L}_V tal que el funcional bilineal asociado satisfice

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{L}_V} = \langle p, q \rangle_{\mathcal{L}} + mp(\alpha)\overline{q(\bar{\alpha}^{-1})} + \bar{m}p(\bar{\alpha}^{-1})\overline{q(\alpha)}, \quad (3.36)$$

con $|\alpha| < 1$ y $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Veremos que $F_V(z) = \tilde{c}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_{-k} z^k$, con $\tilde{c}_{-k} = \langle \mathcal{L}_V, z^{-k} \rangle$, es una transformada espectral lineal de F .

$$\tilde{c}_{-k} = \langle \mathcal{L}_V, z^{-k} \rangle = \langle 1, z^k \rangle_{\mathcal{L}} + m\alpha^k + \bar{m}\bar{\alpha}^{-k}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} F_V(z) &= c_0 + m + \bar{m} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (c_{-k} + \bar{m}\bar{\alpha}^k + m\alpha^{-k}) z^k \\ &= F(z) + \bar{m} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\alpha}^k z^k \right) + m \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-k} z^k \right) \\ &= F(z) + m \frac{\alpha + z}{\alpha - z} + \bar{m} \frac{1 + \bar{\alpha}z}{1 - \bar{\alpha}z} \\ &= F(z) + \frac{\alpha(m + \bar{m}) + (1 - |\alpha|^2)(m - \bar{m})z - \bar{\alpha}(m + \bar{m})z^2}{(z - \alpha)(\bar{\alpha}z - 1)}. \end{aligned}$$

Obsérvese que, en la segunda ecuación, la primera suma converge si $|\alpha z| < 1$, mientras que la segunda suma converge si $|\alpha^{-1}z| < 1$. Luego, si $|\alpha| < 1$, la región de convergencia para $F_V(z)$ es $|z| < |\alpha|$. Por tanto,

Proposición 58

$$F_V(z) = \frac{A_V(z)F(z) + B_V(z)}{D_V(z)},$$

donde

$$\begin{aligned} A_V(z) &= D_V(z) = (z - \alpha)(\bar{\alpha}z - 1), \\ B_V(z) &= (\alpha - \bar{\alpha}z^2)(m + \bar{m}) - (1 - |\alpha|^2)(m - \bar{m})z. \end{aligned}$$

Por último, cabe mencionar que la transformación de Uvarov puede expresarse como una composición de las transformaciones de Christoffel y Geronimus. De hecho,

Proposición 59

- (i) $\mathcal{F}_G(\alpha, M_c) \circ \mathcal{F}_C(\alpha) = \mathcal{F}_U(\alpha, M_c)$.
(ii) $\mathcal{F}_C(\alpha) \circ \mathcal{F}_G(\alpha, M_c) = \mathcal{I}$.

Por comparación con el caso real, un problema abierto es determinar si cualquier transformación espectral lineal puede ser expresada como una composición de transformaciones de Christoffel y Geronimus.

3.3.3. Coeficientes de Verblunsky.

Supondremos que el funcional lineal \mathcal{L} es definido positivo. Sabemos que la sucesión $\{V_n\}_{n \geq 0}$ de polinomios ortogonales mónicos respecto a \mathcal{L}_V está dada por

$$V_n(z) = \Phi_n(z) - \mathbf{m}[A_n\Phi_n(\alpha) + B_n\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})]K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) - \bar{\mathbf{m}}[C_n\Phi_n(\alpha) + D_n\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})]K_{n-1}(z, \alpha). \quad (3.37)$$

donde

$$A_n = \frac{-[1 + \bar{\mathbf{m}}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha)]}{\Lambda_{n-1}}, \quad (3.38)$$

$$B_n = \frac{\bar{\mathbf{m}}K_{n-1}(\alpha, \alpha)}{\Lambda_{n-1}}, \quad (3.39)$$

$$C_n = \frac{-\mathbf{m}K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})}{\Lambda_{n-1}}, \quad (3.40)$$

$$D_n = \frac{1 + \mathbf{m}K_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})}{\Lambda_{n-1}}, \quad (3.41)$$

con $\Lambda_{n-1} = |\mathbf{m}|^2 K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})K_{n-1}(\alpha, \alpha) - |1 + \mathbf{m}K_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})|^2$.

Entonces, los coeficientes de Verblunsky $\{V_n(0)\}_{n \geq 1}$ son

$$V_n(0) = \Phi_n(0) - \mathbf{m}[A_n\Phi_n(\alpha) + B_n\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})]\varphi_{n-1}^*(0)\overline{\varphi_{n-1}^*(\bar{\alpha}^{-1})} - \bar{\mathbf{m}}[C_n\Phi_n(\alpha) + D_n\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})]\varphi_{n-1}^*(0)\overline{\varphi_{n-1}^*(\alpha)}. \quad (3.42)$$

Ahora estudiaremos el comportamiento de $V_n(0)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Dado que $|\alpha| < 1$, entonces sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\alpha, \alpha) < \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) = \infty$. Notemos que, de acuerdo con [92],

$$\frac{K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha)}{K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})} = |\alpha|^{2n} \frac{\overline{K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})}}{K_n(\alpha, \alpha)}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha)}{K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha|^{2n} \frac{\overline{K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})}}{K_n(\alpha, \alpha)}$$

Dado que $K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})$ es $O(\bar{\alpha}^{-n})$ y $|\alpha| < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha)}{K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})} = 0.$$

Obtenemos el mismo resultado para $K_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})/K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})$, dado que $K_n(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) = \overline{K_n(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})}$.

Por lo tanto, si dividimos por $K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1})$ en el numerador y denominador de A_n , y tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$, observamos que el numerador se anula, y solamente $|\mathbf{m}|^2 K_{n-1}(\alpha, \alpha)$ sobrevive en el denominador. Luego, $A_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Lo mismo ocurre con B_n y D_n . De manera similar, obtenemos que $C_n = -1/\bar{\mathbf{m}}K_\infty(\alpha, \alpha)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Entonces, cuando $n \rightarrow \infty$

$$V_n(0) \sim \Phi_n(0) + \frac{\Phi_n(\alpha)}{K_{n-1}(\alpha, \alpha)} \varphi_{n-1}^*(0) \overline{\varphi_{n-1}^*(\alpha)} \quad (3.43)$$

$$= \Phi_n(0) + \frac{\Phi_n(\alpha)}{\mathbf{k}_{n-1} K_{n-1}(\alpha, \alpha)} \Phi_{n-1}^*(0) \overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)} \quad (3.44)$$

$$= \Phi_n(0) + \frac{\Phi_n(\alpha) \overline{\Phi_{n-1}^*(\alpha)}}{\mathbf{k}_{n-1} K_{n-1}(\alpha, \alpha)}. \quad (3.45)$$

Notemos que (3.45) tiene la misma forma que (2.15). Por lo tanto,

Proposición 60 *Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_n(0)|^2 < \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |\Phi_{n+1}(0) - \Phi_n(0)| < \infty$. Entonces,*

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} |V_n(0)|^2 < \infty.$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} |V_{n+1}(0) - V_n(0)| < \infty.$$

3.3.3.1. Ejemplos.

$$(i) \text{ Caso } d\tilde{\sigma} = \frac{d\theta}{2\pi} + \mathbf{m}\delta(z - \alpha) + \bar{\mathbf{m}}\delta(z - \bar{\alpha}^{-1}), |\alpha| < 1, \mathbf{m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Proposición 61 Sea $d\tilde{\sigma} = \frac{d\theta}{2\pi} + m\delta(z-\alpha) + \bar{m}\delta(z-\bar{\alpha}^{-1})$. Entonces, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{V_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a $\tilde{\sigma}$ está dada por

$$V_n(z) = z^n - m[A_n\alpha^n + B_n\bar{\alpha}^{-n}] \left(\frac{1 - \alpha^{-n}z^n}{1 - \alpha^{-1}z} \right) - \bar{m}[C_n\alpha^n + D_n\bar{\alpha}^{-n}] \left(\frac{1 - \bar{\alpha}^n z^n}{1 - \bar{\alpha}z} \right), \quad (3.46)$$

donde

$$\begin{aligned} A_n &= -(1 + n\bar{m})/d_n(\alpha), \\ B_n &= \frac{\bar{m}}{d_n(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{2k}, \\ C_n &= -\bar{B}_n |\alpha|^{-2(n-1)}, \\ D_n &= -\bar{A}_n, \end{aligned}$$

$$y d_n(\alpha) = |m|^2 |\alpha|^{-2(n-1)} \left[\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{2k} \right]^2 - |1 + nm|^2.$$

Prueba. Es bien conocido que, en este caso, $\Phi_n(z) = \varphi_n(z) = z^n$, así como $\Phi_n(0) = 0$, $n \geq 1$. Entonces, de (3.37) obtenemos

$$\begin{aligned} V_n(z) &= z^n - m[A_n\alpha^n + B_n\bar{\alpha}^{-n}]K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) - \bar{m}[C_n\alpha^n + D_n\bar{\alpha}^{-n}]K_{n-1}(z, \alpha) \\ &= z^n - m[A_n\alpha^n + B_n\bar{\alpha}^{-n}] \left(\frac{1 - \alpha^{-n}z^n}{1 - \alpha^{-1}z} \right) - \bar{m}[C_n\alpha^n + D_n\bar{\alpha}^{-n}] \left(\frac{1 - \bar{\alpha}^n z^n}{1 - \bar{\alpha}z} \right). \end{aligned}$$

Los valores de A_n, B_n, C_n, D_n y $d_n(\alpha)$ se siguen de (3.39) - (3.41) dado que $K_{n-1}(\alpha, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{2k}$, $K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{-2k}$ y $K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) = K_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) = n$. ■

Ahora obtenemos una condición necesaria y suficiente para la existencia de $\{V_n\}_{n \geq 0}$. En este caso la condición en la Proposición 54 es

$$\begin{vmatrix} 1 + m(n+1) & \bar{m} \sum_{k=0}^n |\alpha|^{2k} \\ \frac{m}{|\alpha|^{2n}} \sum_{k=0}^n |\alpha|^{2k} & 1 + \bar{m}(n+1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

es decir,

$$1 + (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}})(n + 1) + |\mathbf{m}|^2(n + 1)^2 - \frac{|\mathbf{m}|^2}{|\alpha|^{2n}} \left[\sum_{k=0}^n |\alpha|^{2k} \right]^2 \neq 0,$$

con $|\alpha| < 1$. Nótese que esto se cumple si y sólo si

$$\frac{|\mathbf{m}|^2}{|\alpha|^{2n}} \left[\sum_{k=0}^n |\alpha|^{2k} \right]^2 \neq 1 + (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}})(n + 1) + |\mathbf{m}|^2(n + 1)^2,$$

es decir

$$\frac{|\mathbf{m}|^2}{|\alpha|^{2n}} \left(\frac{|\alpha|^{2n+2} - 1}{|\alpha|^2 - 1} \right)^2 \neq 1 + (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}})(n + 1) + |\mathbf{m}|^2(n + 1)^2.$$

Si $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+$,

$$[\mathbf{m}(n + 1) + 1]^2 \neq \frac{\mathbf{m}^2}{|\alpha|^{2n}} \left(\frac{|\alpha|^{2n+2} - 1}{|\alpha|^2 - 1} \right)^2,$$

por tanto necesitamos

$$\mathbf{m}(n + 1) + 1 \neq \frac{\mathbf{m}}{|\alpha|^n} \left(\frac{|\alpha|^{2n+2} - 1}{|\alpha|^2 - 1} \right), \quad n \geq 0.$$

Luego, fijado un α con $|\alpha| < 1$ podemos escoger aquellos valores de \mathbf{m} tales que

$$\mathbf{m} \neq \frac{1}{\frac{1}{|\alpha|^n} \left(\frac{|\alpha|^{2n+2} - 1}{|\alpha|^2 - 1} \right) - (n + 1)}, \quad n \geq 0,$$

para que el funcional \mathcal{L}_V sea cuasi-definido.

Corolario 62 *Los coeficientes de Verblunsky asociados con $\{V_n\}_{n \geq 0}$ están dados por*

$$V_n(0) = -(\mathbf{m}[A_n \alpha^n + B_n \bar{\alpha}^{-n}] + \bar{\mathbf{m}}[C_n \alpha^n + D_n \bar{\alpha}^{-n}]). \quad (3.47)$$

Prueba. El resultado es inmediato evaluando (3.46) en $z = 0$. ■

Ahora obtenemos una estimación para $V_n(0)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Tenemos

$$V_n(0) = -(\mathbf{m}A_n + \bar{\mathbf{m}}C_n)\alpha^n - (\mathbf{m}B_n + \bar{\mathbf{m}}D_n)\alpha^{-n}.$$

Pero

$$\begin{aligned} -(\mathbf{m}A_n + \mathbf{m}C_n)\alpha^n &= \frac{\alpha^n}{d_n(\alpha)} \left[\mathbf{m} + n|\mathbf{m}|^2 + |\mathbf{m}|^2|\alpha|^{-2(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{2k} \right] \\ &= \alpha^n \frac{|\alpha|^{2n-2}(\mathbf{m} + n|\mathbf{m}|^2) + |\mathbf{m}|^2 \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{2k}}{|\mathbf{m}|^2 \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{2k} - |\alpha|^{2n-2}|1 + n\mathbf{m}|^2} \\ &\sim \frac{\alpha^n \frac{|\mathbf{m}|^2}{1-|\alpha|^2}}{\frac{|\mathbf{m}|^2}{1-|\alpha|^2}} \\ &= \alpha^n. \end{aligned}$$

Por otro lado,

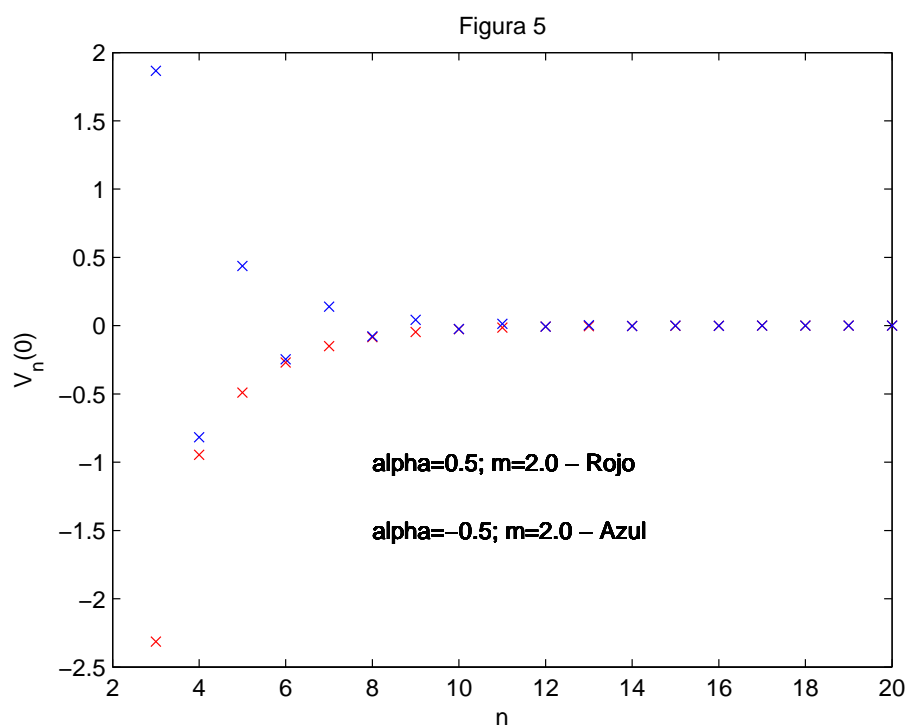
$$\begin{aligned} -\bar{\alpha}^{-n}(\mathbf{m}B_n + \bar{\mathbf{m}}D_n) &= \bar{\alpha}^{-n} \frac{-|\mathbf{m}|^2 \frac{|\alpha|^{2n}-1}{|\alpha|^2-1} - (\bar{\mathbf{m}} + n|\mathbf{m}|^2)}{|\mathbf{m}|^2 \frac{1}{|\alpha|^{2n-2}} \frac{1-|\alpha|^{2n}}{1-|\alpha|^2} - |1 + n\mathbf{m}|^2} \\ &\sim \alpha^n \frac{-\frac{|\mathbf{m}|^2}{1-|\alpha|^2} - (\mathbf{m} + n|\mathbf{m}|^2)}{|\mathbf{m}|^2 \frac{|\alpha|^2}{1-|\alpha|^2}}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$V_n(0) \sim N_1(\alpha)n\alpha^n,$$

donde $N_1(\alpha) = -\frac{1-|\alpha|^2}{|\alpha|^2}$.

