UNIVERSIDAD DE LA HABANA
FACULTAD DE MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN
DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE FUNCIONES

Título: *Asintótica de polinomios ortogonales respecto a medidas variantes en un semieje y aplicaciones.*

Autor: Lic. Manuel Bello Hernández.

Tutor: Dr. Sci. Guillermo Tomás López Lagomasino.

Tesis para optar por el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

La Habana, Cuba
1996

AGRADECIMIENTOS

A mi familia que me ha apoyado en todo momento, en particular a mi esposa María Elena por su enorme ayuda y sus palabras de aliento y cariño.

A mi abnegada madre.

Al Profesor Guillermo T. López Lagomasino por sus permanentes enseñanzas y sus valiosas observaciones.

Al Profesor Miguel A. Jiménez Pozo quien guió mis primeros pasos en la investigación matemática.

Al Profesor Andrei Martínez Finkelshtein con quien he trabajado en varios artículos que han servido de base para esta Tesis.

A todos los profesores que contribuyeron a mi formación general, en particular como matemático.

A mis compañeros de Departamento.

1. Introducción

1.1. Motivación

Los aproximantes de Padé son fracciones racionales que interpolan a una función dada y cuyos polos están libres. En muchos problemas de las matemáticas y en aplicaciones físicas esta construcción resulta útil. El interés de los aproximantes de Padé no sólo radica en sus aplicaciones sino también en su conexión con otras ramas de las matemáticas como: las fracciones continuas, los polinomios ortogonales, los métodos de cuadratura, la teoría de potencial, el análisis numérico, los sistemas dinámicos y las ecuaciones integrales.

Un problema esencial en el estudio de los aproximantes de Padé resulta el análisis del comportamiento asintótico de sus polos libres; o lo que es lo mismo de los polinomios que aprecen en el denominador de tales fracciones racionales. Dichos polinomios satisfacen propiedades de ortogonalidad respecto a ciertas medidas variantes (varían con el índice que denota el correspondiente aproximante).

El estudio de los polinomios ortogonales tiene interes por si mismo dada la relación de este tema con la teoría de desarrollos asintóticos, las ecuaciones diferenciales, las funciones especiales, los métodos de cuadratura, etc. Resulta importante el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales no solo fuera del soporte de la medida que define la ortogonalidad sino en el propio soporte, a esto último se vincula la distribución asintótica de los ceros de los polinomios ortogonales.

Los aproximantes de Padé y los polinomios ortogonales son objetos de investigaciones actuales. Sobre estos temas se han realizado numerosos eventos científicos recientemente, como ilustración citaremos algunos de los eventos que han guardado alguna relación con nosotros:

◇ Primera, segunda y tercera Conferencia Internacional sobre Aproximación y Optimización en el Caribe, las dos primeras se celebraron en la Universidad de la Habana, Cuba, en 1987, 1993 y la tercera en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 1995.

$\diamondsuit$ Coloquio sobre Aproximación Racional y Polinomios Ortogonales, Universidad de Zaragoza, España, 1988.

$\diamondsuit$ Conferencia "Progresos en Teoría de Aproximación, una perspectiva internacional", University of South Florida, Estados Unidos, 1990.

$\diamondsuit$ Primero y segundo Seminario Avanzado en Teoría de Aproximacion, el primero se celebró en el marco de los cursos de verano de la Universidad de Cantabria, España, 1992 y el segundo en la Universidad de Matanzas, Cuba, 1995.

En la presente tesis estudiamos propiedades asintóticas de polinomios ortogonales asociados a medidas variantes, enriqueciendo así la teoría clásica de polinomios ortogonales. Aprovechando estos estimados describimos la velocidad de convergencia de los aproximantes de Padé correspondientes.

En el estudio se emplean métodos de teoría de potencial, teoría geométrica de funciones de variable compleja, análisis real y complejo.

1.1.1. Antecedentes y algunas notaciones.

Sea ρ una medida positiva de Borel en $(0, +\infty)$ con un conjunto infinito de puntos de crecimiento, cuyos momentos satisfacen

$$c_k = \int x^k d\rho(x) < +\infty, \ k = 0, 1, \ldots,$$

r una fracción racional con coeficientes complejos cuyos polos están en $D := C \backslash R_+$,

$$A_n = \{x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{2n,n}\} \subset \overline{R} \backslash ((0, +\infty) \cup [r = \infty]) \text{ y} \tag{1}$$

$$W_n(x) = \prod_{|x_{i,n}| \leq 1} (x - x_{i,n}) \prod_{|x_{i,n}| > 1} (1 - \frac{x}{x_{i,n}}). \tag{2}$$

Si $x_{i,n} = \infty$ el correspondiente factor en $W_n(.)$ es igual a 1.

Sea $\widehat{\rho}$ la transformada de Cauchy de ρ y

$$F(z) = \int \frac{d\rho(x)}{z-x} + r(z) = \widehat{\rho}(z) + r(z).$$

Es conocido y fácil de verificar que si para $n = 1, 2, ...$ y $\nu = 1, 2...$

$$c_{\nu,n} := \int x^{\nu} \frac{d\rho(x)}{W_n(x)} < +\infty,$$

entonces existen pares de polinomios (P_{n-1}, Q_n) tales que:

i) $\deg\ P_{n-1} \leq n-1,\ \deg\ Q_n \leq n,\ Q_n \not\equiv 0.$

ii) $\frac{Q_n F - P_{n-1}}{W_n}(z) = O(\frac{1}{z^{n+1}})$ cuando $z \to \infty,.$ con $z < 0$. El miembro izquierdo es una función holomorfa en $C \backslash [0, +\infty)$.

iii) Sea λ_n el número de puntos de A_n iguales a 0. Entonces

$$(Q_n F - P_{n-1}) = O(z^{\lambda_n}) \ \text{ cuando } \ z \to 0, \ \text{con } z < 0.$$

El cociente $\pi_n = \pi_n(F) = \frac{P_{n-1}}{Q_n}$ de cualquier par de tales polinomios define una única fracción racional llamada aproximante multipuntual de Padé de tipo $[n-1, n]$ para F con respecto a A_n.

Si $r \equiv 0$ y $x_{i,n} = \infty$, $i = 1, ..., 2n$, el problema se reduce a la construcción del aproximante clásico de Padé de tipo $[n-1,\ n]$ asociado a la transformada de Cauchy $\hat{\rho}$ de la medida ρ. Las propiedades de convergencia de tales aproximantes aparece en los trabajos clásicos de A.A. Markov y T. Stieltjes.

T. Stieltjes **[33]** probó que si el problema de momentos para la sucesión $\{c_\nu\},\ \nu = 1, 2, ...$ es determinado entonces

$$\pi_n(\widehat{\rho}) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \widehat{\rho},$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de D.

En su tesis doctoral el Prof. Guillermo López Lagomasino extendió el resultado de Stieltjes al caso multipuntual y funciones de la forma $F = \hat{\rho} + r$ (ver [**23**] y también [**19**], [**20**], [**21**] **y** [**22**]) . El probó:

Teorema A: *Sean* $x_{i,n,1}$ *los puntos* $x_{i,n}$ *que están en* $[-\infty, -1]$, *ordenados de modo que* $x_{1,n,1} \geq x_{2,n,1} \geq ...$ *y* $x_{i,n,2}$ *los puntos* $x_{i,n}$ *que están en* $(-1, 0]$ *ordenados de modo que* $x_{1,n,2} \leq x_{2,n,2} \leq ...$,

$$d_{k,n,1} = \int x^k \frac{d\rho(x)}{|W_{k,n,1}(x)|} < +\infty, \ W_{k,n,1}(x) = \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{x}{x_{i,n,1}}), \ k = 1, ... \text{ y}$$

$$d_{k,n,2} = \int x^k \frac{d\rho(x)}{|W_{k,n,2}(x)|} < +\infty, \ W_{k,n,2}(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_{i,n,2}), \ k = 1, ...$$

tal que se cumple

i) $|d_{i,n,1}| \leq |d_i^1|$ *y* $\lim_{n\in\Lambda} \sum_k (d_{k,n,1})^{-1/(2k)} = \infty$, $n \in \Lambda$, *ó*

ii) $|d_{i,n,2}| \leq |d_i^2|$ *y* $\lim_{n\in\Lambda} \sum_k (d_{k,n,2})^{-1/(2k)} = \infty$, $n \in \Lambda$,

y si $\rho' > 0$ *casi dondequiera respecto a la medida de Lebesgue (c.d.) entonces*

$$\pi_n(F) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} F,$$

uniformemente en $C \backslash (R \cup [r = \infty])$ *y cada polo de* F *en* $C \backslash R_+$ *"atrae" tantos polos de* $\pi_n(F)$ *como el orden de su multiplicidad.*

Cuando la terna (ρ, A_n, Λ) satisface las condiciones del Teorema anterior se dice que es admisible.

En el teorema anterior si r tiene coeficientes reales la condición $\rho' > 0$ c.d. puede ser eliminada.

Resultados cuantitativos han sido obtenidos cuando el soporte de ρ es un conjunto compacto. Estos pueden encontrarse en Gonchar y López [**16**], López [**20**] y Stahl y Totik [**32**].

Stahl y Totik mostraron:

Teorema B: *Si* $\rho \in$ *Reg* *([**32**], pág. 187) con soporte compacto (utilizaremos la notación* $Sop(\rho)$ para el soporte de ρ*),* $\nu_{W_n} \xrightarrow[n\to\infty]{*} \nu$ *(convergencia en la topología *-débil) y* $\overline{\cup A_n} \cap Sop(\rho) = \emptyset$ *(* $\overline{(.)}$ *representa la clausura de* $(.)$ *en* C*, ellos consideran* A_n *simétricos respecto* R *y fuera de la envoltura convexa del* $Sop(\rho)$*) entonces*

$$|(\widehat{\rho} - \pi_n(\widehat{\rho}))(z)|^{1/(2n)} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \exp\{-g(\nu, C\backslash Sop(\rho), z)\},$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $C\backslash(I(Sop(\rho)) \cup L(A_n))$*, donde* $I(Sop(\rho))$ *es el intervalo de menor longitud que contiene a* $Sop(\rho)$*,* $L(A_n)$ *es el conjunto de puntos límites de* A_n*,* $\nu_{W_n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} \delta_{x_{i,n}}$ *y* $g(\nu, C\backslash Sop(\rho), z)$ *es el potencial de Green de* ν *en* $C\backslash Sop(\rho)$*.*

Los primeros resultados cuantitativos para el caso no acotado aparecen en un artículo de López y Martínez [**24**]. Ellos probaron:

Teorema C: *Si*

$$d\rho(x) = x^{\alpha}\exp\{-\tau(x)\}dx, \tag{3}$$

donde $\alpha \in R$*;* $\tau(x)$ *es continua en* $(0, +\infty)$*, y para algún* $\gamma > 1/2$*,* $s > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} (sx)^{\gamma}\tau(x) = \lim_{x\to+\infty} (sx)^{-\gamma}\tau(x) = 1, \tag{4}$$

y $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{2n} = \theta \in [0, 1]$ *con*

$$x_{i,2n} = \begin{cases} 0 & if\ i = 1, ..., \lambda_n \\ \infty & if\ i = \lambda_n + 1, ..., 2n \end{cases}$$

entonces

$$\frac{\log \| F - \pi_n(F) \|_K}{(2n)^{1-1/(2\gamma)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\left\{-2D(\gamma)\inf_{z\in K}\left[(1-\theta)^{1-1/(2\gamma)}Im(\sqrt{sz}) + \theta^{1-1/(2\gamma)}Im(\sqrt{\frac{1}{sz}})\right]\right\},$$

donde K es un subconjunto compacto arbitrario de $C\backslash(R_+ \cup [r = \infty])$; la rama de la raíz es tal que $\sqrt{-1} = i$.

1.2. Algunos resultados utilizados en la tesis.

1.2.1. Teoría de Potencial

Sea M^+ el espacio de todas las medidas positivas y borelianas en C tales que

$$\int_{t>1} \log \frac{1}{|t|} d\mu(t) > -\infty. \tag{5}$$

Sea $\mu \in M^+$.

$$V_\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z-t|} d\mu(t), \ \ z \in C \text{ y}$$

$$I_\mu = \int V_\mu(t) d\mu(t)$$

denotan el potencial logarítmico y la energía logarítmica de μ.

Es fácil verificar que si $\mu \in M^+$, $V_\mu(z)$ es una función supra-armónica en C y armónica en $C\backslash Sop(\mu)$.

Sea M el espacio de las medidas, μ, reales, borelianas en C, con componentes en su descomposición de Jordán μ^+ y μ^- ($\mu = \mu^+ - \mu^-$) en M^+. Para cada $\mu \in M$ y $z \in C$,donde $V_{\mu^+}(z) \neq +\infty$ ó $V_{\mu^-}(z) \neq +\infty$, se tiene

$$V_\mu(z) = \int \log \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) \stackrel{def}{=} \int \log \frac{1}{|z-t|} d\mu^+(t) - \int \log \frac{1}{|z-t|} d\mu^-(t).$$

Si $K \subset C$, denotamos por $M_1^+(K)$ el subconjunto de M^+ formado por las medidas unitarias con soporte incluido en K. La capacidad logarítmica de un conjunto compacto K es

$$cap(K) = \exp\left(-\text{ínf}\left\{I_\mu : \ \mu \in M_1^+(K)\right\}\right) \geq 0. \tag{6}$$

Si $cap(K) > 0$ entonces existe una única medida, $\mu_K \in M_1^+(K)$, llamada medida de equilibrio para K, en la que el ínfimo en (6) se alcanza. Ella es también la solución del problema

$$\sup_{\mu \in M_1^+(K)} \left(\inf_{x \in K} V_\mu(x) \right),$$

la medida de equilibrio también se caracteriza por la propiedad

$$-V_\mu(x) = \log(cap(K)) \ q.e. \ en \ Sop(\mu) \tag{7}$$

donde *q.e. en* $Sop(\mu)$ significa que la igualdad se cumple en $Sop(\mu)$ salvo en un conjunto de capacidad logarítmica cero. La demostración de estas propiedades mencionadas anteriormente pueden verse por ejemplo en [**18**] y en [**35**].

En lo adelante no se mencionarán más los adjetivos logarítmica o logarítmico para referirnos al potencial logarítmico, la energía logarítmica o la capacidad logarítmica.

Sea $\mathcal{F}$ la clase de funciones, $f(.) : [0, +\infty) \longrightarrow (-\infty, +\infty]$, continuas en sentido generalizado (se admite que tomen el valor $+\infty$) tales que

$$\varliminf_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\log x} > 1 \tag{8}$$

y $cap(\{f = +\infty\}) = 0$.

Lema D([**26**] (ver también [**17**]): *Sea* $f \in \mathcal{F}$
i) Existe una única medida $\mu \in M_1^+(R_+)$ *que satisface*

$$\begin{array}{lll} V_\mu(x) + f(x) & = c \ (constante) & x \in Sop(\mu) \\ & \geq c & x \in R_+, \end{array} \tag{9}$$

o lo que es equivalente

$$\inf_{x \in R_+} \{V_\mu(x) + f(x)\} = \sup_{\lambda \in M_1^+(R_+)} \left(\inf_{x \in R_+} \{V_\lambda(x) + f(x)\} \right)$$

ii) Si μ es solución de (9), $Sop(\mu)$ ofrece el máximo para el funcional

$$F(K) = \log cap(K) - \int_K f(t) d\mu_K(t), \tag{10}$$

donde el máximo es tomado sobre todos los subconjuntos compactos $K \subset R_+$, μ_K denota la medida de equilibrio para K, y la constante c que aparece en (9) es

$$F(Sop(\mu)).$$

De (7) y (9) se observa que la ecuación en μ

$$\int \log|x-t|\, d\mu(t) = f(x)$$

tiene una importancia enorme en la teoría de potencial.

Lema E:
i) Sea $f(.)$ una función con derivada continua en $[a,b]$. La medida μ que satisface

$$\int_a^b \log|x-t|\, d\mu(t) = f(x), \tag{11}$$

*es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.(ver [**1**]).*

ii) Si $f(.)$ posee derivada continua en $[a,b]$, $b-a \neq 4$ y para cierto $0 < \epsilon < 1$

$$f'(x)(b-x)^{1-\epsilon}(x-a)^{1-\epsilon}$$

satisface la condición de Hölder con exponente mayor que cero entonces

$$\left\{ \int_a^b \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)} f'(t) dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}(t-x)} + \frac{1}{\ln\frac{b-a}{4}} \int_a^b \frac{f(t)dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \right\} dx$$

*es la solución de (11).(ver [**14**])*

Nos interesan también las propiedades de sucesiones de potenciales.

Principio de descenso: *Sean* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* μ *medidas de* $M_1^+(K)$, K *compacto,* $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \mu$ *y* $\{z_n\}$ *una sucesión de números complejos tal que* $z_n \longrightarrow z$ *entonces*

$$\varliminf_{n\to\infty} V_{\mu_n}(z_n) \geq V_\mu(z),$$

*(Ver [**18**]).*

Principio de la envoltura inferior: *Bajo las mismas hipótesis del Principio anterior se cumple*

$$\varliminf_{n\to\infty} V_{\mu_n}(z_n) = V_\mu(z), \text{ q.e. en. } C,$$

*(Ver [**18**]).*

Bajo las hipótesis de los Principios anteriores se tiene

$$V_{\mu_n}(z) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} V_\mu(z),$$

uniformemente en K^c.

Lema F *(continuidad de potenciales)***:** *Sea* $\mu \in M_1^+(K)$ *si* $V_\mu(.)|_{Sop(\mu)}$ *es continua en* $Sop(\mu)$ *entonces* $V_\mu(z)$ *es continua en* C. *(Ver [**18**]).*

Lema G (unicidad de potenciales): *Sean* μ_1 *y* μ_2 *dos medidas en* M *tales que sus potenciales existen q.e. en* C, *que cumplen en el conjunto* I *de puntos irregulares para* $Sop(\mu_1) \cup Sop(\mu_2)$

$$\mu_1|_I \equiv \mu_2|_I \equiv 0.$$

Si

$$V_{\mu_1} = V_{\mu_2}, \text{ q.e. en } Sop(\mu_1) \cup Sop(\mu_2)$$

entonces $\mu_1 = \mu_2$.*(Ver [**18**]).*

1.2.2. Polinomios Ortogonales

Todo lo que aquí se afirma puede encontrarse en **[10, 13, 27, 28, 29 y 34].**

Sea μ una medida positiva y boreliana en $(-\infty, +\infty)$, con infinitos puntos de crecimiento, para la cual existen los momentos

$$\int x^k d\mu(x) < +\infty, \ k = 0, 1, ...,$$

entonces a μ se le puede asociar una suceción de polinomios, $\{p_n(\mu, .)\}_{n=0}^{\infty}$, única tal que

1. Para cada $n \in Z_+$, $p_n(\mu, .)$ es un polinomio de grado exactamente n, con coeficiente principal positivo.
2. $\int p_m(\mu, x) p_n(\mu, x) d\mu(x) = \delta_{n,m}$, $n, m = 0, 1, ...$

Además, $\{p_n(\mu, .)\}$ tiene las siguientes propiedades:

Sus ceros son simples y están en el interior de la envoltura convexa de $Sop(\mu)$..

Si $z_{1,n}, z_{2,n}, ..., z_{n,n}$ son sus n ceros entonces existen $\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, ..., \lambda_{n,n}$ constantes > 0 (números de Christoffel) tales que es válida la siguiente fórmula, conocida como fórmula de cuadratura de Gauss:

$$\int q(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} q(z_{i,n}), \text{ para todo polinomio } q \in \Pi_{2n-1},$$

donde Π_{2n-1} denota el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes complejos.