El comportamiento de $V_n(0)$ para algunos valores particulares de α y \mathbf{m} se muestra en la siguiente figura



(ii) Caso $d\tilde{\sigma} = \frac{1}{|z-\alpha|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + m\delta(z-\alpha) + \bar{m}\delta(z-\bar{\alpha}^{-1})$, $|\alpha| < 1$, $m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Proposición 63 Sea $d\tilde{\sigma} = \frac{1}{|z-\alpha|^2} \frac{d\theta}{2\pi} + m\delta(z-\alpha) + \bar{m}\delta(z-\bar{\alpha}^{-1})$, con $|\alpha| < 1$. Entonces, la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{V_n\}_{n \geq 0}$ respecto a $\tilde{\sigma}$ está dada por

$$V_n(z) = z^n - \alpha z^{n-1} - \frac{\bar{\alpha}^{-n}(1-|\alpha|^2)^2[|m|^2(1-|\alpha|^2)(\alpha^{-1}z)^{n-1} + \bar{m} + |m|^2(1-|\alpha|^2)]}{|m|^2|\alpha|^{-2n+2}(1-|\alpha|^2)^2 - |1+m(1-|\alpha|^2)|^2}, \quad (3.48)$$

para $n \geq 1$.

Prueba. Es bien conocido que la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ con respecto a $\frac{1}{|z-\alpha|^2} \frac{d\theta}{2\pi}$ es

$$\Phi_n(z) = z^n - \alpha z^{n-1}, \quad |\alpha| < 1, n \geq 1.$$

Entonces, de (3.37) tenemos

$$V_n(z) = z^n - \alpha z^{n-1} - mB_n \bar{\alpha}^{-n}(1-|\alpha|^2)K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) - \bar{m}D_n \bar{\alpha}^{-n}(1-|\alpha|^2)K_{n-1}(z, \alpha), \quad (3.49)$$

dato que $\Phi_n(\alpha) = 0$, $n \geq 1$, y $\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1}) = \bar{\alpha}^{-n}(1 - |\alpha|^2)$. Obsérvese que, en este caso, $\mathbf{k}_0 = \|\Phi_0\|^2 = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$, así como $\mathbf{k}_n = 1$, $n \geq 1$.

También tenemos $K_n(z, \alpha) = \frac{1}{\mathbf{k}_0}$, $n \geq 0$ y, en consecuencia,

$$K_{n-1}(\alpha, \alpha) = K_{n-1}(\alpha, \bar{\alpha}^{-1}) = K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \alpha) = \frac{1}{\mathbf{k}_0} = 1 - |\alpha|^2.$$

Por otra parte, usando la fórmula de Christoffel-Darboux

$$\begin{aligned} K_{n-1}(z, \bar{\alpha}^{-1}) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Phi_j(z)\overline{\Phi_j(\bar{\alpha}^{-1})}}{\mathbf{k}_j} \\ &= \frac{\overline{\Phi_n^*(\bar{\alpha}^{-1})}\Phi_n^*(z) - \overline{\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})}\Phi_n(z)}{(1 - \alpha^{-1}z)} \\ &= \frac{-(\alpha^{-n} - \bar{\alpha}\alpha^{-n+1})(z^n - \alpha z^{n-1})}{(1 - \alpha^{-1}z)} \\ &= \frac{-\alpha^{-n}(z^n - \alpha z^{n-1})(1 - |\alpha|^2)}{1 - \alpha^{-1}z} \\ &= (\alpha^{-1}z)^{n-1}(1 - |\alpha|^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{n-1}(\bar{\alpha}^{-1}, \bar{\alpha}^{-1}) &= \frac{\overline{\Phi_n^*(\bar{\alpha}^{-1})}\Phi_n^*(\bar{\alpha}^{-1}) - \overline{\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})}\Phi_n(\bar{\alpha}^{-1})}{(1 - \alpha^{-1}\bar{\alpha}^{-1})} \\ &= \frac{-(\alpha^{-n} - \bar{\alpha}\alpha^{-n+1})(\bar{\alpha}^{-n} - \alpha\bar{\alpha}^{-n+1})}{(1 - |\alpha|^{-2})} \\ &= \frac{|\alpha|^{-2n}(1 - |\alpha|^2)^2}{1 - |\alpha|^{-2}} \\ &= |\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2), \end{aligned}$$

dato que $\Phi_n^*(z) = 1 - \bar{\alpha}z$. Por tanto

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{\bar{\mathbf{m}}(1 - |\alpha|^2)}{|\mathbf{m}|^2|\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2)^2 - (1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2))(1 + \bar{\mathbf{m}}(1 - |\alpha|^2))} \\ &= \frac{\bar{\mathbf{m}}(1 - |\alpha|^2)}{|\mathbf{m}|^2|\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2)|^2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2)}{|\mathbf{m}|^2 |\alpha|^{-2n+2} (1 - |\alpha|^2)^2 - (1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2))(1 + \bar{\mathbf{m}}(1 - |\alpha|^2))} \\ &= \frac{1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2)}{|\mathbf{m}|^2 |\alpha|^{-2n+2} (1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2)|^2}. \end{aligned}$$

Entonces, (3.49) se convierte en

$$\begin{aligned} V_n(z) &= z^n - \alpha z^{n-1} - \frac{|\mathbf{m}|^2 (1 - |\alpha|^2)^3 \bar{\alpha}^{-n} (\alpha^{-1} z)^{n-1}}{|\mathbf{m}|^2 |\alpha|^{-2n+2} (1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2)|^2} \\ &+ \frac{\bar{\mathbf{m}} [1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2)] \bar{\alpha}^{-n} (1 - |\alpha|^2)^2}{|\mathbf{m}|^2 |\alpha|^{-2n+2} (1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2)|^2}, \end{aligned}$$

que es equivalente a (3.48). ■

La existencia de $\{V_n\}_{n \geq 0}$ está determinada por la condición

$$\begin{vmatrix} 1 + \mathbf{m}(1 - |\alpha|^2) & \bar{\mathbf{m}}(1 - |\alpha|^2) \\ \mathbf{m}|\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2) & 1 + \bar{\mathbf{m}}(1 - |\alpha|^2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

es decir,

$$1 + (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}})(1 - |\alpha|^2) + |\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2 - |\mathbf{m}|^2 |\alpha|^{-2n+2} (1 - |\alpha|^2)^2 \neq 0.$$

En otras palabras,

$$\begin{aligned} |\alpha|^{-2n+2} &\neq \frac{1 + (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}})(1 - |\alpha|^2) + |\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2}{|\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2}, \\ (-2n + 2) \ln |\alpha| &\neq \ln \frac{1 + (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}})(1 - |\alpha|^2) + |\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2}{|\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2}, \\ -2n + 2 &\neq \frac{\ln \frac{1 + (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}})(1 - |\alpha|^2) + |\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2}{|\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2}}{\ln |\alpha|}, \\ n &\neq 1 - \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{1 + (\mathbf{m} + \bar{\mathbf{m}})(1 - |\alpha|^2) + |\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2}{|\mathbf{m}|^2(1 - |\alpha|^2)^2}}{\ln |\alpha|}. \end{aligned}$$

En particular, si $m \in \mathbb{R}$ y $|\alpha|^2 = \frac{1}{2}$, la condición anterior se convierte en

$$n \neq 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{m}\right)^2}{\ln 2},$$

y, por tanto,

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{2}{m}\right)^2}{\ln 2} \notin \mathbb{N}.$$

Esto es, podemos escojer aquellos $m \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \neq \frac{2}{2^{n/2} - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Corolario 64 *Los coeficientes de Verblunsky correspondientes a $\{V_n\}_{n \geq 0}$ están dados por*

$$\begin{aligned} V_1(0) &= -\alpha - \frac{\bar{\alpha}^{-1}(1 - |\alpha|^2)^2[\bar{m} + 2|m|^2(1 - |\alpha|^2)]}{|m|^2(1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2}, \\ V_n(0) &= -\frac{\bar{\alpha}^{-n}(1 - |\alpha|^2)^2[\bar{m} + |m|^2(1 - |\alpha|^2)]}{|m|^2|\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Prueba. Se obtiene inmediatamente evaluando (3.48) en $z = 0$. ■

Finalmente, obtenemos una estimación para $V_n(0)$ cuando $n \rightarrow \infty$,

De (3.48), el coeficiente de z^{n-1} es

$$\begin{aligned} &= -\frac{\alpha[|m|^2|\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2]}{|m|^2|\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2} \\ &= -\frac{\bar{\alpha}^{-1}(1 - |\alpha|^2)^2[|m|^2(1 - |\alpha|^2)|\alpha|^{-2n+2}}{|m|^2|\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2} \\ &= \frac{|m|^2\alpha|\alpha|^{-2n}(1 - |\alpha|^2)^2 - \alpha|1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2}{|m|^2|\alpha|^{-2n+2}(1 - |\alpha|^2)^2 - |1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2} \\ &= \frac{|m|^2\alpha(1 - |\alpha|^2)^2 - \alpha|\alpha|^{2n}|1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2}{|m|^2|\alpha|^2(1 - |\alpha|^2)^2 - |\alpha|^{2n}|1 + m(1 - |\alpha|^2)|^2} \\ &\sim \frac{1}{\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, el término independiente es

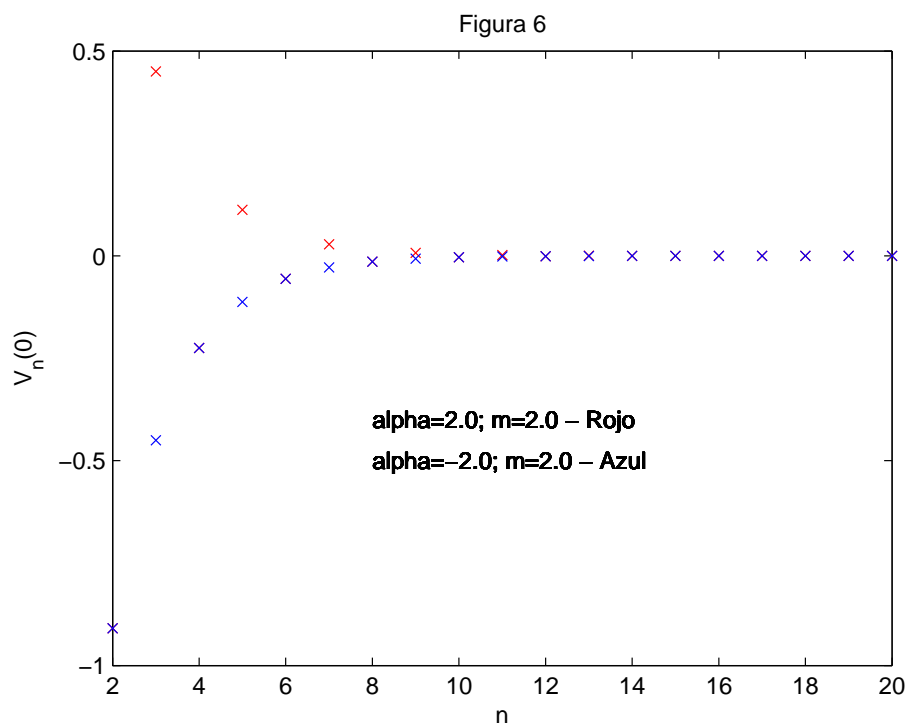
$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\bar{m}(1+m(1-|\alpha|^2))(1-|\alpha|^2)^2\alpha^n}{|m|^2|\alpha|^{-2n+2}(1-|\alpha|^2)^2-|1+m(1-|\alpha|^2)|^2|\alpha|^{2n}} \frac{1}{|\alpha|^{2n}} \\
 &\sim -\frac{\bar{m}(1+m(1-|\alpha|^2))}{|m|^2|\alpha|^2}\alpha^n \\
 &= -\frac{1}{|\alpha|^2 m}(1+m(1-|\alpha|^2))\alpha^n.
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$V_n(0) \sim N_2(\alpha)\alpha^n,$$

donde $N_2(\alpha) = 1 - \frac{1+m}{m|\alpha|^2}$.

Finalmente, se muestra una gráfica que muestra el comportamiento de $V_n(0)$ para algunos valores particulares de α y m .



CAPÍTULO 4

La transformación de Szegő.

Este capítulo está dedicado a la transformación de Szegő, que establece una relación entre medidas soportadas en el intervalo $[-1, 1]$ de la recta real y ciertas medidas soportadas en la circunferencia unidad.

De igual manera existe una relación entre los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios ortogonales en la recta real y los parámetros de Verblunsky asociados a la correspondiente medida soportada en la circunferencia unidad. Se muestra una manera sencilla de calcular dichos parámetros de Verblunsky, que está relacionada con la factorización LU de la matriz de Jacobi asociada con la medida en la recta real, y algunos ejemplos basados en polinomios ortogonales clásicos de Jacobi.

Por otra parte, es bien conocida la relación entre las funciones de Stieltjes y las funciones de Carathéodory asociadas a medidas soportadas en la recta real y la circunferencia unidad, respectivamente. Aplicando a una función de Stieltjes las transformaciones definidas en las Secciones 1.1.2 y 1.1.3, estudiamos las transformaciones resultantes en las correspondientes funciones de Carathéodory, por medio de la transformación de Szegő. Recíprocamente, aplicando las transformaciones definidas en la Sección 1.2.3 a una función de Carathéodory, estudiamos las transformaciones resultantes en las correspondientes funciones de Stieltjes.

4.1. La transformación de Szegő y la factorización LU.

A partir de una medida de Borel μ no trivial, positiva, soportada en $[-1, 1]$, podemos definir una medida σ de Borel, no trivial, positiva, soportada en $[-\pi, \pi]$ mediante

$$d\sigma(\theta) = \frac{1}{2}|d\mu(\cos\theta)|, \quad (4.1)$$

de tal forma que si $d\mu(x) = \omega(x)dx$, entonces

$$d\sigma(\theta) = \frac{1}{2}\omega(\cos\theta)|\operatorname{sen}\theta|d\theta.$$

Si μ es una medida de probabilidad, es decir, $\int_{-1}^1 d\mu = 1$, entonces σ es también una medida de probabilidad en la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y entonces existe una sucesión de polinomios ortonormales que satisface (1.20), así como los correspondientes polinomios mónicos. En este caso, los coeficientes de Verblunsky satisfacen la condición

$$\Phi_n(0) \in (-1, 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Existe una relación entre los polinomios ortogonales asociados a una medida μ soportada en $[-1, 1]$ y los polinomios ortogonales asociados con la medida σ definida por (4.1), con soporte en la circunferencia unidad.

Teorema 65 [96] *La sucesión de polinomios ortonormales $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ en la circunferencia unidad asociados con la medida σ tiene coeficientes reales. Además, si $x = \frac{(z+z^{-1})}{2}$, entonces*

$$p_n(x) = \frac{\kappa_{2n}(\sigma)}{2(\sqrt{1 + \Phi_{2n}(0)})} [z^{-n}\Phi_{2n}(z) + z^n\Phi_{2n}(1/z)].$$

Por otra parte, los coeficientes de las relaciones de recurrencia (1.3), (1.16) y (1.17) están relacionados mediante

$$2a_n = \sqrt{[1 - \Phi_{2n}(0)][1 - \Phi_{2n-1}^2(0)][1 + \Phi_{2n-2}(0)]}, \quad n \geq 1, \quad (4.2)$$

$$2b_n = \Phi_{2n-1}(0)[1 - \Phi_{2n}(0)] - \Phi_{2n+1}(0)[1 + \Phi_{2n}(0)], \quad n \geq 0. \quad (4.3)$$

Obsérvese que, si definimos una sucesión $\{u_k\}_{k \geq 1}$, con

$$u_k = \frac{1}{2}(1 - \Phi_k(0))(1 + \Phi_{k-1}(0)), \quad (4.4)$$

obtenemos

$$a_k^2 = u_{2k}u_{2k-1}, \quad k \geq 1, \quad (4.5)$$

$$b_k + 1 = u_{2k} + u_{2k+1}, \quad k \geq 0, \quad (4.6)$$

y, entonces, podemos obtener una factorización única

$$\tilde{J} + I = LU,$$

donde I es la matriz identidad, y L y U son matrices bidiagonales inferior y superior, respectivamente, con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_4 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & u_6 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_5 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & u_7 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Así, de (4.4)

$$\Phi_k(0) = 1 - \frac{2u_k}{1 + \Phi_{k-1}(0)}, \quad (4.7)$$

o, equivalentemente,

$$\Phi_k(0) = 1 - \frac{2u_k}{2 - \frac{2u_{k-1}}{2 - \frac{2u_{k-2}}{2 - \frac{\ddots}{2 - \frac{2u_2}{2 - 2u_1}}}}}. \quad (4.8)$$

Por lo tanto, obtenemos una sucesión $\{u_n\}_{n \geq 1}$ que podemos utilizar para determinar de una manera sencilla los coeficientes de Verblunsky $\{\Phi_k(0)\}_{k \geq 1}$ de la medida σ soportada en la circunferencia unidad.

Obsérvese que, dado que los momentos $\{c_n\}_{n \geq 0}$ son reales, $F(z)$, la función de Carathéodory asociada a σ tiene coeficientes reales. Por tanto, tenemos

$$\Re F(e^{i\theta}) = \Re F(e^{i(2\pi-\theta)}),$$

y entonces $d\sigma(\theta) + d\sigma(2\pi - \theta) = 0$. De esta manera, existe una sencilla relación entre las funciones de Stieltjes y Carathéodory asociadas con μ y σ , respectivamente,

$$F(z) = \frac{1 - z^2}{2z} \int_{-1}^1 \frac{d\mu(t)}{x - t} = \frac{1 - z^2}{2z} S(x), \quad (4.9)$$

donde $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $z = x - \sqrt{x^2 - 1}$ (ver [83]).

4.2. Transformaciones espectrales lineales.

Consideraremos medidas soportadas en \mathbb{T} , definidas a partir de medidas de Borel soportadas en el intervalo $[-1, 1]$, y analizaremos la conexión entre sus correspondientes transformaciones espectrales. En particular, en esta sección enfocaremos nuestra atención en las tres transformaciones canónicas estudiadas en capítulos precedentes.

Nuestro objetivo es aplicar transformaciones espectrales lineales a la función de Stieltjes $S(x)$ (asociada a la medida μ) y estudiar la transformada de la correspondiente función de Carathéodory $F(z)$ por medio de la transformación definida en la sección previa.

4.2.1. La transformación de Christoffel.

Consideremos la transformación de Christoffel de $S(x)$ dada por

$$S_C(x) = \frac{(x - \beta)S(x) - 1}{\mu_1 - \beta}, \quad (4.10)$$

que representa la perturbación de la medida de probabilidad μ

$$d\tilde{\mu} = \frac{(x - \beta)}{\mu_1 - \beta} d\mu,$$

de tal forma que $\tilde{\mu}$ es, de nuevo, una medida de probabilidad.

Sustituyendo (4.9) en (4.10)

$$\begin{aligned}\frac{2z}{1-z^2}F_C(z) &= \frac{\left(\frac{z+z^{-1}}{2} - \beta\right)\frac{2z}{1-z^2}F(z) - 1}{\mu_1 - \beta}, \\ F_C(z) &= \frac{\frac{z+z^{-1}-2\beta}{2}F(z) - \frac{1-z^2}{2z}}{\mu_1 - \beta} \\ &= \frac{(z^2 - 2\beta z + 1)F(z) + z^2 - 1}{2z(\mu_1 - \beta)}.\end{aligned}$$

Entonces, la transformación resultante para la función de Carathéodory se puede representar mediante la transformación espectral lineal

$$F_C(z) = \frac{A_C(z)F(z) + B_C(z)}{D_C(z)},$$

con $A_C(z) = \frac{z^2-2\beta z+1}{2(\mu_1-\beta)}$, $B_C(z) = \frac{z^2-1}{2(\mu_1-\beta)}$ y $D_C(z) = z$.

En [68] (véase también la proposición 24 de la Sección 2.1.2), se muestra que la transformación canónica de Christoffel de una función de Carathéodory está dada por

$$\tilde{F}_1(z) = \frac{A_1(z)F_1(z) + B_1(z)}{D_1(z)},$$

donde $A_1(z) = -\bar{\alpha}z^2 + (1 + |\alpha|^2)z - \bar{\alpha}$, $B_1(z) = -\bar{\alpha}z^2 + (\alpha c_1 - \bar{\alpha} \bar{c}_1)z + \alpha$ y $D_1(z) = z$. Normalizando $\tilde{F}_1(z)$ de tal manera que $\tilde{c}_0 = 1$, los polinomios de la transformación anterior se convierten en

$$\begin{aligned}A_1(z) &= \frac{-\bar{\alpha}z^2 + (1 + |\alpha|^2)z - \bar{\alpha}}{(1 + |\alpha|^2) - 2\Re(\alpha c_1)}, \\ B_1(z) &= \frac{-\bar{\alpha}z^2 + (\alpha c_1 - \bar{\alpha} \bar{c}_1)z + \alpha}{(1 + |\alpha|^2) - 2\Re(\alpha c_1)}, \\ D_1(z) &= z.\end{aligned}$$

Así, comparando los coeficientes de $B_C(z)$ y $B_1(z)$, tenemos

$$(\alpha c_1 - \bar{\alpha} \bar{c}_1) = 0.$$

Por tanto, $\alpha \in \mathbb{R}$ y, comparando los coeficientes de $A_C(z)$ y los restantes coeficientes de $B_C(z)$ con los coeficientes de $A_1(z)$ y $B_1(z)$, respectivamente, encontramos

$$\frac{-\alpha}{(1 + |\alpha|^2) - 2\alpha c_1} = \frac{1}{2(\mu_1 - \beta)}, \quad (4.11)$$

así como

$$\frac{(1 + \alpha^2)}{(1 + |\alpha|^2) - 2\alpha c_1} = \frac{-2\beta}{2(\mu_1 - \beta)}. \quad (4.12)$$

De (4.11)

$$-2\alpha(\mu_1 - \beta) = (1 + |\alpha|^2) - 2\alpha c_1, \quad (4.13)$$

y de (4.12) y (4.13)

$$\frac{-(1 + \alpha^2)}{2\alpha(\mu_1 - \beta)} = \frac{-2\beta}{2(\mu_1 - \beta)}.$$

Entonces

$$\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 = 0,$$

y, finalmente,

$$\alpha_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}, \text{ con } |\beta| \geq 1.$$

Esto significa que el cero del polinomio complejo de grado 1 en la transformación canónica de Christoffel debe ser real.

4.2.2. La transformación de Uvarov.

Ahora consideramos la transformación de Uvarov de la función de Stieltjes $S(x)$ asociada a μ

$$S_U(x) = \frac{S(x) + M_r(x - \beta)^{-1}}{1 + M_r}, \quad (4.14)$$

correspondiente a una transformación de la medida μ definida por

$$d\tilde{\mu} = \frac{d\mu + M_r\delta(x - \beta)}{1 + M_r}.$$

De nuevo, $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad.

Usando (4.9) y (4.14) obtenemos

$$\frac{2z}{1 - z^2} F_U(z) = \frac{\frac{2z}{1-z^2} F(z) + M_r\left(\frac{z+z^{-1}}{2} - \beta\right)^{-1}}{1 + M_r}, \quad (4.15)$$

$$F_U(z) = \frac{F(z) + M_r\left(\frac{2}{z+z^{-1}-2\beta}\right)\left(\frac{1-z^2}{2z}\right)}{1 + M_r} \quad (4.16)$$

$$= \frac{F(z) + M_r\left(\frac{1-z^2}{z^2-2\beta z+1}\right)}{1 + M_r}. \quad (4.17)$$

En otras palabras, $A_U(z) = \frac{z^2 - 2\beta z + 1}{1 + M_r}$, $B_U(z) = \frac{(1 - z^2)M_r}{1 + M_r}$ y $D_U(z) = z^2 - 2\beta z + 1$.

Por otro lado, de [68] sabemos que

$$\widetilde{F}_1(z) = F(z) + \frac{B_1(z)}{D_1(z)}, \quad (4.18)$$

donde $B_1(z) = (\alpha - \bar{\alpha}z^2)(M_c + \overline{M_c}) - (1 - |\alpha|^2)(M_c - \overline{M_c})z$, $D_1(z) = (z - \alpha)(\bar{\alpha}z - 1)$ y $F(z)$, $\widetilde{F}_1(z)$ son las funciones de Carathéodory asociadas a σ y su transformación de Uvarov $\tilde{\sigma}_1$, respectivamente, dadas por

$$(p, q)_{\tilde{\sigma}_1} = (p, q)_\sigma + M_c p(\alpha) \overline{q(\bar{\alpha}^{-1})} + \overline{M_c} p(\bar{\alpha}^{-1}) \overline{q(\alpha)}, \alpha \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\widetilde{F}_1(0) = (1 + M_c + \overline{M_c}),$$

obtenemos

$$M_r = 2\Re M_c.$$

Por otra parte, de la comparación entre (4.17) y (4.18) se tiene

$$\frac{\alpha - \bar{\alpha}z^2}{(z - \alpha)(\bar{\alpha}z - 1)} = \frac{1 - z^2}{z^2 - 2\beta z + 1}, \quad (4.19)$$

así como

$$(1 - |\alpha|^2)(M_c - \overline{M_c}) = 0.$$

Como consecuencia, se analizan dos situaciones.

(i) Si $|\alpha| = 1$, entonces de (4.19) se sigue que $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = 1$ y $\beta = 1$. Esto significa que $\alpha_\pm = \pm 1$. Como conclusión la transformación de Uvarov de la medida σ aparece con la adición de una masa M_r en el punto $\alpha_\pm = \pm 1$.

(ii) Si $|\alpha| \neq 1$, entonces $M_c \in \mathbb{R}$ y $M_c = \frac{M_r}{2}$. Por otra parte, de (4.19), $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = 1$ así como $\frac{1 + \alpha^2}{\alpha} = 2\beta$, es decir, $\alpha = \bar{\alpha}$ y $\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 = 0$. Esto significa que

$$\alpha_\pm = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad |\beta| > 1.$$

Como conclusión, la transformación de Uvarov de la medida σ es el resultado de la adición de dos masas reales $\frac{M_r}{2}$ en los puntos $\alpha_\pm = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$, con $|\beta| > 1$.

4.2.3. La transformación de Geronimus.

La transformación de Geronimus de la función de Stieltjes $S(x)$ asociada con μ está dada por

$$S_G(x) = \frac{S(\beta) + M_r - S(x)}{(x - \beta)(M_r + S(\beta))},$$

y representa la siguiente transformación de la medida μ

$$d\tilde{\mu} = \frac{(x - \beta)^{-1}d\mu + M_r\delta(x - \beta)}{M_r + S(\beta)}.$$

Nótese que, de nuevo, $\tilde{\mu}$ es una medida de probabilidad. La función de Carathéodory correspondiente $F_G(z)$ resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{2z}{1 - z^2}F_G(z) &= \frac{S(\beta) + M_r - \frac{2z}{1 - z^2}F(z)}{\left(\frac{z+z^{-1}}{2} - \beta\right)(M_r + S(\beta))}, \\ F_G(z) &= \frac{-2zF(z) + (1 - z^2)[S(\beta) + M_r]}{(z^2 - 2\beta z + 1)(S(\beta) + M_r)}. \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$F_G(z) = \frac{zF(z) + \frac{1}{2}(z^2 - 1)[S(\beta) + M_r]}{-\frac{1}{2}(z^2 - 2\beta z + 1)[S(\beta) + M_r]}. \quad (4.20)$$

Así, $A_G(z) = z$, $B_G(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 1)[S(\beta) + M_r]$ y $D_G(z) = -\frac{1}{2}(z^2 - 2\beta z + 1)[S(\beta) + M_r]$. Por otra parte, en [68] se muestra que

$$\widetilde{F}_1(z) = \frac{A_1(z)F(z) + B_1(z)}{D_1(z)}, \quad (4.21)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(z) &= z, \\ B_1(z) &= \bar{\alpha}z^2 - 2i\Im(q_0)z - \alpha, \\ D_1(z) &= -\bar{\alpha}z^2 + (1 + |\alpha|^2)z - \alpha, \end{aligned}$$

y q_0 es un parámetro libre dado por

$$q_0 = \tilde{c}_0 - \bar{\alpha}\tilde{c}_1.$$

Entonces, comparando los coeficientes de $B(z)$ y $B_1(z)$, obtenemos $q_0 \in \mathbb{R}$. Por otro lado, (4.21) también puede expresarse como

$$\widetilde{F}_1(z) = \frac{A_1(z)}{D_1(z)}F(z) + M_c \frac{\alpha + z}{\alpha - z} + \overline{M}_c \frac{1 + \bar{\alpha}z}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad (4.22)$$

con $M_c = \frac{q_0 - \frac{1}{2}}{1 - |\alpha|^2}$. Por lo tanto, $M_c \in \mathbb{R}$ y (4.22) se convierte en

$$\widetilde{F}_1(z) = \frac{zF(z) - 2M_c(-\bar{\alpha}z^2 + \alpha)}{(-\bar{\alpha}z^2 + (1 + |\alpha|^2)z - \alpha)A_g}, \quad (4.23)$$

donde A_g es el factor de normalización. Comparando los coeficientes de los polinomios en (4.20) y (4.23) obtenemos

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad M_c = \frac{S(\beta) + M_r}{4\alpha},$$

y

$$\alpha^2 - 2\beta\alpha + 1 = 0.$$

Entonces,

$$\alpha_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad \text{con } |\beta| > 1.$$

Esto es, en la transformación canónica de Geronimus, se agregan dos masas reales en los puntos $\alpha_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$.

4.2.4. Ejemplos.

Caso Jacobi.

Consideremos la familia de polinomios ortogonales mónicos correspondientes a la medida

$$d\mu = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}dx, \quad \alpha, \beta > -1, \quad (4.24)$$

soportada en el intervalo $(-1, 1)$.

Es bien conocido (ver [22], [96]) que los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos que satisfacen dichos polinomios están dados por

$$b_n = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + 2 + \alpha + \beta)}, \quad n \geq 0,$$

$$a_n^2 = \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}, \quad n \geq 1.$$

Analizaremos algunos casos representativos de pesos de Jacobi.

4.2.4.1. Polinomios de Tchebichev de primera especie, $(\alpha = \beta = -\frac{1}{2})$.

En este caso

$$b_n = 0, n \geq 0, \quad a_1^2 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_n^2 = \frac{1}{4}, n \geq 2.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{J} + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

De la factorización LU de esta matriz, obtenemos

$$u_1 = 1 \quad \text{y} \quad u_n = \frac{1}{2}, \quad n \geq 2,$$

y de (4.7)

$$\Phi_n(0) = 0, \quad n \geq 1,$$

resultado previsible, dado que la medida en la circunferencia unidad asociada con (4.24) para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ es la medida normalizada de Lebesgue.

4.2.4.2. Polonomios de Tchebichev de segunda especie, $(\alpha = \beta = \frac{1}{2})$.

En este caso,

$$b_n = 0, n \geq 0, \quad \text{y} \quad a_n^2 = \frac{1}{4}, n \geq 1.$$

Por lo tanto, $\tilde{J} + I$ se convierte en

$$\tilde{J} + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calculando la factorización LU de esta matriz, obtenemos, para los primeros elementos de la sucesión $\{u_k\}_{k \geq 1}$,

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= \frac{3}{4}, & u_4 &= \frac{1}{3}, \\
u_5 &= \frac{2}{3}, & u_6 &= \frac{3}{8}, \\
u_7 &= \frac{5}{8}, & u_8 &= \frac{2}{5}, \\
u_9 &= \frac{3}{5}, & u_{10} &= \frac{5}{12}, \dots
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{2n}{4(n+1)}, & n &\geq 1, \\
u_{2n+1} &= \frac{n+2}{2(n+1)}, & n &\geq 0,
\end{aligned}$$

y de (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_1(0) &= 0, & \Phi_2(0) &= \frac{1}{2}, \\
\Phi_3(0) &= 0, & \Phi_4(0) &= \frac{1}{3}, \\
\Phi_5(0) &= 0, & \Phi_6(0) &= \frac{1}{4}, \\
\Phi_7(0) &= 0, & \Phi_8(0) &= \frac{1}{5}, \\
\Phi_9(0) &= 0, & \Phi_{10}(0) &= \frac{1}{6}, \dots
\end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n}(0) &= \frac{1}{n+1}, & n &\geq 1, \\
\Phi_{2n+1}(0) &= 0, & n &\geq 0.
\end{aligned}$$

Esta es una perturbación de la medida de Lebesgue dada por

$$d\tilde{\mu} = |z^2 - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Obsérvese que la medida $\tilde{\mu}$ es la medida cribada $d\mu_1 = |z - 1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$, $z = e^{i\theta}$. Los polinomios ortogonales cribados para medidas soportadas en la circunferencia unidad han sido analizados en [59] y [76].