Si η_n denota el coeficiente principal de p_n $(p_n(z) = \eta_n z^n + ...$ entonces

$$\eta_n^{-2} = \inf \int \left| q^2(x) \right| d\mu(x),$$

donde el ínfimo es tomado cuando q recorre el espacio de todos los polinomios mónicos de grado n.

Se cumple la fórmula de Christoffel-Darboux

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(\mu, z_1)p_i(\mu, z_2) = \frac{\eta_n}{\eta_{n+1}} \left\{ \frac{p_{n+1}(\mu, z_1)p_n(\mu, z_2) - p_{n+1}(\mu, z_2)p_n(\mu, z_1)}{z_1 - z_2} \right\}$$

1.2.3. Aproximantes de Padé

Ya hemos definido los aproximantes multipuntuales de Padé en la sección donde hablamos de los *precedentes* a nuestro trabajo, aquí partimos de las mismas hipótesis y notaciones. Solo nos interesa destacar un resultado del Profesor Guillermo López Lagomasino.

Consideremos el cambio de variable

$$z = \frac{1+\xi}{1-\xi}(z \in C \backslash R_+, \xi \in C \backslash [-1, 1]) \text{ y}$$

$$x = \frac{1+t}{1-t}(x \in (0, +\infty), t \in (-1, 1)).$$

Sean

$$d\lambda(t) = \frac{1}{2}(1-t)d\rho\left(\frac{1+t}{1-t}\right), t \in (-1, 1),$$

$$(1-\xi)b(\xi) = r\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right),$$

$$f(\xi) = \widehat{\lambda}(\xi) + b(\xi),$$

$$X_n(\xi) = (1-\xi)^{2n} W_n\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right),$$

X_n los ceros de $X_n(.)$, $\pi_n(f)$ el aproximante multipuntual de tipo $[n-1, n]$ para f respecto a X_n y $l_{n,n}(\xi)$ el polinomio ortonormal de grado n respecto $\frac{d\lambda(t)}{X_n(t)}$, con coeficiente principal positivo.

Teorema H([23]) *Si la terna* (ρ, A_n, Λ) *es admisible entonces*

$$(f - \Pi_n(f))(\xi)\frac{l_{n,n}^2(\xi)}{X_n(\xi)} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} G(\xi).$$

uniformemente en cada subconjunto compacto de $C\backslash([-1,1]\cup[b=\infty])$, *donde* $G(\xi)$ *representa una función que no se anula y es analítica en* $C\backslash([-1,1]\cup[b=\infty])$.

1.3. Resultados obtenidos en la tesis.

La tesis está dividida en 5 capítulos. En la introducción se presentan algunas notaciones que se usaran en todo el trabajo, los resultados más importantes que se generalizaran en la tesis y teoremas sobre teoría de potencial, aproximantes de Padé y polinomios ortogonales que se usaran en las demostraciones. Además, se presentan los resultados fundamentales obtenidos en la tesis.

En el capítulo 2 se resuelve un problema de teoría de potencial. Este capítulo es clave , pues el Lema obtenido allí resulta fundamental en los otros capítulos. El uso de la teoría de potencial ha demostrado ser eficaz para resolver problemas de aproximación racional. Para tales efectos ver [**17, 25, 30, 36, 37 y 39**].

El capítulo 3 se dedica al estudio de la asintótica de polinomios orthogonales fuera del soporte de la medida que define la ortogonalidad. Es de interes independiente la asintótica de la función de Christoffel, que en este capítulo se ofrece.

Los resultados fundamentales obtenidos en el capítulo 3 son:

Teorema I: *Si* $d\rho(x)$ *satisface (3) y (4),* A_n *como en (1),* $W_n(.)$ *según (2),* $\nu_{W_n} \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \nu$ *in* $(-\infty,0)$ *y* $Sop(\nu)\cap(-\infty,0)\not\equiv\emptyset$. *Si* $h_{n,n}$ *denota el n-ésimo polinomio ortonormal con respecto a* $\frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|}$ *con coeficiente principal positivo, entonces*

$$\left|\frac{h_{n,n}^2(z)}{W_n(z)}\right|^{1/(2n)} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \exp\left\{g(\nu,\overline{C}\backslash R_+,sz)\right\},$$

uniformemente en $C\backslash R$, *donde*

$$g(\nu,\overline{C}\backslash[0,+\infty),z)=\int g_{\overline{C}\backslash[0,+\infty)}(z,t)d\nu(t)=\int\left|1+2\frac{t}{z-t}-2\sqrt{\frac{t}{(z-t)^2}}\right|d\nu(t),$$

y la raíz es tal que

$$\left|1+2\frac{t}{z-t}-2\sqrt{\frac{t}{(z-t)^2}}\right|>1,\ \text{para z}\in C\backslash R\text{ y }t\in(-\infty,0).$$

Para obtener la asintótica de los polinomios ortogonales cuando la hipótesis del teorema anterior $Sop(\nu)\cap(-\infty,0)\not\equiv\emptyset$ no se satisface se necesita información sobre la cantidad de puntos que se van a $-\infty$ y a 0, así como la velocidad con que esta convergencia se realiza.

Teorema J: *Supongamos que existe* δ, $0<2\delta\leq 1/\gamma$ *y* $\chi_1\in[0,\delta))$, $\chi_2\in[0,\delta))$ *tales que:*

a) $(2n)^{\chi_1}\nu_{W_n}((2n)^{2(\delta-\chi_1)}t)\xrightarrow[n]{*}\nu_1(t)$ *en* $(-\infty,0)$, $0\notin\overline{(Sop(\nu_1))}$,

$(2n)^{\chi_2}\nu_{W_n}((2n)^{-2(\delta-\chi_2)}t^{-1})\xrightarrow[n]{*}\nu_2(t)$ *en* $(-\infty,0)$, $0\notin\overline{(Sop(\nu_2))}$,

b)

$$(2n)^{\delta}\nu_{W_n}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{*}\overline{\nu}(t),$$

$$g_{\overline{C}\backslash[0,+\infty)}(z,t)\in L_1(d\overline{\nu}).$$

c) Para algún $A<0,\ B<0,\ C<0$ *y* $D<0$,

$$\nu_{W_n}((An^{2(\delta-\chi_1)},B)=o(n^{-\delta}),$$

$$\nu_{W_n}((C,Dn^{-2(\delta-\chi_2)}))=o(n^{-\delta}).$$

d) Adicionalmente, si $\delta=1/(2\gamma)$ *se supone*

$$\nu_{W_n}((2n)^{1/\gamma}t)\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{*}\nu_3(t),\ en\ [-\infty,0],\ \ 0\notin\overline{(Sop(\nu_3)\cap(-\infty,0))},$$

$$\nu_{W_n}((2n)^{-1/\gamma}t^{-1})\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{*}\nu_4(t),\ en\ [-\infty,0],\ \ 0\notin\overline{(Sop(\nu_4)\cap(-\infty,0))},$$

y si $\delta < 1/(2\gamma)$ *se considera que*

$$(Sop(\bar{\nu}) \cup Sop(\nu_1) \cup Sop(\nu_2)) \cap (-\infty, 0) \not\equiv \emptyset.$$

Entonces

$$\frac{\log |h_{n,n}^2(\tau,z)/W_n(z)|}{(2n)^{1-\delta}} \underset{n\to\infty}{\overrightarrow{\longrightarrow}}$$

$$\int \log \left| 1 + 2\frac{t}{sz-t} - 2\sqrt{\frac{szt}{(sz-t)^2}} \right| d\overline{\nu}(t) +$$

$$+Im(\sqrt{sz}) \left[\int\limits_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}d\nu_1(t^{-1}) + B_1(\delta) \right] + Im(\sqrt{\frac{1}{sz}}) \left[\int\limits_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}d\nu_2(t^{-1}) + B_2(\delta) \right],$$

uniformemente en $C\backslash R$, *con*

$$B_i(\delta) = \begin{cases} 0 & si\ 0 < \delta < 1/(2\gamma) \\ \int \sqrt{L_i^{-1} - t}d\nu_{i+2}(t^{-1}) + B(\gamma-1)L_i^{1-1/(2\gamma)} & si\ \delta = 1/(2\gamma) \end{cases},$$

donde L_1 *y* L_2 *son las soluciones de la ecuación*

$$0 = \gamma B(\gamma) L^\gamma - \int \sqrt{\frac{t}{t-L}} d\beta(t), \tag{12}$$

con $d\beta = d\nu_3$ *y* $d\beta = d\nu_4$, *respectivamente.*

La distribución asintótica de los ceros de los polinomios ortogonales se presenta en el Capítulo 4^{to}. Se estudian dos tipos de distribución para los ceros, la llamada asintótica rescalada y la asintótica ponderada. Para polinomios ortogonales con respecto a medidas fijas resultados de esta naturaleza fueron obtenidos por [**12, 29, 34, 36, 37 y 38**]. En el caso de medidas variantes se tienen resultados de [**8, 17 y 26**].

Dos de los resultados más significativos obtenidos aquí son:

Teorema K: *Bajo las hipotesis del Teorema I, si* $d\nu_{h_{n,n}}(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{\xi : h_{n,n}(\xi)=0} d\delta_\xi(x)$ *entonces*

$$d\nu_{h_{n,n}}(x) \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \frac{1}{s\pi}\sqrt{\frac{-t}{x}} \frac{d\nu(t/s)}{x-t} dx\, en\ [0, +\infty].$$

Teorema L: *Con las hipótesis y notaciones del Teorema J se cumple:*

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}} \frac{2td\nu_{h_{n,n}}(t)}{1+t^2} \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} d\sigma(x)$$

donde

$$d\sigma(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{s}\int \frac{\sqrt{-tx}}{1+x^2}\frac{d\overline{\nu}(t)}{x-t} + \frac{E_1 x^{1/2} + E_2 x^{-1/2}}{1+x^2}\right\} dx,$$

siendo

$$E_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}d\nu_1(t^{-1}) + B_1(\delta) \text{ y } E_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}d\nu_2(t^{-1}) + B_2(\delta).$$

Por último, en el capítulo 5 se estima la velocidad de convergencia de los aproximantes multipuntuales de Padé para funciones meromorfas de tipo Stieltjes. El primer resultado básico se refiere a la validez del un resultado similar al de Stahl-Totik cuando hay suficientes puntos de interpolación lejos del soporte de la medida que define la transformada de Stieltjes, más exactamente:

Teorema M: *Con las hipótesis del Teorema I se cumple*

$$|(F - \pi_n(F))(z)|^{1/(2n)} \underset{n\to\infty}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} \exp - \left\{g(\nu, \overline{C}\backslash R_+, sz)\right\},$$

uniformemente en $C\backslash(R \cup [r = \infty])$.

Cuando no se satisface $Sop(\nu) \cap (-\infty, 0) \not\equiv \emptyset$ es necesaria información sobre la cantidad de puntos que se van a $-\infty$ y a 0, así como la velocidad con que esta convergencia se realiza. En el resultado de López-Martínez, por ejemplo se conoce "la cantidad" de puntos que se van a 0 e ∞ (se conoce $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{2n}$) y la velocidad con que esta convergencia tiene lugar (se conoce que la interpolación precisamente es en 0 e ∞). En ese Capítulo se comenta más esta problematica y se citan ejemplos para esclarecer esto. El siguiente resultado generaliza el Teorema C.

Teorema N: *Asumiendo las condiciones y notaciones del Teorema E se cumple:*

$$\frac{\log|(F-\pi_n(F))(z)|}{(2n)^{1-\delta}}$$

$$-\int \log\left|1+2\frac{t}{sz-t}-2\sqrt{\frac{szt}{(sz-t)^2}}\right| d\overline{\nu}(t)$$

$$-Im(\sqrt{sz})\left[\int\limits_{(-\infty,0]}\sqrt{-t}d\nu_1(t^{-1})+B_1(\delta)\right]-Im(\sqrt{\frac{1}{sz}})\left[\int\limits_{(-\infty,0]}\sqrt{-t}d\nu_2(t^{-1})+B_2(\delta)\right],$$

uniformemente en $C\backslash(R\cup[r=\infty])$.

2. Solución de un problema de teoría de potencial

A lo largo de este capítulo consideramos $A > 0$ y $\gamma > 1/2$ constantes fijas y $\varphi(x) = A(x^{\gamma} + x^{-\gamma})$, $x \in (0, +\infty)$. Para cada $n \in N$ tomamos $\varphi_n(x) := \varphi(x) + \log|W_n(x)|$ (recordar que $W_n(x)$ representa el polinomio asociado a los puntos de interpolación en A_n). Denotamos por $M_n^+(R_+)$ el conjunto de todas las medidas positiva y borelianas, μ, con soporte en R_+, tales que la variación total $\|\mu\,\|$ es igual a n y que cumple (5).

La solución del siguiente problema de teoría de potencial juega un papel esencial en el estudio de la asintótica de los polinomios ortogonales que aparecen en este trabajo:

$$\sup_{\mu\in M_n}\left(\operatorname*{ínf}_{x\in(0,+\infty)}\{2V_{\mu}(x)+\varphi_n(x)\}\right) := c_n, \tag{13}$$

a φ_n le llamaremos campo externo y a c_n constante de equilibrio (en presencia del campo externo φ_n).

Es fácil notar que $\varphi_n(x)$ cumple (8), luego según Lema D, existe una única medida μ_n, solución de (13), esta medida es caracterizada (ver el propio Lema D), por las condiciones de equilibrio

$$\begin{array}{rl} 2V_{\mu_n}(x)+\varphi_n(x) & = c_n, \quad x \in Sup(\mu_n), \\ & \geq c_n, \quad x \in [0, +\infty). \end{array} \tag{14}$$

La medida solución de (13), así como el resto de los parametros que intervienen en la solución de (13) dependen de n y de A. Cuando sea necesario destacar esta dependencia lo indicaremos poniendolo como subíndice.

Bajo condiciones lo suficientemente generales sobre el campo externo el soporte de la medida de equilibrio es un intervalo y hallarlo se reduce a determinar sus extremos. Una vez hallado $Sop(\mu_n)$, los Lemas D y E nos permiten encontrar c_n y μ_n. Por lo tanto el objetivo inmediato es estimar $Sop(\mu_n)$. El cálculo exacto no es posible pero la relación (10) nos da un método para obtenerlo aproximadamente que a los efectos que perseguimos es suficiente.

Lema 1. *Sean* $(a,b) \subset (0,+\infty)$ *y* $g \in C^1((0,+\infty))$. *Si* $g'(x)$ *es estrictamente creciente en* (a,b), *entonces toda medida* μ *con soporte en* $[0+\infty)$ *que satisface:*

$$\begin{aligned}(V_\mu + g)(x) &= c \quad (const), \quad x \in Sop(\mu),\\ &\geq c, \qquad\qquad\quad\; x \in (0,+\infty),\end{aligned}$$

es tal que $(a,b) \cap Sop(\mu)$ *es conexo.*

Demostración:

Supongamos que $(a,b) \cap Sop(\mu)$ es disconexo. Luego existen dos puntos x_1 y x_2 en $(a,b) \cap Sop(\mu)$ tales que $(x_1,x_2) \cap Sop(\mu) = \emptyset$. Teniendo presente las hipótesis del Lema, la función $h(x) := V_\mu(x) + g(x)$ satisface:

$$\begin{aligned}&h(x_1) = h(x_2) = c,\\ &h(x) \geq c, \qquad\qquad x \in (x_1,x_2).\end{aligned}$$

Como h es suave en (x_1,x_2) y continua en $[x_1,x_2]$ (según Lema F (continuidad de potenciales)), el teorema de Lagrange aplicado a $xh(x)$ garantiza que existe $\xi \in (x_1,x_2)$ tal que

$$\xi h'(\xi) + h(\xi) = \frac{x_2 h(x_2) - x_1 h(x_1)}{x_2 - x_1} = c,$$

luego

$$\xi h'(\xi) \leq 0. \tag{15}$$

Por las condiciones del lema, es fácil verificar que $xh'(x)$ también es estrictamente creciente en (x_1,x_2) y satisface (ver (14))

$$\lim_{x\to x_1} h'(x) \geq 0,$$

lo cual contradice (15).$\square$

Proposición 2. *Sea β una medida positiva, boreliana y finita con soporte en $[-\infty, 0]$. La ecuación en L*

$$0 = A\gamma B(\gamma)L^{\gamma} - \int \sqrt{\frac{t}{t-L}}d\beta(t), \tag{16}$$

con $B(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1} x^{\gamma}\left\{x(1-x)\right\}^{-1/2}dx$, *tiene solución única en* $[0, +\infty)$.

Demostración:

Si β es la medida nula la tesis del teorema es obvia. Si β no es nula el miembro derecho de la ecuación se va a $-\beta([-\infty, 0])$, cuando $L \longrightarrow 0^{+}$ y a $+\infty$, cuando $L \longrightarrow +\infty$. Finalmente, es fácil ver que el miembro derecho, como función de L, es estrictamente creciente.$\square$

Lema 3. *Consideremos* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones tales que* $0 < a_n < b_n$ *y* $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$. *Entonces:*

i) *Si* $\theta > -1/2$*:*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{x^{\theta}dx}{\sqrt{(b_n - x)(x-a_n)}} = b_n^{\theta}(B(\theta) + o(1)) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

ii) *Si* $\dot{\theta} > 1/2$ *:*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{x^{-\theta}dx}{\sqrt{(b_n - x)(x-a_n)}} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}a_n^{-\theta}(B(\theta-1) + o(1)) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

iii) *Si* $\dot{\theta} > 1/2$ *y además* $z \in C\backslash R_{+}$,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{x^{\theta}dx}{(z-x)\sqrt{(b_n - x)(x-a_n)}} = b_n^{\theta-1}(B(\theta-1) + o(1)) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{x^{-\theta}dx}{(z-x)\sqrt{(b_n - x)(x-a_n)}} = \frac{B(\theta-1) + o(1)}{zb_n^{1/2}a_n^{\theta-1/2}} \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

iv) *Si* $\theta > 1/2$, $x \in [a_n, b_n]$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{t^{\theta-1}\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}dt}{\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}(x-t)} = b_n^{\theta-1}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{t^{\theta-1}\sqrt{(1-x)x}dt}{\sqrt{(1-t)t}(x-t)} + o(1)\right\}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{t^{-\theta-1}\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}dt}{\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}(x-t)} = a_n^{-\theta-1}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{t^{\theta+1}\sqrt{(1-x)x}dt}{\sqrt{(1-t)t}(t-x)} + o(1)\right\}$$

v) *Si* $y_{i,n} \in R_-$ *y* $x \in [a_n, b_n]$ *entonces existe una constante* D *(que no depende de* $y_{i,n}$ *ni de* x*) tal que*:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}dt}{(t-y_{i,n})\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}(x-t)} \leq Da_n^{-1}$$

Demostración:
Obtengamos *i):* haciendo el cambio de variable $x = \frac{a_n+b_n}{2} + \frac{b_n-a_n}{2}\cos t$.

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{x^\theta dx}{\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\frac{a_n+b_n}{2} + \frac{b_n-a_n}{2}\cos t)^\theta dt$$

$$= \frac{b_n^\theta}{\pi}\int\limits_0^\pi (\frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t)^\theta dt.$$

Es fácil notar que si $\theta \geq 0$ entonces

$$(\frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t)^\theta \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t)^\theta,\ t \in [0, \pi].$$

Si $-\frac{1}{2} < \theta < 0$ entonces

$$(\frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t)^\theta \leq (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t)^\theta \text{ y}$$

para dichos valores de θ,

$$\int\limits_0^\pi (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t)^\theta dt < +\infty.$$

Luego por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{x^\theta dx}{\sqrt{(b_n - x)(x - a_n)}} = b_n^\theta (B(\gamma) + o(1)),$$

que es lo que se quería demostrar.