4.2.4.3. Polinomios de Tchebichev de tercera especie ($\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$).

Obtenemos

$$b_0 = -\frac{1}{2}, \quad b_n = 0, n \geq 1, \quad y \quad a_n^2 = \frac{1}{4}, n \geq 1,$$

de modo que

$$\tilde{J} + I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calculando la factorización LU de esta matriz, obtenemos

$$u_k = \frac{1}{2}, \quad k \geq 1,$$

y de (4.7) deducimos

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) &= \frac{1}{2}, & \Phi_2(0) &= \frac{1}{3}, \\ \Phi_3(0) &= \frac{1}{4}, & \Phi_4(0) &= \frac{1}{5}, \\ \Phi_5(0) &= \frac{1}{6}, & \Phi_6(0) &= \frac{1}{7}, \\ \Phi_7(0) &= \frac{1}{8}, & \Phi_8(0) &= \frac{1}{9}, \\ \Phi_9(0) &= \frac{1}{10}, & \Phi_{10}(0) &= \frac{1}{11}, \dots \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Esto corresponde a una perturbación de la medida de Lebesgue dada por (ver [73])

$$d\tilde{\mu} = |z-1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Se trata de una transformación de Christoffel de la medida de Lebesgue, como se muestra en la Sección 5.1, con $\alpha = 1$.

4.2.4.4. Polinomios de Tchebichev de cuarta especie ($\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$).

Obtenemos

$$b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0, n \geq 1, \quad \text{y} \quad a_n^2 = \frac{1}{4}, n \geq 1,$$

de tal manera que

$$\tilde{J} + I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Calculando la factorización LU de esta matriz, obtenemos para los primeros elementos de la sucesión $\{u_k\}_{k \geq 1}$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{2}, & u_2 &= \frac{1}{6}, \\ u_3 &= \frac{5}{6}, & u_4 &= \frac{3}{10}, \\ u_5 &= \frac{7}{10}, & u_6 &= \frac{5}{14}, \\ u_7 &= \frac{9}{14}, & u_8 &= \frac{7}{18}, \\ u_9 &= \frac{11}{18}, & u_{10} &= \frac{9}{22}, \dots \end{aligned}$$

y de (4.7) deducimos

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) &= -\frac{1}{2}, & \Phi_2(0) &= \frac{1}{3}, \\ \Phi_3(0) &= -\frac{1}{4}, & \Phi_4(0) &= \frac{1}{5}, \\ \Phi_5(0) &= -\frac{1}{6}, & \Phi_6(0) &= \frac{1}{7}, \\ \Phi_7(0) &= -\frac{1}{8}, & \Phi_8(0) &= \frac{1}{9}, \\ \Phi_9(0) &= -\frac{1}{10}, & \Phi_{10}(0) &= \frac{1}{11}, \dots \end{aligned}$$

Así pues,

$$\Phi_n(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Esto corresponde a una perturbación de la medida de Lebesgue dada por (ver [45],[73])

$$d\tilde{\mu} = |z+1|^2 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Se trata, pues, de una transformación canónica de Christoffel de la medida de Lebesgue, como se muestra en la Sección 5.1, con $\alpha = -1$.

4.2.4.5. Polinomios de Gegenbauer, con $\alpha = \beta = 1$.

En este caso

$$b_n = 0, n \geq 0, \quad a_n^2 = \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}, n \geq 1.$$

Por lo tanto, desarrollando la factorización LU de $\tilde{J} + I$ obtenemos, para los primeros elementos de la sucesión $\{u_k\}_{k \geq 1}$,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, & u_2 &= \frac{1}{5}, \\ u_3 &= \frac{4}{5}, & u_4 &= \frac{2}{7}, \\ u_5 &= \frac{5}{7}, & u_6 &= \frac{3}{9}, \\ u_7 &= \frac{6}{9}, & u_8 &= \frac{4}{11}, \\ u_9 &= \frac{7}{11}, & u_{10} &= \frac{5}{13}, \dots \end{aligned}$$

y de (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) &= 0, & \Phi_2(0) &= \frac{3}{5}, \\ \Phi_3(0) &= 0, & \Phi_4(0) &= \frac{3}{7}, \\ \Phi_5(0) &= 0, & \Phi_6(0) &= \frac{3}{9}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_7(0) &= 0, & \Phi_8(0) &= \frac{3}{11}, \\ \Phi_9(0) &= 0, & \Phi_{10}(0) &= \frac{3}{13}, \dots\end{aligned}$$

De aquí se sigue que,

$$\begin{aligned}\Phi_{2n}(0) &= \frac{3}{2n+3}, & n &\geq 1, \\ \Phi_{2n+1}(0) &= 0, & n &\geq 1.\end{aligned}$$

La correspondiente medida es una perturbación de la medida de Lebesgue definida por

$$d\tilde{\mu} = |z^2 - 1|^3 \frac{d\theta}{2\pi}, \quad z = e^{i\theta}.$$

4.2.4.6. Transformación de Uvarov de los polinomios de Legendre.

Consideramos el caso de la medida de Legendre $d\mu = dx$, es decir, un caso Jacobi con $\alpha = \beta = 0$, y su transformación de Uvarov definida por

$$d\tilde{\mu} = dx + \delta(x+1) + \delta(x-1), \quad (4.25)$$

que ha sido considerada previamente en [32]. Denotamos mediante J la matriz de Jacobi mónica asociada con μ . Por el Corolario 4.5 en [13], si aplicamos las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned}J - \alpha I &= L_1 U_1, \\ J_1 &:= U_1 L_1, \\ J_1 &= U_2 L_2, \\ J_2 &:= L_2 U_2 + I, \\ J_2 + I &= L_3 U_3, \\ J_3 &:= U_3 L_3, \\ J_3 &= U_4 L_4, \\ J_4 &:= L_4 U_4 - I,\end{aligned}$$

entonces J_4 es la matriz mónica de Jacobi asociada con (4.25). Ahora calculamos la factorización LU de $J_4 + I$ para obtener la sucesión $\{u_k\}_{n \geq 1}$ cuyos primeros elementos son

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1, & u_2 &= \frac{7}{9}, \\
u_3 &= \frac{2}{9}, & u_4 &= \frac{24}{35}, \\
u_5 &= \frac{9}{35}, & u_6 &= \frac{9}{13}, \\
u_7 &= \frac{4}{13}, & u_8 &= \frac{124}{189}, \\
u_9 &= \frac{65}{189}, & u_{10} &= \frac{215}{341}, \dots
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{(n+1)^2[n^2(2n+4)+4n]+2n}{2(2n+1)[n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1]}, & n \geq 1, \\
u_{2n+1} &= \frac{n^2(n+1)^2(2n-2)+(n+1)(4n^2+2)}{2(2n+1)[n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1]}, & n \geq 0.
\end{aligned}$$

De (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_1(0) &= 0, & \Phi_2(0) &= -\frac{5}{9}, \\
\Phi_3(0) &= 0, & \Phi_4(0) &= -\frac{17}{35}, \\
\Phi_5(0) &= 0, & \Phi_6(0) &= -\frac{5}{13}, \\
\Phi_7(0) &= 0, & \Phi_8(0) &= -\frac{59}{189}, \\
\Phi_9(0) &= 0, & \Phi_{10}(0) &= -\frac{89}{341}, \dots
\end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n}(0) &= -\frac{3n^2(n+1)^2+2n(n+1)-1}{(2n+1)[n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1]}, & n \geq 1, \\
\Phi_{2n+1}(0) &= 0, & n \geq 1.
\end{aligned}$$

4.3. Transformaciones espectrales racionales.

4.3.1. La transformación de Szegő y los polinomios asociados de primera especie en la recta real.

A continuación estudiamos, para el caso de transformaciones espectrales racionales, la relación entre la función de Stieltjes asociada a una medida soportada en el intervalo $[-1, 1]$ y la correspondiente función de Carathéodory asociada a una medida soportada en la circunferencia unidad, donde ambas medidas están relacionadas mediante la transformación de Szegő.

Analizamos la función de Stieltjes $S^{(1)}(x)$, correspondiente a los polinomios asociados de primera especie ($k = 1$) [41]. De (1.4) y (1.10), tenemos

$$S^{(1)}(x) = -\frac{1}{a_1^2 S(x)} + \frac{x - b_0}{a_1^2}, \quad (4.26)$$

donde a_1, b_0 son parámetros fijos. Denotaremos $S^{(1)}(x) = \mathcal{R}^{(1)}[S(x)]$.

Aplicando la transformación de Szegő a (4.26), obtenemos

$$\frac{2z}{1-z^2} \hat{F}(z) = \frac{\frac{z+z^{-1}}{2} - b_0}{a_1^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{(1-z^2)}{2z} \frac{1}{F(z)}, \quad (4.27)$$

$$\hat{F}(z) = -\frac{(1-z^2)^2}{4a_1^2 z^2} \frac{1}{F(z)} + \frac{(1-z^2)(z^2 - 2b_0 + 1)}{4a_1^2 z^2} \quad (4.28)$$

$$= \frac{-(1-z^2)^2 F_\Omega(z) + (1-z^2)(z^2 - 2b_0 + 1)}{4a_1^2 z^2}, \quad (4.29)$$

donde $F_\Omega(z)$ es la función de Carathéodory correspondiente a los polinomios asociados de segunda especie (ver Proposición 18) con respecto a la medida σ soportada en la circunferencia unidad.

Obsérvese que (4.29) se puede expresar como el resultado de la composición de dos transformaciones espectrales lineales

$$\hat{F}_1(z) = \frac{\hat{A}_1(z)F_\Omega(z) + \hat{B}_1(z)}{\hat{D}_1(z)},$$

$$\hat{F}_2(z) = \frac{\hat{A}_2(z)\hat{F}_1(z) + \hat{B}_2(z)}{\hat{D}_2(z)}.$$

En otras palabras, obtenemos

$$\hat{F}(z) = \frac{\hat{A}_1(z)\hat{A}_2(z)F_\Omega(z) + \hat{A}_2(z)\hat{B}_1(z) + \hat{B}_2(z)\hat{D}_1(z)}{\hat{D}_1(z)\hat{D}_2(z)}.$$

Por lo tanto, de la comparación con (4.29) tenemos

$$\begin{aligned}\hat{A}_1(z)\hat{A}_2(z) &= -\frac{(1-z^2)^2}{4a_1^2}, \\ \hat{A}_2(z)\hat{B}_1(z) + \hat{B}_2(z)\hat{D}_1(z) &= \frac{(1-z^2)(z^2 - 2b_0 + 1)}{4a_1^2}, \\ \hat{D}_1(z)\hat{D}_2(z) &= z^2.\end{aligned}$$

Entonces, podemos considerar

$$\begin{aligned}\hat{A}_1(z) &= (1-z)^2, \\ \hat{B}_1(z) &= (z^2 - 1), \\ \hat{D}_1(z) &= -2(b_0 + 1)z, \\ \hat{A}_2(z) &= -\frac{(1+z)^2}{4a_1^2}, \\ \hat{B}_2(z) &= \frac{1-z^2}{4a_1^2}, \\ \hat{D}_2(z) &= -\frac{z}{2(b_0 + 1)}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\hat{F}_1(z) &= \frac{-\frac{1}{2(b_0+1)}(1-z)^2F_\Omega(z) - \frac{1}{2(b_0+1)}(z^2 - 1)}{z}, \\ \hat{F}_2(z) &= \frac{\frac{2(b_0+1)}{4a_1^2}(1+z)^2\hat{F}_1(z) + -\frac{2(b_0+1)}{4a_1^2}(1-z^2)}{z}.\end{aligned}$$

Por otro lado, en [68] se muestra que la transformación canónica de Christoffel de una función de Carathéodory está dada por

$$F_c(z) = \frac{A_c(z)F(z) + B_c(z)}{D_c(z)},$$

donde $A_c(z) = -\bar{\alpha}z^2 + (1 + |\alpha|^2)z - \bar{\alpha}$, $B_c(z) = -\bar{\alpha}z^2 + (\alpha c_1 - \bar{\alpha}\bar{c}_1)z + \alpha$ y $D_c(z) = z$. Normalizando $F_c(z)$ para que el primer momento sea 1, los polinomios de la transformación anterior se convierten en

$$A_c(z) = \frac{-\bar{\alpha}z^2 + (1 + |\alpha|^2)z - \bar{\alpha}}{(1 + |\alpha|^2) - 2\Re\alpha c_1},$$

$$B_c(z) = \frac{-\bar{\alpha}z^2 + (\alpha c_1 - \bar{\alpha}\bar{c}_1)z + \alpha}{(1 + |\alpha|^2) - 2\Re\alpha c_1},$$

$$D_c(z) = z.$$

De esta manera, comparando los coeficientes de $\hat{B}_1(z)$ y $B_c(z)$, tenemos

$$\alpha_1 c_1 - \bar{\alpha}_1 c_{-1} = 0.$$

De aquí se sigue que $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ y la comparación de los coeficientes de $\tilde{A}_1(z)$ y los restantes coeficientes de $\hat{B}_1(z)$ con los coeficientes de $A_c(z)$ y $B_c(z)$, respectivamente, implica que

$$\frac{\alpha_1}{(1 + |\alpha_1|^2) - 2\alpha_1 c_1} = \frac{1}{2(b_0 + 1)} \quad (4.30)$$

y

$$\frac{(1 + \alpha_1^2)}{(1 + |\alpha_1|^2) - 2\alpha_1 c_1} = \frac{1}{b_0 + 1}. \quad (4.31)$$

Entonces, de (4.30) y (4.31)

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_1 + 1 = 0,$$

y, finalmente,

$$\alpha_1 = 1.$$

Esto significa que el cero del polinomio complejo de grado 1 en esta transformación de Christoffel debe ser real e igual a 1.

De manera similar, comparando los coeficientes del conjunto de polinomios para la segunda transformación de Christoffel, obtenemos

$$\alpha_2 = -1.$$

Por tanto, el cero del polinomio complejo de grado 1 en la segunda transformación de Christoffel es también real e igual a -1 .