Haciendo el cambio $x \longleftrightarrow \frac{1}{x}$, la relación *ii)* se reescribe:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{x^{-\theta} dx}{\sqrt{(b_n - x)(x - a_n)}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n^{-1}}^{b_n^{-1}} \frac{x^\theta}{\sqrt{(b_n - 1/x)(1/x - a_n)}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a_n b_n}}\int\limits_{b_n^{-1}}^{a_n^{-1}} \frac{x^\theta}{\sqrt{(a_n^{-1} - x)(x - b_n^{-1})}} dx,$$

ahora por *i)* sigue *ii).*

Para obtener la primera relación en *iii)* procedemos como en *i):*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{x^\theta dx}{(z - x)\sqrt{(b_n - x)(x - a_n)}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{(\frac{a_n+b_n}{2} + \frac{b_n-a_n}{2}\cos t)^\theta dt}{z - \frac{a_n+b_n}{2} + \frac{b_n-a_n}{2}\cos t}$$

$$= \frac{1}{\pi} b_n^{\theta-1}\int\limits_0^\pi \frac{(\frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t)^\theta dt}{\frac{z}{b_n} - \frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t}.$$

Para $\theta \geq 1$

$$\frac{(\frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t)^\theta}{\frac{z}{b_n} - \frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t)^\theta,\ t \in [0, \pi].$$

Si $1/2 < \theta < 1$, la conclusión sigue aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue:

$$\left|\frac{(\frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t)^\theta}{\frac{z}{b_n} - \frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2} + \frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t}\right| \leq |C(z)|\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t)^{\theta-1},$$

donde $C(z)$ es una función diferente de 0, está magnitud se puede calcular proyectando $\frac{1+\frac{a_n}{b_n}}{2}+\frac{1-\frac{a_n}{b_n}}{2}\cos t$ en la recta que pasa por el origen y forma con el semieje real positivo un ángulo de $\arg(z)$.

La otra parte de *iii)* se obtiene fácilmente con el cambio de variable $x \longleftrightarrow 1/x$ y utilizando lo ya demostrado en *iii).*

Para demostrar la primera parte de *iv)* hagamos los cambios de variables $x \leftrightarrow (b_n - a_n)x + a_n$ y $t \leftrightarrow (b_n - a_n)t + a_n$, de este modo nos queda

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n} \frac{t^{\theta-1}\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}dt}{\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}(x-t)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{((b_n-a_n)t+a_n)^{\theta-1}\sqrt{(1-x)x}dt}{\sqrt{(1-t)t}(x-t)}.$$

La función

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{(1-x)x}dt}{\sqrt{(1-t)t}(x-t)}$$

representa una función continua en $[0,1]$, luego

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n} \frac{t^{\theta-1}\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}dt}{\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}(x-t)} = \frac{1}{\pi}b_n^{\theta-1}\left(\int_0^1 \frac{\left(t+\frac{a_n}{b_n-a_n}\right)^{\theta-1}\sqrt{(1-x)x}dt}{\sqrt{(1-t)t}(x-t)} + o(1)\right).$$

Utilizando el método usual para demostrar la convergencia, en el sentido de valor principal de Cauhy, de las integrales singulares, se obtiene lo que se deseaba calcular. Para demostrar la otra relación en *iv)* hay que hacer primero los cambios $t \longleftrightarrow t^{-1}$ y $x \longleftrightarrow x^{-1}$.

Para deducir *v)* utilicemos que

$$\frac{1}{(t-y_{i,n})(x-t)} = \frac{1}{x-y_{i,n}}\left(\frac{1}{t-y_{i,n}}+\frac{1}{x-t}\right).$$

Ahora la integral se escribe

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n} \frac{\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}dt}{(t-y_{i,n})\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}(x-t)} =$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{x-y_{i,n}}\left\{\int_{a_n}^{b_n}\frac{\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}dt}{(t-y_{i,n})\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}}+\int_{a_n}^{b_n}\frac{\sqrt{(b_n-x)(x-a_n)}dt}{\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}(x-t)}\right\}. \tag{17}$$

Observemos ahora que

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n}\frac{dt}{(t-y_{i,n})\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}}=\frac{1}{\sqrt{(b_n-y_{i,n})(a_n-y_{i,n})}}. \tag{18}$$

Si denotamos por $g_{[r,R]}(y_{i,n},\infty)$ la función de Green de [r,R], la relación anterior se deduce inmediatamente derivando la igualdad

$$\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n}\log\frac{1}{t-y_{i,n}}\frac{dt}{\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}}=\log\frac{4}{b_n-a_n}-g_{[a_n,b_n]}(y_{i,n},\infty)$$

$$=\log\frac{4}{b_n-a_n}-\log\left|\frac{2}{b_n-a_n}(y_{i,n}-\frac{b_n+a_n}{2}+\sqrt{(y_{i,x}-b_n)(y_{i,n}-a_n)}\right|,$$

que se obtiene de conocer que $\frac{dt}{\sqrt{(b_n-t)(t-a_n)}}$ es la medida de equilibrio en $[a_n,b_n]$, $\frac{b_n-a_n}{4}$ es la capacidad del dicho intervalo, la definición de funcion de Green y la relacion (9) que cumplen las medidas de equilibrio.

Haciendo el mismo cambio de variable que propusimos en la prueba de la primera parte de *iv)* en la segunda integral de la derecha de (17) y utililizando (18) se deduce lo deseado.□

Lema 4. *El soporte de la medida μ_n es un intervalo, $[r_n,R_n]:=\Delta_n$, y el par $(r_n;R_n)$ satisface:*

i) $0<r_n<1<R_n<+\infty$.

ii)

$$\frac{1}{\pi}\int_{r_n}^{R_n}\frac{\varphi_n^{'}(x)dx}{\sqrt{(R_n-x)(x-r_n)}}=0, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{r_n}^{R_n} \frac{x\varphi_n'(x)dx}{\sqrt{(R_n-x)(x-r_n)}} = 2n. \tag{20}$$

Además,

iii) $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *y* $R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

iv) $\{\frac{R_n}{n^{1/\gamma}}\}$ *y* $\{\frac{r_n^{-1}}{n^{1/\gamma}}\}$ *son acotadas.*

v.i) *Supongamos que existen* $\chi \in [0,1)$ *y* $\delta > 0$ *con* $\chi/(2\gamma) + \delta < 1/(2\gamma)$ *y tales que*

$$(2n)^{\chi}\nu_{W_n}((2n)^{2\delta}t) \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \overline{\nu}_1(t) \text{ en } [-\infty, 0)$$

Asumamos que

$$\{Sup(\overline{\nu}_1)\} \cap [-\infty, 0) \not\equiv \emptyset$$

entonces

$$\frac{R_n}{n^{2\delta}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

v.ii) *Sean* $\chi \in [0,1)$, $\delta > 0$ *con* $\chi/(2\gamma) + \delta < 1/(2\gamma)$ *y tales que*

$$(2n)^{\chi}\nu_{W_n}((2n)^{-2\delta}t^{-1}) \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \overline{\nu}_2(t) \text{ en } [-\infty, 0)$$

Asumamos que

$$\{Sup(\overline{\nu}_2)\} \cap [-\infty, 0) \not\equiv \emptyset$$

entonces

$$\frac{r_n^{-1}}{n^{2\delta}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

vi) *Si*

$$\nu_{W_n}((2n)^{1/\gamma}t) \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \nu_1(t) \text{ en } [-\infty, 0],$$

$$\nu_{W_n}((2n)^{-1/\gamma}t^{-1}) \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \nu_2(t) \text{ en } [-\infty, 0]$$

entonces

$$\frac{R_n}{(2n)^{1/\gamma}} = L_1 + o(1), \ \frac{r_n^{-1}}{(2n)^{1/\gamma}} = L_2 + o(1) \text{ cuando } n \to \infty,$$

donde L_1 y L_2 satiefacen (16) con $\beta = v_1$ y $\beta = v_2$ respectivamente.

vii) *Si $\delta \geq 1/\gamma$ y $B_1 > 0$ entonces existe una constante $k > 0$ tal que*

vii.i)
$$R_n \geq k\left[2n\nu_{W_n}\left(\left[-\infty,(2n)^{\delta}B_1\right]\right)\right]^{1/\gamma}$$

vii.ii)
$$r_n^{-1} \geq k\left[2n\nu_{W_n}\left(\left[(2n)^{-\delta}B_1,0\right]\right)\right]^{1/\gamma}$$

viii) *La medida de equilibrio es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Más precisamente $d\mu_n(x) = u_n(x)dx$, con*

$$u_n(x) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{r_n}^{R_n}\frac{\sqrt{(R_n-x)(x-r_n)}\varphi_n^{'}(t)}{\sqrt{(R_n-t)(t-r_n)}(x-t)}dt,$$

la integral es entendida en el sentido de valor principal de Cauchy.

ix) *La constante de equilibrio c_n (miembro derecho en (13)) es tal que $\{\frac{c_n}{n}\}$ es acotada superiormente.*

x) *Se cumple*
$$\sup_{x\in\Delta_n}|u_n(x)| \leq A_2 n r_n^{-1}.$$

Demostración:

Observe que

$$x\varphi_n^{'}(x) = \gamma A\left(x^{\gamma}-x^{-\gamma}\right)+\sum_{x_{i,n}\neq\infty}\frac{x}{x-x_{i,n}}$$

y esta función es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$. Del Lema 1 se sigue que $Sop(\mu_n)$ es un intervalo y no puede contener a 0 ó $+\infty$ pues el campo externo φ_n se va a $+\infty$, cuando $x \to 0^+$ y $x \to +\infty$, concluyendose que $Sop(\mu_n)$ es un intervalo cerrado y acotado contenido en $(0, +\infty)$.

Del Lema D se tiene que r_n y R_n ofrecen el máximo para la función:

$$F(r; R) = \log cap[r, R] - \frac{1}{2\pi n} \int_r^R \frac{\varphi_n(x)dx}{\sqrt{(R-x)(x-r)}}, \tag{21}$$

teniendo presente que la capacidad de un intervalo es $\frac{1}{4}$ de su longitud (ver [**15**]) nos queda

$$F(r; R) = \log \frac{R-r}{4} - \frac{1}{2\pi n} \int_r^R \frac{\varphi_n(x)dx}{\sqrt{(R-x)(x-r)}}$$

$$= \log \frac{R-r}{4} - \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi \varphi_n(\frac{R+r}{2} + \frac{R-r}{2} \cos(\theta))d\theta.$$

Calculando las derivadas parciales $\partial F/\partial r$, $\partial F/\partial R$ e igualandolas a 0 es fácil ver que F es maximizado cuando se cumplen (19) y (20).

Teniendo presente la forma de φ'_n, nos queda reescritas (19) y (20):

$$0 = \frac{A}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{(\gamma x^\gamma - \gamma x^{-\gamma})dx}{\sqrt{(R_n - x)(x - r_n)}} + \sum_{x_{i,n} \neq \infty} \frac{1}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{dx}{(x - x_{i,n})\sqrt{(R-x)(x-r)}}, \tag{22}$$

$$2n = \frac{A}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{(\gamma x^\gamma - \gamma x^{-\gamma})dx}{\sqrt{(R_n - x)(x - r_n)}} + \sum_{x_{i,n} \neq \infty} \frac{1}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{xdx}{(x - x_{i,n})\sqrt{(R-x)(x-r)}}. \tag{23}$$

Observemos nuevamente que

$$\frac{1}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{dx}{(x - x_{i,n})\sqrt{(R-x)(x-r)}} = \frac{1}{\sqrt{(R - x_{i,n})(r - x_{i,n})}}.$$

Considerando $d\nu_{W_n} = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n} d\delta_{x_{i,n}}$, (19) y (20) se pueden reescribir

$$0 = \frac{A}{\pi}\int\limits_{r_n}^{R_n} \frac{(\gamma x^{\gamma} - \gamma x^{-\gamma})dx}{\sqrt{(R_n - x)(x - r_n)}} + 2n\int \frac{t d\nu_{W_n}(t)}{\sqrt{(R_n - t)(r_n - t)}}, \tag{24}$$

$$0 = \frac{A}{\pi}\int\limits_{R_n^{-1}}^{r_n^{-1}} \frac{(\gamma x^{\gamma} - \gamma x^{-\gamma})dx}{\sqrt{(r_n^{-1} - x)(x - R_n^{-1})}} + 2n\int \frac{t d\nu_{W_n}(t^{-1})}{\sqrt{(r_n^{-1} - t)(R_n^{-1} - t)}}. \tag{25}$$

Como $x_{i,n} \in [-\infty, 0]$

$$\int \frac{t d\nu_{W_n}(t)}{\sqrt{(R_n - t)(r_n - t)}} \leq 0,$$

$$\int \frac{t d\nu_{W_n}(t^{-1})}{\sqrt{(r_n^{-1} - t)(R_n^{-1} - t)}} \leq 0,$$

de (24) y (25) obtenemos

$$\int\limits_{r_n}^{R_n} \frac{(\gamma x^{\gamma} - \gamma x^{-\gamma})dx}{\sqrt{(R_n - x)(x - r_n)}} \geq 0, \tag{26}$$

$$\int\limits_{R_n^{-1}}^{r_n^{-1}} \frac{(\gamma x^{\gamma} - \gamma x^{-\gamma})dx}{\sqrt{(r_n^{-1} - x)(x - R_n^{-1})}} \geq 0. \tag{27}$$

Teniendo presente que $x^{\gamma} - x^{-\gamma}$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$ y se anula en 1, lo que falta por probar en *i)* sigue de (26).

Para demostrar *iii)* notemos primero que $r_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, n$\in \Lambda$ es equivalente a $R_n \underset{n\rightarrow\infty}{\longrightarrow} +\infty$, n$\in \Lambda$. Efectivamente si $r_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, n$\in \Lambda$ y $R_n \underset{n\rightarrow\infty}{\not\longrightarrow} +\infty$, n$\in \Lambda$ entonces existe $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que $\{R_n\}_{n\in\Lambda'}$ está acotada y según Lema 3, *ii)*, (24) y (26)

$$0 \leq \int_{r_n}^{R_n} \frac{(\gamma x^{\gamma} - \gamma x^{-\gamma})dx}{\sqrt{(R_n - x)(x - r_n)}} \underset{\substack{n\longrightarrow\infty \\ n\in\Lambda'}}{\longrightarrow} -\infty$$

y esta contradición demuestra: si $r_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, n$\in \Lambda$ se tiene que $R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, n$\in \Lambda$. De forma similar pero con (25) y (27) se prueba la otra implicación. Finalmente si $\Lambda \subset N$ es una sucesión de índices tal que $r_n \underset{\substack{n\longrightarrow\infty \\ n\in\Lambda}}{\not\longrightarrow} 0$ y $R_n \underset{\substack{n\to\infty \\ n\in\Lambda}}{\not\longrightarrow} +\infty$ entonces existe $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que $r_n \underset{n\in\Lambda'}{\longrightarrow} r > 0$ y $R_n \underset{n\in\Lambda'}{\longrightarrow} R < \infty$. En tal caso es fácil verificar que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty, n\in\Lambda'} n \int \frac{t d\nu_{W_n}(t)}{\sqrt{(R_n - t)(r_n - t)}} = -\infty \text{ ó}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty, n\in\Lambda'} n \int \frac{t d\nu_{W_n}(t^{-1})}{\sqrt{(r_n^{-1} - t)(R_n^{-1} - t)}} = -\infty.$$

Ambas situciones conllevan a una contradicción.

Si por ejemplo

$$\underline{\lim}_{n\to\infty, n\in\Lambda'} n \int \frac{t d\nu_{W_n}(t^{-1})}{\sqrt{(r_n^{-1} - t)(R_n^{-1} - t)}} = -\infty,$$

de la ecuación (25) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty, n\in\Lambda'} \int_{R_n^{-1}}^{r_n^{-1}} \frac{(\gamma x^{\gamma} - \gamma x^{-\gamma})dx}{\sqrt{(r_n^{-1} - x)(x - R_n^{-1})}} = +\infty,$$

lo cual no es posible pues $(x^{\gamma} - x^{-\gamma})$ está acotada superior e inferiormente en $[r, R]$. Como Λ es arbitraria, *iii)* queda probado.

De las relaciones en el Lema 3, conjuntamente con

$$\frac{t}{\sqrt{(R_n - t)(r_n - t)}} \geq -1 \text{ , t} \in [-\infty, 0], \text{ y}$$

$$\frac{t}{\sqrt{(r_n^{-1}-t)(R_n^{-1}-t)}} \geq -1, \ \mathrm{t} \in [-\infty, 0],$$

hacen que (24) y (25) devengan en

$$2n \geq A\gamma B(\gamma) R_n^{\gamma} + o(R_n^{\gamma}) + o(r_n^{-\gamma}),$$

$$2n \geq A\gamma B(\gamma) r_n^{-\gamma} + o(R_n^{\gamma}) + o(r_n^{-\gamma}).$$

Al sumar miembro a miembro estas desigualdades nos queda

$$\begin{aligned} 4n &\geq A\gamma B(\gamma)[R_n^{\gamma} + r_n^{-\gamma}] + o(R_n^{\gamma}) + o(r_n^{-\gamma}) \\ &= [R_n^{\gamma} + r_n^{-\gamma}] \left[A\gamma B(\gamma) + o(1)\right], \end{aligned}$$

luego

$$[A\gamma B(\gamma) + o(1)]^{-1} \geq \frac{[R_n^{\gamma} + r_n^{-\gamma}]}{4n}$$

de donde sigue trivialmente *iv)*.

Probemos la primera parte de *v.i)*, la otra se obtiene de forma similar. Hagamos los cambios de variable $x \leftrightarrow (2n)^{2\delta} x$ y $t \leftrightarrow (2n)^{2\delta} t$ en (24), multiplicando y dividiendo por $(2n)^{\chi}$ en el segundo sumando, llegamos a

$$0 = \frac{A}{\pi} \int_{r_n/(2n)^{2\delta}}^{R_n/(2n)^{2\delta}} \frac{(\gamma x^{\gamma} - \gamma (2n)^{-4\delta\gamma} x^{-\gamma}) dx}{\sqrt{(R_n/(2n)^{2\delta} - x)(x - r_n/(2n)^{2\delta})}}$$

$$+ (2n)^{1-2\delta\gamma-\chi} \int \frac{t (2n)^{\chi} d\nu_{W_n}((2n)^{2\delta} t)}{\sqrt{(R_n/(2n)^{2\delta} - t)(r_n/(2n)^{2\delta} - t)}},$$

de las hipotesis se observa que si $\left\{\frac{R_n}{(2n)^{2\delta}}\right\}$ está acotada, el segundo sumando se va a $-\infty$, mientras el primero está acotado superiormente, que contradice la igualdad a cero de la suma. La prueba de que $\left\{\frac{r_n^{-1}}{(2n)^{2\delta}}\right\}$ no está acotado superiormente se hace de la misma forma pero con (25) y así tenemos *v.i)*.