Entonces, hemos probado

Proposición 66 Sea $S^{(1)}(x)$ la función de Stieltjes correspondiente a los polinomios asociados de primera especie con respecto a una medida de probabilidad no trivial μ soportada en $[-1, 1]$. Entonces su imagen a partir de la transformación de Szegő es $\hat{F}(z)$, una función de Carathéodory que es el producto de dos transformaciones de Christoffel aplicadas a $F_\Omega(z)$, la función de Carathéodory correspondiente a los polinomios asociados de segunda especie con respecto a la medida de probabilidad no trivial σ , soportada en \mathbb{T} . En otras palabras

$$\Sigma\mathcal{R}^{(1)} = \mathcal{F}_{C_2}\mathcal{F}_{C_1}\mathcal{F}_\Omega\Sigma$$

4.3.2. La transformación de Szegő y los polinomios antiasociados de primera especie en la recta real.

De la transformación de Szegő, obtenemos

$$\frac{2z}{1-z^2}\tilde{F}(z) = \frac{1}{\frac{z+z^{-1}}{2} - \tilde{b}_0 - \tilde{a}_1^2 \frac{2z}{1-z^2}F(z)}, \quad (4.32)$$

$$\tilde{F}(z) = \frac{\frac{1-z^2}{2z}}{\frac{z^2-2\tilde{b}_0z+1}{2z} - \tilde{a}_1^2 \frac{4z^2}{(1-z^2)2z}F(z)} \quad (4.33)$$

$$= \frac{1-z^2}{-4\tilde{a}_1^2 z^2 F(z) + z^2 - 2\tilde{b}_0z + 1} \quad (4.34)$$

$$= \frac{(1-z^2)^2}{-4\tilde{a}_1^2 z^2 F(z) + (1-z^2)(z^2 - 2\tilde{b}_0z + 1)}. \quad (4.35)$$

Aquí $\tilde{F}(z)$ es una función de Carathéodory asociada a la medida $\tilde{\sigma}$ soportada en la circunferencia unidad. Ahora consideramos la función de Carathéodory \tilde{F}_Ω , correspondiente a los polinomios asociados de segunda especie con respecto a la medida $\tilde{\sigma}$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\Omega(z) &= \frac{1}{\tilde{F}(z)} = \frac{-4\tilde{a}_1^2 z^2 F(z) + (1-z^2)(z^2 - 2\tilde{b}_0z + 1)}{(1-z^2)^2} \\ &= \frac{z^2 F(z) + \frac{1}{4\tilde{a}_1^2} (z^2 - 1)(z^2 - 2\tilde{b}_0z + 1)}{-\frac{1}{4\tilde{a}_1^2} (z^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Así, podemos expresar $\tilde{F}_\Omega(z)$ como una transformación espectral lineal de $F(z)$ del modo siguiente

$$\tilde{F}_\Omega(z) = \frac{\tilde{A}(z)F(z) + \tilde{B}(z)}{\tilde{D}(z)},$$

donde $\tilde{A}(z) = z^2$, $\tilde{B}(z) = \frac{1}{4\tilde{a}_1^2}(z^2 - 1)(z^2 - 2\tilde{b}_0z + 1)$ y $\tilde{D}(z) = -\frac{1}{4\tilde{a}_1^2}(z^2 - 1)^2$.

Ahora consideramos el funcional lineal $\tilde{\sigma}$ tal que

$$\langle (z^2 - \alpha)p, (z^2 - \alpha)q \rangle_{\tilde{\sigma}} = \langle p, q \rangle_{\sigma}.$$

Entonces, tenemos

$$c_{-k} = \langle 1, z^k \rangle_{\sigma} = \langle (z^2 - \alpha), (z^2 - \alpha)z^k \rangle_{\tilde{\sigma}} \quad (4.36)$$

$$= \tilde{c}_{-k}(1 + |\alpha|^2) - \alpha\tilde{c}_{-(k+2)} - \bar{\alpha}\tilde{c}_{-(k-2)}, \quad k \geq 0. \quad (4.37)$$

Multiplicando (4.37) por z^k y sumando estas expresiones para $k \geq 2$, obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_{-k}z^k = (1 + |\alpha|^2) \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{c}_{-k}z^k - \alpha \sum_{k=4}^{\infty} c_{-k}z^{k-2} - \bar{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k}z^{k+2}.$$

En otras palabras,

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - c_0 - 2c_{-1}z}{2} &= (1 + |\alpha|^2) \left[\frac{\tilde{F}(z) - \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_{-1}z}{2} \right] \\ &- \alpha \left[\frac{z^{-2}\tilde{F}(z) - \tilde{c}_0z^{-2} - 2\tilde{c}_{-1}z^{-1} - 2\tilde{c}_{-2} - 2\tilde{c}_{-3}z}{2} \right] \\ &- \bar{\alpha} \left[\frac{z^2\tilde{F}(z) - \tilde{c}_0z^2 + 2\tilde{c}_0z^2}{2} \right], \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} F(z) &= \left[(1 + |\alpha|^2) - \alpha z^{-2} - \bar{\alpha} z^2 \right] \tilde{F}(z) + c_0 + 2c_{-1}z \\ &- (1 + |\alpha|^2)(\tilde{c}_0 + 2\tilde{c}_{-1}z) + \alpha(\tilde{c}_0z^{-2} + 2\tilde{c}_{-1}z^{-1} + 2\tilde{c}_{-2} + 2\tilde{c}_{-3}z) - \bar{\alpha}\tilde{c}_0z^2. \end{aligned}$$

Multiplicando por z^2 y reordenando la expresión anterior, obtenemos

$$\tilde{F}(z) = \frac{z^2F(z) + Q(z)}{[-\bar{\alpha}z^4 + (1 + |\alpha|^2)z^2 - \alpha]\tilde{c}_0},$$

donde $Q(z) = \bar{\alpha}\tilde{c}_0z^4 + [2(1+|\alpha|^2)\tilde{c}_{-1} - 2\alpha\tilde{c}_{-3} - 2c_{-1}]z^3 + [(1+|\alpha|^2)\tilde{c}_0 - \alpha\alpha\tilde{c}_{-2} - c_0]z^2 - 2\alpha\tilde{c}_{-1}z - \alpha\tilde{c}_0$ y \tilde{c}_0 es agregado al denominador para efectos de normalización.

Esto significa que podemos expresar la función de Carathéodory $\tilde{F}(z)$ asociada con $\tilde{\sigma}$ como una transformación espectral lineal de la función de Carathéodory $F(z)$ asociada con σ como sigue

$$\tilde{F}(z) = \frac{\tilde{A}(z)F(z) + \tilde{B}(z)}{\tilde{D}(z)}, \quad (4.38)$$

donde $\tilde{A}(z) = z^2$, $\tilde{B}(z) = Q(z)$, y $\tilde{D}(z) = [-\bar{\alpha}z^4 + (1 + |\alpha|^2)z^2 - \alpha]\tilde{c}_0$. Ahora, comparando $\tilde{D}(z)$ con $D(z)$ en (4.35), obtenemos

$$-\bar{\alpha}\tilde{c}_0 = -\frac{1}{4\tilde{a}_1^2}, \quad (1 + |\alpha|^2)\tilde{c}_0 = \frac{1}{2\tilde{a}_1^2} \quad \text{y} \quad -\alpha\tilde{c}_0 = -\frac{1}{4\tilde{a}_1^2}.$$

Por tanto, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha = \frac{1}{4\tilde{a}_1^2\tilde{c}_0}$. Además

$$(1 + \alpha^2) = \frac{1}{2\tilde{a}_1^2\tilde{c}_0} = 2\alpha,$$

y, como consecuencia, $\alpha = 1$.

Por otra parte, obsérvese que (4.35) se puede expresar como el producto de dos transformaciones espectrales lineales aplicadas a $F(z)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(z) &= \frac{\tilde{A}_1(z)\tilde{F}_\Omega + \tilde{B}_1(z)}{\tilde{D}_1(z)}, \\ \tilde{F}_2(z) &= \frac{\tilde{A}_2(z)\tilde{F}_1(z) + \tilde{B}_2(z)}{\tilde{D}_2(z)}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\tilde{F}_\Omega(z) = \frac{\tilde{A}_1(z)\tilde{A}_2(z)F(z) + \tilde{A}_2(z)\tilde{B}_1(z) + \tilde{D}_1(z)\tilde{B}_2(z)}{\tilde{D}_1(z)\tilde{D}_2(z)}, \quad (4.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(z)\tilde{A}_2(z) &= z^2, \\ \tilde{A}_2(z)\tilde{B}_1(z) + \tilde{D}_1(z)\tilde{B}_2(z) &= \frac{1}{4\tilde{a}_1^2}(z^2 - 1)(z^2 - 2\tilde{b}_0z + 1), \end{aligned}$$

$$\widetilde{D}_1(z)\widetilde{D}_2(z) = -\frac{1}{4\widetilde{a}_1^2}(z^2 - 1)^2.$$

Entonces podemos elegir

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_1(z) &= z, \\ \widetilde{B}_1(z) &= -\frac{2\widetilde{b}_0}{4\widetilde{a}_1^2}(z^2 - 1), \\ \widetilde{D}_1(z) &= \frac{1}{4\widetilde{a}_1^2}(z^2 - 1), \\ \widetilde{A}_2(z) &= z, \\ \widetilde{B}_2(z) &= z^2 + 1, \\ \widetilde{D}_2(z) &= 1 - z^2.\end{aligned}$$

De esta manera, (4.35) es equivalente a la composición de las siguientes transformaciones

$$\widetilde{F}_1(z) = \frac{zF(z) - \frac{2\widetilde{b}_0}{4\widetilde{a}_1^2}(z^2 - 1)}{\frac{1}{4\widetilde{a}_1^2}(z^2 - 1)}, \quad (4.40)$$

$$\widetilde{F}_2(z) = \frac{zF_1(z) + (z^2 + 1)}{(1 - z^2)}. \quad (4.41)$$

Obsérvese que $\widetilde{F}_1(0) = \widetilde{F}_2(0) = 1$, con la condición $\widetilde{b}_0 = -\frac{1}{2}$.

La anterior elección de polinomios no es única. Otra posible descomposición es

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_1(z) &= \frac{zF(z) - \frac{2\widetilde{b}_0}{4\widetilde{a}_1^2}(z^2 - 1)}{\frac{1}{2\widetilde{a}_1}(z^2 - 1)}, \\ \widetilde{F}_2(z) &= \frac{zF_1(z) + \frac{1}{2\widetilde{a}_1}(z^2 + 1)}{\frac{1}{2\widetilde{a}_1}(1 - z^2)},\end{aligned}$$

que son el mismo tipo de transformaciones (4.40) y (4.41). Otra descomposición es

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_1(z) &= \frac{4\widetilde{a}_1^2 zF(z) - (2 + \widetilde{b}_0)(z^2 - 1)}{(z + 1)^2}, \\ \widetilde{F}_2(z) &= -\frac{zF_1(z) + (z^2 - 1)}{(z - 1)^2}.\end{aligned}$$

En conclusión

Proposición 67 Sea $S^{(-1)}(x)$ la función de Stieltjes correspondientes a los polinomios anti-asociados de primera especie con respecto a una medida no trivial de probabilidad μ soportada en $[-1, 1]$. Entonces, su transformación de Szegő $\tilde{F}(z)$ es una función de Carathéodory que se obtiene como un producto de dos transformaciones de Geronimus aplicadas a $F(z)$, la función de Carathéodory correspondiente a la medida σ , seguidas por la transformación correspondiente a los polinomios asociados de segunda especie. Es decir,

$$\Sigma \mathcal{R}^{(-1)} = \mathcal{F}_\Omega \mathcal{F}_{G_2} \mathcal{F}_{G_1} \Sigma$$

4.3.3. La antitransformación de Szegő y los polinomios asociados de segunda especie en la circunferencia unidad.

Ahora consideramos la transformación correspondiente a los polinomios de segunda especie asociados al funcional \mathcal{L} . Como se vió en la Proposición 18, las correspondientes funciones de Carathéodory están relacionadas mediante

$$F_\Omega(z) = \frac{1}{F(z)}. \quad (4.42)$$

Ahora procederemos a analizar la función de Stieltjes correspondiente a los polinomios asociados de segunda especie con respecto a una medida σ , soportada en la circunferencia unidad, cuando consideramos la antiimagen a través de la transformación de Szegő.

De (4.42) y (4.9), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1-z^2}{2z} \tilde{S}(x) &= \left(\frac{1-z^2}{2z} S(z) \right)^{-1}, \\ \tilde{S}(x) &= \frac{4z^2}{(1-z^2)^2} \frac{1}{S(x)}, \end{aligned}$$

con $z = x - \sqrt{x^2 - 1}$, y $\tilde{S}(x)$ es la función de Stieltjes asociada a $F_\Omega(z)$ a través de la transformación de Szegő. Entonces

$$\tilde{S}(x) = \frac{4(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{[1 - (x + \sqrt{x^2 - 1})^2]^2} \frac{1}{S(x)} \quad (4.43)$$

$$= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} - 1}{[1 - x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}]^2} \frac{1}{S(x)} \quad (4.44)$$

$$= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} - 1}{(x^2 - 1)[x + \sqrt{x^2 - 1}]^2} \frac{1}{S(x)} \quad (4.45)$$

$$= \frac{1}{x^2 - 1} \frac{1}{S(x)}. \quad (4.46)$$

Ahora consideramos la función de Stieltjes $\tilde{S}(x)$ de los polinomios antiasociados de primera especie con respecto a una medida no trivial de probabilidad μ soportada en $[-1, 1]$ dada por (1.12). Obsérvese que, si denotamos una transformación espectral lineal de la función de Stieltjes $S(x)$ por

$$S_t(x) = A_t(x)S(x) + B_t(x),$$

con $A_t(x) = \frac{1 - x^2}{\tilde{a}_1^2}$, $B_t(x) = \frac{x - \tilde{b}_0}{\tilde{a}_1^2}$ y luego aplicamos la transformación (1.12) a $S_t(x)$, obtenemos (4.46).

Por otro lado, la transformación de Christoffel de una función de Stieltjes asociada con una medida no trivial de probabilidad μ soportada en la recta real viene dada por

$$S_C(x) = \frac{(x - \beta)S(x) - 1}{\mu_1 - \beta}. \quad (4.47)$$

Nótese que $S_t(x)$ se puede expresar como composición de dos transformaciones consecutivas de Christoffel de $S(x)$, como sigue

$$S_1(x) = A_1(x)S(x) + B_1(x), \quad (4.48)$$

$$S_t(x) = A_2(x)S_1(x) + B_2(x) \quad (4.49)$$

$$= A_1(x)A_2(x)S(x) + A_2(x)B_1(x) + B_2(x), \quad (4.50)$$

con

$$A_1(x)A_2(x) = \frac{1-x^2}{\tilde{a}_1^2}$$

y

$$A_2(x)B_1(x) + B_2(x) = \frac{x - \tilde{b}_0}{\tilde{a}_1^2}.$$

Por tanto, obtenemos $A_1(x) = \frac{x+1}{\tilde{a}_1}$, $A_2(x) = \frac{1-x}{\tilde{a}_1}$, $B_1(x) = -\frac{1}{\tilde{a}_1}$ y $B_2(x) = \frac{1 - \tilde{b}_0}{\tilde{a}_1^2}$.

Como conclusión,

Proposición 68 Sea $F_\Omega(z)$ la función de Carathéodory correspondiente a los polinomios asociados de segunda especie con respecto a una medida de probabilidad σ . Entonces, su anti-imagen mediante la transformación de Szegő es la función de Stieltjes $\tilde{S}(x) = \frac{1}{(x^2-1)S(x)}$, que se obtiene como el producto de dos transformaciones de Christoffel aplicadas a $S(x)$, seguidas por la transformación de los polinomios anti-asociados de primera especie. Es decir,

$$\Sigma^{-1}\mathcal{F}_\Omega = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}_{C_2}\mathcal{R}_{C_1}$$

4.3.4. La antitransformación de Szegő y los polinomios asociados de orden N en la circunferencia unidad.

Nuestro objetivo es estudiar la relación entre los polinomios asociados de orden N en la circunferencia unidad y la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos obtenidos en la recta real a través de la transformación inversa de Szegő. Enfocaremos nuestra atención en la función de Stieltjes correspondiente y en los parámetros de la relación de recurrencia a tres términos.

Proposición 69 Sea $\{\tilde{\Phi}_n(0)\}_{n \geq 1}$ la familia de coeficientes de Verblunsky correspondiente a los polinomios asociados de orden N con respecto a $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$. Supongamos que N es un entero par, es decir, $N = 2M$. Entonces, los parámetros de la relación de recurrencia para los correspondientes polinomios ortogonales en la recta real, $\{\tilde{a}_n\}_{n \geq 1}$ y $\{\tilde{b}_n\}_{n \geq 0}$, a través de la transformación de Szegő, están dados

por

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1^2 &= \frac{1}{2}[1 - \Phi_{2+2M}(0)][1 - \Phi_{1+2M}^2(0)], \\ \tilde{a}_n^2 &= a_{n+M}^2, \quad n \geq 2, \\ \tilde{b}_0 &= -\Phi_{1+N}(0), \\ \tilde{b}_n &= b_{n+M}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

En el caso particular $N = 2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1^2 &= \lambda a_2^2, \\ \tilde{a}_n^2 &= a_{n+1}^2, \quad n \geq 2, \\ \tilde{b}_0 &= \lambda(b_1 + \frac{1}{2}\eta b_0), \\ \tilde{b}_n &= b_{n+1}, \quad n \geq 1,\end{aligned}$$

con $\lambda = \frac{2}{1+\Phi_2(0)}$ y $\eta = 1 - \Phi_2(0)$. Esto significa que $(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ son los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios antiasociados de orden 1 de los polinomios asociados de segundo orden $\{P_n^{(2)}\}_{n \geq 0}$.