Sea $\Lambda \subset N$ tal que $\left\{\frac{R_n}{n^{1/\gamma}}\right\}_{n\in\Lambda}$ converge y sea L su límite. Si $L > 0$ entonces

$$\frac{t}{\sqrt{(R_n (2n)^{-1/\gamma} - t)(r_n (2n)^{-1/\gamma} - t)}} \underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{n\in\Lambda}{\longrightarrow}} -\sqrt{\frac{t}{t-L}},$$

uniformente en $t \in [-\infty, 0]$, y tomando límite en (24) obtenemos que L es solución de (16) con $d\beta = d\nu_1$. Si $L = 0$ de (24) se infiere que

$$\int \frac{t d\nu_{W_n}((2n)^{1/\gamma} t)}{\sqrt{(R_n(2n)^{-1/\gamma} - t)(r_n(2n)^{-1/\gamma} - t)}} \overset{n \in \Lambda}{\underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow}} 0,$$

luego $Sop(\nu_1) = \{0\}$ y $L = 0$ es solución de (16) con $d\beta = d\nu_1$. En cualquier caso, subsucesiones convergentes de $\left\{\frac{R_n}{n^{1/\gamma}}\right\}$ convergen a la solución de (16) y de la Proposición 2 se deduce *vi)* para $\left\{\frac{R_n}{n^{1/\gamma}}\right\}$. La segunda parte de *vi)* sigue de forma análoga.

Para demostrar *vii)* observe que (24) según el Lema 3 puede ser escrita

$$A\gamma B(\gamma) R_n^\gamma + o(R_n^\gamma) = A\gamma B(\gamma) \sqrt{\frac{r_n}{R_n}} r_n^{-\gamma} - 2n \int \frac{t d\nu_{W_n}(t)}{\sqrt{(R_n - t)(r_n - t)}}$$

luego

$$A\gamma B(\gamma) R_n^\gamma \geq 2n \int\limits_{[-\infty, (2n)^\delta B_1]} \frac{-t d\nu_{W_n}(t)}{\sqrt{(R_n - t)(r_n - t)}}$$

$$\geq 2n \int\limits_{[-\infty, B_1]} \frac{-t d\nu_{W_n}(t)}{\sqrt{(R_n/(2n)^\delta - t)(r_n/(2n)^\delta - t)}}$$

como $\delta > 1/\gamma$ de *iv)* se sigue que $\left\{\frac{R_n}{n^\delta}\right\}$ está acotada y según *i)* también $\left\{\frac{r_n}{n^\delta}\right\}$ es acotada, de la desigualdad anterior sigue la primera parte de *vii)*, la otra relación en *vii)* se obtiene análogamente de (25).

Otra forma de escribir (14) es

$$V_{\mu_n}(x) = \frac{1}{2}(c_n - \varphi_n(x)), \; x \in Sup(\mu_n),$$

como φ_n es suave en $(0, +\infty)$ entonces por el Lema E $d\mu_n$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Según el propio Lema se conoce que $d\mu_n(x) = u_n(x)dx$ con

$$u_n(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{r_n}^{R_n} \frac{\sqrt{(R_n - x)(x - r_n)} \varphi_n'(t) dt}{\sqrt{(R_n - t)(t - r_n)}(t - x)} + \frac{C}{\sqrt{(R_n - x)(x - r_n)}},$$

donde C es una constante.

Para *viii)*, basta comprobar que

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{r_n}^{R_n}\sqrt{(R_n-x)(x-r_n)}U_n(x)dx = 2n, \tag{28}$$

donde

$$U_n(z) = \int_{r_n}^{R_n}\frac{\varphi_n'(t)dt}{\sqrt{(R_n-t)(t-r_n)}(t-x)}.$$

$U_n(z)$ es una función analítica en el infinito y su desarrollo de Taylor allí es:

$$U_n(z) = -(1/z)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{r_n}^{R_n}\frac{t^k\varphi_n'(t)dt}{\sqrt{(R_n-t)((t-r_n)}}\right)z^{-k},$$

luego de (19) y (20)

$$U_n(z) = -2\pi n z^{-2} + O(z^{-3}),\ |z| > R_n. \tag{29}$$

Por la formula de Sojotski, $U_n(x) = \frac{1}{2}(U_n^+(x) + U_n^-(x),\ x \in \Delta_n$, donde $U_n^{\pm}$ son los valores fontera en Δ_n. Luego

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{r_n}^{R_n}\sqrt{(R_n-x)(x-r_n)}U_n(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{r_n}^{R_n}\left\{\left[\sqrt{(R_n-x)(x-r_n)}U_n(x)\right]^+ - \left[\sqrt{(R_n-x)(x-r_n)}U_n(x)\right]^-\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 i}\oint_{\partial(C\setminus\Delta_n)}\sqrt{(z-R_n)(z-r_n)}U_n(z)dz = \frac{1}{\pi}\underset{z=\infty}{res}\left\{\sqrt{(z-R_n)(z-r_n)}U_n(z)\right\}, \tag{30}$$

donde la rama que se toma de $\sqrt{(z-R_n)(z-r_n)} > 0,\ z > R_n$. De (29) y (30) sigue (28), que era lo que se necesitaba demostrar.

Según el Lema D:

$$c_n = -2nF(r_n; R_n) \text{ (donde } F \text{ es como en (21))}$$

$$= -2n \log \frac{R_n - r_n}{4} + \frac{A}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{\varphi_n(t)dt}{\sqrt{(R_n - t)(t - r_n)}}$$

$$= -2n \log \frac{R_n - r_n}{4} + \frac{A}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{(t^\gamma - t^{-\gamma})dt}{\sqrt{(R_n - t)(t - r_n)}} + \frac{A}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{\log |W_n(t)|\, dt}{\sqrt{(R_n - t)(t - r_n)}}. \tag{31}$$

Recordemos que

$$\log |W_n(t)| = \sum_{|x_{i,n}| \leq 1} \log |t - x_{i,n}| + \sum_{|x_{i,n}| > 1} \log \left| 1 - \frac{t}{x_{i,n}} \right|. \tag{32}$$

Si $|x_{i,n}| > 1$, $\{\log \left|1 - \frac{t}{x_{i,n}}\right|\}$ es menor que $\log |1 - t|$ y

$$\frac{1}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{\log \left|1 - \frac{t}{x_{i,n}}\right| dt}{\sqrt{(R_n - t)(t - r_n)}} \leq \frac{1}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{\log |t - 1|\, dt}{\sqrt{(R_n - t)(t - r_n)}} = \log \frac{R_n - r_n}{4}. \tag{33}$$

Por otra parte, si denotamos por $d\nu_n(t) = \frac{dt}{\sqrt{(R_n - t)(t - r_n)}}$ (medida de equilibrio en $[r_n; R_n]$), entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_{r_n}^{R_n} \frac{\log |t - x_{i,n}| dt}{\sqrt{(R_n - t)(t - r_n)}} = -V_{d\nu_n}(x_{i,n}) = \log \frac{R_n - r_n}{4} + \log |\Phi_{\Delta_n}(x_{i,n})|\,, \tag{34}$$

donde Φ_{Δ_n} es la transformación conforme del exterior de Δ_n en el exterior del círculo unidad, que lleva el infinito en el infinito, conservando la dirección. Luego si $|x_{i,n}| \leq 1$ entonces $\{\log |\Phi_{\Delta_n}(x_{i,n})|\}$ es acotada, concluyendose de (31), usando (32-34) lo que se dice en *ix)*.

Para demostrar *x)* basta tener presente *viii)*, la forma que tiene φ_n' (ya utilizada en *ii)*), las estimaciones en *iv)* y *v)* del Lema 3,así como $R_n^{\gamma-1} = o(nr_n^{-1})$ y $r_n^{-\gamma-1} = o(nr_n^{-1})$.$\square$

En el lema próximo estudiamos el comportamiento de la función de Green en $\overline{C}\backslash\Delta_n$.

Lema 5. i) *Si $g_{\Delta_n}(z,t)$ denota la función de Green en $\overline{C}\backslash\Delta_n$ con polo en t entonces:*

$$\int g_{\Delta_n}(z,t)d\nu_{W_n}(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(\nu, \overline{C}\backslash[0,+\infty), z)$$

uniformemente en $C\backslash R$, donde

$$g(\nu, \overline{C}\backslash[0,+\infty), z) = \int g_{\overline{C}\backslash[0,+\infty)}(z,t)d\nu(t) = \int \log\left|1 + 2\frac{t}{z-t} - 2\sqrt{\frac{t}{(z-t)^2}}\right| d\nu(t).$$

La rama de la raíz es tal que $\left|1 + 2\frac{t}{z-t} - 2\sqrt{\frac{t}{(z-t)^2}}\right| > 1,\ z \in C\backslash R,\ t \in (-\infty, 0).$

ii) *Si $\eta > 0$, entonces*

$$g_{\Delta_n}(z,(2n)^\eta t) = 2\sqrt{\frac{1}{R_n} - \frac{1}{t(2n)^\eta}}\Im(\sqrt{z}) + o(\sqrt{\frac{1}{R_n} + \frac{1}{n^\eta}}),$$

uniformemente en $t \in [-\infty, 0)$, la rama de la raíz es tal que $\sqrt{-1} = i$.

iii) *Sea $\eta > 0$, entonces*

$$g_{\Delta_n}(z,(2n)^{-\eta} t) = 2\sqrt{r_n - (2n)^{-\eta} t}\Im(\sqrt{\frac{1}{z}}) + o(\sqrt{r_n + (2n)^{-\eta}})$$

uniformemente en $t \in (-\infty, 0]$, la rama de la raíz es tal que $\sqrt{-1} = i$.

iv) *Si $v_{\Delta_n}(A\varphi, z)$ es la solución del problema de Dirichlet en $\overline{C}\backslash\Delta_n$, que sobre Δ_n es igual a $A\varphi$ entonces para cada $z \in C\backslash R_+$:*

$$v_{\Delta_n}(A\varphi, z) =$$

$$A\left(R_n^{\gamma-1/2}B(\gamma-1)\Im(\sqrt{z})+r_n^{-\gamma+1/2}B(\gamma-1)\Im(\sqrt{\frac{1}{z}}\right)+o\left(R_n^{\gamma-1/2}\right)+o\left(r_n^{-\gamma}\right),$$

cuando $n\to\infty$. La convergencia es uniforme en cada compacto contenido en $C\backslash R_+$.

Demostración:

Por definición $g_{\Delta_n}(z,t)$, t$\in\bar{C}\backslash\Delta_n$, satisface:

- Es armónica en $\overline{C}\backslash(\Delta_n\cup\{t\})$.
- Sobre Δ_n es igual a 0.
- Si t es finito, $g_{\Delta_n}(z,t)+\log|z-t|$ está acotada cuando $z\longrightarrow t$. $g_{\Delta_n}(z,\infty)-\log|z|$ es acotada cuando $z\longrightarrow\infty$.

$$\begin{aligned}g_{\Delta_n}(z,\infty)&=\log|\Phi_{\Delta_n}(z)|\\&=\log\left|\frac{2}{R_n-r_n}(z-\frac{R_n+r_n}{2}+\sqrt{T_n(z)})\right|,\end{aligned}$$

donde $T_n(z)=(z-R_n)(z-r_n)$ y Φ_{Δ_n} es la transformación conforme del exterior de Δ_n en el exterior del círculo unidad, $\Phi_{\Delta_n}(\infty)=\infty$, $\Phi'_{\Delta_n}(\infty)>0$.

Para cada t finito

$$g_{\Delta_n}(z,t)=g_{[\frac{1}{R_n-t},\frac{1}{r_n-t}]}(\frac{1}{z-t},\infty)$$

$$g_{\Delta_n}(z,t)=\log\left|-\frac{R_n+r_n}{R_n-r_n}+2\frac{R_nr_n+(z-R_n-r_n)t}{(R_n-r_n)(z-t)}+\frac{2}{R_n-r_n}\sqrt{\frac{T_n(z)T_n(t)}{(z-t)^2}}\right|$$

y la demostración de *i), ii)* y *iii)* sigue de *iii) y iv)* en el Lema 4.

La prueba de *iv)* es inmediata de *iv)* en el Lema 3 y de la conocida igualdad

$$v_{\Delta_n}(A\varphi,z)=\frac{A}{\pi}\int_{r_n}^{R_n}\Re\left(\frac{\sqrt{(R_n-z)(r_n-z)}}{z-t}\right)\frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{(R_n-t)(t-r_n)}}.\square$$

3. Asintótica de polinomios ortogonales

Consideremos una medida como en (3) que satisface (4).

Para cada n y m en Z_+, designemos por $h_{n,m}$ el $m-$ésimo polinomio ortonormal con respecto a

$$\frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|},$$

con coeficiente principal, $\kappa_{n,m}$, positivo.

El estudio del comportamiento asintótico de $h_{n,n}$ en $C\backslash R$ es el objetivo fundamental de este capítulo. Las ideas para la obtención de estos resultados es la siguiente: Los polinomios ortogonales se relacionan con la función de Christoffel y esta a su vez con los potenciales de la medida de equilibrio encontradas en el capítulo anterior. Tales son las líneas de razonamiento que se siguen en [**24**] según las ideas en [**30**].

Para cada $n \in N$, designemos por

$$K_n(\tau, z) := \sup_{\substack{p \in \Pi_n \\ p \not\equiv 0}} \frac{|p^2(z)|}{\int\limits_0^{+\infty} |p^2(x)| \frac{\exp(-\tau(x))}{W_n(x)} dx}, \tag{35}$$

la función de Christofell asociada a τ, donde $\prod_n$ es el conjunto de todos los polinomios con grado a lo sumo n.

En los Lemas que siguen consideraremos $A > 0$ fijo. Para cada $n \in N$, denotaremos por μ_n la medida de equilibrio con campo externo $\varphi_n(x) = A\varphi(x) + \log|W_n(x)|$, donde $\varphi(x) = x^\gamma + x^{-\gamma}$.

Lema 6. *Se cumple:*

$$K_n(A\varphi, z) \leq \frac{|\Phi_{\Delta_n}(z)|}{\pi \; dist(z, \Delta_n)} \exp\{c_n - 2V_{\mu_n}(z)\},$$

para cada $z \in C\backslash\Delta_n$ *y* $n \in N$, *donde* V_{μ_n} *es el potencial logarítmico de la medida* μ_n, Δ_n *es el soporte de* μ_n, $dist(z, \Delta_n)$ *es la distancia de* z *a* Δ_n *y* Φ_{Δ_n} *es la transformación conforme del complemento de* Δ_n *en el exterior del círculo unidad, tal que* $\Phi_{\Delta_n}(\infty) = \infty$ *y* $\Phi'_{\Delta_n}(\infty) > 0$.

Demostración:

Sean $p \in \Pi_n$, $p \not\equiv 0$, $u_n(z) = 2V_{\mu_n}(z) - c_n$, $\widetilde{u}_n(z)$ una función armónica conjugada de $u_n(z)$ ($u_n(z)$ es armónica en $C \backslash \Delta_n$ y $\widetilde{u}_n(z)$ se determina unívocamente salvo una constante) y

$$G(z) = \frac{p^2(z)}{\Phi_{\Delta_n}(z)} \exp\left\{u_n(z) + i\widetilde{u}_n(z)\right\}.$$

Fácilmente se ve que $G \in H^1(\overline{C} \backslash \Delta_n)$ y se anula en el infinito. Según la fórmula de Cauchy:

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial(\overline{C}\backslash\Delta_n)} G(\xi)(\xi - z)^{-1} d\xi.$$

Luego

$$\frac{|p^2(z)| \exp(2V_{\mu_n}(z) - c_n)}{|\Phi_{\Delta_n}(z)|} = |G(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Delta_n} \frac{|G(t)|}{|z-t|} dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi \; dist(z, \Delta_n)} \int \left|p^2(t)\right| \frac{\exp(-\tau(x))}{|W_n(t)|} dt,$$

y lo que queríamos demostrar, sigue inmediatamente de (35).□

Designemos por $\xi_{i,n}$, $i = 1, ..., n$ las raíces de la ecuación:

$$\cos\left[\pi \int\limits_{r_n}^{x} d\mu_n(t)\right] = 0, \text{ en } \Delta_n \text{ y} \tag{36}$$

$$d\mu_n^*(t) = \sum_{i=1}^{n} d\delta_{\xi_{i,n}}(t). \tag{37}$$

Lema 7. i) *Si $n \in N$ y $f(.)$ es una función continua y de variación acotada en Δ_n entonces*

$$\left|\int f(t)d\mu_n(t) - \int f(t)d\mu_n^*(t)\right| \leq \frac{1}{2} var_{\Delta_n}(f),$$

donde $var_{\Delta_n}(f)$ es la variación total de $f(.)$ en Δ_n.

ii) *Para cada* $n \in N$ *y* $z \in C \backslash \Delta_n$:

$$\left| V_{\mu_n}(z) - V_{\mu_n^*}(z) \right| \leq \log \left(1 + \frac{R_n - r_n}{dist(z, \Delta_n)} \right).$$

iii) *Si* $f(.)$ *es una función continua con soporte compacto en* R, *para la cual existe* $M > 0$ *tal que para toda* $x \in R$, $0 \leq f(x) \leq M$ *y* $\int_R f(x)dx = 1$ *entonces*

$$-\int_R f(x) \log |x| dx \leq 1 + \log(2M).$$

iv) *Para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $J \in N$ *tal que si* $n \geq J$ *y* $s_n \geq n^{(1+\epsilon)/\gamma}$ *entonces*

$$\int_0^{+\infty} \exp\left\{-(2V_{\mu_n} + \varphi_n)(t)\right\} dt \leq E_2 s_n \exp(-c_n),$$

donde E_2 *es una constante independiente de* ϵ.

v) *Existe una constante* E_3 *tal que* $V_{\mu_n}(z) - V_{\mu_n^*}(z) \leq \log(E_3 n^{1+2/\gamma})$, *para toda* $z \in C$.

Demostración:

Por la técnica usual de descomposición de funciones de variación acotada en diferencia de funciones monótonas crecientes, basta demostrar *i)* para $f(.)$ continua y creciente, en tal caso:

$$\int_{\Delta_n} f(t)(d\mu_n(t) - d\mu_n^*(t)) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_{\xi_{i,n}}^{\xi_{i+1,n}} f(t)d\mu_n(t) - f(\xi_{i+1,n}) \right] + \int_{r_n}^{\xi_1} f(t)d\mu_n(t) - \frac{1}{2} f(\xi_{1,n}) +$$

$$+ \int_{\xi_{n,n}}^{R_n} f(t)d\mu_n(t) - \frac{1}{2} f(\xi_{1,n)}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[f(R_n) - f(\xi_{1,n}) \right] \leq \frac{1}{2} var(f),$$

con lo que se demuestra *i)*.

Sea $z \in C \backslash \Delta_n$, $f(t) = \log \frac{1}{|z-t|}$ y $t_z \in [r_n, R_n]$ tal que $|z - t_z| = dist(z, [r_n, R_n])$. Entonces $f(.)$ es creciente a la izquierda de t_z y decreciente a la derecha de t_z, luego:

$$var_{\Delta_n} f \leq var_{[r_n, t_z]} f + var_{[t_z, R_n]} = \log \frac{|z - r_n|}{|z - t_z|} + \log \frac{|z - R_n|}{|z - t_z|}$$

$$\leq 2 \log \left[1 + \frac{R_n - r_n}{dist(z, \Delta_n)} \right],$$

y *ii)* se obtiene inmediatamente de *i)*.

El cálculo siguiente prueba *iii)*:

$$\int f(x) \log \frac{1}{|x|} dx = \frac{1}{2M} \int f\left(x/\{2M\}\right) \left[\log \frac{1}{|x|} + \log(2M) \right] dx$$

$$\leq \frac{1}{2M} \int f(x/(2M)) \log \frac{1}{|x|} dx + \log(2M)$$

$$\leq \frac{1}{2M} \left[\int_{-1}^{1} f(x/(2M)) \log \frac{1}{|x|} dx \right] + \log(2M)$$

$$\leq - \int_{0}^{1} \log x \; dx + \log(2M) = 1 + \log(2M).$$

Según *iv)* del Lema 4, dado $\epsilon > 0$ existe $J \in N$ tal que si $n \geq J$, $n^{(1+\epsilon)/\gamma} \geq R_n$. Luego si s_n cumple con las hipótesis en *iv)*

$$\int_{0}^{+\infty} \exp\left\{ -(2V_{\mu_n} + \varphi_n)(t) \right\} dt \leq s_n e^{-c_n} + \int_{s_n}^{+\infty} \exp\left(-Ax^\gamma + 2n \log x \right) dx$$

$$\leq s_n e^{-c_n} + \frac{1}{A\gamma s_n^\gamma - 2n - 1} \exp\left[-s_n^\gamma (A - \frac{(2n+1)\log s_n}{s_n^\gamma}) \right]$$

y a partir de esta desigualdad, la demostración de *iv)* se obtiene teniendo presente *ix)* del Lema 4.

Es suficiente probar la desigualdad en *v)* para $z = x \in \Delta_n$. Supongamos que $x \in (\xi_{m,n}, \xi_{m+1,n})$, como antes denotemos por $f(t) = \log \frac{1}{|t-x|}$, en tal caso

$$V_{\mu_n}(x) - V_{\mu_n^*}(x) = \left\{ \int_{r_n}^{\xi_{1,n}} f(t)d\mu_n(t) - \frac{1}{2}f(\xi_{1,n}) \right\} + \sum_{i=1}^{m-1} \left\{ \int_{\xi_{i,n}}^{\xi_{i+1,n}} f(t)d\mu_n(t) - f(\xi_{i+1,n}) \right\} +$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{n-1} \left\{ \int_{\xi_{i,n}}^{\xi_{i+1,n}} f(t)d\mu_n(t) - f(\xi_{i,n}) \right\} + \int_{\xi_{n,n}}^{R_n} f(t)d\mu_n(t) - \frac{1}{2}f(\xi_{n,n}) +$$

$$+ \int_{\xi_{m,n}}^{\xi_{m+1,n}} f(t)d\mu_n(t) - \frac{1}{2}f(\xi_{1,n}) - \frac{1}{2}f(\xi_{n,n}).$$

Por la monotonía de $f(.)$, las primeras cuatro expresiones en la igualdad anterior son negativas. Luego

$$V_{\mu_n}(x) - V_{\mu_n^*}(x) \leq \log(R_n - r_n) + \int_{\xi_{m,n}}^{\xi_{m+1,n}} f(t)d\mu_n(t).$$

De *ix)* en el Lema 4 y de *iii)* se sigue

$$V_{\mu_n}(x) - V_{\mu_n^*}(x) \leq \log(R_n - r_n) + \log\left(E_2 n r_n^{-1}\right).$$

La prueba de *v)* se completa teniendo presente *iv)* en el Lema 4.□

Lema 8. *Para cada compacto $K \subset C \backslash R_+$, existe una constante $E > 0$ tal que si $A > 0$ y $z \in K$ entonces se cumple*

$$E\ n^{-15} \exp\{c_n - 2V_{\mu_n}(z)\} \leq K_n(A\varphi, z).$$

Demostración:

Consideremos $P_n^*(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - \xi_{i,n})$, donde $\xi_{i,n}$, $i = 1, ..., n$ son las soluciones de (36). Si tomamos $d\mu_n^*$ como en (37), se cumple:

$$|P_n^*(z)| = \exp\left\{-V_{\mu_n^*}(z)\right\}, \tag{38}$$

de *v)* en el Lema 7 obtenemos:

$$|P_n^*(z)| \leq E_3 n^5 \exp\{-V_{\mu_n}(z)\} \text{ y}$$

$$\int |P_n^*(x)|^2 \frac{\exp\{-A(x^\gamma + x^{-\gamma})\}}{|W_n(x)|} dx \leq E_5 n^{10} \int \exp\{-(2V_{\mu_n} + \varphi_n)(x)\} dx.$$

Considerando $s_n = n^3$ en *iv)* del Lema 7:

$$\int |P_n^*(x)|^2 \frac{\exp\{-A(x^\gamma + x^{-\gamma})\}}{|W_n(x)|} dx \leq E_5 n^{13} \exp(-c_n). \tag{39}$$

Por otra parte, según *i)* y *v)* del Lema 4, para $K \subset C\backslash R_+$ compacto existe una constante E_6 (depende de K) tal que si $z \in K$

$$\left(1 + \frac{R_n - r_n}{dist(z, \Delta_n)}\right)^{-1} \geq E_6 n^{-2}.$$

Entonces por *ii)* del Lema 7 se obtiene

$$\exp\left\{-V_{\mu_n^*}(z)\right\} \geq E_6 n^{-2} \exp\{-V_{\mu_n}(z)\} \tag{40}$$

y la demostración del Lema se completa de (35), (38)-(40).□

Los Lemas 5, 6 y 8 permiten dar la asintótica de la función de Christoffel expresada en (35).

Lema 9. *Si* $\nu_{W_n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} v$ *y* $Sup(v) \cap (-\infty, 0) \not\equiv \emptyset$ *entonces*

$$\left\{\frac{K_n(A\varphi, z)}{|W_n(z)|}\right\}^{1/(2n)} \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} \exp\left\{g(\nu, \overline{C}\backslash R_+, z)\right\}, \tag{41}$$

uniformemente en $C\backslash R$*, donde* $g(\nu, \overline{C}\backslash R_+, z)$ *es como en* i) *del Lema 5.*

Demostración:

Para cada $n \in N$, sean $g_{\Delta_n}(z, \infty)$ la función de Green en $C\backslash\Delta_n$, con polo en ∞, V_{μ_n} el potencial logarítmico de μ_n y $v_{\Delta_n}(\varphi_n, z)$ la solución del problema de Dirichlet en $\overline{C}\backslash\Delta_n$, con valor frontera $\varphi_n = A(x^\gamma + x^{-\gamma}) + \log|W_n(x)|$.

$$2V_{\mu_n}(z) + 2ng_{\Delta_n}(z, \infty) + v_{\Delta_n}(\varphi_n, z)$$

es una función armónica en $\overline{C}\backslash\Delta_n$, continua en Δ_n y sobre Δ_n es igual a c_n, por los principios del mínimo y del máximo para funciones armónicas:

$$2V_{\mu_n}(z) + 2ng_{\Delta_n}(z,\infty) + v_{\Delta_n}(\varphi_n, z) \equiv c_n, \text{ en } C. \tag{42}$$

Por otro lado

$$v_{\Delta_n}(\varphi_n, z) = v_{\Delta_n}(A\varphi, z) + \log|W_n(z)| - \deg(W_n(.))g_{\Delta_n}(z,\infty) + \sum_{x_{i,n}\neq\infty} g_{\Delta_n}(z, x_{i,n}), \tag{43}$$

donde $g_{\Delta_n}(z, x_{i,n})$ es la función de Green en $C\backslash\Delta_n$, con polo en $x_{i,n}$.

Con la notación $d\nu_{W_n}(t) = \frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} d\delta_{x_{i,n}}$, de (42) y (43)

$$c_n - 2V_{\mu_n}(z) = 2n\int g_{\Delta_n}(z,t)d\nu_{W_n}(t) + v_{\Delta_n}(A\varphi, z) + \log|W_n(z)|. \tag{44}$$

Fijemos un compacto $K \subset C\backslash R_+$, entonces por *iv)* en el Lema 5 y *iv)* del Lema 4

$$v_{\Delta_n}(A\varphi, z) = O(n^{1-1/(2\gamma)}), \tag{45}$$

uniformemente sobre K.

La prueba del Lema se completa de los Lemas 6, 8 y 5 y de las igualdades (44) y (45).□

Observación: El límite en (41) no depende de A.

Si las hipótesis del Lema 9 ($Sup(\nu) \cap (-\infty, 0) \not\equiv \emptyset$) no se cumplen, la descripción de la asintótica de $K_n(A\varphi, .)$ hay que realizarla a partir del conocimiento de la cantidad y la velocidad de los puntos de interpolación que se van a 0 y a ∞. La dificultad aparece al estimar V_{μ_n}, para resolver este problema es necesario un análisis más detallado de $\int g_{\Delta_n}(z,t)d\nu_{W_n}(t)$ en (44). Hay 2 situaciones básicas que se describen a continuación:

Lema 10. *Supongamos que existe* δ, $0 < 2\delta \leq 1/\gamma$ *y* $\chi_1 \in [0,\delta))$, $\chi_2 \in [0,\delta))$ *tales que:*

a) $(2n)^{\chi_1}\nu_{W_n}((2n)^{2(\delta-\chi_1)}t) \xrightarrow[n]{*} \nu_1(t)$ *en* $(-\infty, 0)$, $0 \notin \overline{(Sop(\nu_1))}$,

$(2n)^{\chi_2}\nu_{W_n}((2n)^{-2(\delta-\chi_2)}t^{-1}) \xrightarrow[n]{*} \nu_2(t)$ *en* $(-\infty, 0)$, $0 \notin \overline{(Sop(\nu_2))}$.

b)

$$(2n)^{\delta}\nu_{W_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{*} \overline{\nu}(t),$$

$$g_{\overline{C}\setminus[0,+\infty)}(z,t) \in L_1(d\overline{\nu}).$$

c) Para algún $B<0$, $C<0$, $D<0$ y $E<0$,

$$\nu_{W_n}((Bn^{2(\delta-\chi_1)}, C) = o(n^{-\delta}),$$

$$\nu_{W_n}((D, En^{-2(\delta-\chi_2)})) = o(n^{-\delta}).$$

d) Adicionalmente, si $\delta = 1/(2\gamma)$ se supone

$$\nu_{W_n}((2n)^{1/\gamma}t) \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \nu_3(t),\ en\ [-\infty,0],\ \ 0 \notin \overline{(Sop(\nu_3)\cap(-\infty,0))},$$

$$\nu_{W_n}((2n)^{-1/\gamma}t^{-1}) \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \nu_4(t),\ en[-\infty,0], 0 \notin \overline{(Sop(\nu_4)\cap(-\infty,0))},$$

y si $\delta < 1/(2\gamma)$ se considera que

$$(Sop(\bar{\nu}) \cup Sop(\nu_1) \cup Sop(\nu_2)) \cap (-\infty,0) \not\equiv \emptyset.$$

Entonces

$$\frac{\log|K_n(A\varphi,z)/W_n(z)|}{(2n)^{1-\delta}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tag{46}$$

$$\int \log\left|1+2\frac{t}{z-t} - 2\sqrt{\frac{zt}{(z-t)^2}}\right| d\overline{\nu}(t) +$$

$$+\Im(\sqrt{z})\left[\int\limits_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}\,d\nu_1(t^{-1}) + B_1(\delta)\right] + \Im(\sqrt{\frac{1}{z}})\left[\int\limits_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}\,d\nu_2(t^{-1}) + B_2(\delta)\right],$$

uniformemente en cada compacto de $C\setminus R$, la rama de la primera raíz es tal que

$$\left|1+2\frac{t}{z-t} - 2\sqrt{\frac{zt}{(z-t)^2}}\right| > 1,\ \ t\in(-\infty,0),\ \ z\in C\setminus R,$$

en las otras raíces, la rama que se toma es tal que $\sqrt{-1} = i$ y

$$B_i(\delta) = \begin{cases} 0 & si\ 0<\delta<1/(2\gamma) \\ \int \sqrt{L_i^{-1} - t}\,d\nu_{i+2}(t^{-1}) + B(\gamma-1)L_i^{1-1/(2\gamma)} & si\ \delta = 1/(2\gamma) \end{cases},$$

donde L_1 y L_2 son las soluciones de la ecuación (16) con $A=1$, $d\beta = d\nu_3$ y $d\beta = d\nu_4$, respectivamente.

Demostración:

Si estudiamos la demostración del Lema 9, vemos que para obtener (44) y (45) no se requirieron las hipótesis del Lema. Por otra parte,

$$2n \int g_{\Delta_n}(z,t) d\nu_{W_n}(t)$$

$$= 2n \left\{ \int\limits_{[-\infty, B(2n)^{2(\delta-\chi_1)}]} + \int\limits_{[B(2n)^{2(\delta-\chi_1)}, C]} + \int\limits_{[C,D]} + \int\limits_{[D, E(2n)^{-2(\delta-\chi_2)}]} + \int\limits_{[E(2n)^{-2(\delta-\chi_2)}, 0]} \right\} g_{\Delta_n}(z,t) d\nu_{W_n}(t) \tag{47}$$

Si $K \subset C \backslash R$, $\{g_{\Delta_n}(z,t)\}$ esta uniformemente acotada para $z \in K$, $t \in [-\infty, 0]$, luego de las hipótesis en el caso $\delta < 1/(2\gamma)$ se sigue que

$$(2n) \int\limits_{[B(2n)^{2(\delta-\chi_1)}, C]} g_{\Delta_n}(z,t) d\nu_{W_n}(t) = o(n^{1-\delta}) \text{ y} \tag{48}$$

$$(2n) \int\limits_{[D, E(2n)^{-2(\delta-\chi_2)}]} g_{\Delta_n}(z,t) d\nu_{W_n}(t) = o(n^{1-\delta}). \tag{49}$$

Según el Lema 5

$$(2n) \int\limits_{[-\infty, B(2n)^{2(\delta-\chi_1)}]} g_{\Delta_n}(z,t) d\nu_{W_n}(t) = (2n) \int\limits_{[-\infty, B]} g_{\Delta_n}(z, (2n)^{2(\delta-\chi_1)} t) d\nu_{W_n}((2n)^{2(\delta-\chi_1)} t)$$

$$= (2n)^{1-\delta} \int\limits_{[-\infty, B]} \sqrt{\frac{(2n)^{2(\delta-\chi_1)}}{R_n} - \frac{1}{t}} (2n)^{\chi_1} d\nu_{W_n}((2n)^{2(\delta-\chi_1)} t) + o\left\{ (2n)^{-(\delta-\chi_1)} \sqrt{\frac{(2n)^{2(\delta-\chi_1)}}{R_n} + 1} \right\},$$

y de *v)* en el Lema 4 se obtiene

$$(2n) \int\limits_{[-\infty, B(2n)^{2(\delta-\chi_1)}]} g_{\Delta_n}(z,t) d\nu_{W_n}(t) = (2n)^{1-\delta} \int\limits_{[-\infty, B]} \sqrt{-t}\, d\nu_1(t^{-1}) + o(n^{1-\delta}).$$

Análogamente nos queda

$$(2n) \int\limits_{[E(2n)^{-(2(\delta-\chi_2))}, 0]} g_{\Delta_n}(z,t) d\nu_{W_n}(t) = (2n)^{1-\delta} \int\limits_{[E,0]} \sqrt{-t}\, d\nu_2(t^{-1}) + o(n^{1-\delta}) \text{ y}$$

$$(2n)\int_{[C,D]} g_{\Delta_n}(z,t)d\nu_{W_n}(t) = (2n)^{1-\delta}\int_{[C,D]} \log\left|1+2\frac{t}{z-t}-2\sqrt{\frac{zt}{(z-t)^2}}\right| d\overline{\nu}(t)+o(n^{1-\delta})$$

de donde se concluye la demostración en el caso $\delta < 1/(2\gamma)$.

La prueba cuando $\delta = 1/(2\gamma)$ es totalmente análoga después de observar que

$$2n\int g_{\Delta_n}(z,t)d\nu_{W_n}(t)$$

$$= 2n\{\int_{[-\infty,B(2n)^{1/(2\gamma)}]} + \int_{[B(2n)^{1/(2\gamma)},C(2n)^{2(\delta-\chi_1)}]} + \int_{[C(2n)^{2(\delta-\chi_1)},D]} + \int_{[D,E]} + \tag{50}$$

$$\int_{[E,F(2n)^{-2(\delta-\chi_2)}]} + \int_{[F(2n)^{-2(\delta-\chi_2)},G(2n)^{-1/(2\gamma)}]} + \int_{[G(2n)^{-1/(2\gamma)},0]} \}g_{\Delta_n}(z,t)d\nu_{W_n}(t).\square$$

Ahora ya estamos en condiciones de describir la asintótica de $h_{n,n}$. Como dijimos anteriormente la técnica consiste en obtener una cota superior e inferior lo suficientemente buena en términos de el núcleo de Christoffel.

Observación: El límite en (46) no depende de A.

Teorema 11. *Sea* $\nu_{W_n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\delta_{sx_{i,n}}$, $\nu_{W_n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} v$ *y* $Sup(v)\cap(-\infty,0) \not\equiv \emptyset$ *entonces*

$$\left|\frac{h^2_{n,n}(z)}{W_n(z)}\right|^{1/(2n)} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \exp\left\{g(\nu,\overline{C}\backslash R_+,sz)\right\},$$

uniformemente en $C\backslash R$, *donde* $g(\nu,\overline{C}\backslash R_+,z)$ *es como en 1 del Lema 5.*

Demostración:

Note que $h_{n,n}$ depende de la expresión de τ y de los puntos de interpolación A_n, eso lo indicaremos escribiendo $h_{n,n}(\tau,A_n,z)$. Observe que si τ satisface (4) con valor s entonces $g(x)$=$\tau(x/s)$ satisface (4) con valor $s=1$ y además:

$$h_{n,n}(\tau,A_n,z) = s^{\alpha+1-d_n}h_{n,n}(g,\widetilde{A}_n,sz)$$

donde d_n es la cantidad de $x_{i,n}$ tales que $|x_{i,n}| \leq 1$ y $\widetilde{A}_n = sA_n$. De modo que el caso $s \neq 1$ es reducido trivialmente a $s=1$. Asumiremos que $s=1$. El parámetro α no interviene en la demostración, luego para simplificar la notación consideremos el caso $\alpha = 0$. Ahora en la expresión de $h_{n,m}$ solo haremos referencia a τ.

Por (4), para cualquier $0 < \epsilon < 1$, existen constantes E_1 y E_2 tales que

$$(1-\epsilon)\varphi(x) + E_1 \leq \tau(x) \leq (1+\epsilon)\varphi(x) + E_2,\ x \in R_+. \tag{51}$$

Teniendo presente que $K_n(\tau, z)$ es monótona creciente en τ (esto significa que si $\tau_1(x) \leq \tau_2(x)$, satisfaciendo ambas las condiciones (3) y (4) entonces $K_n(\tau_1, z) \leq K_n(\tau_2, z)$) obtenemos

$$e^{E_1} K_n((1-\epsilon)\varphi, z) \leq K_n(\tau, z) \leq e^{E_2} K_n((1+\epsilon)\varphi, z). \tag{52}$$

De la teoría general de polinomios ortogonales (ver [**29**]) se conoce que

$$K_n(\tau, z) = \sum_{m=0}^{n} \left| h_{n,m}^2(\tau, z) \right|, \tag{53}$$

luego

$$\left| h_{n,n}^2(\tau, z) \right| \leq K_n(\tau, z). \tag{54}$$

La fórmula de Christoffel-Darboux nos da

$$\sum_{m=0}^{n-1} h_{n,m}(\tau, z_1) h_{n,m}(\tau, z_2) = \frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)} \left\{ \frac{h_{n,n}(\tau, z_1) h_{n,n-1}(\tau, z_2) - h_{n,n}(\tau, z_2) h_{n,n-1}(\tau, z_1)}{z_1 - z_2} \right\},$$

tomando $z_1 = \overline{z}_2 = z \notin R$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1} \left| h_{n,m}^2(\tau, z) \right| &= \frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)} \frac{\Im\left[h_{n,n}(\tau, z) h_{n,n-1}(\tau, z) \right]}{\Im(z)} \\ &\leq \frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)} \frac{\left| h_{n,n}(\tau, z) h_{n,n-1}(\tau, z) \right|}{\left| \Im(z) \right|},\end{aligned}$$

y como

$$\left| h_{n,n-1}(\tau, z) \right| \leq \left[\sum_{m=0}^{n-1} \left| h_{n,m}^2(\tau, z) \right| \right]^{1/2},$$

se sigue que

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left| h_{n,m}^2(\tau, z) \right| \leq \left[\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau) \Im(z)} \right]^2 \left| h_{n,n}^2(\tau, z) \right|. \tag{55}$$

Luego de (53) y (55) sacamos

$$K_n(\tau,z) \leq \left[\left(\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)\Im(z)}\right)^2 + 1\right] \left|h^2_{n,n}(\tau,z)\right|. \qquad (56)$$

Nos resta estimar superiormente $\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)}$.