Prueba. De (4.3), para $n \geq 2$ tenemos

$$\begin{aligned}4\tilde{a}_n^2 &= [1 - \tilde{\Phi}_{2n}(0)][1 - \tilde{\Phi}_{2n-1}^2(0)][1 + \tilde{\Phi}_{2n-2}(0)] \\ &= [1 - \Phi_{2(n+M)}(0)][1 - \Phi_{2(n+M)-1}^2(0)][1 + \Phi_{2(n+M)-2}(0)] \\ &= 4a_{n+M}^2.\end{aligned}$$

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned}4\tilde{a}_1^2 &= [1 - \tilde{\Phi}_2(0)][1 - \tilde{\Phi}_1^2(0)][1 + \tilde{\Phi}_0(0)], \\ \tilde{a}_1^2 &= \frac{1}{2}[1 - \Phi_{2+N}(0)][1 - \Phi_{1+N}^2(0)].\end{aligned}$$

Por otra parte, de (4.3), para $n \geq 1$

$$\begin{aligned}2\tilde{b}_n &= \tilde{\Phi}_{2n-1}(0)[1 - \tilde{\Phi}_{2n}(0)] - \tilde{\Phi}_{2n+1}(0)[1 + \tilde{\Phi}_{2n}(0)] \\ &= \Phi_{2(n+M)-1}(0)[1 - \Phi_{2(n+M)}(0)] - \Phi_{2(n+M)+1}(0)[1 + \Phi_{2(n+M)}(0)] \\ &= 2b_{n+M},\end{aligned}$$

y, para $n = 0$,

$$\begin{aligned} 2\tilde{b}_0 &= \tilde{\Phi}_{-1}(0)[1 - \tilde{\Phi}_0(0)] - \tilde{\Phi}_1(0)[1 + \tilde{\Phi}_0(0)], \\ \tilde{b}_0 &= -\Phi_{1+N}(0). \end{aligned}$$

En el caso particular $N = 2$, obtenemos

$$\tilde{a}_1^2 = \frac{1}{2}[1 - \Phi_4(0)][1 - \Phi_3^2(0)],$$

pero también tenemos $a_2^2 = \frac{1}{4}[1 - \Phi_4(0)][1 - \Phi_3^2(0)][1 + \Phi_2(0)]$ y, por tanto,

$$\tilde{a}_1^2 = \frac{2}{1 + \Phi_2(0)} a_2^2.$$

Por otra parte, $\tilde{b}_0 = -\Phi_3(0)$ así como $b_0 = -\Phi_1(0)$, y

$$\begin{aligned} 2b_1 &= \Phi_1(0)[1 - \Phi_2(0)] - \Phi_3(0)[1 + \Phi_2(0)] \\ &= \Phi_1(0)[1 - \Phi_2(0)] + \tilde{b}_0[1 + \Phi_2(0)]. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\tilde{b}_0 = \frac{2b_1 - \Phi_1(0)[1 - \Phi_2(0)]}{1 + \Phi_2(0)}.$$

■

Ahora estudiamos la función de Stieltjes resultante para esta transformación.

Proposición 70 *La función de Stieltjes asociada con $\{\tilde{a}_n\}_{n \geq 1}$ y $\{\tilde{b}_n\}_{n \geq 0}$, cuando $N = 2$, está determinada por*

$$\tilde{S}(x) = \frac{1}{\lambda - 1} \frac{P_1(x)S(x) - 1}{[(1 - x^2)S(x) + x + b_0]}. \quad (4.51)$$

Prueba. De acuerdo con [22], tenemos

$$\tilde{S}(x) = \frac{1}{x - \tilde{b}_0 - \frac{\tilde{a}_1^2}{x - \tilde{b}_1 - \frac{\tilde{a}_2^2}{x - b_2 - \dots}}} \quad (4.52)$$

$$= \frac{1}{x - \lambda(b_1 + \frac{1}{2}\eta b_0) - \frac{\lambda a_2^2}{x - b_2 - \dots}} \quad (4.53)$$

$$= \frac{1}{x - \lambda(b_1 + \frac{1}{2}\eta b_0) - \lambda T(x)}. \quad (4.54)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x - b_0 - \frac{a_1^2}{x - b_1 - \frac{a_2^2}{x - b_2 - \dots}}} \\ &= \frac{1}{x - b_0 - \frac{a_1^2}{x - b_1 - T(x)}} \\ &= \frac{P_1^{(1)}(x) - T(x)}{P_2(x) - P_1(x)T(x)}. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$T(x) = \frac{P_2(x)S(x) - P_1^{(1)}(x)}{P_1(x)S(x) - 1}. \quad (4.55)$$

Reemplazando (4.55) en (4.54),

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x) &= \frac{1}{x - \lambda(b_1 + \frac{1}{2}\eta b_0) - \lambda \left[\frac{P_2(x)S(x) - P_1^{(1)}(x)}{P_1(x)S(x) - 1} \right]} \\ &= \frac{P_1(x)S(x) - 1}{[x - \lambda(b_1 + \frac{1}{2}\eta b_0)](P_1(x)S(x) - 1) - \lambda[P_2(x)S(x) - P_1^{(1)}(x)]} \\ &= \frac{P_1(x)S(x) - 1}{C(x)S(x) + D(x)}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C(x) &= (x - \lambda(b_1 + \frac{1}{2}\eta b_0))(x - b_0) - \lambda[(x - b_0)(x - b_1) - a_1^2] \\ &= (1 - \lambda)x^2 + [(\lambda - 1)b_0 - \frac{1}{2}\lambda\eta b_0]x + \lambda a_1^2 + \frac{1}{2}\lambda\eta b_0^2 \\ &= (1 - \lambda)(x^2 - 1), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D(x) &= -x + \lambda(x - b_1) + \lambda b_1 + \frac{1}{2}\lambda\eta b_0 \\ &= (\lambda - 1)(x + b_0), \end{aligned}$$

dado que $\eta = \frac{\lambda-1}{2\lambda}$ y $a_1^2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}(1 - b_0^2)$. De aquí se obtiene el resultado. ■

Existe otra manera de obtener (4.51) utilizando la antitransformación de Szegő de $F^{(2)}(z)$, la función de Carathéodory correspondiente a los polinomios asociados de segundo orden con respecto a $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$. De acuerdo con (1.38), $F^{(2)}(z)$ está dada por

$$F^{(2)}(z) = \frac{(\Phi_2(z) + \Phi_2^*(z))F(z) + \Omega_2(z) - \Omega_2^*(z)}{(\Phi_2(z) - \Phi_2^*(z))F(z) + \Omega_2(z) + \Omega_2^*(z)}.$$

Pero en este caso tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_2(z) &= z^2 + (\Phi_1(0) + \Phi_1(0)\Phi_2(0))z + \Phi_2(0), \\ \Phi_2^*(z) &= \Phi_2(0)z^2 + (\Phi_1(0) + \Phi_1(0)\Phi_2(0))z + 1, \\ \Omega_2(z) &= z^2 - (\Phi_1(0) - \Phi_1(0)\Phi_2(0))z - \Phi_2(0), \\ \Omega_2^*(z) &= -\Phi_2(0)z^2 - (\Phi_1(0) - \Phi_1(0)\Phi_2(0))z + 1,\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$F^{(2)}(z) = \frac{1 + \Phi_2(0) [z^2 + 2\Phi_1(0)z + 1]F(z) + z^2 - 1}{1 - \Phi_2(0) [z^2 - 1]F(z) + z^2 - 2\Phi_1(0)z + 1}.$$

Aplicando la antitransformación de Szegő, obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) &= \frac{1 + \Phi_2(0) [z + 2\Phi_1(0) + z^{-1}]S(x) + [z - z^{-1}] \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{1 - \Phi_2(0) [z - z^{-1}] \sqrt{x^2 - 1}S(x) + z - 2\Phi_1(0) + z^{-1}} \\ &= \frac{1 + \Phi_2(0) \frac{2(x + \Phi_1(0))S(x) - (2\sqrt{x^2-1}) \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{1 - \Phi_2(0) (-2\sqrt{x^2-1}) \sqrt{x^2-1}S(x) + 2(x - \Phi_1(0))}}{1 + \Phi_2(0) \frac{(x + \Phi_1(0))S(x) - 1}{1 - \Phi_2(0) (1 - x^2)S(x) + x - \Phi_1(0)}},\end{aligned}$$

que es equivalente a (4.51), ya que

$$\lambda - 1 = \frac{2}{1 + \Phi_2(0)} - 1 = \frac{1 - \Phi_2(0)}{1 + \Phi_2(0)}.$$

A continuación, consideramos la función de Carathéodory correspondiente a los polinomios asociados de primer orden ($N = 1$), que está dada por

$$F^{(1)}(z) = \frac{(\Phi_1(z) + \Phi_1^*(z))F(z) + \Omega_1(z) - \Omega_1^*(z)}{(\Phi_1(z) - \Phi_1^*(z))F(z) + \Omega_1(z) + \Omega_1^*(z)}.$$

En este caso,

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= z + \Phi_1(0), \\ \Phi_1^*(z) &= \Phi_1(0)z + 1, \\ \Omega_1(z) &= z - \Phi_1(0), \\ \Omega_1^*(z) &= -\Phi_1(0)z + 1,\end{aligned}$$

donde $\Phi_1(0) \in (-1, 1)$ es el primer parámetro de Verblunsky. Por tanto,

$$\begin{aligned}F^{(1)}(z) &= \frac{(1 + \Phi_1(0))(z + 1)F(z) + (1 + \Phi_1(0))(z - 1)}{(1 - \Phi_1(0))(z - 1)F(z) + (1 - \Phi_1(0))(z + 1)} \\ &= \left(\frac{1 + \Phi_1(0)}{1 - \Phi_1(0)} \right) \frac{(z + 1)F(z) + (z - 1)}{(z - 1)F(z) + (z + 1)},\end{aligned}$$

Para calcular $F^{(1)}(0)$, tomamos el límite cuando $z \rightarrow 0$ y obtenemos

$$\begin{aligned}F^{(1)}(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \Phi_1(0)}{1 - \Phi_1(0)} \right) \frac{(z + 1)F(z) + (z - 1)}{(z - 1)F(z) + (z + 1)} \\ &= \left(\frac{1 + \Phi_1(0)}{1 - \Phi_1(0)} \right) \frac{1 + c_{-1}}{1 - c_{-1}}.\end{aligned}$$

Luego, $F^{(1)}(z)$ normalizada es

$$F^{(1)}(z) = C_F \frac{(z + 1)F(z) + (z - 1)}{(z - 1)F(z) + (z + 1)} \quad (4.56)$$

$$= C_F \frac{F(z) + \frac{z-1}{z+1}}{\frac{z-1}{z+1}F(z) + 1}, \quad (4.57)$$

con $C_F = \frac{1-c_{-1}}{1+c_{-1}}$.

Aplicando la antitransformación de Szegő obtenemos

$$\sqrt{x^2 - 1}\tilde{S}(x) = C_F \frac{\sqrt{x^2 - 1}S(x) - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x+1}}{-\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x+1}\sqrt{x^2 - 1}S(x) + 1}, \quad (4.58)$$

$$\tilde{S}(x) = C_F \frac{S(x) - \frac{1}{x+1}}{-(x-1)S(x) + 1} \quad (4.59)$$

$$= \frac{C_F}{x+1} \frac{(x+1)S(x) - 1}{(1-x)S(x) + 1}. \quad (4.60)$$

Observación 71 De la doble iteración de (4.60), deducimos (4.51).

(4.60) puede deducirse de la aplicación de las siguientes transformaciones a $S(x)$

$$S_1(x) = (1 - x)S(x) + 1, \quad (4.61)$$

$$S_2(x) = \frac{(x + 1)S_1(x) - 2}{S_1(x)}, \quad (4.62)$$

$$S_3(x) = \frac{S_2(x)}{1 - x}, \quad (4.63)$$

$$S_4(x) = \tilde{S}(x) = \frac{C_F S_3(x)}{(x + 1)}, \quad (4.64)$$

donde (4.61) es una transformación de Christoffel, (4.62) es la transformación correspondiente a los polinomios asociados de primera especie en la recta real, y (4.63) y (4.64) son transformaciones de Geronimus (ver [13] y [103]).

En otras palabras,

$$\Sigma^{-1}\mathcal{F}^{(1)}(F) = \mathcal{R}_{G_2}\mathcal{R}_{G_1}\mathcal{R}^1\mathcal{R}_C(\Sigma^{-1}F).$$

4.3.5. La antitransformación de Szegő y los polinomios anti-asociados de orden N en la circunferencia unidad.

Ahora estudiamos la relación entre los polinomios anti-asociados de orden N en la circunferencia unidad y la transformación correspondiente obtenida en la recta real utilizando la antitransformación de Szegő.

Proposición 72 Sea $\{\hat{\Phi}_n(0)\}_{n \geq 1} = \{v_j\}_{j=1}^N \cup \{\Phi_j(0)\}_{j=1}^\infty$ la familia de parámetros de Verblunsky correspondiente a los polinomios anti-asociados de orden N con respecto a $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$. Sea N un entero par, es decir, $N = 2M$. Entonces, los parámetros de la relación de recurrencia para los correspondientes polinomios en la recta

real, $\{\hat{a}_n\}_{n \geq 1}$ y $\{\hat{b}_n\}_{n \geq 0}$, a través de la transformación de Szegő, son

$$\begin{aligned}\hat{a}_1^2 &= \frac{1}{2}(1 - \nu_2)(1 - \nu_1^2), \\ \hat{a}_n^2 &= \frac{1}{4}(1 - \nu_{2n})(1 - \nu_{2n-1}^2)(1 + \nu_{2n-2}), \quad 2 \leq n \leq M, \\ \hat{a}_{M+1}^2 &= \frac{1}{4}(1 - \Phi_{2(n-M)}(0))(1 - \Phi_{2(n-M)-1}^2(0))(1 + \nu_N), \\ \hat{a}_n^2 &= a_{n-M}^2, \quad n > M + 1, \\ \hat{b}_0 &= -\nu_1, \\ \hat{b}_n &= \frac{1}{2}[\nu_{2n-1}(1 - \nu_{2n}) - \nu_{2n+1}(1 + \nu_{2n})], \quad 1 \leq n < M, \\ \hat{b}_M &= \frac{1}{2}[\nu_{2M-1}(1 - \nu_N) - \Phi_1(0)(1 + \nu_N)], \\ \hat{b}_n &= b_{n-M}, \quad n > M.\end{aligned}$$

Además, en el caso particular $N = 2$,

$$\begin{aligned}\hat{a}_1^2 &= \frac{1}{2}(1 - \nu_2)(1 - \nu_1^2), \\ \hat{a}_2^2 &= \frac{1}{4}(1 - \Phi_2(0))(1 - \Phi_1^2(0))(1 + \nu_2) = \frac{1}{2}a_1^2(1 + \nu_2), \\ \hat{a}_n^2 &= a_{n-1}^2, \quad n \geq 3, \\ \hat{b}_0 &= -\nu_1, \\ \hat{b}_1 &= \frac{1}{2}[\nu_1(1 - \nu_2) + b_0(1 + \nu_2)], \\ \hat{b}_n &= b_{n-1}, \quad n \geq 2,\end{aligned}$$

Esto significa que (\hat{a}_n, \hat{b}_n) son los coeficientes de la relación de recurrencia a tres términos para los polinomios antiasociados de orden 2 de los polinomios asociados de orden 1, $\{P_n^{(1)}\}_{n \geq 0}$.