Según propiedad extremal del coeficiente principal

$$(\kappa_{n,n}(\tau))^{-2} \leq \int x^2 \left|\frac{h_{n,n-1}(\tau,x)}{\kappa_{n,n-1}(\tau)}\right|^2 \frac{\exp -\tau(x)}{|W_n(x)|} dx,$$

o lo que es lo mismo

$$\left(\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)}\right)^2 \leq \int x^2 h^2_{n,n-1}(\tau,x)\frac{\exp -\tau(x)}{|W_n(x)|}dx, \text{ y si } s_n \geq 0$$

$$\left(\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)}\right)^2 \leq s_n^2 + \int_{s_n}^{+\infty} x^2 h^2_{n,n-1}(\tau,x)\frac{\exp -\tau(x)}{|W_n(x)|}dx.$$

De (52) y (53) obtenemos

$$\left(\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)}\right)^2 \leq s_n^2 + E_2\int_{s_n}^{+\infty} x^2 K_n((1+\epsilon)\varphi,x)\frac{\exp -\tau(x)}{|W_n(x)|}dx. \qquad (57)$$

Si $s_n \geq R_{n,1+\epsilon}$, como

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Phi_{\Delta_{n,1+\epsilon}}(z)}{z} \text{ existe,}$$

el Lema 6 y (51) nos aseguran que existe $E_3 > 0$ tal que

$$\left(\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)}\right)^2 \leq s_n^2 + \frac{E_3\exp c_{n,1+\epsilon}}{s_n - R_{n,1+\epsilon}}\int_{s_n}^{+\infty} x^3 \exp\left\{-\left(2V_{\mu_{n,1+\epsilon}}(x) + (1-\epsilon)\varphi_n(x)\right)\right\}dx$$

$$\leq s_n^2 + \frac{E_3\exp c_{n,1+\epsilon}}{s_n - R_{n,1+\epsilon}}\int_{s_n}^{+\infty} x^{3+2n}\exp\left(-(1-\epsilon)x^{\gamma}\right)dx$$

$$\leq s_n^2 + \frac{E_3 \exp c_{n,1+\epsilon}}{s_n - R_{n,1+\epsilon}} \frac{1}{(1-\epsilon)\gamma s_n^\gamma - 2n - 4} \exp\left[-s_n^\gamma((1-\epsilon) - \frac{(2n+4)\log s_n}{s_n^\gamma})\right].$$

En particular, si $s_n = n^2$, nos queda

$$\left(\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)}\right)^2 \leq n^4 + E_4 n^{-2} \exp\left(c_{n,1+\epsilon} - \frac{1}{2}n^{2\gamma}\right).$$

De *ix)* en el Lema 4, se logra encontrar E_5 tal que

$$\left(\frac{\kappa_{n,n-1}(\tau)}{\kappa_{n,n}(\tau)}\right)^2 \leq E_5 n^4.$$

De la acotación anterior, la relación (56) se reescribe

$$K_n(\tau, z) \leq \left[E_6 \left(\frac{1}{\Im(z)}\right)^2 n^8 + 1\right] \left|h_{n,n}^2(\tau, z)\right|. \tag{58}$$

Ahora la demostración del Teorema se completa de (52), (54), (58), el Lema 9 y la observación realizada después de ese lema.□

Las acotaciones de $h_{n,n}$ obtenidas anteriormente nos permiten probar también el siguiente teorema. En la demostración la única variación consite en emplear el Lema 10 en lugar del Lema 9.

Teorema 12. *Sea*

$$\nu_{W_n} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{sx_{i,n}},$$

bajo las respectivas hipótesis y notaciones del Lema 10 se cumple

$$\frac{\log |h_{n,n}^2(\tau, z)/W_n(z)|}{(2n)^{1-\delta}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\int \log \left|1 + 2\frac{t}{sz - t} - 2\sqrt{\frac{szt}{(sz-t)^2}}\right| d\overline{\nu}(t) +$$

$$+\Im(\sqrt{sz}) \left[\int_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}\, d\nu_1(t^{-1}) + B_1(\delta)\right] + \Im(\sqrt{\frac{1}{sz}}) \left[\int_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}\, d\nu_2(t^{-1}) + B_2(\delta)\right],$$

en la misma región que del Lema 10.

4. Asintótica de los ceros de polinomios ortogonales respecto a medidas variantes

Denotemos por

$$h_{n,n}(z) = \kappa_{n,n} \prod_{i=1}^{n} (z - z_{i,n}), \tag{59}$$

los polinomios ortonormales respecto a $\frac{d\rho(x)}{W_n(x)}$ con coeficiente principal, $\kappa_{n,n}$, positivo. Para mayor comodidad escojamos los subíndices de los ceros de modo que $z_{1,n} < z_{2,n} < ... < z_{n,n}$. El objetivo del presente capítulo es estudiar el límite débil de las medidas

$$\frac{1}{n} d\nu_{h_{n,n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d\delta_{z_{i,n}}.$$

En el Capítulo 3 se estudió la asíntotica de $h_{n.n}$ fuera del soporte de la medida de ortogonalidad, aquí estudiaremos la asintótica en el soporte de la medida. Estos resultados tienen interes en si mismos por su aplicación a los métodos de cuadratura y a la interpolación. Cuando el soporte de la medida no es acotado los ceros se van a ∞, para contrarrestar este efecto se emplean dos metodos: el rescalamiento al caso acotado y la ponderación por factores que minimize el efecto de los ceros que se escapan a ∞. Estos métodos aparecen en (ver **[8], [9], [17], [36], [37]** y **[38]**).

La convergencia débil de $\frac{1}{n} d\nu_{h_{n,n}}$ a $d\sigma$ en $X \subset [0, +\infty]$ es equivalente a que para todo intervalo $[a, b] \subset X$, tal que $\sigma(\{a\}) = \sigma(\{b\}) = 0$ se cumpla $\frac{1}{n} \{$*cantidad de* $z_{i,n}$ *en* $[a, b]\} = \sigma[a, b] + o(1)$, cuando $n \to \infty$ (ver **[32]**).

Teorema 13. *Asumamos que* $\nu_{W_n} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \delta_{sx_{i,n}}$ *converge débilmente a* ν *cuando* $n \longrightarrow \infty$ *en* $(-\infty, 0)$ *y* $Sup(v) \cap (-\infty, 0) \not\equiv \emptyset$, *entonces*

$$\frac{1}{n} d\nu_{h_{n,n}}(x) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{*} d\sigma(x) = \frac{1}{s\pi} \int \sqrt{-\frac{t}{x}} \frac{d\nu(t/s)}{x - t} dx \ en\ [0, +\infty],$$

o sea para toda función $f(.)$ continua en $[0,+\infty]$ se cumple

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(z_{i,n}) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{s\pi}\int f(x)\int\sqrt{-\frac{t}{x}}\frac{d\nu(t/s)}{x-t}dx. \tag{60}$$

Demostración:

Según el Teorema 11 se cumple:

$$\left|\frac{h_{n,n}^2(z)}{W_n(z)}\right|^{1/(2n)} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \exp\left\{g(\nu,\overline{C}\backslash R_+,sz)\right\},$$

uniformemente en $C\backslash R$.

Tomando log a ambos miembros y teniendo presente (59)

$$\frac{1}{2n}\log\kappa_{n,n}+\frac{1}{n}\int\log|z-t|\,d\nu_{h_{n,n}}(t)-\frac{1}{2n}\log\zeta_n-\int\log|z-t/s|\,d\nu_{W_n}(t)$$

$$\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(\nu,\overline{C}\backslash R_+,sz) \tag{61}$$

uniformemente en $C\backslash R$.

El miembro izquierdo de (61) representa una funcion armónica en $C\backslash R$, luego podemos encontrar $\Upsilon_n(z)$ función analítica y multiforme en $C\backslash R$ de modo que

$$\Re\left(\Upsilon_n(z)\right)=\frac{1}{n}\int\log|z-t|\,d\nu_{h_{n,n}}(t)-\int\log|z-t/s|\,d\nu_{W_n}(t),$$

$$\frac{d}{dz}\Upsilon_n(z)=\frac{1}{n}\int\frac{d\nu_{h_{n,n}}(t)}{z-t}-\int\frac{d\nu_{W_n}(t)}{z-t/s}.$$

Por la convergencia uniforme en (61) y de las hipótesis se sigue

$$\frac{1}{n}\int\frac{d\nu_{h_{n,n}}(t)}{z-t}\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\int\left\{\frac{1}{z-t/s}+\frac{t}{(sz-t)^2}\left(\frac{szt}{(sz-t)^2}\right)^{-1/2}\right\}d\nu(t), \tag{62}$$

uniformemente en $C\backslash R$.

La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\nu_{h_{n,n}}(.)\right\}$ es débilmente compacta en $\overline{R_+}$, luego existen $\Lambda \subset N$ y σ una medida en $\overline{R_+}$ tales que

$$\frac{1}{n}\nu_{h_{n,n}}(.) \xrightarrow[n\to\infty]{*} \sigma.$$

Luego de (62)

$$\widehat{\sigma}(z) = \int \frac{d\sigma(t)}{z-t} = \int \left\{ \frac{1}{z-t} + \frac{t}{s(z-t)^2} \left(\frac{zt}{(z-t)^2} \right)^{-1/2} \right\} d\nu(t/s).$$

Apliquemos ahora la fórmula de inversión de Stieltjes-Perron (ver **[29]**). Sean $0 \leq a < b$

$$\sigma(a,b) = \lim_{\epsilon\to 0^+} -\frac{1}{\pi} \int_a^b \Im(\widehat{\sigma}(x+i\epsilon))dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \int \left\{ \frac{\epsilon}{(x-t)^2+\epsilon^2} + \frac{1}{s}\sqrt{-\frac{t}{x}}\frac{1}{x-t} + o(1) \right\} d\nu(t/s)dx, \qquad (63)$$

donde $o(1)$ representa una cantidad que se va a 0 cuando $\epsilon \to 0^+$. Es fácil verificar que

$$\left| \Im \left\{ \frac{t}{(z-t)^2} \left(\frac{zt}{(z-t)^2} \right)^{-1/2} \right\} \right| \leq \frac{|t|^{1/2}}{|x|^{1/2}|x-t|}.$$

Por el Teorema de Fubini se tiene que $\frac{|t|^{1/2}}{|x|^{1/2}|x-t|} \in L^1(d\nu \otimes dm)$, donde dm representa la medida de Lebesgue. Por orta parte,

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\epsilon dx}{(x-t)^2+\epsilon^2} = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{b-t}{\epsilon} - \arctan \frac{a-t}{\epsilon} \right) \leq 1.$$

Luego combinando el Teorema de Fubini y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue en (62), obtenemos fácilmente lo que queríamos demostrar.$\square$

Nota: Por la forma de la medida límite, la convergencia en (60) se puede exterder al espacio de las funciones Riemann integrables en $(0, 1)$ con respecto a $\frac{dx}{x^{1/2}}$ y en $(1, +\infty)$ respecto a $\frac{dx}{x^{3/2}}$.

En lo adelante, estudiaremos el caso en que los ceros de $W_n(.)$, salvo una cantidad $o(n)$, se van a 0 y a ∞, es decir:

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} d\nu_{W_n} \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \theta d\delta_0 \text{ en } [0, +\infty), \;\; \theta \in [0, 1].$$

En el siguiente Lema se prueba que los ceros de $h_{n,n}(.)$ también se van a 0 y a ∞.

Lema 14. *Bajo cualquiera de los 2 grupos de hipótesis del Teorema 12 se cumple:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d\delta_{z_{i,n}} \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \theta d\delta_0 \;\; en \;\; [0, +\infty).$$

Demostración:

Con los razonamientos para obtener (62), se puede concluir que para cierta constante $0 < E_1 < 1$ ($E_1 = \delta$ ó $E_1 = 1/(2\gamma)$) se cumple

$$\frac{1}{(2n)^{1-E_1}} \left(\int \frac{2d\nu_{h_{n,n}}(t)}{z-t} - \int \frac{d\nu_{W_n}}{z-t} \right) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} H(z), \tag{64}$$

uniformemente en $C \backslash R$, donde $H(z)$ es una función analítica en $C \backslash R$. Luego

$$\frac{1}{n} \left(\int \frac{1}{z-t} d\delta_{z_{i,n}}(t) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{z-t} d\nu_{W_n} \right) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0,$$

de donde

$$\frac{1}{n} \int \frac{1}{z-t} d\delta_{z_{i,n}}(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \theta \int \frac{1}{z-t} d\delta_0(t)$$

uniformemente en $C \backslash R_+$ (pues por el Teorema de Vitali (ver **[15]**) la convergencia en $C \backslash R$ se puede extender a la región de analiticidad $C \backslash R_+$.) y la conclusión del Lema sigue de la fórmula de inversión de Stieltjes-Perron.□

Es interesante e importante, atendiendo a su relación con su interpretación integral, describir continuamente la forma con que se van a 0 y a ∞ los ceros de $h_{n,n}$.

Teorema 15. *Bajo las hipótesis y notaciones del Teorema 10 se cumple:*

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\frac{2td\nu_{h_{n,n}}(x)}{1+x^2}\underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} d\sigma(x)\ \text{en}\ [0,+\infty)$$

donde

$$d\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{s}\int\frac{\sqrt{-tx}}{1+x^2}\frac{d\overline{\nu}(t)}{x-t}+\frac{E_1x^{1/2}+E_2x^{-1/2}}{1+x^2}\right\}dx.$$

Luego para toda función $f(.)$ continua en $[0,+\infty)$ y que se anule en ∞ se cumple

$$\begin{array}{c}\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2z_{i,n}f(z_{i,n})}{1+z_{i,n}^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\\ \frac{1}{\pi}\int f(x)\left\{\frac{1}{s}\int\frac{\sqrt{-tx}}{1+x^2}\frac{d\overline{\nu}(t)}{x-t}+\frac{E_1x^{1/2}+E_2x^{-1/2}}{1+x^2}\right\}dx.\end{array}\tag{65}$$

Demostración:

Observación: Por hipótesis $g_{\overline{C}\setminus[0,+\infty)}(z,t)\in L_1(d\overline{\nu})$, es fácil ver que $g_{\overline{C}\setminus[0,+\infty)}(z,t)\sim\sqrt{-t}$ cuando $t\to 0^-$ y $g_{\overline{C}\setminus[0,+\infty)}(z,t)\sim 1/\sqrt{-t}$ cuando $t\to-\infty$, luego toda función $f(.)$ con un comportamiento de ese tipo (ó menor) en 0 e ∞ será integrable respecto a $d\overline{\nu}$ y

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\int f(t)d\nu_{W_n}(t)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int f(t)d\overline{\nu}(t).$$

Con la observación anterior, y el razonamiento para deducir (62) se obtiene:

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\left(\int\frac{2d\nu_{h_{n,n}}(t)}{z-t}-\int\frac{d\nu_{W_n}(t)}{z-t}\right)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\int\frac{t}{z-t}\frac{1}{\sqrt{zt}}d\overline{\nu}(t)-iE_1z^{-1/2}-iE_2z^{-3/2}\tag{66}$$

note que para las raíces se toman las ramas que se indican en el Teorema 12.

Evaluando (66) en $z=i$ y en $z=-i$, respectivamente nos queda

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\left(\int\frac{2d\nu_{h_{n,n}}(t)}{t-i}-\int\frac{d\nu_{W_n}(t)}{t-i}\right)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\tag{67}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(-t)^{1/2}}{1+t^2}\left[1-t-i\left(1+t\right)\right]d\overline{\nu}(t)+\frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}(iE_1+E_2),$$

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\left(\int\frac{2d\nu_{h_{n,n}}(t)}{t+i}-\int\frac{d\nu_{W_n}(t)}{t+i}\right)\underset{n\to\infty}{\overrightarrow{\longrightarrow}} \tag{68}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(-t)^{1/2}}{1+t^2}\left[1-t+i\left(1+t\right)\right]d\overline{\nu}(t)+\frac{1}{\sqrt{2}(-1+i)}(iE_1-E_2).$$

Sumando (67) y (68)

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\left(\int\frac{2td\nu_{h_{n,n}}(t)}{1+t^2}-\int\frac{td\nu_{W_n}(t)}{1+t^2}\right)\underset{n\to\infty}{\overrightarrow{\longrightarrow}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{-t}(1-t)}{1+t^2}d\overline{\nu}(t)+\frac{1}{2\sqrt{2}}(E_1+E_2). \tag{69}$$

Restando (68) de (67) se obtiene

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\left(\int\frac{2d\nu_{h_{n,n}}(t)}{1+t^2}-\int\frac{d\nu_{W_n}(t)}{1+t^2}\right)\underset{n\to\infty}{\overrightarrow{\longrightarrow}} \tag{70}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{-t}(1+t)}{1+t^2}d\overline{\nu}(t)+\frac{1}{2\sqrt{2}}(E_1-E_2).$$

Finalmente, usando la identidad

$$\frac{t}{(1+t^2)(t-z)}=\frac{1}{1+z^2}\left\{\frac{z}{t-z}-\frac{zt}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}\right\}$$

de (66)-(70) se desprende que

$$\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\int\frac{2td\nu_{h_{n,n}}(t)}{(1+t^2)(t-z)}\underset{n\to\infty}{\overrightarrow{\longrightarrow}}$$

$$\int\frac{td\overline{\nu}(t)}{(1+t^2)(t-z)}$$

$$+\frac{1}{1+z^2}\left\{-\int\frac{\sqrt{zt}}{z-t}d\overline{\nu}(t)-2^{-1/2}z\int\frac{\sqrt{-t}(1-t)}{1+t^2}d\overline{\nu}(t)-2^{-1/2}\int\frac{\sqrt{-t}(1+t)}{1+t^2}d\overline{\nu}(t)\right\}$$

$$+\frac{E_1}{2}\frac{iz^{1/2}-2^{-1/2}z-2^{-1/2}}{1+z^2}+\frac{E_2}{2}\frac{iz^{-1/2}-2^{-1/2}z-2^{-1/2}}{1+z^2}. \tag{71}$$

Se pueden comprobar utilizando el Teorema de los Residuos que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2}}{1+t^2}\frac{dt}{t-z}=\frac{iz^{1/2}-2^{-1/2}z-2^{-1/2}}{1+z^2},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/2}}{1+t^2}\frac{dt}{t-z}=\frac{iz^{-1/2}-2^{-1/2}z-2^{-1/2}}{1+z^2}.$$

Según (69) la sucesión de medidas

$$\left\{\frac{1}{(2n)^{1-\delta}}\frac{2td\nu_{h_{n,n}}(t)}{1+t^2}\right\}$$

es uniformemente acotada, la demostración se completa análogamente a como se calculó la antitransformada de Stieltjes en la prueba del Teorema 13.□

Nota: Por la forma de la medida límite, la convergencia en (65) se puede exterder a las funciones Riemann integrables en $(0,1)$ con respecto a $x^{1/2}dx$ y en $(1,+\infty)$ respecto $\frac{dx}{x^{5/2}}$.

Otra forma de describir la asintótica de los ceros de $h_{n,n}(.)$ es la llamada asintótica reescalada. Son necesarios dos lemas preliminares para lograr este objetivo.

Lema 16. *Supogamos válidas las hipotesis en el Teorema 12 para* $\delta = 1/(2\gamma)$. *Consideremos* R_n *y* r_n *las soluciones del problema* (14) *con* $A = 1$. *Existen constantes* E_3 *y* E_4 *positivas tales que tales que*

i) *Si* $\theta < 1$ *entonces* $E_3R_n < z_{n,n} < E_4R_n$.

ii) *Si* $\theta > 1$ *entonces* $E_3^{-1}r_n > z_{1,n} > E_4^{-1}r_n$.

Demostración:

Según el Teorema 15, tomando $f(x) = 1$ (vea la nota que sigue a dicho teorema) se cumple

$$\frac{1}{(2n)^{1-1/(2\gamma)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{2z_{i,n}}{1+z_{i,n}^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi} \int \left\{ \frac{1}{s} \int \frac{\sqrt{-tx}}{1+x^2} \frac{d\overline{\nu}(t)}{x-t} + \frac{E_1 x^{1/2} + E_2 x^{-1/2}}{1+x^2} \right\} dx.$$

Teniendo presente que la función $\frac{x}{1+x^2}$ es creciente en $(0,1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$, la relación anterior nos lleva a que existe una constante E_5 tal que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \frac{1}{(2n)^{1-1/(2\gamma)}} \left(d_{n,1} \frac{2z_{1,n}}{1+z_{1,n}^2} + d_{n,2} \frac{2z_{n,n}}{1+z_{n,n}^2} \right) \right\} \leq E_5, \tag{72}$$

donde $d_{n,1}$ es la cantidad de ceros de $h_{n,n}$ menores o iguales a 1 y $d_{n,2}$ es la cantidad de ceros de $h_{n,n}$ mayores que *i)*. Teniendo presente que si $\theta < 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n,2}}{n} > 0. \tag{73}$$

Por *vii)* del Lema 4

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{R_n}{n^{1/\gamma}} > 0. \tag{74}$$

La acotación superior de *i)* sigue fácilmente de (72)-(74).

Si

$$p_{n-1}(z) = \frac{h_{n,n}(z)}{z - z_{n,n}},$$

de la fórmula de cuadratura de Gauss (ver [**13**]) se sigue que

$$z_{n,n} = \frac{\int_0^{+\infty} x p_{n-1}^2(x) d\rho_n(x)}{\int_0^{+\infty} p_{n-1}^2(x) d\rho_n(t)}.$$

Si $s_n \geq 0$,

$$z_{n,n} \leq s_n + \int_{s_n}^{+\infty} x p_{n-1}^2(x) \left(\int_0^{+\infty} p_{n-1}^2(t) d\rho_n(t) \right)^{-1} d\rho_n(x)$$

$$\leq s_n + \int\limits_{s_n}^{+\infty} x K_n(\tau, x) d\rho_n(x). \tag{75}$$

Fijemos $\epsilon > 0$. Existen constantes E_6 y E_7 tales que

$$(1-\epsilon)\varphi(x) + E_6 \leq \tau(x) \leq (1+\epsilon)\varphi(x) + E_7, \ \mathrm{x} \in (0, +\infty), \tag{76}$$

y por consiguiente,

$$\exp(E_6) K_n((1-\epsilon)\varphi, z) \leq K_n(\tau, z) \leq \exp(E_7) K_n((1+\epsilon)\varphi, z). \tag{77}$$

Para mayor brevedad, en lo que sigue omitiremos la referencia explícita de la dependencia de los parámetros que intervienen en la solución del problema de equilibrio cuando $A = 1$, la sustituimos por el supraindice "+" cuando correspondan a $A = 1+\epsilon$ y "-" cuando correspondan a $A = 1-\epsilon$. Por ejemplo

$$r_n = r_{n,1}, \ r_n^+ = r_{n,1+\epsilon}, \ r_n^- = r_{n,1-\epsilon}.$$

Sea $s_n = kR_n^+$, con $k > 1$. Entonces de (75)-(77) y el Lema 6 se tiene

$$I_n = \int\limits_{s_n}^{+\infty} x K_n(\tau, x) d\rho_n(x)$$

$$\leq \frac{E_8}{(k-1)R_n^+} \int\limits_{s_n}^{+\infty} x \left|\Phi_{\Delta_n^+}(x)\right| \exp\left(c_n^+ - 2V_{\mu_n^+}(x) - (1-\epsilon)\varphi(x) - \log|W_n(x)|\right) dx. \tag{78}$$

Teniendo presente que

$$c_n^+ = -2n \log \frac{R_n - r_n}{4} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{r_n^+}^{R_n^+} \frac{(x^\gamma + x^{-\gamma})\, dx}{\sqrt{(R_n^+ - x)(x - r_n^+)}} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{r_n^+}^{R_n^+} \frac{\log|W_n(x)|\, dx}{\sqrt{(R_n^+ - x)(x - r_n^+)}},$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{r_n^+}^{R_n^+} \frac{\log|W_n(t)|\, dt}{\sqrt{(R_n^+ - t)(t - r_n^+)}} - \log|W_n(x)| \leq 0, \ x \in (R_n^+, +\infty),$$

$$2V_{\mu_n^+}(x) \geq -2n\log x,\ \ x \in (R_n^+, +\infty),$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{r_n^+}^{R_n^+} \frac{(x^\gamma + x^{-\gamma})\,dx}{\sqrt{(R_n^+ - x)(x - r_n^+)}} \leq 2\left(R_n^+\right)^\gamma,$$

y

$$\left|\Phi_{\Delta_n^+}(x)\right| \leq E_9 \frac{x}{R_n^+},$$

(78) se transforma en

$$I_n \leq \frac{E_{10}\exp\left(-2n\log\frac{R_n^+ - r_n^+}{4} + 2(R_n^+)^\gamma\right)}{(k-1)\left(R_n^+\right)^2}\int\limits_{s_n}^{+\infty} x^{2n+2}\exp\left(-x^\gamma\right)dx.$$

Integrando por partes

$$I_n \leq E_{10}\frac{\exp\left((R_n^+)^\gamma\left[\frac{2n(\log E_{11} - \log k)}{\left(R_n^+\right)^\gamma} + \frac{2 - 2\log k}{\left(R_n^+\right)^\gamma} + 1 - k^\gamma\right]\right)}{(k-1)(R_n^+)^3(\gamma k^\gamma - \frac{2n+3}{\left(R_n^+\right)^\gamma})} \tag{79}$$

de (75), (79) y teniendo presente *iv)* y *vii)* del Lema 4, deducimos que se puede escoger k de modo que queda probado *i)*. Trabajando de forma similar a como se hizo para demostrar *i)*, pero usando las respectivas relaciones para r_n se obtiene *ii)*.□

Lema 17. *Asumamos válidas las hipótesis para* $\delta = 1/(2\gamma)$ *en el Teorema 12. Sea* $A > 0$, *si*

$$d\mu_n^*(t) = \frac{1}{n}d\mu_{n,A}(R_{n,A}t), t \in [\frac{r_{n,A}}{R_{n,A}}, 1],$$

entonces $d\mu_n^*$ *converge a*

$$d\sigma(t) = \theta d\delta_0(t) + (\int\sqrt{\frac{t}{t - L_1}}d\nu(t))dU(t) + \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t)t}}\ \ en\ [0,1],$$

donde $dU(t)$ es la distribución de Ullman en $[0,1]$ o sea ella tiene por densidad

$$v(\alpha;x) := \frac{\alpha}{\pi}\int_{|x|}^{1}\frac{y^{\alpha-1}}{\sqrt{y^2-x^2}}dy,\ \ x\in[-1,1]$$

y

$$f(x) = 1-\theta-\int\sqrt{\frac{t}{t-L_1}}d\nu_1(t)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int\log\left|\frac{L_1s-t}{L_1x-t}\right|d\nu_1(t)\frac{ds}{\sqrt{(1-s)s}}$$

Demostración:

Según (14) $d\mu_n^*(t)$ satisface

$$\frac{1}{n}V_{\mu_n^*}(x)+A\frac{R_n^{\gamma}}{(2n)}x^{\gamma}+A\frac{R_n^{-\gamma}}{(2n)}+\frac{1}{(2n)}\log|W_n(R_nx)|$$

$$\begin{aligned}&=\tfrac{1}{(2n)}\left\{c_n+2n\log R_n\right\},\quad x\in[r_n/R_n,1]\\&\geq\tfrac{1}{(2n)}\left\{c_n+2n\log R_n\right\},\quad x\in(0,+\infty)\end{aligned}\tag{80}$$

Por otra parte

$$\frac{1}{(2n)\pi}\int_{r_n}^{R_n}\frac{\log|W_n(s)|\,ds}{\sqrt{(R_n-s)(s-r_n)}}-\frac{1}{2n}\log|W_n(R_nx)|$$

$$=\frac{1}{(2n)\pi}\int_0^1\frac{\log\left|\frac{W_n(R_n-r_n)s+r_n)}{W_n(R_nx)}\right|ds}{\sqrt{(1-s)(s)}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int\frac{\log\left|\frac{(R_n-r_n)s+r_n-t)}{R_nx-t}\right|d\nu_{W_n}(t)ds}{\sqrt{(1-s)(s)}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left\{\int_{[-\infty,E_2n^{1/\gamma}]}+\int_{[E_2n^{1/\gamma},E_3]}+\int_{[E_2,0]}+\right\}\frac{\log\left|\frac{(R_n-r_n)s+r_n-t)}{R_nx-t}\right|d\nu_{W_n}(t)ds}{\sqrt{(1-s)s}}.\tag{81}$$

Utilizando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue en (81) y las hipótesis, puede comprobarse que

$$\frac{1}{(2n)\pi}\int_{r_n}^{R_n}\frac{\log|W_n(s)|\,ds}{\sqrt{(R_n-s)(s-r_n)}}-\frac{1}{2n}\log|W_n(R_nx)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$-\theta\log x+\frac{1}{\pi}\int\log\left|\frac{L_1s-t}{L_1x-t}\right|d\nu_1(t)\frac{ds}{\sqrt{(1-s)s}},\ \ x\in(0,1]. \tag{82}$$

Como las medidas $\frac{1}{n}\mu_n^*$ son unitarias ellas forman una sucesión débilmente compacta, luego podemos hallar $\Lambda\subseteq N$ tal que

$$\frac{1}{n}\mu_n^* \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \mu^*,\ \ n\in\Lambda$$

donde μ^* es una medida unitaria, con soporte incluido en $[0,1]$. Por el Lema 2, (31), (80), (82) y el principio de la envoltura inferior para potenciales se obtiene

$$V_{\mu_n^*}(x)+\frac{1}{\gamma B(\gamma)}\int\sqrt{\frac{t}{t-L_1}}d\nu_1(t)x^\gamma+\theta\log x+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int\log\left|\frac{L_1x-t}{L_1s-t}\right|d\nu_1(t)\frac{ds}{\sqrt{(1-s)s}}$$

$$=\int\sqrt{\frac{t}{t-L_1}}d\nu_1(t)\log\left(4e^{1/\gamma}\right)+1-\theta-\int\sqrt{\frac{t}{t-L_1}}d\nu_1(t),\ \text{q.e. en } (0,1]. \tag{83}$$

Es concido que el potencial de la medida de Ullman (ver **[26]**) satisface

$$V_U(x)+\frac{1}{\gamma B(\gamma)}x^\gamma=\log\left\{4e^{1/\gamma}\right\},\ \ x\in[0,1]\text{ y} \tag{84}$$

si $f(x)=1-\theta-\int\sqrt{\frac{t}{t-L_1}}d\nu_1(t)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int\log\left|\frac{L_1s-t}{L_1s-t}\right|d\nu_1(t)\frac{ds}{\sqrt{(1-s)s}}$ entonces

$$V_{\frac{f(t)dt}{\sqrt{(1-s)s}}}(x)$$

$$=1-\theta-\int\sqrt{\frac{t}{t-L_1}}d\nu_1(t)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int\log\left|\frac{L_1s-t}{L_1x-t}\right|d\nu_1(t)\frac{ds}{\sqrt{(1-s)s}},\ \ x\in[0,1]. \tag{85}$$

La demostración se completa de 83-85 y el Lema de identidad de Potenciales.□

Consideremos la descomposión

$$h_{n,n}(z)=\kappa_n\prod_{|z_{i,n}|\leq 1}(z-z_{i,n})\prod_{|z_{i,n}|>1}(z-z_{i,n})=\kappa_n h_{n,n,1}(z)h_{n,n,2}(z).$$

Teorema 18. *Supogamos válidas las hipótesis de 2 en el Teorema 12. Entonces*

$$\frac{1}{n}\nu_{h_{n,n}}(n^{1/\gamma}t)\xrightarrow[n\to\infty]{*}\theta\delta_0(t)+(\int\sqrt{\frac{y}{y-L_1}}d\nu_1(y))U(t)+\frac{f(t)}{\sqrt{1-t)t}}$$

$$d\sigma(t)=\theta d\delta_0(t)+(1-\int\sqrt{\frac{y}{y-L_1}}d\nu_1(y))dU(t)+\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t)t}},$$

donde $U(t)$ *es la densidad de Ullman en* $[0,1]$ *y*

$$f(x)=1-\theta-\int\sqrt{\frac{y}{y-L_1}}d\nu_1(y)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int\log\left|\frac{L_1y-t}{L_1x-t}\right|d\nu_1(t)\frac{dy}{\sqrt{(1-y)y}}.$$

Más aún

$$\frac{1}{n}\nu_{h_{n,n,2}}(n^{1/\gamma}t)\xrightarrow[n\to\infty]{*}(\int\sqrt{\frac{y}{y-L_1}}d\nu_1(y))U(t)+\frac{f(t)}{\sqrt{1-t)t}}.$$

Demostración:

Como hemos hecho otras veces, dado $0<\epsilon<1$, se pueden escoger E_1 y E_2 tales que

$$e^{E_1}K_n((1-\epsilon)\varphi,z)\leq K_n(\tau,z)\leq e^{E_2}K_n((1+\epsilon)\varphi,z).$$

Teniendo presente (54) y los Lemas 6 y 7, se cumple

$$\frac{E_3 n^{-15}}{\left(\frac{E_4 n^4}{\Im(z)}+1\right)} \exp\left(c_n^- - 2V_{\mu_n^-}(z)\right) \leq \left|h_{n,n}^2(\tau,z)\right| \leq \frac{\left|\Phi_{\Delta_n^+}(z)\right|}{\pi dist(z,\Delta_n^+)} \exp\left(c_n^+ - 2V_{\mu_n^+}(z)\right).$$

Tomando log y multiplicando por -1 nos queda

$$\log\left(\pi dist(z,\Delta_n^+)\right) - g_{\Delta_n^+}(z,\infty) - c_n^+ + 2V_{\mu_n^+}(z) \leq -\log\kappa_n + 2V_{d\nu_{h_{n,n}}}(z)$$

$$\leq \log\left(\frac{E_4 n^4}{\Im(z)}+1\right) E_3^{-1} n^{15} - c_n^- + 2V_{\mu_n^-}(z).$$

Haciendo el cambio de variable $z \leftrightarrow R_n z$ obtenemos

$$\log\left(R_n \pi dist(z,[r_n^+/R_n, R_n^+/R_n])\right) - g_{[r_n^+/R_n,R_n^+/R_n]}(z,\infty) - c_n^+ + 2V_{\mu_n^{+,*}}((R_n/R_n^*)z) \leq$$

$$-\log\kappa_n + 2V_{d\nu^*_{h_{n,n}}}(z) \leq$$

$$\log\left\{\left(\frac{E_4 n^4}{\Im(z)}+1\right) E_3^{-1} n^{15}\right\} - c_n^- + 2V_{\mu_n^{-,*}}((R_n/R_n^-)z). \tag{86}$$

Evaluando (86) en $z = ix$, $x > 0$ y tomando límite cuando $x \to +\infty$, vemos que existen constantes E_5 y E_6 tales que

$$\log\left(\frac{R_n^+ - r_n^+}{4}\right) - E_5 - c_n^+ \leq -\log\kappa_n \leq \log\left(E_3^{-1} n^{15}\right) - c_n^- + E. \tag{87}$$

Por otro lado, según el Lema 16, la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\nu_{h_{n,n}}(R_n^+ t)\right\}$ tienen el soporte contenido en un compacto. Sea $\Lambda \subseteq N$ tal que

$$\frac{1}{n}\nu_{h_{n,n}}(R_n^+ t) \xrightarrow[n\to\infty]{*} \nu^*,\ n \in \Lambda \tag{88}$$

Dividiendo por n la relación (86), teniendo presente (87) y (88) y que ϵ es un número cualquiera en $(0,1)$ se obtiene

$$V_\sigma(z) = V_{\nu^*}(z) \tag{89}$$

$z \in C\backslash R_+$, donde

$$d\sigma(t) = \theta d\delta_0(t) + (\int \sqrt{\frac{t}{t-L_1}} d\nu(t)) dU(t) + \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t)t}},$$

con $dU(t)$ la distribución de Ullman en $[0,1]$ y

$$f(x) = 1 - \theta - \int \sqrt{\frac{t}{t-L_1}} d\nu_1(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int \log \left| \frac{L_1 s - t}{L_1 x - t} \right| d\nu_1(t) \frac{ds}{\sqrt{(1-s)s}}.$$

Como R_+ tiene interior no vacío y haciendo uso del Lema de unicidad de potenciales, de la igualdad 89 concluimos que $d\sigma = d\nu^*$, que es la primera parte del Teorema, el resto sigue como en la demostración del Teorema 13.$\square$

5. Aplicación

En este capítulo estimamos la velocidad de convergencia de los aproximantes multipuntuales de Padé de funciones meromorfas. Las funciones aproximadas se obtienen al sumarle una fracción racional a la transformada de Stieltjes de una medida soportada en $(0, +\infty)$.

Utilizamos la asintótica de los polinomios ortogonales del capítulo 3.

La velocidad de convergencia se relaciona con la distribución límite de los puntos de interpolación. Cuando no hay suficientes puntos de interpolación lejos del soporte de la medida que define la transformada de Stieltjes, el estimado se realiza en términos de la velocidad y la cantidad de puntos de interpolación que se van a 0 y a ∞.

Teorema 19. *Sea* $\nu_{W_n} = \frac{1}{2n} \sum\limits_{i=1}^{2n} \delta_{sx_{i,n}}$, $\nu_{W_n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} v$ *y* $Sup(v) \cap (-\infty, 0) \not\equiv \emptyset$ *entonces*

$$|(F - \pi_n(f))(z)|^{1/(2n)} \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} \exp - \left\{ g(\nu, \overline{C} \backslash R_+, sz) \right\},$$

uniformemente en $C \backslash \{R \cup (r = \infty)\}$, *donde* $g(\nu, \overline{C} \backslash R_+, z)$ *es como en el Lema 5.*

Demostración:

Para demostrar este Teorema usaremos la relación entre los aproximantes de Padé en $C \backslash R_+$ y $C \backslash [-1, 1]$.