Prueba. De (4.3), para $n > M + 1$, tenemos

$$\begin{aligned}4\hat{a}_n^2 &= [1 - \hat{\Phi}_{2n}(0)][1 - \hat{\Phi}_{2n-1}^2(0)][1 + \hat{\Phi}_{2n-2}(0)] \\ &= [1 - \Phi_{2(n-M)}(0)][1 - \Phi_{2(n-M)-1}^2(0)][1 + \Phi_{2(n-M)-2}(0)] \\ &= 4a_{n-M}^2.\end{aligned}$$

Para $n = M + 1$,

$$\begin{aligned} 4\hat{a}_n^2 &= [1 - \hat{\Phi}_{2n}(0)][1 - \hat{\Phi}_{2n-1}^2(0)][1 + \hat{\Phi}_{2n-2}(0)] \\ &= [1 - \Phi_{2(n-M)}(0)][1 - \Phi_{2(n-M)-1}^2(0)][1 + \nu_N], \end{aligned}$$

para $2 \leq n \leq M$,

$$\begin{aligned} 4\hat{a}_n^2 &= [1 - \hat{\Phi}_{2n}(0)][1 - \hat{\Phi}_{2n-1}^2(0)][1 + \hat{\Phi}_{2n-2}(0)] \\ &= [1 - \nu_{2n}][1 - \nu_{2n-1}^2][1 + \nu_{2n-2}], \end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned} 4\hat{a}_1^2 &= [1 - \hat{\Phi}_2(0)][1 - \hat{\Phi}_1^2(0)][1 + \hat{\Phi}_0(0)], \\ \hat{a}_1^2 &= \frac{1}{2}[1 - \nu_2][1 - \nu_1^2]. \end{aligned}$$

Por otro lado, de (4.3), para $n > M$ obtenemos

$$\begin{aligned} 2\hat{b}_n &= \hat{\Phi}_{2n-1}(0)[1 - \hat{\Phi}_{2n}(0)] - \hat{\Phi}_{2n+1}(0)[1 + \hat{\Phi}_{2n}(0)] \\ &= \Phi_{2(n-M)-1}(0)[1 - \Phi_{2(n-M)}(0)] - \Phi_{2(n-M)+1}(0)[1 + \Phi_{2(n-M)}(0)] \\ &= 2b_{n-M}. \end{aligned}$$

Para $n = M$,

$$\begin{aligned} 2\hat{b}_n &= \hat{\Phi}_{2n-1}(0)[1 - \hat{\Phi}_{2n}(0)] - \hat{\Phi}_{2n+1}(0)[1 + \hat{\Phi}_{2n}(0)] \\ &= \nu_{N-1}[1 - \nu_N] - \Phi_1(0)[1 + \nu_N]. \end{aligned}$$

Para $1 \leq n < M$,

$$\begin{aligned} 2\hat{b}_n &= \hat{\Phi}_{2n-1}(0)[1 - \hat{\Phi}_{2n}(0)] - \hat{\Phi}_{2n+1}(0)[1 + \hat{\Phi}_{2n}(0)] \\ &= \nu_{2n-1}[1 - \nu_{2n}] - \nu_{2n-1}[1 + \nu_{2n}]. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} 2\hat{b}_0 &= \hat{\Phi}_{-1}(0)[1 - \hat{\Phi}_0(0)] - \hat{\Phi}_1(0)[1 + \hat{\Phi}_0(0)], \\ \hat{b}_0 &= -\nu_1. \end{aligned}$$

Los valores para el caso particular $N = 2$ se obtienen directamente de las expresiones anteriores. ■

Proposición 73 *La función de Stieltjes asociada con $\{\hat{a}_n\}_{n \geq 1}$ y $\{\hat{b}_n\}_{n \geq 0}$, cuando $N = 2$, está dada por*

$$\hat{S}(x) = \frac{[K(x - \hat{b}_1) - P_1(x)]S(x) + 1}{[KP_2^{(-2)} - P_1^{(-1)}(x)P_1(x)]S(x) + P_1^{(-1)}(x)}, \quad (4.65)$$

con $K = \frac{2}{1+\nu_2}$.

Prueba. De acuerdo con [22], tenemos

$$\hat{S}(x) = \frac{1}{x - \hat{b}_0 - \frac{\hat{a}_1^2}{x - \hat{b}_1 - \frac{\hat{a}_2^2}{x - \hat{b}_2 - \dots}}} \quad (4.66)$$

$$= \frac{1}{x - \hat{b}_0 - \frac{\hat{a}_1^2}{x - \hat{b}_1 - \frac{1}{2}(1+\nu_2)T(x)}}. \quad (4.67)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{x - b_0 - \frac{a_1^2}{x - b_1 - \frac{a_2^2}{x - b_2 - \dots}}} \\ &= \frac{1}{x - b_0 - T(x)} \\ &= \frac{1}{P_1(x) - T(x)}. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$T(x) = \frac{P_1(x)S(x) - 1}{S(x)}. \quad (4.68)$$

Usando (4.68) en (4.67), obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{S}(x) &= \frac{x - \hat{b}_1 - \frac{1}{2}(1 + \nu_2)T(x)}{(x - \hat{b}_0)[x - \hat{b}_1 - \frac{1}{2}(1 + \nu_2)T(x)] - \hat{a}_1^2} \\ &= \frac{x - \hat{b}_1 - \frac{1}{2}(1 + \nu_2) \left[\frac{P_1(x)S(x) - 1}{S(x)} \right]}{(x - \hat{b}_0)[x - \hat{b}_1 - \frac{1}{2}(1 + \nu_2) \left[\frac{P_1(x)S(x) - 1}{S(x)} \right]] - \hat{a}_1^2} \\ &= \frac{[x - \hat{b}_1 - \frac{1}{2}(1 + \nu_2)P_1(x)]S(x) + \frac{1}{2}(1 + \nu_2)}{[(x - \hat{b}_0)(x - \hat{b}_1) - \hat{a}_1^2 - \frac{1}{2}(1 + \nu_2)(x - \hat{b}_0)P_1(x)]S(x) + \frac{1}{2}(1 + \nu_2)(x - \hat{b}_0)}, \end{aligned}$$

que es, esencialmente, (4.65). ■

Como en el caso de los polinomios asociados, también podemos deducir la función de Stieltjes resultante utilizando la antitransformación de Szegő de $F^{(-2)}(z)$. En este caso obtenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_2(z) &= z^2 + (\nu_1 + \nu_1\nu_2)z + \nu_2, \\ \widetilde{\Phi}_2^*(z) &= \nu_2z^2 + (\nu_1 + \nu_1\nu_2)z + 1, \\ \widetilde{\Omega}_2(z) &= z^2 - (\nu_1 - \nu_1\nu_2)z - \nu_2, \\ \widetilde{\Omega}_2^*(z) &= -\nu_2z^2 - (\nu_1 - \nu_1\nu_2)z + 1,\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}F^{(-2)}(z) &= \frac{[(1 - \nu_2)z^2 - 2(\nu_1 - \nu_1\nu_2)z + 1 - \nu_2]F(z) - (1 + \nu_2)z^2 + 1 + \nu_2}{[(\nu_2 - 1)z^2 + 1 - \nu_2]F(z) + (1 + \nu_2)z^2 + 2(\nu_1 + \nu_1\nu_2)z + \nu_2 + 1} \\ &= \frac{(1 - \nu_2)(z^2 - 2\nu_1z + 1)F(z) - (1 + \nu_2)(z^2 - 1)}{-(1 - \nu_2)(z^2 - 1)F(z) + (1 + \nu_2)(z^2 + \nu_1z + 1)}.\end{aligned}$$

Aplicando la antitransformación de Szegő, obtenemos

$$\hat{S}(x) = \frac{(1 - \nu_2)(z - 2\nu_1 + z^{-1})S(x) - (1 + \nu_2)(z - z^{-1})\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}{-(1 - \nu_2)(z - z^{-1})\sqrt{x^2 - 1}S(x) + (1 + \nu_2)(z + 2\nu_1 + z^{-1})} \quad (4.69)$$

$$= \frac{2(1 - \nu_2)(x - \nu_1)S(x) + (1 + \nu_2)(2\sqrt{x^2 - 1})\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}{(1 - \nu_2)(2\sqrt{x^2 - 1})\sqrt{x^2 - 1}S(x) + 2(1 + \nu_2)(x + \nu_1)} \quad (4.70)$$

$$= \frac{\tilde{K}(x - \nu_1)S(x) + 1}{\tilde{K}(x^2 - 1)S(x) + (x + \nu_1)}, \quad (4.71)$$

donde $\tilde{K} = \frac{(1 - \nu_2)}{(1 + \nu_2)}$. No es difícil mostrar que (4.71) es equivalente a (4.65).

Ahora estudiamos el caso $N = 1$. En esta situación se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_1(z) &= z + \nu_1, \\ \widetilde{\Phi}_1^*(z) &= \nu_1z + 1, \\ \widetilde{\Omega}_1(z) &= z - \nu_1, \\ \widetilde{\Omega}_1^*(z) &= -\nu_1z + 1.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$F^{(-1)}(z) = \frac{(1 - \nu_1)(z + 1)F(z) - (1 + \nu_1)(z - 1)}{(\nu_1 - 1)(z - 1)F(z) + (1 + \nu_1)(z + 1)}.$$

Obsérvese que $F^{(-1)}(0) = 1$. Aplicando la transformación de Szegő, obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1}\hat{S}(x) &= \frac{(1 - \nu_1)(z + 1)\sqrt{x^2 - 1}S(x) - (1 + \nu_1)(z - 1)}{(\nu_1 - 1)(z - 1)\sqrt{x^2 - 1}S(x) + (1 + \nu_1)(z + 1)}, \\ \hat{S}(x) &= \frac{(1 - \nu_1)S(x) - (1 + \nu_1)\frac{z-1}{z+1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{(1 - \nu_1)\frac{z-1}{z+1}\sqrt{x^2 - 1}S(x) + (1 + \nu_1)} \\ &= \frac{\hat{K}(x + 1)S(x) + 1}{\hat{K}(1 - x^2)S(x) + x + 1} \\ &= \frac{1}{x + 1} \frac{\hat{K}(x + 1)S(x) + 1}{\hat{K}(1 - x)S(x) + 1}, \end{aligned}$$

donde $\hat{K} = \frac{1-\nu_1}{1+\nu_1}$.

Problemas abiertos.

Durante el estudio de los problemas abordados en la presente memoria, han surgido algunos nuevos problemas que deseamos analizar en el futuro.

1. La representación matricial del operador de multiplicación para medidas soportadas en la circunferencia unidad da lugar a una matriz de Hessenberg cuyo carácter unitario depende del hecho de que la medida no pertenezca a la clase de Szegő. Una nueva representación matricial ha sido desarrollada recientemente por M. J. Cantero, L. Moral, y L. Velázquez (ver [18]) de modo que elimina esta restricción en la medida utilizando ciertas bases ortogonales en el espacio de los polinomios de Laurent. De esta forma, el operador de multiplicación puede ser representado por una matriz pentadiagonal denominada matriz CMV. Pretendemos estudiar las transformaciones espectrales lineales desde esta nueva perspectiva y analizar cómo afectan a la correspondiente matriz CMV.
2. Es conocido que las transformaciones espectrales lineales aplicadas a funciones de Stieltjes asociadas a una medida soportada en la recta real forman un grupo no conmutativo, cuyos generadores son las transformaciones de Christoffel y Geronimus (ver [103]), definidas en la Sección (1.1.2). Para el caso de transformaciones espectrales lineales de funciones de Carathéodory asociadas a medidas soportadas en la circunferencia unidad, este es un problema abierto. Conjeturamos que dichas transformaciones forman un grupo

que puede generarse de igual manera a partir de la transformaciones de Christoffel y Geronimus.

3. Las transformaciones espectrales racionales aplicadas a funciones de Stieltjes forman también un grupo no conmutativo (ver [103]) que está generado por las transformaciones correspondientes a los polinomios asociados y antiasociados en la recta real (ver Sección (1.1.3), así como las transformaciones espectrales lineales de Christoffel y Geronimus). Para el caso de la circunferencia unidad, este es un problema abierto. Nuestra conjetura es que las transformaciones espectrales racionales a funciones de Carathéodory constituyen un grupo generado por las transformaciones correspondientes a los polinomios asociados y antiasociados en la circunferencia unidad, la transformación de Aleksandrov, y las transformaciones de Christoffel y Geronimus (ver Sección (1.2.3)).
4. En el Capítulo 2 se han analizado las transformaciones espectrales lineales tales que las correspondientes medidas satisfacen $d\tilde{\sigma} = \Re P(z)d\sigma$, dando condiciones necesarias y suficientes para que el funcional lineal asociado a $\tilde{\sigma}$ sea cuasi-definido. Es natural plantear la transformación inversa y las condiciones necesarias y suficientes para el carácter cuasi-definido del nuevo funcional.
5. En las últimas décadas se ha estudiado la relación existente entre los polinomios ortogonales en la recta real y las redes de Toda y cadenas no lineales similares. Un problema interesante es estudiar si puede desarrollarse una teoría similar para polinomios ortogonales en la circunferencia unidad, cuestión que comenzó a abordarse en la década de los noventa en [5], [28]. Más recientemente, otro avance en esta dirección lo constituyen los trabajos realizados en [48], [78], [93], donde se consideran las ecuaciones

$$\Phi'_n(0, t) = (1 - |\Phi_n(0, t)|^2)(\Phi_{n+1}(0, t) - \Phi_{n-1}(0, t)),$$

denominadas *flujos de Schur*, donde la medida de ortogonalidad asociada con los coeficientes de Verblunsky $\Phi_n(0, t)$ resulta ser una transformación del tipo

$$d\sigma(z, t) = e^{t(z+z^{-1})}d\sigma(z, 0).$$

Otro enfoque es presentado en [79], donde se analiza la conexión entre polinomios ortogonales en la circunferencia unidad y sistemas integrables (sistemas de Ablowitz-Ladik y flujos de Schur), en el contexto de las matrices CMV.

Nos planteamos estudiar los flujos de Schur correspondientes a perturbaciones de medidas del tipo $d\tilde{\sigma}(z, t) = |z - t|^2 d\sigma(z, 0)$ y $d\tilde{\sigma}(z, t) = d\sigma(z, 0) + m(t)\delta(z - e^{i\theta_0})$, con $m(0) = 0$, que corresponden a transformaciones del tipo Christoffel y Uvarov, respectivamente.

Bibliografía

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke, *Darboux transforms on band matrices, weights, and associated polynomials*, Int. Math. Res. Notices **18** (2001), 935–984.
- [2] R. Alvarez-Nodarse and F. Marcellán, *On the Favard Theorem and its extensions*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 231–254.
- [3] M. Alfaro, *The multiplication operator in the theory of orthogonal polynomials on the unit circle*, Proc. First Spanish Portuguese Math. Conf. CSIC. Madrid. (1977). 13–21.
- [4] M. Alfaro, M. J. Cantero, and L. Moral, *Semiorthogonal functions and orthogonal polynomials on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 3–14.
- [5] G. S. Ammar and W. B. Gragg, *Schur flows for orthogonal Hessenberg matrices*, En Hamiltonian and Gradient Flows, Algorithms and Control. Fields Inst. Commun., **3** (1994). Amer. Math. Soc. Providence, RI, 27–34.
- [6] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, J. García-Amor, and F. Marcellán, *New quadrature rules for Bernstein measures on the interval $[-1, 1]$* , Electr. Trans. on Numer. Anal. *In press*.
- [7] S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, Math. Zeit. **29** (1929), 730–736.

- [8] A. Branquinho, L. Golinskii, and F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and rational modification of the Lebesgue measure on the unit circle. An inverse problem*, Complex Variables, Theory Appl. **38** (1999), 64–83.
- [9] C. Brezinski, *Formal orthogonality on an algebraic curve*, Annals Numer. Math. **2** (1995), 21–33.
- [10] M. I. Bueno, *La transformación de Darboux y el problema de simetrización en polinomios ortogonales*. Tesis Doctoral. Universidad Carlos III de Madrid, 2004.
- [11] M. I. Bueno and F. M. Dopico, *Stability and sensitivity of tridiagonal LU factorization without pivoting*, BIT **44** (2004), 651–673.
- [12] M. I. Bueno and F. M. Dopico, *Stability and sensitivity of Darboux transformation without parameter*, Electr. Trans. on Numer. Anal. **18** (2004), 101–136.
- [13] M. I. Bueno and F. Marcellán, *Darboux transformations and perturbation of linear functionals*, Linear Algebra Appl. **384** (2004), 215–242.
- [14] M. I. Bueno and F. Marcellán, *Polynomial perturbations of bilinear functionals and Hessenberg matrices*, Linear Algebra Appl. **414** (2006), 64–83.
- [15] M. Buhmann and A. Iserles, *On orthogonal polynomials transformed by the QR algorithm*, J. Comput. Appl. Math. **43** (1992), 117–134.
- [16] A. Bultheel, L. Daruis, and P. González-Vera, *A connection between quadrature formulas on the unit circle and the interval $[-1, 1]$* , J. Comput. Appl. Math. **132** (2001), 1–14.
- [17] M. J. Cantero, *Polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. Modificaciones de los parámetros de Schur*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, 1997.
- [18] M.J. Cantero, L. Moral, and L. Velazquez, *Five diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle*, Linear Algebra Appl. **362** (2003), 29–56.
- [19] M.J. Cantero, L. Moral, and L. Velazquez, *Minimal representations of unitary operators and orthogonal polynomials*, Linear Algebra Appl. **408** (2005), 40–65.