La función

$$F(z) = \int \frac{d\rho(x)}{z - x} + r(z) = \widehat{\rho}(z) + r(z),$$

al hacer los cambios de variable

$$z = \frac{1+\xi}{1-\xi} \; (z \in C \backslash R_+, \xi \in C \backslash [-1,1]) \text{ y}$$

$$x = \frac{1+t}{1-t} \; (x \in (-\infty, 0), \; t \in (-1,1)),$$

se transforma en

$$F\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = (1-\xi) \int\limits_{(-1,1)} \frac{1/2(1-t)d\rho\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}{(\xi - t)} + r\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right). \tag{90}$$

Si

$$d\lambda(t) = \frac{1}{2}(1-t)d\rho\left(\frac{1+t}{1-t}\right), t \in (-1,1),$$

$$(1-\xi)b(\xi) = r\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right),$$

$$f(\xi) = \widehat{\lambda}(\xi) + b(\xi),$$

$$X_n(\xi) = (1-\xi)^{2n} W_n\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right),$$

X_n los ceros de $X_n(.)$ y $\pi_n(f)$ el aproximante multipuntual de tipo $[n-1,n]$ para f respecto a X_n, entonces de (90) se obtiene

$$\frac{l_{n,n}^2(\xi)}{X_n(\xi)}(F - \pi_n(F))\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = \frac{l_{n,n}^2(\xi)}{X_n(\xi)}(1-\xi)(f - \pi_n(f))(\xi). \tag{91}$$

Por el Teorema H (es fácil ver que la terna (ρ, A_n, N) es admisible), la demostración termina si se prueba que

$$\left|\frac{l_{n,n}^2(\xi)}{X_n(\xi)}\right|^{1/(2n)} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \exp - \left\{g(\nu, \overline{C}\backslash R_+, sz)\right\}, \tag{92}$$

donde $l_{n,n}(\xi)$ denota el n-ésimo polinomio ortonormal asociado a $d\lambda_n(t) = \frac{d\lambda(t)}{|X_n(t)|}$, con coeficiente principal positivo.

Conociendo que $\xi = \frac{z-1}{z+1}$, se obtiene la relación

$$\frac{l_{n,n}^2(\xi)}{X_n(\xi)} = \frac{(z+1)^{2n}\, l_{n,n}^2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{2^n W_n(z)}. \tag{93}$$

Por otra parte,

$$\int_0^{+\infty} x^k \frac{(x+1)^{2n}\, l_{n,n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{2^n} \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} = 2\int_{-1}^{1} (1+t)^k\,(1-t)^{n-k-1} l_{n,n}(t) \frac{1/2(1-t)d\rho\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}{(1-t)^{2n}\left|W_n\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right|}$$

$$= 2\int_{-1}^{1} (1+t)^k\,(1-t)^{n-k-1} l_{n,n}(t)d\lambda_n(t). \tag{94}$$

Es fácil comprobar que $(1+t)^k\,(1-t)^{n-k-1}$, para $k = 0, ..., n-1$, constituye una base en el espacio de los polinomios de grado menor o igual a $n-1$. Luego por ser $l_{n,n}(.)$ un $n-$ésimo polinomio ortogonal asociado a $d\lambda_n(.)$, de la igualdad (94) concluimos que

$$b_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}\, l_{n,n}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{2^n} \tag{95}$$

es un polinomio de grado n, ortogonal con respecto a $\frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|}$. Teniendo presente que los polinomios ortogonales se determinan únivocamente salvo una constante multiplicativa y que los ceros de los polinomios ortogonales están en el interior del intervalo de ortogonalidad, se deduce que:

$$\frac{l_{n,n}^2(\xi)}{X_n(\xi)} = \frac{b_n^2(-1)}{h_{n,n}^2(-1)} \frac{h_{n,n}^2\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)}{W_n\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)}. \tag{96}$$

De la normalidad de $l_{n,n}(.)$ y (95), se tiene:

$$1 = \int_{-1}^{1} l_{n,n}^2(t) \frac{d\lambda(t)}{|X_n(t)|} = \int_0^{+\infty} \frac{b_n^2(x)}{1+x} \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} = \frac{b_n^2(-1)}{h_{n,n}^2(-1)} \int_0^{+\infty} \frac{h_{n,n}^2(x)}{1+x} \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|}. \tag{97}$$

Teniendo presente también la normalidad de $h_{n,n}$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_{n,n}^2(x)}{1+x} \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} \leq 1. \tag{98}$$

Por otra parte,

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_{n,n}^2(x)}{1+x} \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} \geq \int_0^{s_n} \frac{h_{n,n}^2(x)}{1+x} \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|}$$

$$\geq \frac{1}{1+s_n} \int_0^{s_n} h_{n,n}^2(x) \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|}$$

$$= \frac{1}{1+s_n} \left(1 - \int_{s_n}^{+\infty} h_{n,n}^2(x) \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} \right). \tag{99}$$

Como ya se hizo antes, a partir de (4) se puede asegurar: Dado ϵ, con $0 < \epsilon < 1$, existen constantes E_1 y E_2 tales que

$$(1-\epsilon)\varphi(x) + E_1 \leq \tau(x) \leq (1+\epsilon)\varphi(x) + E_2, \ x \in R_+. \tag{100}$$

De la monotonía de $K_n(\tau, z)$ respecto a τ y (100) obtenemos que

$$e^{E_1} K_n((1-\epsilon)\varphi, z) \leq K_n(\tau, z) \leq e^{E_2} K_n((1+\epsilon)\varphi, z). \tag{101}$$

Luego existe $E_3 > 0$ tal que

$$\int_{s_n}^{+\infty} h_{n,n}^2(\tau, x) \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} \leq E_3 \int_{s_n}^{+\infty} K_n((1+\epsilon)\varphi, x) \frac{\exp -\varphi(x)}{|W_n(x)|} dx. \tag{102}$$

Como

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi_{\Delta_{n,1+\epsilon}}(z)}{z} \text{ existe;}$$

si $s_n \geq R_{n,1+\epsilon}$, el Lema 6 y (101) nos aseguran que existe $E_4 > 0$ tal que (102) se transforma en

$$\int_{s_n}^{+\infty} h_{n,n}^2(x) \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} \leq \frac{E_4 \exp c_{n,1+\epsilon}}{s_n - R_{n,1+\epsilon}} \int_{s_n}^{+\infty} x \exp\left\{-\left(2V_{\mu_{n,1+\epsilon}}(x) + (1-\epsilon)\varphi_n(x)\right)\right\} dx$$

$$\leq \frac{E_4 \exp c_{n,1+\epsilon}}{s_n - R_{n,1+\epsilon}} \int_{s_n}^{+\infty} x^{1+2n} \exp\left(-(1-\epsilon)x^{\gamma}\right) dx$$

$$\leq \frac{E_4 \exp c_{n,1+\epsilon}}{s_n - R_{n,1+\epsilon}} \frac{1}{(1-\epsilon)\gamma s_n^{\gamma} - 2n - 2} \exp\left[-s_n^{\gamma}((1-\epsilon) - \frac{(2n+2)\log s_n}{s_n^{\gamma}})\right].$$

En particular, si $s_n = n^2$, de la acotación superior de $\left\{\frac{c_n}{n}\right\}$ se logra encontrar $E_5 > 0$ tal que

$$\int_{n^2}^{+\infty} h_{n,n}^2(x) \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} \leq E_5 n^{-2}. \tag{103}$$

Considerando en (99) s_n como antes, de (103) obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_{n,n}^2(x)}{1+x} \frac{d\rho(x)}{|W_n(x)|} \leq \frac{E_6}{n^2}. \tag{104}$$

Ahora por (96), (97) y (104) deducimos que cualquiera sea $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} \log\left|\frac{b_n^2(-1)}{h_{n,n}^2(-1)}\right| = 0. \tag{105}$$

Las igualdades (96) y (105), conjuntamente con el Teorema 11 prueban (92).$\square$

La relación (91) y el teorema anterior permiten estimar la velocidad de convergencia de los aproximantes multipuntuales de Padé en el caso de medidas soportadas en $[-1, 1]$:

Teorema 20. *Sea $d\beta(x) = \exp(-\eta(x))dx$ una medida en $(-1,1)$ tal que $\eta(.)$ es una función continua en $(-1,1)$ y existe $s > 0$ de modo que:*

$$\lim_{t\to -1}(s(t+1))^{\gamma}\eta(t) = \lim_{t\to 1}(s(1-t))^{\gamma}\eta(t) = 1.$$

Sea además, $b_n(t)$ una fracción racional con polos fuera de $[-1,1]$, X_n una tabla de puntos de interpolación en $(([-\infty,-1] \cup [1,+\infty])\backslash b = \infty)$, con $d\nu_{X_n}(t) = \frac{1}{(2n)} \sum_{\xi_{k,n}\in X_n} d\delta_{\xi_{k,n}}(t)$. Asumimos que $d\nu_{X_n}(t) \underset{n\longrightarrow\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} d\omega(t)$ en $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ y $Sop(\omega) \cap (-\infty,0) \cap (0,+\infty) \not\equiv \emptyset$. Entonces se cumple:

$$(f - \pi_n(f))(\xi) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \exp - \{g(\omega, [-1,1], s\xi)\},$$

uniformemente en $C\backslash([-1,1] \cup b = \infty)$, donde $g(\omega, [-1,1], \xi)$ es el potencial de Green en $C\backslash[-1,1]$ de la medida ω.

Por supuesto, de la misma forma podemos probar el siguiente teorema , en el que se describe la velocidad de convergencia de los aproximantes multipuntuales de Padé cuando los puntos de interpolacion se van a 0 y a ∞. En lugar del Teorema 11 se emplea el Teorema 12.

Teorema 21. *Sea $\nu_{W_n} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} \delta_{sx_{i,n}}$, bajo las respectivas hipótesis del Lema 10 se tiene:*

i)

$$\frac{\log|(F - \pi_n(f))(z)|}{(2n)^{1-\delta}} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}$$

$$-\int \log\left|1 + 2\frac{t}{sz-t} - 2\sqrt{\frac{szt}{(sz-t)^2}}\right| d\overline{\nu}(t) -$$

$$-\Im(\sqrt{sz})\left[\int_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}\,d\nu_1(t^{-1})\right] - \Im(\sqrt{\frac{1}{sz}})\left[\int_{(-\infty,0]} \sqrt{-t}\,d\nu_2(t^{-1})\right],$$

uniformemente en $C\backslash\{R \cup (r = \infty)\}$, donde la rama de la primera raíz es tal que $\left|1 + 2\frac{t}{z-t} - 2\sqrt{\frac{zt}{(z-t)^2}}\right| > 1$, $t \in (-\infty, 0)$, $z \in C\backslash R$ y en las otras raíces, la rama se toma tal que $\sqrt{-1} = i$.

ii)

$$\frac{\log|(F-\pi_n(f))(z)|}{(2n)^{1-1/(2\gamma)}} \underset{n\to\infty}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}$$

$$-\int \log\left|1+2\frac{t}{sz-t}-2\sqrt{\frac{zt}{(sz-t)^2}}\right| d\overline{\nu}(t)-$$

$$\Im(\sqrt{sz})\left[\int\limits_{(-\infty,0]}\sqrt{-t}d\nu_1(t^{-1})+\int\limits_{(-\infty,0]}\sqrt{L_1^{-1}-t}d\nu_3(t^{-1})+B(\gamma-1)L_1^{1-1/(2\gamma)}\right]-$$

$$\Im(\sqrt{\frac{1}{sz}})\left[\int\limits_{(-\infty,0]}\sqrt{-t}d\nu_2(t^{-1})+\int\limits_{(-\infty,0]}\sqrt{L_2^{-1}-t}d\nu_4(t^{-1})+B(\gamma-1)L_2^{1-1/(2\gamma)}\right],$$

la región de convergencia y las ramas de las raíces son como en i).

La parte *ii)* es una generalización del Teorema C.

El siguiente corolario nos ayuda a entender el teorema anterior y por otra parte nos presenta una generalización más simple del Teorema C.

Sea $0 \le \lambda_n \le 2n$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{2n}=\theta\in[0,1],$$

$x_n \in (-\infty,0]$, $x_n \to 0$. Denotemos por $\pi_n(F)$ el aproximante bipuntual de Padé de F de tipo $[n-1,n]$ en x_n y $-\infty$ (x_n es raíz de orden λ_n para $\pi_n(F)-F$).

Corolario 22. *Si existe* δ, $0<2\delta<1/\gamma$, *tal que* $x_n n^\delta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \neq 0$ *y* $\theta>0$ *entonces*

$$\frac{\log|(F-\pi_n(f))(z)|}{(2n)^{1-\delta}} \underset{n\to\infty}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} -\theta\sqrt{-\alpha^{-1}}Im(\sqrt{\frac{1}{sz}}).$$

Si $x_n n^{1/\gamma} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$ *entonces*

$$\frac{\log|(F-\pi_n(f))(z)|}{(2n)^{1-1/(2\gamma)}} \underset{n\to\infty}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}}$$

$$-2D(\gamma)\left\{(1-\theta)^{1-1/(2\gamma)}Im(\sqrt{sz})+\theta^{1-1/(2\gamma)}Im(\sqrt{\frac{1}{sz}})\sqrt{-\alpha^{-1}}\right\},$$

con $D(\gamma)=\frac{2\gamma}{2\gamma-1}\left[\frac{\Gamma(\gamma+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma)}\right]$. *La convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de* $C\backslash R_+$.

6. Bibliografía:

1.-A.B. Bitsadzev (*1976*): Ecuaciones de la física-matemática. Nauca, Moscú (en Ruso).

2.- G.A. Baker, Jr. (*1975*): Essential of Padé Approximants. Academic Press, New York.

3.- G.A. Baker, Jr. and P.R. Graves-Morris (*1981*): Padé Approximants, Part I: Basic Theory, v. 13 and Part II: Extension and Applications. Encycl. of Math. and its Applics., Addisson-Wesley, London.

4.- M. Bello (*1995*): Asymptotic for the ratio of the leading coefficients of orthonormal polynomials with respect to a measure supported on an arc, Proc. 3^{ra} Conf. Internacional sobre Aproximación y Optimización en el Caribe, La Habana, pp. 63-68.

5.- M. Bello, A. Martínez: Zero asymptotics of Laurent-type orthogonal polynomials, aparecerá en Journal of Appr. Theory.

6.- M. Bello: Rate of convergence of multipoint Padé approximants for Stieltjes-type meromorphic function, sometido a Const. Appr..

7.- P. Billingsley (*1968*): Convergence of probability mesures. John Wiley, New York.

8.- T. Bloom, D.S. Lubinsky, H. Stahl (*1993*): What distribution of points are possible for convergent sequences of interpolatory Integretion Rules? Const. Appr. 9, 41-58.

9.- T. Bloom, D.S. Lubinsky, H. Stahl (*1993*): Distribution of points for convergent interpolatory integration rules on $(-\infty, \infty)$. Const. Appr. 9, 59-82.

10.- T.S. Chihara (*1978*): An introduction to Orthogonal Polynomials. Gordon and Breach, New York-London-París.

11.- P. Erdös, P. Turán (*1938*): On interpolation II. Ann. of Math. 39, 703-724.

12.- P. Erdös, G. Freud (1974): On orthogonal polynomials with regularly distributed zeros. Proc. London Math. Soc. (3), 29, pp. 521-537.

13.- G. Freud (*1971*): Orthogonal Polynomials. Pergamon Press, Oxford.

14.- F.D.Gajov (*1980*): Problemas de Contorno. Mir, Moscú, Trad. al español.

15.- G.M. Goluzin (*1969*): Geometric theory of function of a complex variable. Amer. Math. Soc. Coll. Pub., Providence, R.I..

16.- A.A. Gonchar, G. Lopes [G. López] (*1978*): On Markov's theorem for multipoint Padé approximants. Mat. Sb. 105(147), 511-524; trad. al Inglés en Math. USSR Sb. 34, No. 4, (1978), 449-460.

17.- A.A. Gonchar, E.A. Rakhmanov (*1984*): Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials. Mat. Sb. 125(167); trad. al Inglés en Math. USSR Sb. 53(1986),1, 119-130.

18.- N.S.Landkof (*1972*): Foundation of Modern Potential Theory. Springer Verlag, Berlin.

19.- G. Lopes [G. López] (*1978*): Condition for convergence of multipoint Padé approximants for function of Stieltjes type. Mat. Sb. 98(140), 69-83; trad. al Inglés en Math. USSR Sb. 35(1979) 363-376.

20.-G. Lopes [G. López] (*1980*): On the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type. Mat. Sb. 111(153), 308-316; trad. al Inglés en Math. USSR Sb. 39(1981) 281-288.

21.-G. Lopes [G. López] (*1985*): On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of Padé approximants, Mat. Sb. 128(170), 216-229; trad. al Inglés en Math. USSR Sb. 56(1987), 207-219.

22.-G. Lopes (*1988*): Doctoral Thesis, Steklov Institute of Mathemathics, Moscow.

23.- G. Lopes (*1988*):Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials. Mat. Sb. 136(178), 46-66; trad. al Inglés en Math. USSR Sb. 64 (1989), 207-227.

24.-G. López, A. Martínez (*1995*): Rate of convergence of two point Padé approximants and logarithmic asymptotics of Laurent-type orthogonal polynomials. Constr. Appr. 11, 255-287.

25.-G. López, E.A. Rakhmanov (*1988*): Rational approximation, orthogonal polynomial and equilibrium distributions. L. Notes in Math. 1329, Proceedings, Segovia 86, Springer-Velag, Heidelberg, 125-156.

26.-H.N. Mhaskar, E.B. Saff (*1985*): Where does the sup-norm of the weighted polynomial live? (A generalization of incomplete polynomials). Const. Appr. 1, 71-91.

27.-P. Nevai (*1979*): Orthogonal Polynomials. Mem. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

28.-P. Nevai (*1990*): Orthogonal Polynomials: Theory and Practice. NATO ASI Series C; Mathematical and Physical Sciences, V. 294, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.

29- E.M. Nikishin, V. N. Sorokin (*1991*): Rational Approximations and Orthogonality. Transl. of Math. Mon. V. 92, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

30.-E.A. Rakhmanov (*1982*): On the asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real axis. Mat. Sb. 119(161), 161-203; trad. al Inglés en Math. USSR Sb. 47(1984), 155-193.

31.- W. Rudin (*1966*): Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, New York.

32.-H. Stahl, V. Totik (*1992*): General Orthogonal Polynomials. Encyclopedia of Mathematics and its Application, vol. 43. Cambridge University Press.

33.-T.J. Stieltjes (*1894*): Recherches sus les fractions continues. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 8, J1-J122; (1895), A1-A47.

34.-G. Szegó (*1959*): Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc., New York, revised edition.

35- M. Tsuji (*1975*): Potential Theory. New York: Chelsea, 2da ed..

36- J.L. Ullman (*1972*): On the regular behavior of orthogonal polynomials. Proc. London Math. Soc. (3), 24, pp. 119-148.

37.- J.L. Ullman (*1980*): Orthogonal polynomial associated with an infinite interval. Michigan Math. J., 27, pp. 353-363.

38.- W. Van Assche (*1985*): Weighted zero distribution for polynomial orthogonal on an infinite interval. SIAM J. Math. Anal. 16, 1317-1334.

39- J.L. Walsh (*1969*): Interpolation and Approximation by Rational Function in the Complex Domain. Amer. Math. Soc., V. 20.Providence, Rhode Island, 3era ed..