- [20] M.J. Cantero, L. Moral, and L. Velazquez, *Measures on the unit circle and unitary truncations of unitary operators*, J. Approx. Theory **139** (2006), 430–468.
- [21] G. Chen and Z. Yang, *Bezoutian Representation via Vandermonde Matrices*, Linear Algebra Appl. **186** (1993), 37–44.
- [22] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [23] C.W. Cryer, *Rodrigues' formula and the classical orthogonal polynomials*, Bull. Un. Mat. Ital. **25** (1970), 1–11.
- [24] L. Darius, P. González-Vera, and F. Marcellán, *Gaussian quadrature formulae on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math. **140** (2002), 159–183.
- [25] L. Daruis, J. Hernández, and F. Marcellán, *Spectral transformations for Hermitian Toeplitz matrices*, J. Comput. Appl. Math. **202** (2007), 155–176.
- [26] J. J. Duistermaat and F. A. Grünbaum, *Differential equations in the spectral parameter*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), 177–240.
- [27] T. Erdélyi, P. Nevai, and J. Zhang, *A simple proof of "Favard's theorem" on the unit circle*, Att. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **XXIX** (1991), 41–46.
- [28] L. Faybusovich and M. Gekhtman, *On Schur flows*, J. Phys. A: Math. Gen., **32** (1999), 4671–4680.
- [29] P. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Pergamon Press, Oxford-New York, 1971.
- [30] P. García-Lázaro, *Distribuciones y polinomios ortogonales*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, 1991.
- [31] P. García-Lázaro and F. Marcellán, *On zeros of regular orthogonal polynomials on the unit circle*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), 287–298.
- [32] P. García-Lázaro, F. Marcellán, and C. Tasis, *On a Szegő result: Generating sequences of orthogonal polynomials on the unit circle*, En Orthogonal Polynomials and Their Applications, C. Brezinski et al. Editors. IMACS Annals Comput. and Appl. Math. **9**. J. C. Baltzer, Basel, 1991. 271–274.

- [33] L. Garza, J. Hernández, and F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and measures on the unit circle. The Geronimus transformations*, J. Comput. Appl. Math. (2008). En prensa.
- [34] L. Garza, J. Hernández, and F. Marcellán, *Spectral transformations of measures supported on the unit circle and the Szegő transformation*, Numer. Algorithms **49** (2008). 169–185.
- [35] L. Garza and F. Marcellán, *Szegő transformations and rational spectral transformations for associated polynomials*, J. Comput. Math. Appl. (2008). En prensa.
- [36] L. Garza and F. Marcellán, *Szegő transformations and Nth order associated polynomials on the unit circle*, Comput. Math. with Appl. (2008). Enviado.
- [37] L. Garza and F. Marcellán, *Verblunsky parameters and linear spectral transformations*, Meth. Appl. Anal. (2008). Enviado.
- [38] L. Garza and F. Marcellán, *Linear spectral transformations and Laurent polynomials*, Mediterr. J. Math. **6** (2009). In press.
- [39] Ya. L. Geronimus, *Certain limiting properties of orthogonal polynomials*, Vest. Kharkov. Gos. Univ. **14** (1966), 40–50. (En ruso).
- [40] Ya. L. Geronimus, *On a problem of G. Szegő, M. Kac, C. Baxter, and I. Hirschman*, Math. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 289–304. (En Ruso).
- [41] Ya. L. Geronimus, *On polynomials orthogonal with regard to a given sequence of numbers*, Comm. Inst. Sci. Math. Mec. Univ. Kharkoff **4**, (1940), 3–18. (En ruso).
- [42] Ya. L. Geronimus, *On polynomials orthogonal on the circle, on trigonometric moment problem, and on allied Carathéodory and Schur functions*, Mat. Sb. **15** (1944), 99–130. (En ruso).
- [43] Ya. L. Geronimus, *On the trigonometric moment problem*, Ann. of Math. **47** (1946), 742–761.
- [44] Ya. L. Geronimus, *Orthogonal Polynomials: Estimates, asymptotic formulas, and series of polynomials orthogonal on the unit circle and on an interval*, Consultants Bureau, New York, 1961.

- [45] Ya. L. Geronimus, *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*, in Series and Approximation, Amer. Math. Soc. Transl. Series, Vol 3(1962), Amer. Math. Soc. Providence RI, 1–79.
- [46] E. Godoy and F. Marcellán, *An analogue of the Christoffel formula for polynomial modification of a measure on the unit circle*, Boll. Un. Mat. Ital. **5-A** (1991), 1–12.
- [47] E. Godoy and F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and rational modifications of measures*, Canad. J. Math. **45** (1993), 930–943.
- [48] L. Golinskii, *Schur flows and orthogonal polynomials on the unit circle*, Mat. Sbornik, **197** (2006), 41–63.
- [49] L. Golinski, P. Nevai, and W. Van Assche *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle*, J. Approx. Theory **83** (1995), 392–422.
- [50] L. Golinski, P. Nevai, and W. Van Assche *Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, II*, J. Approx. Theory **96** (1999), 1–32.
- [51] W. B. Gragg, *The QR algorithm for unitary Hessenberg matrices*, J. Comput. Appl. Math. **16** (1986), 1–8.
- [52] U. Grenander and G. Szegő, *Toeplitz Forms and their Applications*, University of California Press, Berkeley 1958, Chelsea, New York, 2nd edition, 1984.
- [53] F. A. Grünbaum and L. Haine, *A theorem of Bochner, revisited*, En Algebraic aspects of integrable systems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **26**, Birkhauser, Boston, MA (1997), 143–172.
- [54] F. A. Grünbaum and L. Haine, *Bispectral Darboux transformations: an extension of the Krall polynomials*, Internat. Math. Res. Notices **8** (1997), 359–392.
- [55] F. A. Grünbaum, L. Haine, and E. Horozov, *Some functions that generalize the Krall-Laguerre polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **106** (1999), 271–297.
- [56] F. A. Grünbaum and M. Yakimov, *Discrete bispectral Darboux transformations from Jacobi operators*, Pacific J. Math **204** (2002), 395–431.

- [57] J. Hernández, *Polinomios ortogonales, funciones de transferencia y transformaciones espectrales*. Tesis Doctoral. Universidad Carlos III de Madrid, 2007.
- [58] R. Horn and C. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [59] M. E. H. Ismail and X. Li, *On sieved orthogonal polynomials IX: Orthogonality on the unit circle*, Pacific J. Math. **153** (1992), 289–297.
- [60] M. E. H. Ismail and R. W. Ruedemann, *Relation between polynomials orthogonal on the unit circle with respect to different weights*, J. Approx. Theory **71** (1992), 39–60.
- [61] M. E. H. Ismail and N. S. Witte, *Discriminants and Functional Equations for Polynomials Orthogonal on the Unit Circle*, J. Approx. Theory **110** (2001), 200–228.
- [62] W. B. Jones, O. Njåstad, and W. J. Thron. *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 113–152.
- [63] T. Kailath and B. Porat, *State-space generators for orthogonal polynomials*, En Prediction Theory and Harmonic Analysis, V. Mandrekar and H. Salehi, Editors. The Pesi Massani Volume, North-Holland, Amsterdam, 1983. 131–163.
- [64] D.H. Kim, and K. H. Kwon, *Quasi-definiteness of generalized Uvarov transforms of moment functionals*, J. Appl. Math. **1** (2001), 69–90.
- [65] A. Klein and P. Spreij, *The Bézoutian, state space realizations and Fisher's information matrix of an ARMA process*, Linear Algebra Appl. **416** (2006), 160–174.
- [66] H. Lev-Ari, Y. Bistritz and T. Kailath, *Generalized Bézoutians and families of efficient root-location procedures*, IEEE Transact. Circuits and Systems, **28** (1991), 170–186.
- [67] X. Li and F. Marcellán, *Representation of Orthogonal Polynomials for modified measures*, Comm. Anal. Theory of Cont. Fract. **7** (1999), 9–22.

- [68] F. Marcellán, *Polinomios ortogonales no estándar. Aplicaciones en Análisis Numérico y Teoría de Aproximación*, Rev. Acad. Colomb. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 30 (117) (2006), 563-579.
- [69] F. Marcellán and M. Alfaro *Recent trends in orthogonal polynomials on the unit circle*, En *Orthogonal Polynomials and Their Applications*, C. Brezinski et al. Editors. IMACS Annals Comput. and Appl. Math. **9**. J. C. Baltzer, Basel, 1991. 3–14.
- [70] F. Marcellán and A. Cachafeiro *Orthogonal polynomials and jump modifications*, En *Orthogonal Polynomials and their Applications*, M. Alfaro et al. Editors. Lect. Notes in Math. 1329, Springer Verlag, Berlin, 1998. 236–240.
- [71] F. Marcellán, A. Branquinho, and J.C. Petronilho *Classical orthogonal polynomials: A functional approach*, Acta Appl. Math. **34** (1994), 283–303.
- [72] F. Marcellán and J. Hernández, *Geronimus spectral transforms and measures on the complex plane*, J. Comput. Appl. Math. **217** (2008), 441–456.
- [73] F. Marcellán and J. Hernández, *Christoffel transforms and Hermitian linear functionals*, Mediterr. J. Math. **2** (2005), 451–458.
- [74] F. Marcellán, F. Peherstorfer, and R. Steinbauer *Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials I*, Adv. in Comput. Math. **5** (1996), 281–295.
- [75] F. Marcellán, F. Peherstorfer, and R. Steinbauer *Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials II*, Adv. in Comput. Math. **7** (1997), 401–428.
- [76] F. Marcellán and G. Sansigre, *Symmetrization, quadratic decomposition and cubic transformations of orthogonal polynomials on the unit circle*, En *Orthogonal Polynomials and Their Applications*, C. Brezinski et al. Editors IMACS Annals Comput. and Appl. Math. **9**. J. C. Baltzer, Basel, 1991. 341–345.
- [77] J. M. Montaner, *Matrices Toeplitz banda y polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza, 1992.
- [78] A. Mukaihira and Y. Nakamura, *Schur flow for orthogonal polynomials on the unit circle and its integrable discretization*, J. Comput. Appl. Math. **139** (2002), 75–94.

- [79] I. Nenciu, *Lax pairs for the Ablowitz-Ladik system via orthogonal polynomials on the unit circle*. Doctoral Dissertation. California Institute of Technology, (2005).
- [80] P. Nevai, *Orthogonal Polynomials, measures and recurrences on the unit circle*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), 175–189.
- [81] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics: An Unified Approach*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.
- [82] E.M. Nikishin, *An estimate for orthogonal polynomials*, Acta Sci. Math. (Szeged) **48** (1985), 395–399. (En ruso).
- [83] F. Peherstorfer, *A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials*, Constr. Approx. **12** (1996), 161–185.
- [84] F. Peherstorfer, *Finite perturbations of orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **44** (1992), 275–302.
- [85] F. Peherstorfer, *Mass-points of orthogonality measures on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math. **5** (1999), 279–308.
- [86] F. Peherstorfer and R. Steinbauer, *Characterization of orthogonal polynomials with respect to a functional*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 339–355.
- [87] F. Peherstorfer and R. Steinbauer, *Perturbation of orthogonal polynomials on the unit circle, a survey*, En Orthogonal polynomials on the unit circle. Theory and Applications. Proceedings IWOP94. M. Alfaro et al Editors. Leganés, 1994.
- [88] V. Pták and Z. Vavřín, *Bézout, Hankel, and Loewner Matrices*, Linear Algebra Appl. **184** (1993), 13–36.
- [89] A. Ronveaux and W. Van Assche *Upward extension of the Jacobi matrix for orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **86** (1996), 335–357.
- [90] E. Routh, *On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order*, Proc. London. Math. Soc. **16** (1884), 245–261.
- [91] B. Simon, *OPUC on one foot*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 431–460.

- [92] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle*, 2 vols. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Series, vol. 54, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2005.
- [93] B. Simon, *Zeros of OPUC and long time asymptotics of Schur and related flows*, *Inv. Prob. Imag.* **1** (2007), 189–215.
- [94] V. Spiridonov, L. Vinet, and A. Zhedanov, *Spectral transformations, self-similar reductions and orthogonal polynomials*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997), 7621–7637.
- [95] C. Suárez, *Polinomios ortogonales relativos a modificaciones de funcionales regulares y hermitianos*. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo, 1993.
- [96] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Series. vol 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 4th edition, 1975.
- [97] V. B. Uvarov *The connection between systems of polynomials that are orthogonal with respect to different distribution functions*, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.* **9** (1969), 1253–1262.
- [98] W. Van Assche, *Orthogonal polynomials, associated polynomials and functions of the second kind*, *J. Comput. Appl. Math.* **37** (1991), 237–249.
- [99] L. Vinet and A. Zhedanov, *An integrable system connected with the Uvarov-Chihara problem for orthogonal polynomials*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 9579–9591.
- [100] L. Vinet and A. Zhedanov, *Szegő polynomials on the real axis*, *Integral Transf. and Special Func.* **8** (1999), 149–164.
- [101] M. L. Wong, *Generalized bounded variation and inserting point masses*, *Constr. Approx.* (2008). En prensa.
- [102] G. J. Yoon, *Darboux transforms and orthogonal polynomials*, *Bull. Korean Math. Soc.* **39** (2002), 359–376.
- [103] A. Zhedanov, *Rational spectral transformations and orthogonal polynomials*, *J. Comput. Appl. Math.* **85** (1997), 67–83.

Índice alfabético

- coeficientes de Verblunsky, 21, 22, 50, 62, 90, 101, 113
- fórmula de Christoffel-Darboux, 24
- factorización LU, 112
- función
 - de Carathéodory, 26, 48, 59, 84, 100, 114, 115, 117, 118, 127, 130, 134, 140
 - de Christoffel, 23
 - de segunda especie, 25
 - de Stieltjes, 14, 16, 17, 114, 116, 118, 127, 135, 138, 145
 - de Szegő, 23
 - hipergeométrica, 18, 19
- funcional lineal, 9, 20
 - cuasi-definido, 10, 20
 - definido positivo, 11, 21
- matriz
 - de Hessenberg, 26, 36, 37, 41, 58, 76, 88, 97
 - de Jacobi, 13
 - mónica de Jacobi, 11
 - CMV, 32
 - de Hankel, 10
 - de Toeplitz, 20
- medida
 - absolutamente continua, 22
 - de probabilidad, 22
 - de variación acotada, 23
 - positiva de Borel, 11, 14, 21, 111
 - singular, 23
- momentos, 9, 20, 26
- polinomios ortogonales
 - clásicos, 17
 - en la circunferencia unidad
 - mónicos, 21
 - ortonormales, 21
 - en la recta real
 - mónicos, 10
 - ortonormales, 11
- relaciones de recurrencia, 10, 12, 21
- representación matricial, 11, 12
- transformación de Szegő, 111
- transformaciones espectrales lineales
 - en la circunferencia unidad
 - Christoffel, 34, 40, 116
 - Geronimus, 34, 71, 119

- parte real, 55
- Uvarov, 34, 86, 94, 117
- en la recta real
 - Christoffel, 14, 114
 - Geronimus, 14, 118
 - Uvarov, 14, 116
- transformaciones espectrales racionales
 - en la circunferencia unidad
 - Aleksandrov, 35
 - antiasociados de orden N , 37, 142
 - asociados de orden N , 36, 136
 - asociados de segunda especie, 34, 134
 - en la recta real
 - antiasociados, 16, 130
 - asociados, 15, 127